CHƯƠNG 1

TÍNH CHẤT GIỚI HẠN

1.1. Giới hạn

Tính

$$I = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

B1: Thay x_0 vào $f(x)$

• Nếu $f(x_0)$ xác định, thì $I = f(x_0)$.

Ví dụ: $I = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x+5}{3x^2+2} = \dfrac{2.1+5}{3.1^2+2} = \dfrac{7}{5}$.

• $f(x_0)$ không xác định, có các dạng như sau:

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0.\infty, \infty - \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0, 0^\infty, \infty^\infty.$$

B2. Khử các dạng vô định.

Ví dụ 1.1.1. Tính

$$I = \lim_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x^2-3x+2} \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2+x+1}{x-2} = -3.$$

Ví dụ 1.1.2. $I = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3} \left(\dfrac{0}{0}\right) =?$

1.2. Giới hạn tổng, hiệu, tích, thương

Cho $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \neq \infty$ và $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B \neq \infty$. Khi đó,

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\Big(f(x)\pm g(x)\Big)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$. Do đó,

$$\lim_{x\to x_0}\Big(C\pm g(x)\Big)=C\pm\lim_{x\to x_0}g(x).$$

2) $\lim\limits_{x\to x_0}\Big(f(x)g(x)\Big)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$. Suy ra

$$\lim_{x\to x_0}\Big(Cg(x)\Big)=C\lim_{x\to x_0}g(x).$$

3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}$ $(g(x)\neq 0,\ B\neq 0)$. Suy ra

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}.$$

1.3. Giới hạn kẹp

Giả sử rằng

$$g(x)\leq f(x)\leq h(x) \text{ với mọi } x\in(a,b)\setminus\{x_0\}$$

và $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$. Khi đó, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

Ví dụ 1.3.1.

$$I=\lim_{x\to 0}x^2\sin\frac{1}{x^3}$$

Bài giải. Ta có

$$-x^2\leq x^2\sin\frac{1}{x^3}\leq x^2.$$

$$\lim_{x\to 0}-x^2=\lim_{x\to 0}x^2=0.$$

Do đó, $I=0$.

1.4. Quy tắc L'Hospital

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}\left(\frac{0}{0};\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

1.5. Một số công thức

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{1}=1;$

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1/\cos^2 x}{1}=1;$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1/\sqrt{1-x^2}}{1}=1;$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1/(1+x^2)}{1}=1;$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos ax}{x^2}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\sin ax}{2x}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^2\cos ax}{2}=\dfrac{a^2}{2};$

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x\ln a}{1}=\ln a\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x}{1}=1;$

7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1/(1+x)}{1}=1;$

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(1+x)^{\alpha-1}}{1}=\alpha;$

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}\left(\dfrac{0}{0}\right)=\dfrac{1}{n}.$

1.6. Vô cùng bé tương đương

$y = f(x)$ được gọi là VCB khi $x \to x_0$ nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

Cho $f(x)$ và $g(x)$ là hai vô cùng bé khi $x \to x_0$. Khi đó,

1) Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} \left(\dfrac{0}{0}\right) = 0$, thì ta nói $f(x)$ là vô cùng bé bậc cao hơn $g(x)$. Ký hiệu $f(x) = o(g(x))$.

2) Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} \left(\dfrac{0}{0}\right) = C \notin \{0, \infty\}$, thì ta nói $f(x)$ và $g(x)$ là hai vô cùng bé *cùng bậc*.

Đặc biệt, nếu $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$, thì $f(x)$ và $g(x)$ được gọi là hai vô cùng bé *tương đương*. Ký hiệu $f(x) \sim g(x)$, $x \to x_0$.

1.7. Một số VCB tương đương

1) $\sin x \sim x, x \to 0;$

2) $\tan x \sim x, x \to 0;$

3) $\arcsin x \sim x, x \to 0;$

4) $\arctan x \sim x, x \to 0;$

5) $1 - \cos ax \sim \dfrac{a^2}{2}x^2, x \to 0;$

6) $a^x - 1 \sim x \ln a, x \to 0; \quad e^x - 1 \sim x, x \to 0;$

7) $\ln(1+x) \sim x, x \to 0;$

8) $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x, x \to 0;$

9) $\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \dfrac{x}{n}, x \to 0.$

1.8. Vận dụng VCB tương đương

Giả sử $f(x) \sim f_1(x)$, $g(x) \sim g_1(x)$, $x \to x_0$. Khi đó,

1) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f_1(x)}{g_1(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f_1(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g_1(x)}.$

2) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} [f_1(x)g_1(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} [f_1(x)g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} [f(x)g_1(x)].$

Bài giải. Ta có

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \left[\frac{\frac{f(x)}{f_1(x)}}{\frac{g(x)}{g_1(x)}} . \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \right] = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{f_1(x)}}{\lim\limits_{x\to x_0} \frac{g(x)}{g_1(x)}} \lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

Ví dụ 1.8.1. Giả sử $f(x) \sim f_1(x)$, $g(x) \sim g_1(x)$, $h(x) \sim h_1(x)$, $x \to x_0$. Khi đó,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{(f+g)fh}{g(g+h)} = \lim_{x\to x_0} \frac{(f+g)f_1h_1}{g_1(g+h)}.$$

Ví dụ 1.8.2. Tính $I = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3} \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{0}{x^3} = 0??.$

Bài giải.

Ví dụ 1.8.3. Tính $I = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x - x}{x^3} \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - x}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{0}{x^3} = 0??.$

Bài giải. Ta có

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x^3} \left(\frac{0}{0}\right) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{(1+\tan^2 x) - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\tan^2 x}{3x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\tan x \tan x}{3x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Ví dụ 1.8.4. Tính $I = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \arctan x}{x^3}.$

Bài giải. Ta có

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to 0} \frac{x - \arctan x}{x^3} \left(\frac{0}{0}\right) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \dfrac{1}{1+x^2}}{3x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{3x^2(1+x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{3(1+x^2)} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Ví dụ 1.8.5. Tính $I = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x - x}{x^3}.$

Bài giải. Ta có

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x - x}{x^3} \left(\frac{0}{0}\right) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1}{3x^2} \\
&= -\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+(-x^2)} - 1}{3x^2\sqrt{1-x^2}} \\
&= -\lim_{x\to 0} \frac{-x^2/2}{3x^2\sqrt{1-x^2}} \\
&= -\lim_{x\to 0} \frac{-1/2}{3\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Ví dụ 1.8.6. Tính $I = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \ln(1+x)}{x^2}$.

Bài giải. Ta có

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \left(\frac{0}{0}\right) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \dfrac{1}{x+1}}{2x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Ví dụ 1.8.7. Tính $I = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x - \arctan x}{x^3}$.

Bài giải. Ta có

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x-\arctan x}{x^3}\left(\frac{0}{0}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}-\dfrac{1}{1+x^2}}{3x^2}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1+x^2-\sqrt{1-x^2}}{3x^2(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{3(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2-\sqrt{1-x^2}}{x^2}\\
&= \frac{1}{3}\left[\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}-\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x^2}\right]\\
&= \frac{1}{3}\left[1-\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-x^2}{2}}{x^2}\right]=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Ví dụ 1.8.8.

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}\cos 2x-\sqrt{\cos 4x}}{x\ln(1-x)}\left(\frac{0}{0}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}\cos 2x-\sqrt{\cos 4x}}{x\ln[1+(-x)]}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(e^{x^2}-1)\cos 2x+(\cos 2x-1)+(1-\sqrt{\cos 4x})}{-x^2}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(e^{x^2}-1)\cos 2x}{-x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+(-2\sin^2 2x)}-1}{x^2}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos 2x}{-x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2^2}{2}x^2}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-2\sin^2 2x}{2}}{x^2}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x}{-1}+2+\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-2.4x^2}{2}}{x^2}\\
&= -1+2-4=-3.
\end{aligned}
$$

Ví dụ 1.8.9.

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to 0}(e^{\arcsin^2 x} + \sin^2 x)^{1/x\sin x}(1^\infty)\\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln[1+(e^{\arcsin^2 x}+\sin^2 x-1)]}{x\sin x}}\\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\arcsin^2 x}+\sin^2 x-1}{x^2}}\\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\arcsin^2 x}-1}{x^2}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}}\\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\arcsin^2 x}-1}{\arcsin^2 x}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}}\\
&= e^2.\\
(&= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin^2 x}{x^2}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}}\\
&= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}+\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}})
\end{aligned}$$

Ví dụ 1.8.10. Tính $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^2 x - \arctan^2 x}{x^4}$.

Bài giải. Ta có

$$\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin^2 x - \arctan^2 x}{x^4}\left(\frac{0}{0}\right)\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x - \arctan x}{x^3}\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x + \arctan x}{x}\\
&= \frac{1}{2}\left[\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} + \lim_{x\to 0}\frac{\arctan x}{x}\right]\\
&= \frac{1}{2}2 = 1.
\end{aligned}$$

Ví dụ 1.8.11. Tính $I = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{\cos x}{\sin^2 x}\right)$.

Bài giải. Ta có

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x - x^2\cos x}{x^2\sin^2 x}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x + x^2(1-\cos x) - x^2}{x^4}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{(\sin^2 x - x^2) + x^2(1-\cos x)}{x^4}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x - x^2}{x^4} + \lim_{x\to 0}\frac{x^2(1-\cos x)}{x^4}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3}\left(\frac{0}{0}\right)\lim_{x\to 0}\frac{\sin x + x}{x}\left(\frac{0}{0}\right) + \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{3x^2}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x + 1}{1} + \frac{1}{2}\\
&= -\frac{1}{6}.2 + \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.
\end{aligned}
$$

1.9. Giới hạn vô định dạng: $1^\infty, 0^0, \infty^\infty, \infty^0, 0^\infty$

$$I = \lim_{x\to x_0} u^v = \lim_{x\to x_0} e^{\ln u^v} = \lim_{x\to x_0} e^{v\ln u} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} v\ln u}.$$

Cách giải chung:

$I = \lim\limits_{x\to x_0} u^v = e^{\lim\limits_{x\to x_0} v\ln u} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\ln u}{1/v}}$, sau đó dùng L'Hospital

Riêng 1^∞:

$$I = \lim_{x\to x_0} u^v (1^\infty) = e^{\lim\limits_{x\to x_0} v\ln u} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} v\ln[1+(u-1)]} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} v(u-1)}$$

Ví dụ 1.9.1. Tính $I = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{\arcsin^2 x}}$.

Bài giải. Ta có

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{\arcsin^2 x}} (1^\infty) \\ &= e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\arcsin^2 x}\ln\frac{\sin x}{x}} \\ &= e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\arcsin^2 x}\ln\left[1+\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)\right]} \\ &= e^{\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2}\left[\frac{\sin x}{x}-1\right]} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3}}. \end{aligned}$$

Ví dụ 1.9.2. Tính $I = \lim\limits_{x\to 0^+} x^x$.

Bài giải. Ta có

$$\begin{aligned} I = \lim_{x\to 0^+} x^x (0^0) &= e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{1/x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)} \\ &= e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2}} = e^{-\lim\limits_{x\to 0^+} x} = e^0 = 1. \end{aligned}$$

Ví dụ 1.9.3. Tính $I = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arctan^2 x}{\arcsin x^2}\right)^{\frac{1}{x\ln(1-\tan x)}}$.

Bài giải.

$$
\begin{aligned}
I &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\arctan^2 x}{\arcsin x^2}\right)^{\frac{1}{x\ln(1-\tan x)}} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{x\ln(1-\tan x)}\ln\left[1+\left(\frac{\arctan^2 x}{\arcsin x^2}-1\right)\right] \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{1}{-x\tan x}\left(\frac{\arctan^2 x-\arcsin x^2}{\arcsin x^2}\right)
\end{aligned}
$$

CHƯƠNG 2

CHUỖI SỐ

2.1. Chuỗi số

Định nghĩa 2.1.1. Cho dãy số thực $\{a_n\} \subset \mathbb{R}$. Ta đặt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \dots \tag{2.1}$$

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Khi đó,

1) (2.1) được gọi là một *chuỗi số* ;

2) $a_1, \dots, a_n, \dots$ được gọi là *các số hạng* của (2.1);

3) a_n được gọi là *số hạng tổng quát* của (2.1);

4) s_n được gọi là *tổng riêng thứ n* của chuỗi (2.1);

5) Nếu tồn tại $s = \lim_{n\to\infty} s_n$, thì

- ◦ Chuỗi (2.1) được gọi là **hội tụ**;
- ◦ S được gọi là **tổng** của chuỗi (2.1);
- ◦ Ta viết $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

6) Nếu chuỗi không hội tụ, thì được gọi là **phân kỳ**.

7) Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ hội tụ, thì ta nói chuỗi (2.1) là **hội tụ tuyệt đối**.

Tính chất 2.1.2. *1) Nếu chuỗi* (2.1) *hội tụ, thì* $a_n \to 0$. *Do đó:*

Nếu $a_n \not\to 0$, *thì chuỗi phân kỳ.*

2) Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *và* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *là hai chuỗi hội tụ, thì*

∘ $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$;

∘ $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n) = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

3) Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *hội tụ, thì chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *cũng hội tụ.*

2.2. Chuỗi số dương

Chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ thỏa mãn điều kiện $a_n > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$ được gọi là ***chuỗi số dương***.

2.3. Tiêu chuẩn hội tụ của chuỗi số dương (5 tiêu chuẩn)

1. Tiêu chuẩn D'Alembert: Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Ta đặt

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Khi đó,

∘ Nếu $D < 1$, thì chuỗi hội tụ;

∘ Nếu $D > 1$, thì chuỗi phân kỳ.

Ví dụ 2.3.1. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

Bài giải. Ta có

$$a_n = \frac{1}{n!} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}.$$

$$D = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Theo tiêu chuẩn D'Alembert ta suy ra chuỗi đã cho là hội tụ.

2. Tiêu chuẩn Cauchy: Cho chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Ta đặt

$$C = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

Khi đó,

- ○ Nếu $C < 1$, thì chuỗi hội tụ;
- ○ Nếu $C > 1$, thì chuỗi phân kỳ.

Ví dụ 2.3.2. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2+3n+2}{n^2+4n+1}\right)^n$.

Bài giải. Ta có $a_n = \left(\frac{3n^2+3n+2}{n^2+4n+1}\right)^n$

$$C = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+3n+2}{n^2+4n+1} = 3 > 1.$$

Theo tiêu chuẩn Cauchy ta suy ra chuỗi đã cho là phân kỳ.

3. Tiêu chuẩn tích phân: Cho $y = f(x)$ là hàm số liên tục, dương, giảm trên $[1, +\infty)$ và

$$a_n = f(n) \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^*.$$

Khi đó, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ và tích phân suy rộng $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

Ví dụ 2.3.3 (Bài toán cơ bản)**.** Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

Bài giải. Ta có

- Nếu $\alpha < 0$, thì $a_n = n^{-\alpha}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$, kéo theo $a_n \to \infty$. Do đó,

$a_n \not\to 0$, kéo theo chuỗi đã cho phân kỳ.

- Nếu $\alpha = 0$, thì $a_n = 1$ với mọi $n \in \mathbb{N}$, kéo theo $a_n \to 1$. Do đó, $a_n \not\to 0$, kéo theo chuỗi phân kỳ.
- Nếu $\alpha > 0$, thì ta xét $y = f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$. Khi đó, $f(x)$ là hàm liên tục, dương, giảm trên $[1, +\infty)$ và

$$a_n = f(n) \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^*.$$

Theo tiêu chuẩn tích phân, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$ và tích phân suy rộng $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{1}{x^\alpha} dx$ cùng hội tụ hoặc cùng phần kỳ.

Kết luận:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} - \begin{cases} \text{HT - nếu } \alpha > 1 \\ \text{PK - nếu } \alpha \leq 1. \end{cases} \tag{2.2}$$

4. Tiêu chuẩn so sánh 1: Cho hai chuỗi số dương $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. Khi đó, nếu tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}^*$ sao cho

$$0 \leq a_n \leq b_n \text{ với mọi } n \geq n_0,$$

thì ta có

- ◦ Nếu chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ, thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ phân kỳ;
- ◦ Nếu chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ, thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ.

Ví dụ 2.3.4. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin^2 nx}{n^2}$.

Bài giải. Ta có

- $0 \leq \dfrac{\sin^2 nx}{n^2} \leq \dfrac{1}{n^2}$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ ($\alpha = 2 > 1$).

Theo tiêu chuẩn so sánh 1 ta suy ra chuỗi đã cho hội tụ.

5. Tiêu chuẩn so sánh 2: Cho hai chuỗi số dương $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Ta đặt

$$k = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \in [0, +\infty].$$

Khi đó,

- Nếu $k \in (0, +\infty)$, thì hai chuỗi cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ;
- Nếu $k = 0$ và chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ, thì chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ;
- Nếu $k = +\infty$ và chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ phân kỳ, thì chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ.

Ví dụ 2.3.5. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 nx}{n^2}$.

Bài giải. Ta đặt

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{\sin^2 nx}{n^2} \\ b_n = \dfrac{1}{n^{3/2}}. \end{cases}$$

Khi đó,

1) $a_n, b_n > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$;

2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin^2 nx}{\sqrt{n}} = 0$;

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ (do $\alpha = 3/2 > 1$).

Theo tiêu chuẩn so sánh 2 ta suy ra chuỗi đã cho hội tụ.

Ví dụ 2.3.6. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arcsin \frac{1}{n^2}}{n}$.

Bài giải. Ta đặt

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{\arcsin \frac{1}{n^2}}{n} \\ b_n = \dfrac{1}{n^2}. \end{cases}$$

Ta có

1) $a_n, b_n > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$;

2) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} n \arcsin \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} n \frac{1}{n^2} = 0$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ hội tụ (do $\alpha = 2 > 1$).

Theo tiêu chuẩn so sánh 2 ta suy ra chuỗi đã cho hội tụ.

Lưu ý: Trong trường hợp $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$, khi đó $a_n \sim b_n$, $n \to \infty$. Như vậy,

Nếu $a_n \sim b_n$, $n \to \infty$, thì $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ cùng HT hoặc cùng PK.

Giải ví dụ trên theo cách khác:

Ta có

- $\frac{\arcsin \frac{1}{n^2}}{n} \sim \frac{1}{n^3}$, $n \to \infty$.
- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ hội tụ (do $\alpha = 3 > 1$).

Theo tiêu chuẩn so sánh 2 ta suy ra chuỗi đã cho hội tụ.

2.4. Chuỗi số đan dấu

Định nghĩa 2.4.1. Chuỗi có một trong hai dạng sau được gọi là *chuỗi đan dấu* với $u_n > 0$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n = u_1 - u_2 + u_3 - \cdots + (-1)^{n+1}u_n + \ldots;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}u_n = -u_1 + u_2 - u_3 + \cdots + (-1)^{n}u_n + \ldots.$$

Các tiêu chuẩn hội tụ:

1. Nếu $a_n \not\to 0$, thì chuỗi phân kỳ.
2. Nếu $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ hội tụ, thì chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ hội tụ (HTTĐ là HT).
3. Tiêu chuẩn Leibnitz:

Nếu chuỗi đan dấu thỏa mãn:

- $\{u_n\}$ là dãy giảm trên $[n_0, +\infty)$;
- $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$,

thì chuỗi đã cho hội tụ.

Ví dụ 2.4.2. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

Bài giải. Cách 1: Ta có

- $u_n = \dfrac{1}{n^2}$ nên $\{u_n\}$ là dãy giảm.
- $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2} = 0$.

Theo tiêu chuẩn Leibnitz ta suy ra chuỗi đã cho hội tụ.

Cách 2: Ta có $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ hội tụ. Do đó, chuỗi đã cho HTTĐ, nên nó HT.

Ví dụ 2.4.3. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$.

Bài giải. Cách 1: Ta có

- $u_n = \frac{1}{n}$ nên $\{u_n\}$ là dãy giảm.
- $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$

Theo tiêu chuẩn Leibnitz ta suy ra chuỗi đã cho hội tụ.

Cách 2: Ta có $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ phân kỳ. Do đó, chúng ta không giải được theo cách này.

Ví dụ 2.4.4. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+2}$.

Bài giải. Ta có

- $u_n = \frac{n}{n^2+2}$.

  Xét hàm $f(x) = \frac{x}{x^2+2}$, ta có

$$f'(x) = \frac{x^2+2-2x^2}{(x^2+2)^2} = \frac{2-x^2}{(x^2+2)^2} < 0 \text{ với mọi } x \geq 2.$$

Do đó, $f(x)$ nghịch biến, suy ra $\{u_n\}$ giảm trên $[2,+\infty)$.

- $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+2} = 0.$

Theo tiêu chuẩn Leibnitz ta suy ra chuỗi đã cho hội tụ.

Ví dụ 2.4.5. Khảo sát sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2}{n^2+2}$.

Bài giải. Ta có

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (-1)^n \frac{n^2}{n^2+2} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } n = 2k \\ -1 & \text{nếu } n = 2k+1 \end{cases}$$

Do đó, $\nexists \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Như vậy, $a_n \not\to 0$, chuỗi phân kỳ.

CHƯƠNG 3

MIỀN HỘI TỤ CỦA CHUỖI LŨY THỪA

A. Định nghĩa. Cho chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \ldots \tag{3.1}$$

Khi đó,

1) (3.1) được gọi là một *chuỗi lũy thừa*;

2) $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ được gọi là các *hệ số* của CLT (3.1);

3) Điểm x_0 được gọi là *điểm hội tụ* của CLT (3.1) nếu chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x_0^n$ hội tụ;

4) Tập tất cả các điểm hội tụ của CLT (3.1) được gọi là MHT của CLT (3.1).

Bài toán: Tìm MHT của chuỗi lũy thừa $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$.

Bước 1. Tìm bán kính hội tụ R của CLT:

Ta có $l = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \quad \left(= \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}\right)$. Khi đó,

$$R = \begin{cases} \dfrac{1}{l} & \text{nếu } l \in (0, +\infty) \\ 0 & \text{nếu } l = +\infty \\ +\infty & \text{nếu } l = 0. \end{cases}$$

Do đó, khoảng hội tụ của CLT là $(-R, R)$.

Bước 2. Xét tại $x = \pm R$, ta có:

Nếu CLT hội tụ tại $x = \pm R$, thì MHT là $[-R, R]$.

Nếu CLT phân kỳ tại $x = \pm R$, thì MHT là $(-R, R)$.

Nếu CLT PK tại $x = -R$, HT tại $x = R$, thì MHT là $(-R, R]$.

Nếu CLT HT tại $x = -R$, PK tại $x = R$, thì MHT là $[-R, R)$.

Ví dụ 3.0.1. Tìm MHT của CLT

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n}{n^3+1}x^n. \tag{3.2}$$

Bài giải.

- Tìm BKHT của (3.2):

Ta có $a_n = (-1)^n \dfrac{n}{n^3+1} \Rightarrow a_{n+1} = (-1)^{n+1}\dfrac{n+1}{(n+1)^3+1}$.

$$l = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1.$$

Suy ra $R = \dfrac{1}{l} = 1$. Do đó, KHT của (3.2) là $(-1, 1)$.

- Xét khi $x = -1$:

$$(3.2) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+1}. \tag{3.3}$$

Ta có

∘ $\dfrac{n}{n^3+1} \sim \dfrac{1}{n^2}, n \to \infty$;

∘ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ hội tụ.

Theo tiêu chuẩn so sánh 2 ta suy ra (3.3) hội tụ.

- Xét khi $x = 1$:

$$(3.2) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^3+1}. \tag{3.4}$$

Ta có $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{n}{n^3+1} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3+1}$ hội tụ. Do đó, (3.4) HTTĐ nên nó HT.

- Kết luận: MHT của (3.2) là $[-1, 1]$.

Ví dụ 3.0.2. Tìm MHT của CLT

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2+1} (x+1)^n. \tag{1}$$

Bài giải. Đặt $t = x + 1$, khi đó (1) trở thành:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2+1} t^n. \tag{2}$$

- Tìm BKHT của (2):

  Ta có $a_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2+1} \Rightarrow a_{n+1} = (-1)^{n+2} \frac{1}{(n+1)^2+1}$.

$$l = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1.$$

Suy ra $R = \frac{1}{l} = 1$. Do đó, KHT của (2) là $(-1, 1)$.

- Xét khi $t = -1$:

$$(2) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n+1} \frac{1}{n^2+1} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}. \tag{3}$$

Ta có

◦ $\frac{1}{n^2+1} \sim \frac{1}{n^2}, n \to \infty;$

○ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ.

Theo tiêu chuẩn so sánh 2 ta suy ra (3) hội tụ.

- Xét khi $t = 1$:

$$(2) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^3+1}. \qquad (4)$$

Ta có $\sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{n^2+1} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ hội tụ. Do đó, (4) HTTĐ nên nó HT.

- Kết luận: MHT của (2) là $-1 \leq t \leq 1$, suy ra $-2 \leq x \leq 0$.

CHƯƠNG 4

TÍNH TỔNG

4.1. Tính chất

Cho CLT $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ có BKHT là R. Khi đó,

1. Với mọi $x \in (-R, R)$ ta có

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n x^n)'.$$

2. Với mọi $a, x \in (-R, R)$, ta có

$$\int_a^x \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^x a_n x^n.$$

3. $\int_a^x A'(t)dt = A(t)\Big|_a^x = A(x) - A(a).$

4. $\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = \Big(F(x) - F(a)\Big)' = f(x).$

5. $\sum_{n=n_0}^{\infty} \alpha q^n \ (|q| < 1) = \alpha q^{n_0} + \alpha q^{n_0+1} + \cdots = \dfrac{\alpha q^{n_0}}{1-q}.$

4.2. Một số ví dụ

Ví dụ 4.2.1. Tính tổng

1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^n}{n};$

2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$;

3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$;

4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}nx^n$;

5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n$;

6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2-3n+2}$;

Bài giải. (1) Đặt $A(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}$. Khi đó, với mọi $x\in(-1,1)$, ta có

$$A'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^nx^{n-1}=-1+x-x^2+\cdots=\frac{-1}{1+x}.$$

Suy ra

$$A(x)-A(0)=\int_0^x A'(t)dt=-\int_0^x\frac{1}{1+t}=-\ln(1+x).$$

Bởi vì $A(0)=0$ nên ta suy ra $A(x)=-\ln(1+x)$.

(2) Đặt $A(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$. Khi đó, với mọi $x\in(-1,1)$, ta có

Cách 1:

$$\begin{aligned}\int_0^x A(t)dt&=\int_0^x\left(\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)t^n\right)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x(n+1)t^ndt\\&=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1}=x^2+x^3+\cdots=\frac{x^2}{1-x}.\end{aligned}$$

Suy ra

$$A(x) = \left(\int_0^x A(t)dt\right)'_x = \left(\frac{x^2}{1-x}\right)' = \frac{2x(1-x)+x^2}{(1-x)^2} = \frac{2x-x^2}{(1-x)^2}.$$

Cách 2: Ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} = x^2 + x^3 + \cdots = \frac{x^2}{1-x}.$$

Suy ra

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1}\right)' = \left(\frac{x^2}{1-x}\right)' = \frac{2x-x^2}{(1-x)^2}.$$

(3) Ta đặt $A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$. Khi đó,

- Nếu $x = 0$, thì $A(x) = 0$.
- Nếu $x \neq 0$, thì

$$A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x}\frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Đặt $B(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$, khi đó tính $B(x)$ như Bài 1, và $A(x) = \frac{1}{x}B(x)$.

(4) Ta đặt $A(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}nx^n = x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}nx^{n-1}$. Ta đặt

$$B(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}nx^{n-1}.$$

Khi đó, ta tính $B(x)$ như Bài 2 và $A(x) = xB(x)$.

(5) Ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n = x + x^2 + \cdots = \frac{x}{1-x}$$

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} x^n\right)' = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1-x+x}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = x\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{x}{(1-x)^2}$$

$$\Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} nx^n\right)' = \left(\frac{x}{(1-x)^2}\right)' = \frac{(1-x)^2+2(1-x)x}{(1-x)^4} = \frac{(1-x)+2x}{(1-x)^3} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n^2x^n = x\sum_{n=1}^{\infty} n^2x^{n-1} = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$$

(6) Ta có

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2-3n+2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n-1}.$$

Đây là dạng Bài tập số 3.

Ví dụ 4.2.2. Tính tổng:

$$D = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(2n-1)+(-1)^n}{4^n(2n-1)}$$

Bài giải. Ta có

$$D = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^n}{2n-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}}{2n-1}$$

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cdots = \frac{3/4}{1-3/4} = 3.$

- Xét $A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$. Ta có

$$A'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{2n-2} = -1 + x^2 - x^4 + \cdots = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow A(x) - A(0) = \int_0^x A'(t)dt = -\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = -\arctan x.$$

Bởi vì $A(0) = 0$ nên $A(x) = -\arctan x$. Do đó,

$$D = 3 + \frac{1}{2} A\left(\frac{1}{2}\right) = 3 - \frac{1}{2} \arctan \frac{1}{2}.$$

CHƯƠNG 5

KIẾN THỨC CŨ

Cho $f : X \to Y$, $A \subset X$ và $B \subset Y$. Khi đó,

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\}.$$

$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}.$$

1. Với mọi $V \subset X$ ta có $V \subset f^{-1}(f(V))$.

   Thật vậy, lấy $x \in V$, khi đó $f(x) \in f(V)$. Suy ra $x \in f^{-1}(f(V))$.

2. Nếu $A \subset B \subset Y$, thì $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$.

   Thật vậy, lấy $x \in f^{-1}(A)$, khi đó $f(x) \in A \subset B$, kéo theo $f(x) \in B$. Do đó, $x \in f^{-1}(B)$.

3. Nếu $U \subset V \subset X$, thì $f(U) \subset f(V)$.

   Thật vậy, lấy $y \in f(U)$, khi đó tồn tại $x \in U$ sao cho $y = f(x)$. Bởi vì $x \in U$ nên $x \in V$, kéo theo $y = f(x) \in f(V)$.

4. Cho $F \subset Y$. Ta có

$$f^{-1}(Y \setminus F) = X \setminus f^{-1}(F).$$

   Thật vậy,

   - Lấy $x \in f^{-1}(Y \setminus F)$, khi đó $f(x) \in Y \setminus F$, kéo theo $f(x) \in Y$ và $f(x) \notin F$. Do đó, $x \in X$ và $x \notin f^{-1}(F)$. Suy ra $x \in X \setminus f^{-1}(F)$.

   - Lấy $x \in X \setminus f^{-1}(F)$. Khi đó, $x \notin f^{-1}(F)$, kéo theo $f(x) \notin F$. Như vậy, $f(x) \in Y \setminus F$. Suy ra $x \in f^{-1}(Y \setminus F)$.

5. $f(f^{-1}(A)) \subset A$.

Lấy $y \in f(f^{-1}(A))$, khi đó tồn tại $x \in f^{-1}(A)$ sao cho $y = f(x)$. Mặt khác, vì $x \in f^{-1}(A)$ nên $f(x) \in A$, do đó $y \in A$.

6. $f^{-1}\Big(\bigcup\limits_{\alpha \in I} V_\alpha\Big) = \bigcup\limits_{\alpha \in I} f^{-1}(V_\alpha)$.

7. $f\Big(\bigcup\limits_{\alpha \in I} V_\alpha\Big) = \bigcup\limits_{\alpha \in I} f(V_\alpha)$.