ĐẠI HỌC SƯ PHẠM ĐÀ NẴNG
TỔ GIẢI TÍCH

CHỦ ĐỀ: PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Nội dung chính

- Một số khái niệm mở đầu
- Phương trình phân ly và phân ly được
- Phương trình vi phân thuần nhất
- Phương trình đưa được về dạng thuần nhất
- Phương trình vi phân toàn phần
- Thừa số tích phân
- Phương trình vi phân tuyến tính cấp một
- Phương trình Bernoulli
- Phương trình tuyến tính cấp hai hệ số hằng

1. MỘT SỐ KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

Định nghĩa

Phương trình có dạng

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0, \tag{1}$$

được gọi là phương trình vi phân thường cấp n. Trong đó $y = y(x)$ là hàm cần phải tìm.

Định nghĩa

*Hàm $y = \varphi(x)$ được gọi là nghiệm của phương trình vi phân thường (1) nếu như trong phương trình (1) thay $y = \varphi(x)$, $y' = \varphi'(x)$,...,
$y^{(n)} = \varphi^{(n)}(x)$ ta nhận được:*

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), ..., \varphi^{(n)}(x)) = 0.$$

Bình thường phương trình (1) có không chỉ một nghiệm mà có vô số nghiệm.

Bài toán

1. Bài toán chuyển động thẳng tuyến tính với vận tốc cho trước

Giả sử ta phải đi tìm quy luật chuyển động thẳng tuyến tính của một chất điểm với vận tốc cho trước là $v(t) = f(t)$ tại mỗi thời điểm t.
Ta gọi $x = x(t)$ là quãng đường mà chất điểm di chuyển tại thời điểm t.
Từ ý nghĩa cơ học của đạo hàm ta suy ra, vận tốc $v = v(t)$ chính là đạo hàm của quãng đường theo thời gian tại thời điểm t, do đó ta nhận được:

$$\frac{dx}{dt} = f(t), \tag{2}$$

hoặc ta có thể viết:

$$\dot{x} = f(t). \tag{3}$$

Như vậy quãng đường $x = x(t)$ chính là nguyên hàm của hàm $v = f(t)$, do đó các nghiệm của phương trình (2) viết được dưới dạng:

$$x(t) = \int f(t)dt.$$

$$x(t) = \int f(t)dt + C. \tag{4}$$

Khi hàm $f(t)$ là liên tục thì một trong các họ nguyên hàm của nó chính là:

$$\int_{t_0}^{t} f(\xi)d\xi,$$

do đó ta có thể viết lại (4) dưới dạng:

$$x(t) = \int_{t_0}^{t} f(\xi)d\xi + C. \tag{5}$$

Để tách trong (5) lấy một nghiệm thì ta cần gán cho C một giá trị thực. Ta sẽ tiến hành lấy một nghiệm của phương trình (2) bằng cách tại thời điểm t_0 ta cho vật thể đi được một quãng đường (cho trước) là $x(t_0) = x_0$. Đặt vào phương trình (5) ta được:

$$x(t_0) = \int_{t_0}^{t_0} f(\xi)d\xi + C = C$$

nhận được:

$$C = x_0.$$

Bài toán

2. Bài toán về chuyển động thẳng tuyến tính với gia tốc ổn định

Giả sử ta phải đi tìm quy luật biểu diễn chuyển động thẳng tuyến tính của một chất điểm với gia tốc hằng: $a = const$.

Gọi $x = x(t)$ *là quãng đường với thời gian* t, $v = v(t) = \frac{dx}{dt}$ *là vận tốc tại thời điểm* t. *từ ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai, ta có gia tốc chính là đạo hàm bậc hai của quãng đường:*

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a, \tag{6}$$

hay

$$\ddot{x} = a. \tag{7}$$

Như vậy $v = \frac{dx}{dt}$ *chính là nguyên hàm đối với* $\frac{d^2x}{dt^2}$, *do đó*

$$\frac{dx}{dt} = at + C_1,$$

suy ra:

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + C_1 t + C_2. \tag{9}$$

Hiển nhiên nghiệm của phương trình (6) phụ thuộc vào C_1 và C_2. Để từ đó có thể tách ra một nghiệm thì ta cần bổ sung thêm điều kiện đầu. Đặt tại thời điểm ban đầu $t = t_0 = 0$ có quãng đường $x(t_0) = x_0$ và vận tốc $v(t_0) = v_0$. Từ $v(t) = at + C_1$ đặt $t = 0$ ta nhận được $v_0 = C_1$, do đó:

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + C_2.$$

Thay $t = 0$ vào phương trình trên: $x_0 = C_2$.
Cuối cùng ta nhận được phương trình cho $x(t)$ với điều kiện đầu là:

$$x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0.$$

Xét phương trình:

$$y' = f(x, y), \tag{10}$$

$$y(x_0) = y_0, \tag{11}$$

với f liên tục trong một miền $D \subset \mathbb{R}^2$.

Về mặt hình học, bài toán Cauchy cho phương trình vi phân cấp một có thể hiểu là tìm nghiệm $y(x)$ của (10) mà đồ thị của nó (còn gọi là đường cong tích phân của NDE) đi qua điểm (x_0, y_0).

Định nghĩa

Giả sử $D \subset \mathbb{R}^2$ sao cho vế phải của (10) xác định và liên tục. Hàm $y = y(x, C)$ liên tục, phụ thuộc vào hằng số C được gọi là nghiệm tổng quát của (10) nếu:

1. Với mỗi điều kiện ban đầu $(x_0, y_0) \in D$ ta luôn tìm được C dưới dạng:

$$C = \varphi(x_0, y_0), \tag{12}$$

trong đó φ liên tục.

2. Hàm $y = y(x, C)$ thỏa mãn (10) với mỗi giá trị của C được xác định bởi (12) khi (x_0, y_0) chạy khắp D.

Ví dụ, phương trình $y' + y = 0$ có nghiệm tổng quát là $y(x) = Ce^{-x}$ với C là hằng số tùy ý. Nếu như ta cho tại $x = 0,\ y = 2$ ta nhận được $y(0) = 2 = C$, vì lẽ ấy, $y = 2e^{-x}$ là một nghiệm của phương trình đã cho.

Định nghĩa

Nghiệm của (10) mà tại mỗi điểm (x_0, y_0) của nó tính chất duy nhất nghiệm của bài toán Cauchy:

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \tag{13}$$

được thỏa mãn được gọi là nghiệm riêng. Ngược lại, nghiệm của phương trình (10) mà tại mỗi điểm của nó tính chất duy nhất nghiệm của bài toán Cauchy bị vi phạm được gọi là nghiệm kỳ dị.

2. PHƯƠNG TRÌNH PHÂN LY VÀ PHÂN LY ĐƯỢC

Định nghĩa

Phương trình vi phân cấp một dạng:

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 \tag{14}$$

được gọi là phương trình với biến số phân ly (hay còn gọi là phương trình tách biến.)

Trong phương trình (14) các hàm số $M(x),\ N(y)$ được giả thiết là liên tục trên các khoảng nào đó. Khi đó chỉ cần tích phân hai vế của phương trình trên ta thu được:

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C.$$

Biểu thức cuối cùng chính là nghiệm cần tìm của phương trình đã cho.

Ví dụ. Giải phương trình:

$$xdx + ydy = 0.$$

Tích phân hai vế của phương trình đã cho ta thu được:

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 = C.$$

Chú ý. Phương trình dạng

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0, \tag{15}$$

cũng có thể đưa được về dạng (14) bằng cách chia cả hai vế cho $M_2(x)N_1(y)$ (với giả thiết $M_2(x)N_1(y) \neq 0$), ta nhận được:

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0.$$

Do đó tích phân tổng quát là:

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = C.$$

Ví dụ. Giải phương trình:

$$x(1+y^2)dx + y(1+x^2)dy = 0.$$

Chia cả hai vế của phương trình cho $(1+x^2)(1+y^2)$ ta nhận được:

$$\frac{x}{x^2+1}dx + \frac{y}{y^2+1}dy = 0.$$

Tích phân cả hai vế ta nhận được:

$$\int \frac{x}{x^2+1}dx + \int \frac{y}{y^2+1}dy = C,$$

hay

$$\ln(1+x^2) + \ln(1+y^2) = 2C,$$

hay:

$$(1+x^2)(1+y^2) = C_1.$$

3. Phương trình vi phân thuần nhất

Định nghĩa

Hàm $f(x, y)$ được gọi là thuần nhất bậc n, nếu với mọi $t > 0$, ta có:

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y).$$

Định nghĩa

Phương trình vi phân $y' = f(x, y)$ được gọi là thuần nhất (hay còn gọi là đẳng cấp), nếu hàm số ở vế phải là thuần nhất bậc 0, tức là:

$$f(tx, ty) = f(x, y).$$

Trong phương trình vi phân thuần nhất ta đặt $y = x.u$, ở đây $u = u(x)$. Từ đây ta có $y' = u + xu'$ hay:

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}.$$

Từ $y = xu$ suy ra $u = \frac{y}{x}$, do đó $f(x, y) = f(x, x\frac{y}{x}) = f(1, u) = g(u)$ (x đóng vai trò là t.) Đến đây ta nhận được phương trình:

$$u + x\frac{du}{dx} = g(u),$$

hay:

$$\frac{du}{g(u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

Tích phân hai vế phương trình cuối cho ta:

$$x = C.\exp(\int \frac{du}{g(u) - u}), \ \ C \neq 0.$$

Ví dụ. Giải phương trình:

$$(x^2 + y^2)dx + xydy = 0.$$

Ta viết lại phương trình đã cho dưới dạng:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2 + y^2}{xy} = -\frac{x}{y} - \frac{y}{x},$$

và dễ thấy vế phải của phương trình nhận được là thuần nhất, do đó đặt $y = xu$ ta nhận được phương trình:

$$\frac{dx}{x} = -\frac{udu}{2u^2 + 1}.$$

Tích phân cả hai vế phương trình trên cho ta:

$$\ln\left|\frac{x}{C}\right| = -\frac{1}{4}\ln(2u^2 + 1).$$

Thay $u = \frac{y}{x}$ nhận được nghiệm của phương trình đầu là:

$$x^4 = \frac{C^4 x^2}{x^2 + 2y^2}, \ \ C \neq 0.$$

4. Phương trình đưa về dạng thuần nhất

Các phương trình dạng:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$$

có thể đưa về dạng thuần nhất bằng phép biến đổi:

$$\begin{cases} x = \xi + x_0, \\ y = \eta + y_0, \end{cases} \tag{16}$$

trong đó $(x_0,\ y_0)$ được chọn sao cho:

$$\begin{cases} ax_0 + by_0 + c = 0, \\ a_1x_0 + b_1y_0 + c_1 = 0. \end{cases} \tag{17}$$

Từ (17) ta nhận được $c = -ax_0 - by_0, \ c_1 = -a_1x_0 - b_1y_0$. Khi đó:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a\xi + b\eta}{a_1\xi + b_1\eta}\right) = f\left(\frac{a + b\frac{\eta}{\xi}}{a_1 + b_1\frac{\eta}{\xi}}\right) = g\left(\frac{\eta}{\xi}\right)$$

là phương trình thuần nhất.
Ví dụ. Giải phương trình:

$$(2x - 4y + 6)dx + (x + y - 3)dy = 0.$$

Hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x_0 - 4y_0 + 6 = 0, \\ x_0 + y_0 - 3 = 0 \end{cases} \tag{18}$$

có nghiệm $(x_0 = 1, y_0 = 2)$, do đó thực hiện phép đổi biến:
$x = \xi + 1, \ y = \eta + 2$. Biến đổi phương trình đã cho về dạng:

$$\frac{\xi du + u d\xi}{d\xi} = -\frac{2-4u}{1+u}.$$

giải phương trình trên nhận được:

$$\xi\frac{(u-2)^3}{(u-1)^2} = C,\ \ u \neq 1,\ \ u \neq 2.$$

Hay: $(y-2x)^3 = C(y-x-1)^2$.
Khi $u = 1,\ \ \eta = \xi :\ \ x - 1 = y - 2,\ \ y = x + 1.$
Khi $u = 2,\ \ \eta = 2\xi :\ \ 2x - 2 = y - 2,\ \ y = 2x.$

5. Phương trình vi phân toàn phần

Định nghĩa

Phương trình vi phân dạng:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0, \tag{19}$$

được gọi là phương trình vi phân toàn phần nếu như tồn tại hàm $U(x,y)$ *thỏa mãn:*

$$dU(x,y) = P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Khi đó tích phân tổng quát của (19) cho bởi:

$$U(x,y) = C.$$

Định lý. (Dấu hiệu nhận biết phương trình vi phân toàn phần) Để cho phương trình (19) là toàn phần thì điều kiện cần và đủ là:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Ví dụ. Giải phương trình vi phân:

$$(3x^2 - y^2)dx + (3y^2 - 2xy)dy = 0.$$

Ta có: $\frac{\partial P}{\partial y} = -2y = \frac{\partial Q}{\partial x}$, do đó phương trình đã cho là toàn phần.
Do

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 3x^2 - y^2,$$

nên

$$U = x^3 - xy^2 + C(y).$$

Đạo hàm biểu thức nhận được theo y cho ta:

$$U'_y = -2xy + C'(y) = 3y^2 - 2xy.$$

Từ đây ta nhận được $C'_y = 3y^2$, do đó $C(y) = y^3$. Như vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x^3 - xy^2 + y^3 = C$.

6. Thừa số tích phân

Có những trường hợp phương trình (19) không phải là phương trình vi phân toàn phần nhưng có thể tìm được hàm số $\mu(x, y)$ sao cho phương trình:

$$\mu(x, y)[P(x, y)dx + Q(x, y)dy] = 0, \tag{20}$$

trở thành phương trình vi phân toàn phần.

Định nghĩa. Hàm $\mu(x, y)$ thỏa mãn (20) được gọi là thừa số tích phân của phương trình (20). Hiển nhiên để $\mu(x, y)$ là thừa số tích phân thì:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q),$$

hay:

$$Q\frac{\partial \mu}{\partial x} - P\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}). \tag{21}$$

Không có phương pháp tổng quát để giải (21), tuy nhiên trong các trường hợp đặc biệt ta có thể tìm được $\mu(x, y)$.

a. μ chỉ phụ thuộc vào x. Khi đó $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$ và (21) trở thành:

$$Q\frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}). \tag{22}$$

Chia cả hai vế cho μQ ta nhận được

$$\frac{\partial \mu}{\mu} = \frac{1}{Q}(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}). \tag{23}$$

Như vậy để yêu cầu bài toán được thỏa thì vế phải của (23) chỉ có thể phụ thuộc vào x. Kí hiệu vế phải của biểu thức cuối bằng $\varphi(x)$ và lấy tích phân cả hai vế đẳng thức nhận được:

$$\mu(x) = \exp(\int \varphi(x)dx). \tag{24}$$

b. μ chỉ phụ thuộc vào y. Tiến hành tương tự ta nhận được:

$$\mu(y) = \exp(\int \psi(y)dy), \tag{25}$$

ở đây $\psi(y) = -\frac{1}{P}(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x})$.

Ví dụ. Tìm thừa số tích phân rồi giải phương trình sau đây:

$$(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3})dx + (x^2 + y^2)dy = 0. \tag{26}$$

Ta có:

$P(x,y) = 2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}$; $Q(x,y) = x^2 + y^2$; $P'_y = 2x + x^2 + y^2$, $Q'_x = 2x$

và:

$$\frac{1}{Q}(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}) = \frac{1}{x^2 + y^2}(x^2 + y^2 + 2x - 2x) = 1.$$

Từ đây ta nhận được:

$$\mu(x) = e^x.$$

Lúc này phương trình (26) viết lại được dưới dạng:

$$e^x(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3})dx + e^x(x^2 + y^2)dy = 0, \tag{27}$$

và là phương trình vi phân toàn phần. Tiến hành giải (27) ta thu được nghiệm:

$$ye^x(x^2 + \frac{y^2}{3}) = C.$$

7. Phương trình vi phân tuyến tính cấp một

Định nghĩa 2.7.1.

Phương trình dạng

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x), \tag{28}$$

được gọi là phương trình vi phân tuyến tính cấp một.
Trong phương trình (28) ta luôn mặc định $P(x)$ và $Q(x)$ là xác định trên khoảng (a, b) nào đó. Ta tiến hành tìm nghiệm của (28) dưới dạng:

$$y = u(x)v(x), \tag{29}$$

ở đây $u, \ v$ là các hàm chưa biết và phụ thuộc vào x. Đạo hàm cả hai vế của (29) ta nhận được:

$$y' = u'v + uv',$$

và đặt biểu thức vừa nhận được vào (28) ta nhận được:

$$uv' + (u' + P(x)u)v = Q(x). \tag{30}$$

Trong (30) ta chọn u sao cho $u' + P(x)u = 0$, từ đây ta nhận được:

$$u = \exp(-\int P(x)dx).$$

Thay biểu thức nhận được vào (30) ta nhận được:

$$v' = \exp(-\int P(x)dx) = Q(x).$$

Giải phương trình cuối ta nhận được:

$$v = \int Q(x)\exp(\int P(x)dx)dx + C.$$

Do đó nghiệm tổng quát của phương trình (28) tìm được dưới dạng:

$$y = uv = \exp(-\int P(x)dx)[\int Q(x)\exp(\int P(x)dx)dx + C].$$

Ví dụ.

Tìm nghiệm của phương trình:

$$y' + 3xy = x,$$

đi qua điểm $(0, 1)$. Ta có: $P(x) = 3x$, do đó $\int P(x)dx = 3x^2/2$ và như thế nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$y = e^{-\frac{3x^2}{2}}[\int xe^{\frac{3x^2}{2}}dx + C] = e^{-\frac{3x^2}{2}}[\frac{1}{3}e^{\frac{3x^2}{2}} + C.]$$

Do nghiệm của phương trình đi qua $(0, 1)$ nên thay $x = 0,\ y = 1$ vào biểu thức cuối ta thu được $C = \frac{2}{3}$. Như vậy nghiệm cần tìm chính là:

$$y = e^{-\frac{3x^2}{2}}[\frac{1}{3}e^{\frac{3x^2}{2}} + \frac{2}{3}.]$$

8. Phương trình Bernoulli

Định nghĩa. Phương trình dạng:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = y^n Q(x), \tag{31}$$

được gọi là phương trình Bernoulli.
Để tìm nghiệm của (31) ta sẽ đưa nó về dạng (28). Hiển nhiên khi $n = 0$ hoặc $n = 1$ thì (31) có dạng phương trình tuyến tính. Ta đi xét các trường hợp còn lại. Đặt $y = uv$, khi đó $y' = u'v + uv'$ và đặt biểu thức nhận được vào (31):

$$uv' + (u' + P(x)u)v = (uv)^n Q(x). \tag{32}$$

Chọn u sao cho $u' + P(x)u = 0$, từ đây nhận được

$$u = \exp(-\int P(x)dx).$$

Đặt biểu thức nhận được đối với u vào (32) ta nhận được:

$$v' e^{-\int P(x)dx} = v^n e^{-n\int P(x)dx} Q(x).$$

Nhân cả hai vế của biểu thức cuối với $e^{\int P(x)dx}$ ta nhận được:

$$v' = v^n e^{(1-n)\int P(x)dx} Q(x).$$

Từ đây ta có:

$$\frac{dv}{dx} = v^n e^{(1-n)\int P(x)dx} Q(x),$$

hay:

$$\frac{dv}{v^n} = e^{(1-n)\int P(x)dx} Q(x)dx.$$

Tích phân cả hai vế hệ thức cuối:

$$\frac{1}{1-n} v^{1-n} = \int e^{(1-n)\int P(x)dx} Q(x)dx + C := \varphi(x, C).$$

Hệ thức cuối cùng cho phép ta xác định được $v(x)$ và ta kí hiệu bằng $\psi(x, C)$. Như vậy nghiệm tổng quát của phương trình Becnuli xác định bởi công thức:

$$y = e^{-\int P(x)dx} \psi(x, C).$$

Ví dụ. Tìm nghiệm của phương trình:

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 4x\sqrt{y}.$$

Như vậy ta có $n = 1/2,\ P(x) = 2x,\ \int P(x)dx = x^2,\ u = e^{-x^2}.$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}} v^{1-\frac{1}{2}} = \int e^{(1-\frac{1}{2})x^2} 4xdx.$$

$$2v^{\frac{1}{2}} = 4e^{\frac{1}{2}x^2} + C_1,$$

$$v = (2e^{\frac{1}{2}x^2} + C)^2.$$

Như vậy nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$y = e^{-x^2}(2e^{\frac{1}{2}x^2} + C)^2.$$

Bài tập.

Giải các phương trình thuần nhất sau đây:

1. $(x+2y)dx - xdy = 0$. **2.** $(x-y)dx + (x+y)dy = 0$.
3. $(x^2 - 2xy)dx + x^2dy = 0$. **4.** $2x^3y' = y(2x^2 - y^2)$.
5. $y^2 + x^2y' = xyy'$. **6.** $(y^2 + x^2)y' = 2xy$.
7. $xy' - y = x\tan\frac{y}{x}$. **8.** $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$.
9. $xy' - y = (x+y)\ln\frac{x+y}{x}$. **10.** $xy' = y\cos\ln\frac{y}{x}$.
11. $(y + \sqrt{xy})dx = xdy$. **12.** $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$.

Giải các phương trình tuyến tính sau đây:

1. $xy' - 2y = 2x^4$. **31.** $(2x+1)y' = 4x + 2y$. **2.** $y' + y\tan x = \sec x$.
3. $(xy + e^x)dx - xdy = 0$. **4.** $x^2y' + xy + 1 = 0$.
5. $y = x(y' - x\cos x)$. **6.** $2x(x^2 + y)dx = dy$.
7. $(xy' - 1)\ln x = 2y$. **8.** $xy' + (x+1)y = 3x^2e^{-x}$.
9. $(x + y^2)dy = ydx$. **10.** $(2e^y - x)y' = 1$.
11. $(\sin^2 y + x\cot y)y' = 1$.
12. $(2x+y)dy = ydx + 4\ln ydy$. **13.** $y' = \frac{y}{3x - y^2}$.

Kiểm tra các phương trình dưới đây có là phương trình vi phân toàn phần hay không và giải chúng:

1. $2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0$. **2.** $(2 - 9xy^2)xdx + (4y^2 - 6x^3)ydy = 0$.

3. $e^{-y}dx - (2y - xe^{-y})dy = 0$. **4.** $\frac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0$.

5. $\frac{3x^2+y^2}{y^2}dx - \frac{2x^3+5y}{y^3}dy = 0$.

6. $2x(1 + \sqrt{x^2 - y})dx - \sqrt{x^2 - y}dy = 0$.

7. $(1 + y^2 \sin 2x)dx - 2y\cos^2 xdy = 0$.

8. $3x^2(1 + \ln y)dx = (2y - \frac{x^3}{y})dy$.

9. $(\frac{x}{\sin y} + 2)dx + \frac{(x^2+1)\cos y}{\cos 2y - 1}dy = 0$.

9. Phương trình tuyến tính cấp hai hệ số biến thiên

Định nghĩa

Phương trình dạng:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \tag{33}$$

trong đó $p(x), q(x), f(x)$ *là những hàm cho trước, còn* y'', y', y *là những hàm cần phải tìm, được gọi là phương trình vi phân tuyến tính cấp 2. Ở đây các hàn* $p(x), q(x)$ *được gọi là hệ số của phương trình, hàm* $f(x)$ *được gọi là vế phải của phương trình.*

Nếu $f(x) = 0$ thì phương trình

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{34}$$

được gọi là phương trình thuần nhất tương ứng với (33).

Tính chất

Với mọi hàm $y = y(x)$ *vi phân đến cấp 2 trong* (a, b) *và với số* $\alpha \in R$ *bất kỳ ta có* αy *cũng là nghiệm của (34)*

Tính chất

Nếu $y_1 = y_1(x)$ *và* $y_2 = y_2(x)$ *là các nghiệm của phương trình vi phân thuần nhất bậc (34) thì* $y_1 + y_2 = y$ *cũng là nghiệm của (34).*

Tính chất

Nếu các hàm $y_1 = y_1(x),\ y_2 = y_2(x)$ *là nghiệm của phương trình (34) thì hàm:*

$$y = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x)$$

cũng là nghiệm của phương trình (34), trong đó $\alpha_i,\ i = \overline{1, 2}$ *là các hằng số bất kỳ.*

Một cách rất tự nhiên sẽ xuất hiện câu hỏi sau đây: Giả sử $y_1 = y_1(x),\ y_2 = y_2(x)$ là các nghiệm riêng của của phương trình (34), khi đó trong điều kiện nào đối với các hàm trên thì $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất (34) ?.

Định nghĩa

Một hệ các hàm số $y_i = y_i(x),\ i = \overline{1, n}$ được gọi là độc lập tuyến tính trong khoảng (a, b), nếu như từ $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i = 0$ suy ra $\alpha_i = 0,\ i = \overline{1, n}$.

Định lý

Để hệ hai hàm $y_1 = y_1(x) \neq 0,\ y_2 = y_2(x) \neq 0$ là độc lập tuyến tính trong khoảng (a, b) thì điều kiện cần và đủ là:

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq const.$$

Định nghĩa

Mọi hệ gồm 2 nghiệm $y_i = y_i(x),\ i = \overline{1,2}$ *độc lập tuyến tính của phương trình vi phân thuần nhất (34) được gọi là hệ nghiệm cơ sở.*

Định nghĩa

Giả sử hàm $y_i = y_i(x),\ i = \overline{1,2}$, *khả vi trong khoảng* (a, b). *Khi đó định thức:*

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \tag{35}$$

được gọi là định thức Wronxki (hoặc Wronxkian). Đối với $W(x)$ *ta phát biểu định lý quan trọng sau đây:*

Định lý

Với mỗi hệ nghiệm cơ sở $y_1(x),\ y_2(x)$ *của phương trình vi phân thuần nhất cấp 2:*

$$y^{''} + p(x)y^{'} + q(x)y = 0, \tag{36}$$

hay:

$$L[y] = 0 \tag{37}$$

thì định thức Wronxki:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0 \tag{38}$$

tại mỗi điểm $x \in (a, b)$.

Định lý

(Định lý về nghiệm tổng quát của phương trình vi phân thuần nhất cấp 2 hệ số biến). Với mọi hệ nghiệm cơ sở $y_1(x),\ y_2(x)$, của phương trình vi phân thuần nhất cấp 2, hàm $y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, trong đó c_1, c_2 là các hằng số tùy ý, là nghiệm tổng quát của (34).

Công thức Ostragradxki – Luyvilia

Ta đi xét phương trình vi phân thuần nhất bậc hai với hệ số biến:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{39}$$

với hệ số biến $p(x),\ q(x)$ được mặc định xác định và liên tục trên một khoảng (a, b) nào đó. Khi đó ta có phát biểu sau đây:

Định lý

Với mỗi hệ nghiệm cơ sở $y_1 = y_1(x),\ y_2 = y_2(x)$ của phương trình (39) ta có:

$$W(x) = c.e^{-\int p(x)dx}, \tag{40}$$

trong đó $c = const \neq 0$.

Ứng dụng. Cho $y_1 = y_1(x)$ và phương trình (39), trong đó $p(x),\ q(x)$ là xác định và liên tục trong một khoảng (a, b) nào đấy. Ta cần tìm $y_2 = y_2(x)$ độc lập tuyến tính với y_1. Không khó để thấy rằng:

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{y_2'y_1 - y_1'y_2}{y_1^2} = \frac{W(x)}{y_1^2} = \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2}.$$

Suy ra:

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2}.$$

Nhận được nghiệm $y_2 = y_2(x)$ độc lập tuyến tính với $y_1 = y_1(x)$ $(\frac{y_2}{y_1} \neq C = const.)$

Ví dụ.

Tìm nghiệm tổng quát của phương trình:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0,\ \ y_1 = x.$$

Phương trình đã cho viết lại được dưới dạng:

$$y'' - \frac{2x}{1-x^2}y' + \frac{2}{1-x^2}y = 0,$$

$$p(x) = -\frac{2x}{1-x^2},$$

do đó:

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{y_1^2} = x \int \frac{e^{-\int \frac{-2x}{1-x^2}dx}}{x^2}dx = x \int \frac{e^{-\ln|1-x^2|}}{x^2}dx =$$

$$x \int \frac{1}{x^2(1-x^2)}dx = x \int (\frac{1}{x^2} + \frac{1}{1-x^2})dx =$$

$$x(-\frac{1}{2}\ln|\frac{1-x}{1+x}| - \frac{1}{x}) = -\frac{x}{2}\ln|\frac{1-x}{1+x}| - 1.$$

Nghiệm tổng quát của phương trình đã cho:

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 = c_1x + c_2\left(-\frac{x}{2}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right| - 1\right).$$

Định lý

Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân không thuần nhất (33) có dạng:

$$y = Y + u, \tag{41}$$

trong đó u là nghiệm tổng quát của phương trình (34) còn Y là một nghiệm riêng của (33).

Định lý

Một nghiệm riêng $Y(x)$ của (33) được xác định bởi:

$$Y(x) = c_1(x)y_1 + c_2(x)y_2$$

trong đó $y_1, \ y_2$ là hệ nghiệm cơ sở của (34), còn $c_1(x), \ c_2(x)$ được xác định bởi:

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1 + c_2'(x)y_2 = 0 \\ c_1'(x)y_1' + c_2'(x)y_2' = f(x). \end{cases} \tag{42}$$

Ví dụ. Tìm nghiệm tổng quát của phương trình:

$$xy'' - y' = x^2. \tag{43}$$

Xét phương trình thuần nhất tương ứng với (43):

$$xy'' - y' = 0. \tag{44}$$

Giải phương trình nhận được cho ta:

$$\frac{y''}{y'} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{dy'}{y'} = \frac{dx}{x}.$$

Từ đây ta có: $\ln|y'| = \ln|x| + \ln C_1$. Nhận được:

$$y' = C_1 x,$$

$$y = \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2.$$

Như vậy hàm dạng $u = C_1 + C_2x^2$ là nghiệm tổng quát của (43). Ta có $y_1 = 1,\ y_2 = x^2$.

Ta tiến hành đi tìm nghiệm riêng của (43) dưới dạng:

$$Y = C_1(x).1 + C_2(x)x^2.$$

Sử dụng (42) cho ta:

$$\begin{cases} C_1'(x) + C_2'(x)x^2 = 0, \\ 0.C_1'(x) + 2xC_2'(x) = x. \end{cases} \tag{45}$$

Giải hệ (45) ta nhận được $C_1(x) = -\frac{1}{6}x^3$; $C_2(x) = \frac{1}{2}x$. Do đó nghiệm tổng quát của phương trình đã cho tìm được dưới dạng:

$$y = \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^3.$$

10. Phương trình tuyến tính cấp hai hệ số hằng

Định nghĩa

Phương trình dạng:

$$L[y] = y'' + py' + qy = f(x), \tag{46}$$

ở đây p, q là các hằng số, còn $f(x)$ là một hàm đã biết (được mặc định là xác định và liên tục trên một khoảng nào đó), được gọi là phương trình vi phân cấp hai hệ số hằng.

Nếu như trong (46) $f(x) \neq 0$ thì phương trình đã cho được gọi là phương trình không thuần nhất, trong trường hợp ngược lại ta nói phương trình là thuần nhất.

Định lý. Nghiệm tổng quát $y_{tq}(x)$ của (46) được xác định bởi:

$$y_{tq}(x) = y(x) + y_r(x) \tag{47}$$

với $y(x)$ là nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất, còn $y_r(x)$ là một nghiệm riêng.

Vấn đề xác định nghiệm tổng quát của phương trình thuần nhất:

Trước tiên ta đi xem xét phương trình vi phân cấp hai thuần nhất với hệ số hằng:

$$y'' + py' + qy = 0. \tag{48}$$

ta tiến hành đi tìm nghiệm của (48) dưới dạng:

$$y = e^{rx},$$

ở đây r là một số chưa biết. Từ đây ta nhận được $y' = re^{rx}$, $y'' = r^2 e^{rx}$. Đặt các biểu thức nhận được đối với y, y', y'' vào trong phương trình (48) ta nhận được:

$$e^{rx}(r^2 + pr + q) = 0.$$

Vì e^{rx} luôn khác 0 nên phương trình trên tương đương với:

$$r^2 + pr + q = 0. \tag{49}$$

Định nghĩa

Phương trình bậc hai (49) tương ứng với biến r được gọi là phương trình đặc trưng của phương trình (48). Đa thức bậc hai $F(r) = r^2 + pr + q$ *được gọi là đa thức đặc trưng của phương trình (48).*

Giải phương trình (49) ta nhận được các nghiệm $r_1,\ r_2$. Có thể xuất hiện 3 trường hợp sau đây:
1. $r_1 \neq r_2 \in \mathbb{R}$.
2. $r_1 = r_2 = r \in \mathbb{R}$.
3. $r_1,\ r_2 \in \mathbb{C}$ (là các số phức).

Giả sử ta có trường hợp 1. Như vậy $r_1,\ r_2$ là nghiệm của phương trình (49), $r_1 \neq r_2 \in \mathbb{R}$. Khi đó các hàm $y_1 = e^{r_1 x},\ y_2 = e^{r_2 x}$ sẽ là các nghiệm riêng của phương trình thuần nhất (48). Chúng độc lập tuyến tính vì $\frac{y_1}{y_2} = e^{(r_1 - r_2)x} \neq \mathrm{const}$. Khi đó hàm:

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

với $C_1,\ C_2$ là các hằng số chính là nghiệm của (48).

Ví dụ

Tìm nghiệm của phương trình:

$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

Phương trình đặc trưng $r^2 - 5r + 6 = 0$ của phương trình đã cho có nghiệm $r_1 = 2,\ r_2 = 3$. Do đó nghiệm của phương trình đã cho tìm được dưới dạng:

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}.$$

Giả sử bây giờ $r_1,\ r_2$ là nghiệm của phương trình đặc trưng (49) và $r_1 = r_2 = r$. Khi đó e^{rx} sẽ là một nghiệm riêng của (48). ta đi tìm nghiệm riêng thứ hai độc lập tuyến tính với nghiệm thức nhất của (48) dưới dạng $y_2 = u(x)e^{rx}$, trong đó $u(x)$ là một hàm chưa biết phụ thuộc vào x. Ta có:

$$y_2' = re^{rx}u(x) + e^{rx}u'(x).$$

$$y_2'' = r^2e^{rx}u(x) + 2re^{rx}u'(x) + e^{rx}u''(x).$$

Đặt các biểu thức nhận được của y_2, y_2', y_2'' vào (48):

$$e^{rx}[u''(x) + (2r + p)u'(x) + (r^2 + pr + q)u(x)] = 0.$$

Do $e^{rx} \neq 0$ còn r là nghiệm kép của phương trình đặc trưng (49) nên phương trình cuối còn lại $u''(x) = 0$. Hiển nhiên $u = x$ là nghiệm của phương trình này, do đó hàm $y_2 = xe^{rx}$ sẽ là nghiệm riêng thứ hai của phương trình (48). Nó độc lập tuyến tính với y_1 bởi:

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{xe^{rx}}{e^{rx}} = x \neq const.$$

Từ đây ta nhận được nghiệm tổng quát của phương trình (48) là:

Từ đây ta nhận được nghiệm tổng quát của phương trình (48) là:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = e^{rx}(C_1 + C_2 x).$$

Ví dụ

Tìm nghiệm của phương trình:

$$y'' - 8y' + 16y = 0.$$

Phương trình đặc trưng: $r^2 - 8r + 16 = 0$, có nghiệm kép $r_1 = r_2 = 4$. Do đó nghiệm tổng quát của phương trình đã cho tìm được dưới dạng:

$$y = e^{4x}(C_1 + C_2 x).$$

Trường hợp phương trình đặc trưng có nghiệm phức:

Định nghĩa

Kí hiệu dạng $a + ib$, *ở đây* $a, b \in \mathbb{R}$, $i-$ *đơn vị ảo, được gọi là số phức.*

Số phức được kí hiệu một cách nhắn gọn là $c : c = a + ib$, trong đó a được gọi là phần thực, và kí hiệu là Rec (Real), b được gọi là phần ảo và kí hiệu là Imc (Imaginary). Tập hợp số phức được kí hiệu là $\mathbb{C}$.

Định nghĩa

Hai số phức $c_1 = a_1 + ib_1,\ c_2 = a_2 + ib_2$ *được gọi là bằng nhau nếu* $a_1 = a_2,\ b_1 = b_2$.

Định nghĩa

Số phức $\overline{c} = a - ib$ *được gọi là liên hợp với* $c = a + ib$.

Ta có một vài tính chất sau đây:

1. $\overline{c_1 + c_2} = \overline{c_1} + \overline{c_2}$.
2. $\overline{c_1 c_2} = \overline{c_1}.\ \overline{c_2}$.
3. $\overline{\left(\frac{c_1}{c_2}\right)} = \frac{\overline{c_1}}{\overline{c_2}}$.

Nếu $r = a + ib$ là nghiệm của phương trình $r^2 + pr + q = 0$ thì số phức liên hợp của nó $\overline{r} = a - ib$ cũng là nghiệm của phương trình trên. Thật vậy:

$$0 = \overline{0} = \overline{r^2 + pr + q} = \overline{r}^2 + p\overline{r} + q.$$

Định nghĩa

Giả sử $X \subset \mathbb{R}$. *Một luật xác định một số thực* $x \in \mathbb{R}$ *tương ứng với số phức* $w = u + iv \in \mathbb{C}$, *được gọi là hàm phức biến thực được cho trên tập* X. *Nó được kí hiệu* $f : X \to \mathbb{C};\ f(x) = u(x) + iv(x)$, *ở đây* $u(x),\ v(x)$ *là các hàm thực, được cho trên tập* X. $u(x)$ *được gọi là phần thực của* $f(x)$, *còn* $v(x)$ *được gọi là phần ảo của* $f(x)$. *Đạo hàm của* $f(x)$ *được xác định bởi biểu thức:*

$$f'(x) = u'(x) + iv'(x).$$

Định nghĩa

Hàm $w = e^z,\ z = x + iy,\ w = u + iv$ *được xác định bởi công thức:*

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y) \tag{50}$$

được gọi là hàm mũ trong miền phức. Hiển nhiên
$u = e^x \cos y,\ v = e^x \sin y$.

Từ (50) ta có:

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x,$$
$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Do đó:

$$\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}), \ \cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}).$$

Các công thức trên có tên gọi là công thức Euler.
Ta phát biểu mệnh đề sau đây: *nếu $y = u + iv = u(x) + iv(x)$ là nghiệm của phương trình (48) hay $L[y] = 0$ thì phần thực $u(x)$ và phần ảo $v(x)$ cũng là nghiệm của (48).*

Chứng minh.

$0 = L[y] = L[u(x) + iv(x)] = L[u(x)] + iL[v(x)] \Rightarrow L[u(x)] = L[v(x)] = 0.$
Điều này chứng tỏ $u(x), \ v(x)$ là nghiệm của phương trình $L[y] = 0$.

Bây giờ ta nghiên cứu trường hợp khi mà các nghiệm $r_1 = a + ib,\ r_2 = a - ib,\ b \neq 0$ của phương trình (49) có dạng số phức. Không khó để chứng minh hàm $y = e^{rx} = e^{ax}(\cos bx + i \sin bx)$ là nghiệm của phương trình (48). Khi đó các hàm $u = e^{ax} \cos bx$ và $v = e^{rx} \sin bx$ sẽ là các nghiệm thực của (48). Chúng độc lập tuyến tính vì:

$$\frac{u}{v} = \cot bx \neq const,$$

do đó:

$$y = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$$

là nghiệm tổng quát của phương trình (48).

Ví dụ

Tìm nghiệm tổng quát của phương trình:

$$y'' + 2y' + 3y = 0.$$

Phương trình đặc trưng $r^2 + 2r + 3 = 0$ có nghiệm $r_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{2}$, do đó nghiệm tổng quát tìm được:

$$y = e^{-x}(C_1 \cos \sqrt{2}x + C_2 \sin \sqrt{2}x).$$

Vấn đề xác định nghiệm riêng của (46):

Ta sẽ tiến hành xem xét khi vế phải của (46) trong một vài trường hợp đặc biệt.

Trường hợp 1. $f(x) = e^{\alpha x} P_m(x)$, ở đây $P_m(x)$ là đa thức bậc m.

a. Nếu như α không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng thì nghiệm riêng có thể tìm được dưới dạng:

$$y_r = e^{\alpha x} Q_m(x).$$

b. Nếu α là nghiệm bội k của phương trình đặc trưng thì nghiệm riêng có thể tìm được dưới dạng:

$$y_r = x^k e^{\alpha x} Q_m(x),$$

ở đây $Q_m(x)$ là đa thức bậc m mà hệ số của nó ta cần phải đi xác định.

Ví dụ

Tìm nghiệm riêng của phương trình:

$$y'' - 3y' + 2y = (3 - 4x)e^x.$$

Phương trình đặc trưng:
$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0,\ \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \alpha = 1 = \lambda_1,\ m = 1$. Do đó nghiệm riêng của phương trình đã cho có thể tìm được dưới dạng:

$$y_r = xe^x(ax + b).$$

Ta có: $y_r' = e^x(1 + x)(ax + b) + axe^x$.
Ta có: $y_r'' = e^x[(1 + x)(ax + b) + ax + (ax + b) + a(1 + x) + a]$.
Đặt các biểu thức nhận được đối với $y_r,\ y_r',\ y_r''$ vào trong phương trình đã cho và tiến hành đồng nhất thức hai vế ta nhận được $a = 2,\ b = 1$. Do đó nghiệm riêng của phương trình đã cho là $y_r = xe^x(2x + 1)$. Từ đây cho ta nghiệm tổng quát của phương trình đã cho là:

$$y = C_1e^x + C_2e^{2x} + xe^x(2x + 1).$$

Trường hợp 2.

$$f(x) = e^{\alpha x}[P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x].$$

a. Nếu $\alpha + i\beta$ không phải là nghiệm của phương trình đặc trưng thì nghiệm riêng có thể tìm được dưới dạng:

$$y_r = e^{\alpha x}[R(x)\cos\beta x + S(x)\sin\beta x].$$

b. Nếu $\alpha + i\beta$ là nghiệm bội k của phương trình đặc trưng thì nghiệm riêng có thể tìm được dưới dạng:

$$y_r = x^k e^{\alpha x}[R(x)\cos\beta x + S(x)\sin\beta x],$$

ở đây $R(x),\ Q(x)$ là các đa thức có bậc bằng $\max\{degQ(x),\ degP(x)\}$ và hệ số của chúng xác định được bằng phương pháp cân bằng hệ số.

Ví dụ

Giải phương trình

$$y'' + y = 4x \sin x.$$

Ta có ngay $\alpha = 0,\ \beta = 1,\ \alpha + i\beta = i$. Phương trình đặc trưng của phương trình thuần nhất tương ứng $\lambda^2 + 1 = 0$ có nghiệm phức $\lambda = \pm i$. Như vậy phương trình đã cho rơi vào trường hợp 2b với $k = 1$. Do đó nghiệm riêng của phương trình đã cho tìm được dưới dạng:

$$y_r = x[(ax + b)\cos x + (cx + d)\sin x].$$

Ta có:
$y_r' = (ax + b)\cos x + (cx + d)\sin x + x[a\cos x - (ax + b)\sin x + c\sin x + (cx + d)\cos x]$.
$y_r'' = 2a\cos x - 2(ax + b)\sin x + 2c\sin x + 2(cx + d)\cos x + x[-2a\sin x + 2c\cos x - (ax + b)\cos x - (cx + d)\sin x]$.
Đặt các biểu thức nhận được của y_r và y_r'' vào phương trình đầu và tiến hành đồng nhất thức hai vế ta nhận được $a = -1,\ b = c = 0,\ d = 1$. Từ đây ta có:

$$y_r = x(-x\cos x + \sin x)$$

Chú ý.

Nếu $f(x)$ không có dạng đặc biệt trên nhưng có thể viết thành:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x),$$

trong đó mỗi $f_i(x), i = \overline{1, n}$ có dạng đặc biệt như trên thì khi đó ta tìm được nghiệm riêng y_r dưới dạng:

$$y_r = y_1 + y_2 + ... + y_n,$$

trong đó y_i là nghiệm riêng tương ứng với f_i.

Ví dụ

Tìm nghiệm tổng quát của phương trình:

$$y'' - y' = 5e^x - \sin 2x.$$

Phương trình đặc trưng: $\lambda^2 - \lambda = 0$ có nghiệm $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1$ do đó nghiệm của phương trình thuần nhất là:

$$y_{tn} = C_1 + C_2 e^x.$$

Hiển nhiên vế phải của phương trình đã cho có dạng $f_1 + f_2$ với $f_1 = 5e^x$ và $f_2 = -\sin 2x$, do đó $y_r = y_1 + y_2$ với y_1 là nghiệm riêng của phương trình $y'' - y' = 5e^x$ và y_2 là nghiệm riêng của phương trình $y'' - y' = -\sin 2x$. Trước tiên ta đi tìm y_1.
Vì $f_1 = 5e^x$ nên ta có $\alpha = 1,\ \beta = 0,\ \alpha + i\beta = 1 + 0i = 1 = \lambda_2$, do đó ta có $k = 1$. Như vậy y_1 tìm được dưới dạng $y_1 = Cxe^x$. Lấy đạo hàm cấp một và hai của y_1 rồi thế vào phương trình tương ứng, tiến hành thực hiện phép đồng nhất thức ta nhận được $y_1 = 5xe^x$.
Đối với f_2 ta có $\alpha = 0,\ \beta = 2,\ \alpha + i\beta = 0 + 2i = 2i \neq \lambda_1, \lambda_2$. Do đó $y_2 = A\cos 2x + B\sin 2x$. Lấy đạo hàm cấp một và hai của y_2 rồi thế vào phương trình tương ứng, tiến hành thực hiện phép đồng nhất thức ta nhận được $y_2 = \frac{1}{5}\sin 2x - \frac{1}{10}\cos 2x$. Cuối cùng nghiệm tổng quát của phương trình đã cho nhận được là:

$$y = C_1 + C_2 e^x + 5xe^x + \frac{1}{5}\sin 2x - \frac{1}{10}\cos 2x.$$

Giải các phương trình sau đây:
1. $y'' + y' - 2y = 0$. **2.** $y'' + 4y' + 3y = 0$. **3.** $y'' - 2y' = 0$.
4. $2y'' - 5y' + 2y = 0$. **5.** $y'' - 4y' + 5y = 0$. **6.** $y'' + 2y' + 10y = 0$.
7. $y'' + 4y = 0$.
8. $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}$. **9.** $y'' + y = 4xe^{x}$. **10.** $y'' - y = e^{x} - x^2$.
11. $y'' + y' - 2y = 3xe^{x}$. **12.** $y'' - 3y' + 2y = \sin x$.
13. $y'' + y = 4\sin x$.
14. $y'' - 5y' + 4y = 4x^2e^{2x}$. **15.** $y'' - 3y' + 2y = x\cos x$.
16. $y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^{-x}$. **17.** $y'' + 2y' - 3y = x^2e^{x}$.
18. $y'' - 4y' + 8y = e^{2x} + \sin 2x$. **19.** $y'' - 9y = e^{3x}\cos x$.
20. $y'' - 2y' + y = 6xe^{x}$. **21.** $y'' + y = x\sin x$.
22. $y'' + 4y' + 4y = xe^{2x}$.
23. $y'' - 5y' = 3x^2 + \sin 5x$. **24.** $y'' - 2y' + 2y = e^{x} + x\cos x$.
25. $y'' + 6y' + 10y = 3xe^{-3x} - 2e^{3x}\cos x$.
26. $y'' - 8y' + 20y = 5xe^{4x}\sin 2x$.
27. $y'' + 7y' + 10y = xe^{-2x}\cos 5x$. **28.** $y'' - 2y' + 5y = 2xe^{x} + e^{x}\sin 2x$.