TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA

KHOA: TOÁN

BỘ MÔN: GIẢI TÍCH

ĐỀ THI CUỐI KỲ

Tên học phần: **Giải tích II**

Mã học phần: **3190121** Số tín chỉ: **4**

Phương pháp đánh giá: **Tự luận** Thời gian làm bài: **90** phút

Đề số: **09**

☒ *Sinh viên không được sử dụng tài liệu khi làm bài.*

☐ *Sinh viên được sử dụng tài liệu khi làm bài.*

Câu 1 (2.5 điểm):

Giải phương trình vi phân cấp một sau

$$y' - (4x - y + 1)^2 = 0, \qquad y(0) = 1.$$

Đặt

$$v = 4x - y + 1 \Rightarrow v' = 4 - y'.$$

Phương trình trở thành

$$\begin{aligned} &4 - v' - v^2 = 0 \\ \Rightarrow &v' = 4 - v^2 \\ \Rightarrow &\frac{dv}{4 - v^2} = dx \end{aligned}$$

Tích phân 2 vế ta được

$$\begin{aligned} \int \frac{dv}{4 - v^2} &= \int dx \\ \frac{1}{4} \ln \left| \frac{2 + v}{2 - v} \right| &= x + c \\ \ln \left| \frac{2 + v}{2 - v} \right| &= 4x + c. \end{aligned}$$

(Chú ý c ở hai dòng trên là khác nhau nhưng để khỏi dùng nhiều ký hiệu nên ta vẫn viết là c.)

Từ đó ta có

$$\begin{aligned} \left| \frac{2 + v}{2 - v} \right| &= e^{4x + c} = c\,e^{4x} && (\text{ lại một số } c \text{ khác}) \\ \frac{2 + v}{2 - v} = \frac{4 - (2 - v)}{2 - v} &= \frac{4}{2 - v} - 1 = c\,e^{4x} && (\text{ lại một số } c \text{ khác}) \\ \frac{4}{2 - v} &= 1 + c\,e^{4x} \\ 2 - v &= \frac{4}{1 + c\,e^{4x}} \\ v &= 2 - \frac{4}{1 + c\,e^{4x}} \end{aligned}$$

Trở về biến cũ ta được

$$4x - y + 1 = 2 - \frac{4}{1 + c\,e^{4x}}$$

Suy ra

$$y = 4x - 1 + \frac{4}{1 + c\,\mathrm{e}^{4x}}.$$

Sử dụng điều kiện ban đầu

$$y\left(0\right) = 1$$

ta có

$$1 = 4 \times 0 - 1 + \frac{4}{1 + c\,\mathrm{e}^{4 \times 0}}.$$

Suy ra $c = 1.$ Vậy nghiệm của phương trình ban đầu là

$$y = \frac{4}{1 + \mathrm{e}^{4x}} + 4x - 1.$$

Câu 2 (2.5 điểm):
Giải phương trình vi phân cấp hai sau

$$y'' - 4y' - 12y = xe^{4x}.$$

PTTN

$$y'' - 4y' - 12y = 0.$$

PTĐT

$$r^2 - 4r - 12 = 0$$

Nghiệm $r_1 = -2, r_2 = 6$. Nghiệm tổng quát của PTTN

$$y_{tn} = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{6x}$$

Tìm một nghiệm riêng của phương trình không thuần nhất. Do $\alpha = 4$ không là nghiệm của phương trình đặc trưng nên ta tìm nghiệm riêng dạng

$$y_r = e^{4x}\left(Ax + B\right).$$

Ta có

$$y_r' = 4e^{4x}\left(Ax + B\right) + Ae^{4x} = e^{4x}\left(4Ax + A + 4B\right)$$
$$y_r'' = 4e^{4x}\left(4Ax + A + 4B\right) + 4Ae^{4x} = e^{4x}\left(16Ax + 8A + 16B\right).$$

Thay vào phương trình ban đầu ta được

$$\begin{aligned} & e^{4x}\left(16Ax + 8A + 16B\right) - 4e^{4x}\left(4Ax + A + 4B\right) - 12e^{4x}\left(Ax + B\right) = xe^{4x} \\ \Rightarrow & \left(16Ax + 8A + 16B\right) - 4\left(4Ax + A + 4B\right) - 12\left(Ax + B\right) = x \\ & \Rightarrow -12Ax + \left(4A - 12B\right) = x \end{aligned}$$

Đồng nhất hệ số ta được

$$\begin{aligned} -12A &= 1 \Rightarrow & A &= -\frac{1}{12} \\ 4A - 12B &= 0 \Rightarrow & B &= -\frac{1}{36} \end{aligned}$$

$$y_r\left(x\right) = e^{4x}\left(-\frac{x}{12} - \frac{1}{36}\right) = -\frac{1}{36}\left(3x + 1\right)e^{4x}$$

Vậy nghiệm tổng quát của PT ban đầu là

$$y = y_{tn} + y_r = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{6x} - \frac{1}{36}\left(3x + 1\right)e^{4x}$$

Câu 3 (1.0 điểm):
Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số sau

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6n^3+9}{n^4 \sin^2 n}.$$

Ta có

$$\frac{6n^3+9}{n^4 \sin^2 n} > \frac{6n^3}{n^4 \sin^2(n)} > \frac{6n^3}{n^4} = \frac{6}{n}$$

Mà chuỗi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{n}$$

phân kỳ nên theo dấu hiệu so sánh trực tiếp chuỗi ban đầu phân kỳ.

Câu 4 (2.5 điểm):
Tìm miền hội tụ của chuỗi hàm

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n (4x-1)^n}{n}.$$

Cách 1. Đặt $X = 4x - 1$ chuỗi trên trở thành chuỗi lũy thừa quen thuộc (đặt tên chuỗi b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{n}.$$

Ký hiệu $a_n = \frac{8^n}{n}$.
Tính

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{8^{n+1}}{n+1}}{\frac{8^n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{8n}{n+1} = 8.$$

Bán kính hội tụ

$$R = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{8}.$$

Khoảng hội tụ của chuỗi b là

$$\left(-\frac{1}{8}, \frac{1}{8}\right)$$

Giải bất phương trình

$$-\frac{1}{8} < 4x - 1 < \frac{1}{8}$$

ta được

$$\frac{7}{32} < x < \frac{9}{32}.$$

Vậy khoảng hội tụ của chuỗi ban đầu

$$\left(\frac{7}{32}, \frac{9}{32}\right).$$

Xét thêm tại hai đầu mút

- Tại $x = \frac{9}{32}$ ta được chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n \left(4 \times \frac{9}{32} - 1\right)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

  Đây là chuỗi điều hòa và chuỗi này phân kỳ.

- Tại $x = \frac{7}{32}$ ta được chuỗi số

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n \left(4 \times \frac{7}{32} - 1\right)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Chuỗi này là chuỗi điều hòa đan dấu. Nó hội tụ theo dấu hiệu Leibniz.

Miền hội tụ của chuỗi ban đầu

$$\left[\frac{7}{32}, \frac{9}{32}\right).$$

Cách 2. Xem câu 4 đề số 2 (gửi kèm)

Câu 5 (1.5 điểm):

Tính tích phân mặt loại 2:

$$I = \iint_S xdydz - 2ydzdx + zdxdy$$

trong đó S là phần mặt paraboloid $y = 3x^2 + 3z^2$ nằm bên dưới mặt phẳng $y = 6$ lấy hướng âm của trục Oy.

Phương trình mặt S tương đương với

$$3x^2 - y + 3z^2 = 0.$$

Hình chiếu của mặt S lên mặt phẳng xOz là hình tròn

$$D = \{(x, z) : x^2 + z^2 \leq 2\}.$$

Đặt $F(x, y, z) = 3x^2 - y + 3z^2$. Khi đó vector gradient

$$\vec{n} = \nabla F = (F'_x, F'_y, F'_z) = (6x, -1, 6z).$$

là vector pháp tuyến của S và ta thấy pháp tuyến này hướng theo trục âm của trục Oy vì tọa độ thứ 2 của nó là -1. Khi đó

$$\begin{aligned}
I &= \iint_S xdydz - 2ydzdx + zdxdy \\
&= \iint_D 6x^2 + 2(3x^2 + 3z^2) + 6z^2 dxdz = \iint_D 12(x^2 + z^2)dxdz \\
&= 12 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r^3 dr = 12 \times 2\pi \times \left.\frac{r^4}{4}\right|_0^{\sqrt{2}} = 24\pi.
\end{aligned}$$

(Phần đổi biến tọa độ cực đã quen thuộc nên viết hơi tắt.)

Tổng cộng có: 05 câu.

HẾT

- -

(Sinh viên kẹp đề vào bài thi khi nộp.)

Đà Nẵng, ngày 30 tháng 11 năm 2023

TRƯỞNG BỘ MÔN