I. ĐỊNH NGHĨA PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP I

Phương trình chứa **đạo hàm** hoặc **vi phân** của *một* hoặc *một vài* hàm cần tìm, được gọi là ***phương trình vi phân***

Cấp cao nhất của đạo hàm trong phương trình vi phân được gọi là **cấp** của phương trình vi phân

$$(y'')^3(x) + 3\frac{(y')^5}{x} = x\sin x \qquad \frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{d^2y}{dx^2} = e^{2x} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 1$$

Dạng tổng quát của phương trình vi phân cấp *n*: $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$

II. NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Nghiệm của PT (1) trên I là các hàm $y=\varphi(x)$ xác định trên I sao cho khi thay vào (1) thỏa mãn

Đồ thị của nghiệm $y=\varphi(x)$ được gọi là ***đường cong tích phân***

- ***Nghiệm tổng quát:*** $y=\varphi(x,C);\ C=\text{const}$

- ***Nghiệm riêng*****:** Là trường hợp riêng của NTQ

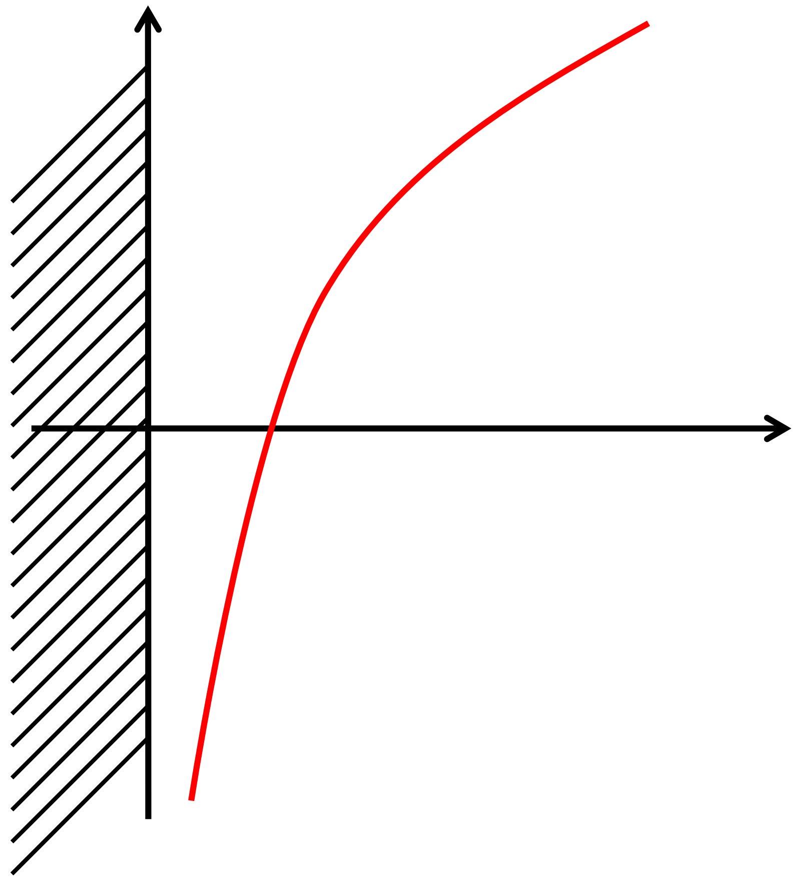
- ***Nghiệm kỳ dị*****:** Là nghiệm nhưng không là NR

II. PT TÁCH BIẾN (PT CÓ BIẾN SỐ PHÂN LY)

***Dạng*:** $f(x)dx = g(y)dy$

***Cách giải*:** Lấy tích phân hai vế ta được NTQ: $\int f(x)dx = \int g(y)dy + C$

***Chú ý*:** Hằng số C ta có thể thay bởi: $\ln|C|$; $\alpha \ln|C|$, $C \neq 0, \alpha \neq 0$.



Ví dụ 1: Giải phương trình: $x^2y(1+y^2)dx + xy^2(1+x^2)dy = 0 \quad (1)$

Giải: Ta có:

- $xy \neq 0: \quad (1) \Leftrightarrow \dfrac{xdx}{1+x^2} = -\dfrac{ydy}{1+y^2} \Leftrightarrow \int \dfrac{xdx}{(1+x^2)} = -\int \dfrac{ydy}{(1+y^2)}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\ln(1+x^2) = -\frac{1}{2}\ln(1+y^2) + \frac{1}{2}\ln|C|; \ (C \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow (1+x^2)(1+y^2) = |C|; C \neq 0$$

- $x = 0; \ \ y = 0$ TM $(1): NR$

KL: NTQ: $\quad (1+x^2)(1+y^2) = C$

Lưu ý: $y' = f(ax+by+c), \ \ a \neq 0, \ \ b \neq 0$

Đặt:

$$u = ax+by+c \Rightarrow u' = a+by'$$

$$\Rightarrow u' = a+b\ f(u)$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = u' = a+b\ f(u)$$

- $a+b\ f(u) = 0 \Rightarrow u \Rightarrow y$ - Thử trực tiếp vào PT
- $a+b\ f(u) \neq 0 \Rightarrow \dfrac{du}{a+b\ f(u)} = dx \ \ (\text{PL})$

Ví dụ 2: Giải phương trình: $y' = \dfrac{1-2x-3y}{4x+6y-5}$ (1)

Giải: Ta có $y' = \dfrac{-2x-3y+1}{-2(-2x-3y+1)-3}$

Đặt: $u = -2x-3y+1 \Rightarrow u' = -2-3y'$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{u'+2}{-3} = \frac{u}{-2u-3} \Leftrightarrow u' = \frac{3u}{2u+3} - 2 \Rightarrow du = \frac{-u-6}{2u+3}dx \ (2)$$

- $u = -6: \ y' = \dfrac{-6}{(-2)(-6)-3} = -\dfrac{2}{3} \Rightarrow y = -\dfrac{2}{3}x + C$
- $u \neq -6: \ (2) \Leftrightarrow \dfrac{2u+3}{u+6}du = -dx \Rightarrow \displaystyle\int \frac{2u+3}{u+6}du = -\int dx \Rightarrow 2u - 9\ln|u+6| = -x + C$

KL: NTQ(1): $2(-2x-3y+1) - 9\ln|-2x-3y+7| = -x + C$

$$y = -\frac{2}{3}x + C$$

II. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TUYẾN TÍNH CẤP 1

***Dạng*:** $y' + p(x)y = q(x)$

***Cách giải*:** Nhân hai vế cho $e^{\int p(x)dx}$

$$y' \, e^{\int p(x)dx} + p(x)y \, e^{\int p(x)dx} = q(x) \, e^{\int p(x)dx}$$

$$\left(y \cdot e^{\int p(x)dx} \right)' = q(x) \cdot e^{\int p(x)dx}$$

$$y \cdot e^{\int p(x)dx} = \int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + C$$

$$\boxed{y = e^{-\int p(x)dx} \left[\int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + C \right]}$$

Ví dụ: Giải phương trình: $y' - y\cot x = \sin x,\ \ x \in (0,\pi)$

Giải: Ta có $p(x) = -\cot x,\ \ q(x) = \sin x$

$$\text{NTQ}:\ y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx + C\right]$$

$$= e^{+\int \cot x dx}\left[\int \sin x \cdot e^{-\int \cot x dx}dx + C\right]$$

$$= e^{+\int \frac{\cos x}{\sin x}dx}\left[\int \sin x \cdot e^{-\int \frac{\cos x}{\sin x}dx}dx + C\right]$$

$$= e^{\ln|\sin x|}\left[\int \sin x \cdot e^{-\ln|\sin x|}dx + C\right]$$

$$= \sin x\left(\int \frac{\sin x}{\sin x}dx + C\right) = \sin x\left(x + C\right)$$

$$p(x) = -\cot x, \quad q(x) = \sin x$$

$$\int p(x)dx = \int -\cot x dx = -\int \frac{d \sin x}{\sin x} = -\ln|\sin x| = -\ln(\sin x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^{\int p(x)dx} = \dfrac{1}{\sin x} \\ e^{-\int p(x)dx} = \sin x \end{cases}$$

NTQ: $y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + C\right]$

$$= \sin x\left(\int \frac{\sin x}{\sin x} dx + C\right) = \sin x\left(x + C\right.$$

$, \quad q(x) = \sin x$

III. PHƯƠNG TRÌNH ĐẲNG CẤP

***Dạng*:** $y' = f\left(\dfrac{y}{x}\right)$

***Cách giải*:** Đặt $u = \dfrac{y}{x} \Rightarrow y = xu \Rightarrow y' = u + x \cdot u' \Rightarrow u + x \cdot u' = f(u)$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{f(u) - u}{x}$$

- $f(u) - u = 0$ - Thay vào PT, kiểm tra trực tiếp
- $f(u) - u \neq 0: \dfrac{du}{f(u) - u} = \dfrac{dx}{x}$

Ví dụ: Giải phương trình: $y - xy' = y\ln\frac{x}{y}$ (1)

TC:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{y}{x} - y' = -\frac{y}{x}\ln\frac{y}{x} \Leftrightarrow y' = \frac{y}{x} + \frac{y}{x}\ln\frac{y}{x} = f\left(\frac{y}{x}\right);\ f(t) = t + t\ln t$$

Đặt $u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = xu \Rightarrow y' = u + x\cdot u' \Rightarrow u + x\cdot u' = u + u\ln u \Rightarrow x\frac{du}{dx} = u\ln u$

$$\text{TH1}: u\ln u = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} u = 0 \Rightarrow y = 0\ (\text{L}) \\ u = 1 \Rightarrow y = x\ (\text{TM}(1)) \end{array}\right.$$

$\text{TH2}: u\ln u \neq 0:$

$$\text{TC}: \frac{du}{u\ln u} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int\frac{du}{u\ln u} = \int\frac{dx}{x} \Rightarrow \ln\left|\ln u\right| = \ln|x| + \ln|C|, C \neq 0$$

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{\ln u}{x}\right| = \ln|C| \Rightarrow y = xe^{Cx}, C \neq 0;$$

KL:NTQ(1) : $y = xe^{Cx}, C - const$

IV. PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TOÀN PHẦN

Dạng: $$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0;\ \text{TM}: \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\text{NTQ}: \left[\begin{array}{l} \displaystyle\int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy = C \\ \displaystyle\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy = C \end{array}\right.$$

$\left(x_0, y_0\right)$ là một điểm tùy chọn sao cho P, Q liên tục.

Ví dụ: GPT $(2y-3)dx+(2x+3y^2)dy=0 \quad (1)$

TC: $P(x,y)=2y-3;\ Q(x,y)=2x+3y^2$

$$\Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=2 \Rightarrow (1)-\text{VPTP}$$

$$\int_0^x P(x,y)dx+\int_0^y Q(0,y)dy=C$$

$$\Leftrightarrow \int_0^x (2y-3)dx+\int_0^y 3y^2dy=(2xy-3x)\Big|_{x=0}^{x=x}+y^3\Big|_{y=0}^{y=y}=2xy-3x+y^3=C$$

V. PHƯƠNG TRÌNH BERNOULLI

Dạng:

$$y' + p(x)y = q(x)\cdot y^{\alpha} \quad (1);\quad \alpha \neq 1,\ \alpha \neq 0$$

Cách giải: $TH1: y \neq 0:$ Chia hai vế cho

$$y^{\alpha}: (1) \Leftrightarrow y'y^{-\alpha} + p(x)y^{1-\alpha} = q(x) \quad (2)$$

Đặt: $z = y^{1-\alpha} \Rightarrow z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$

$$(2) \Leftrightarrow z' + (1-\alpha)p(x)\cdot z = (1-\alpha)q(x) - \text{VPTT}$$

$TH2: y = 0:$ Thay trực tiếp vào PT (thỏa mãn nếu \apha>0)

Ví dụ: GPT $xy' + y = y^2 \ln x \quad (1), \; y(1) = 1$

Rõ ràng $y = 0$ là một nghiệm của PT (1); Nếu $y \neq 0$ ta có:

$$x > 0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow y' + \frac{1}{x} y = \frac{\ln x}{x} \cdot y^2$$

$$\Leftrightarrow y' y^{-2} + \frac{1}{x} y^{-1} = \frac{\ln x}{x}$$

Đặt $z = y^{-1} \Rightarrow z' = -y^{-2} y'$ ta có:

$$-z' + \frac{1}{x} z = \frac{\ln x}{x} \Leftrightarrow z' - \frac{1}{x} z = -\frac{\ln x}{x} - \text{VPTT}$$

$$\text{NTQ}: z = x\left(\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + C\right) = \ln x + 1 + Cx$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{\ln x + 1 + Cx}; \quad y(1) = 1 \Rightarrow C = 0; \text{ KL}: \; y = \frac{1}{\ln x + 1}$$