BÀI TẬP GIẢI TÍCH III

I. CHUỖI

1. Tính tổng của chuỗi số sau:

a) $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$

b) $\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\cdots$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

d) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sin(n+1)-\sin n)$

e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}.3^n}{10^{n+1}}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{9}{10^n}-\frac{2}{5^n}\right)$

g) $\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{1+n+n^2}$

h) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-1}$

2. Xét sự hội tụ, phân kỳ của các chuỗi số sau:

a) Tiêu chuẩn phân kỳ

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{n+1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{1}{n^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cos\frac{1}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{6n-1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n$$

b) Tiêu chuẩn so sánh

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+n+1}}{n^2.\sqrt{n}+2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}}{n^2+1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)\sqrt{n}}{n^2+2n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(2n+1)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4+\cos n}{n^2(1+e^{-n})}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\arctan(2^{-n}) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n^3} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\left(1-\cos\frac{2}{n}\right) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[n]{e}-1}{\sqrt{n}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

c) Tiêu chuẩn D'Alembert

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2019^n}{n!} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\frac{(2n+1)!}{n^2-1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^{n^2}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n+1)!} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{4^n.n!} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n.n!}{n^n}$$

d) Tiêu chuẩn Cauchy

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+2}{3n+3}\right)^{n^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n^2}}{(n+1)^{n^2}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n-2}{n}\right)^{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+2}\right)^{n^2-1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^3}$$

e) Tiêu chuẩn tích phân

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n} \qquad \sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\,.\ln(\ln n)} \qquad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n!}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$$

f) Chuỗi có dấu thay đổi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{\sqrt{n^3+1}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n^2}\cos n}{\sqrt{(n+1)^3}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n+\cos n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n.\cos(n\pi)}{2n^2+1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(n-1)}{n^2+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^3}{2^n-1} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n^3}{(n^2+1)^{4/3}} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$$

g) Bài tập tổng hợp

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{(n^2+2)\ln(n+3)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n n!}{n^n} \qquad \sum_{n=2}^{\infty}\left(e^{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}-1\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2-n^2.3^{-n}}{n^2} \qquad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos n}{n\ln^2 n} \qquad \sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n+\cos n}{n\ln^2 n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{3^n+4^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{1}{n+1}-\cos\frac{1}{n}\right) \qquad \sum_{n=2}^{\infty}\left(n^{\frac{1}{n^2+1}}-1\right)$$

3. Tìm miền hội tụ của các chuỗi hàm số sau:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^{-x}}\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^n+1}\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{x^{2n}+1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^x}\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{e^{nx}}\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(x+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n}\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n\sqrt{n}}\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n^3+1}}{(x^2+1)n^x}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{nx}}{n^2+n+1}\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2n\sqrt{n}+1}\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n+1}(x-2)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{1+n^3}x^n\qquad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1+n}{n(n-1)}\left(\frac{2x+1}{1-x}\right)^n\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\left(\frac{x+1}{1-x}\right)^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(2n+1)!}\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{\sqrt{n^3+1}}(2x+1)^n\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n+3^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^3}{(3n)!}x^n\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n^2}}{n^3}$$

4.1. Xét sự hội tụ đều của các chuỗi hàm số sau trên các tập tương ứng:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{2x^2+n^2}\ \text{trên } \mathbb{R}.\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}+1}{n^2}\ \text{trên } [0,\infty)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^n\ \text{trên } [-1,1]\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{1+n^4x^2}\ \text{trên } [0,\infty)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{[1+(n-1)x][1+nx]}\ \text{trên } (0,1]\qquad \sum_{n=1}^{\infty}(1-x)x^n\ \text{trên } (0,1]$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{x^2+n+2}\ \text{trên } \mathbb{R}.$$

4.2. Cho hàm $F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$, CMR

a) $F(x)$ liên tục với mọi x. b) $\lim\limits_{x\to 0}F(x)=0$. c) $F'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$.

4.3. CMR: $\int_0^{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1.3}+\frac{\cos 4x}{3.5}+\frac{\cos 6x}{5.7}+\cdots\right)dx=0.$

4.4. CMR: $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{dx}{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}=1-e^{-1}.$

5. Tính tổng của các chuỗi số, chuỗi hàm số sau:

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n, x\in(-1,1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}, x\in(-1,1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(n^2+n)x^{n+1}, x\in(-1,1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}, x\in(-1,1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-2}}{4n-3}, x\in(-1,1) \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n+1}}{n+1}, x\in(-1,1)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\pi^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1).2^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{3^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{8^n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)!!}$$

Bài tập trang 24 sách giáo trình (hướng dẫn).

6. Khai triển các hàm số sau thành chuỗi Maclaurin:

$$f(x)=\sin^2 x\cos^2 x \qquad f(x)=\sin x\sin 3x \qquad f(x)=x+x\cos x$$

$$f(x)=\frac{1}{x^2-3x+2} \qquad f(x)=\frac{2x-1}{x^2+2x-3} \qquad f(x)=\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$f(x)=\ln(1+2x) \qquad f(x)=x\ln(x+2) \qquad f(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$$

$$f(x)=\frac{1}{x^2+x+1} \qquad f(x)=\frac{1+x}{(x-1)^2} \qquad f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$$

7. Khai triển các hàm số sau thành chuỗi Taylor trong lân cận điểm x_0 tương ứng:

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x+2}, x_0=1 \qquad f(x)=\frac{1}{x^2+2x-3}, x_0=2$$

$$f(x)=\sin\frac{\pi x}{3}, x_0=1 \qquad f(x)=\sqrt{x}, x_0=4$$

8.1. Vẽ đồ thị các hàm số sau, tìm khai triển Fourier của các hàm số đó. Tại những điểm không liên tục của các hàm số đó,chuỗi Fourier hội tụ về giá trị nào?

$$f(x)=\begin{cases}4, 0<x<2,\\ -4, 2<x<4,\end{cases} T=4. \qquad f(x)=\begin{cases}-x, -4\le x\le 0,\\ x, 0\le x\le 4,\end{cases} T=8.$$

$$f(x)=\begin{cases}1, -\pi\le x<0,\\ -1, 0\le x<\pi,\end{cases} \text{tuần hoàn } T=2\pi. \qquad f(x)=\begin{cases}2x, 0\le x<3,\\ 0, -3<x<0,\end{cases} T=6.$$

$$f(x)=\begin{cases}2-x, 0<x<4,\\ x-6, 4<x<8,\end{cases} T=8. \qquad f(x)=2x, 0<x<10\ T=10.$$

8.2. Khai triển các hàm số sau thành chuỗi Fourier:

$f(x)$ lẻ, tuần hoàn $T=2\pi$, $f(x)=x$, $x\in[0,\pi]$.

$f(x)$ chẵn, tuần hoàn $T=4$, $f(x)=2-x$, $x\in(0,2)$

$f(x) = x + 1, 0 \le x < \pi$, theo hàm cosin. $f(x) = x - 1, 0 < x < \pi$, theo hàm sin.
$f(x) = |x|, x \in [-\pi, \pi]$ $f(x) = x(\pi - x), x \in (0, \pi)$

II. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

9. Giải các phương trình vi phân sau:

a) Phương trình phân ly biến số

$1 + x + xy'y = 0$

$y' = y^2 - 4y + 13$

$x \ln^2 x \, dy - y \ln^2 y \, dx = 0$

$$y' = \frac{3x^2 - 1}{3 + 2y}$$

$y' = \cos^2 x . \cos^2 2y$

$xdx + ye^{-x}dy = 0, y(0) = 1$

$y^2\sqrt{1 - x^2}dy = \arcsin x \, dx, y(0) = 0$

$$y' = \frac{2x}{y + x^2y}, y(0) = -2$$

b) Phương trình đẳng cấp

$xy' = y + e^{\frac{y}{x}}$

$xy' = y + 2x^3 \sin^2 \frac{y}{x}$

$(x + 2y)dx - xdy = 0$

$(2x - y + 4)dx + (x + 2y - 3)dy = 0$

$xy' = y + 2x^3 \sin^2 \frac{y}{x}$

$2y' + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = -1$

$y' = \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x} + 1, y(1) = 2$

c) Phương trình tuyến tính

$$y' + \frac{2xy}{x^2 + 1} = \frac{e^x}{x^2 + 1}$$

$y' + y \sin x = \sin x \, , y(0) = 0$

$$y' - \frac{3}{x}y = 2x^2, y(1) = 2$$

$xy' - y = x^2 \cos x \, , y(\pi) = \pi$

d) Phương trình Bernoulli

$x^2y' + 2xy = y^3$

$$y' + \frac{2y}{x} = 2x^3y^4, y(1) = 1$$

$$y' + xy = \frac{x}{y}$$

e) Phương trình vi phân toàn phần

$(x^{2017} + y)dx + (x + y^{2017})dy = 0$

$$(3x^2y^2+2y+1)dx+2(x+x^3y)dy=0$$
$$\frac{y}{x}dx+(y\sin y+\ln x)dy=0$$
$$\left(x^2+\frac{2}{x}+2y\right)dx+\left(2x+y^2+\frac{1}{y}\right)dy=0$$

Tìm m để phương trình sau là PT vi phân toàn phần và giải phương trình với m vừa tìm được $(1+y^2\sin 2x)dx+my\cos^2 x\,dy=0$.

f) Thừa số tích phân

$$(8y^2x-y)dx+xdy=0, y(1)=1$$

Tìm thừa số tích phân $h(x)$ để phương trình sau là pt vi phân toàn phần, giải phương trình với $h(x)$ vừa tìm được $\left(\frac{y}{x}-1\right)dx+\left(\frac{y}{x}+1\right)dy=0$.

Tìm thừa số tích phân $h(x)$ để phương trình sau là pt vi phân toàn phần, giải phương trình với $h(x)$ vừa tìm được $(y+\cos y)dx+(1-\sin y)dy=0$.

Tìm thừa số tích phân $h(y)$ để phương trình sau là pt vi phân toàn phần, giải phương trình với $h(y)$ vừa tìm được $(2xy^2-y)dx+(y^2+x+y)dy=0, y>0$.

Tìm một giá trị α để hàm số $ye^{\alpha x}$ là thừa số tích phân của pt số tích phân của pt

$$\left(\frac{\sin y}{y}-2e^{-x}\sin x\right)dx+\left(\frac{\cos y+2e^{-x}\cos x}{y}\right)dy=0.$$

Giải phương trình vi phân đó.

g) Bài tập tổng hợp

$$\frac{y}{x}dx+(y^3+\ln x)dy=0$$
$$ydx-\frac{3+2xy}{y}dy=0$$
$$y'+(x-y+1)\text{^}2=0, y(0)=0$$

$$y'=(2x+y)^2$$
$$ydx-(8x^2y+x)dy=0, y(1)=1$$

Giải PTVP $y' = y^2 - \frac{2}{x^2}$ bằng cách đổi ẩn hàm $y = \frac{z}{x}$.

Giải PTVP $xy' - (2x + 1)y + y^2 + x^2 = 0$ bằng cách đổi ẩn hàm $y = z + x$.

10. Giải các phương trình vi phân sau:

a) Phương trình tuyến tính thuần nhất hệ số hàm

$(x - 1)^2 y'' + 4(x - 1)y' + 2y = 0$, biết một nghiệm riêng $y_1 = \frac{1}{1-x}$.

$xy'' + 2y' + xy = 0$, biết một nghiệm riêng $y_1 = \frac{\sin x}{x}$.

b) Phương trình tuyến tính không thuần nhất

$$y'' - 4y' + 5y = \frac{e^{2x}}{\sin x}$$

c) Phương trình tuyến tính hệ số hằng, vế phải đặc biệt

$$y'' + 3y' + 2y = e^x \cos 2x$$

$$y'' - 2y' - 3y = -14 \cos x - 8 \sin x$$

$$y'' + y' = \sin x + 1$$

$$y'' - 3y' + 2y = (5 - 8x)e^x$$

$$y'' + 2y' + 5y = 10 \cos x$$

d) Phương trình Euler

$$x^2 y'' + 3xy' - 4y = x^2$$

e) Bài tập tổng hợp

Giải PTVP $(1-x^2)y''-xy'+4y=0$ bằng cách đổi biến $x=\cos t\,, t\in(0,\pi)$.

Giải PT $(x+1)y''-(2x+3)y'+(x+2)y=0$.

11. Giải các hệ phương trình vi phân sau:

$$\begin{cases} x'(t)=x-3y \\ y'(t)=3x+y \end{cases} \qquad \begin{cases} y'=y+z+e^x \\ z'=y-z \end{cases}$$

III. PHƯƠNG PHÁP TOÁN TỬ LAPLACE

12. Sử dụng định nghĩa, tìm biến đổi Laplace của các hàm số sau:

$f(t)=t$ $\qquad f(x)=\sinh 2t$ $\qquad f(x)=e^{3t}$

13. Tìm biến đổi Laplace của các hàm số sau:

a) Tính chất tuyến tính

$f(t)=\sqrt{t}+3t$ $\qquad f(t)=(t-1)^2$ $\qquad f(t)=t^4+3t^3-t^2$

$f(t)=\sin 2t-u(t-2)$ $\qquad f(t)=u(t-1)-3e^{-t}$ $\qquad f(t)=\cos 3t-2\sin 5t$

$f(t)=\sin 3t\cos 5t$ $\qquad f(t)=\sin^2 3t$ $\qquad f(t)=2e^{-3t}-\cos^3 2t$

$f(t)=(\sin t+2\cos 3t)^2$ $\qquad f(t)=\cos\left(2t-\frac{\pi}{4}\right)$ $\qquad f(t)=(2-\cos t)^2$

b) Tịnh tiến trong miền *s*

$f(t)=e^{-2t}\sin 3t$ $\qquad f(t)=t^2e^{-t}$ $\qquad f(t)=(2e^{2t}+t)^2$

$f(t)=(e^{-t}-2\sin t)^2$ $\qquad f(t)=e^t\cos\left(2t+\frac{\pi}{4}\right)$ $\qquad f(t)=e^{3t}\sinh 5t$

c) Đạo hàm trong miền *s*

$f(t)=t\sinh 3t$ $\qquad f(t)=t\cos^2 3t$ $\qquad f(t)=(t-\cos 2t)^2$

$f(t)=te^{-t}\sin 2t$ $\qquad f(t)=t^2\sin t$ $\qquad f(t)=t\,u(t-2)$

d) Tịnh tiến trong miền t

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < 2, \\ e^{-\pi t}, & 2 \le t \le 4, \\ 0, & t > 4. \end{cases} \qquad f(t) = -t^2 u(t-2) + \sin t\,.\,u(t-\pi)$$

14. Tìm biến đổi Laplace ngược của các hàm số sau:

a) Tính chất tuyến tính

$$F(s) = \frac{1-2s}{s^2+9} \qquad F(s) = \frac{(2+s)^3}{s^4} \qquad F(s) = \frac{3s+5}{s^2+3s+2}$$

$$F(s) = \frac{s^2-s+1}{s(s^2-1)} \qquad F(s) = \frac{3s+2}{s^2(s+2)} \qquad F(s) = \frac{s+2}{(s^2+1)(s^2+9)}$$

$$F(s) = \frac{2s-3}{s(s^2+1)} \qquad F(s) = \frac{2e^{-3s}+5e^{-2s}}{s} \qquad F(s) = \frac{s^2-1}{s(s^2+4)}$$

b)

$$\frac{e^{-2s}}{s^2-2s+5} \qquad \frac{e^{-\pi s}}{s^2+4s+5} \qquad f(x) =$$

$$\frac{1}{(s^2-2s+2)^2}$$

15. Giải các phương trình, hệ phương trình vi phân sau với các điều kiện ban đầu:

a) Phương trình, hệ phương trình với hệ số hằng:

$y'' - y' = \sin 2t\,, y(0) = y'(0) = -1.$

$y'' + 3y' + 2y = t, y(0) = 0, y'(0) = 2.$

$y^3 - 2y'' + y' = 4, y(0) = 1, y'(0) = 2, y''(0) = -2.$

$y^{(3)} - 2y' + 4y = e^t, y(0) = y'(0) = y''(0) = 0.$

$y^{(4)} + 3y'' - 4y = 0, y(0) = y'(0) = y''(0) = 0, y'''(0) = 10.$

$y^{(4)} + 3y'' + 2y = t, y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0.$

b) Phương trình với hệ số hàm

$$ty'' + (t-3)y' + y = 0, y(0) = 0.$$

$$ty'' + 3(t-1)y' + 3y = 0, y(0) = 0.$$

$$ty'' - ty' + y = 2, y(0) = 2, y'(0) = -4$$

Tìm một nghiệm không tầm thường của PTVP sau bằng phương pháp biến đổi Laplace $ty'' + (1-t)y' + y = 0.$

c) Phương trình với vế phải không liên tục

$y'' + y = u(t-3\pi), y(0) = 1,$
$y'(0) = 0$

$y'' + 3y' + 2y = u(t-2), y(0) = 0,$
$y'(0) = 1$

$y'' + 4y = u(t-\pi) - u(t-3\pi),$
$y(0) = y'(0) = 0$

$y'' + 9y = t - u(t-\pi)(t-\pi),$
$y(0) = y'(0) = 0$

$y'' + 4y = \begin{cases} 3\sin t, & 0 < t < \pi, \\ 0, & t > \pi \end{cases}$
$y(0) = y'(0) = 0$

$y'' + 9y = \begin{cases} 0, & 0 < t < \pi, \\ t, & t > \pi \end{cases}$
$y(0) = y'(0) = 0$

$y'' + 3y' + 2y = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 10, \\ 0, & t \ge 10, \end{cases}$
$y(0) = y'(0) = 0$

$y'' + 2y' + 2y = \begin{cases} 1, & \pi \le t < 2\pi, \\ 0, & 0 \le t < \pi \text{ và } t \ge 2\pi, \end{cases}$
$y(0) = y'(0) = 0$