Chuỗi số

1. Đại cương về chuỗi số

2. Chuỗi số dương

3. Chuỗi số có dấu bất kỳ

Định nghĩa 1 (Chuỗi số)

Cho dãy số $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$. *Khi đó tổng vô hạn*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

được gọi là chuỗi số.

- a_n *được gọi là số hạng thứ n;*
- $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ *được gọi là tổng riêng thứ n của chuỗi;*
- *Nếu* $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ *với* S *là một số hữu hạn thì ta nói chuỗi trên hội tụ và gọi* S *là tổng của chuỗi;*
- *Nếu* $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$ *hoặc không tồn tại thì ta nói chuỗi trên phân kỳ.*

Phần dư

- $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_n$ được gọi là phần dư thứ n của chuỗi. Chuỗi hội tụ khi và chỉ khi chuỗi phần dư $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ hội tụ. Rõ ràng khi đó:

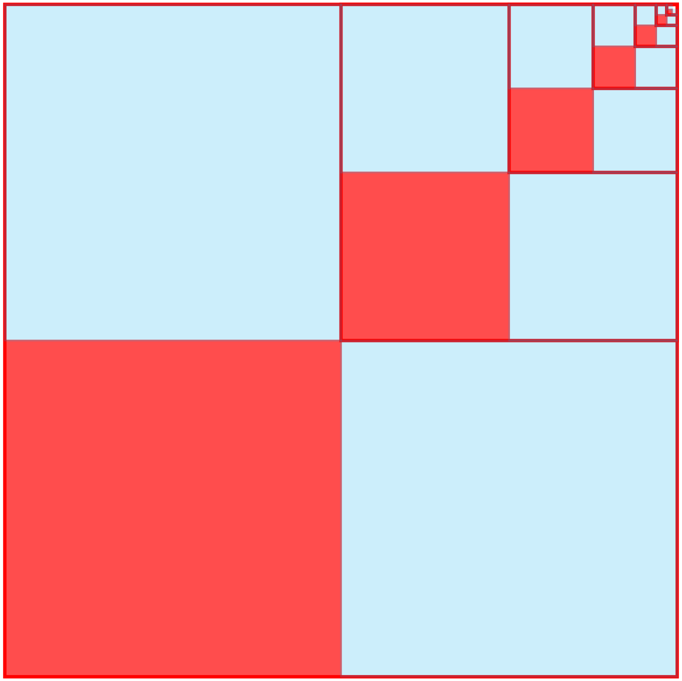
$$R_n \to 0 \quad (n \to \infty).$$

Nhận xét 1

- *Sự hội tụ hay phân kỳ của một chuỗi không thay đổi khi ta thêm, hoặc bớt, hoặc thay đổi một số* **hữu hạn** *số hạng của chuỗi.*
- *Đôi khi một chuỗi có thể bắt đầu từ một chỉ số khác 1, ví dụ:*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} = \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} + \cdots .$$

Ví dụ: Tính diện tích phần tô màu đỏ



$$S = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3}\cdot\frac{1}{2^3} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2n}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^n} = \frac{1}{3}.$$

Chuỗi cấp số nhân

Ví dụ 1

Xét chuỗi

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}, \ a \neq 0.$$

- $r = 1$: $S_n = a + a + \cdots + a = na \to \pm\infty$ khi $n \to \infty$. Vậy chuỗi phân kỳ.
- $r \neq 1$:

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$$

và

$$rS_n = ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n.$$

Suy ra

$$S_n - rS_n = a - ar^n \to S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}.$$

Nếu $-1 < r < 1$ thì $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} \to \dfrac{a}{1-r}$ khi $n \to \infty$. Chuỗi hội tụ và có tổng là $\dfrac{a}{1-r}$.

Nếu $r \leq -1$ hoặc $r > 1$ dãy số $\{r^n\}$ phân kỳ nên $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ không tồn tại. Vậy chuỗi phân kỳ.

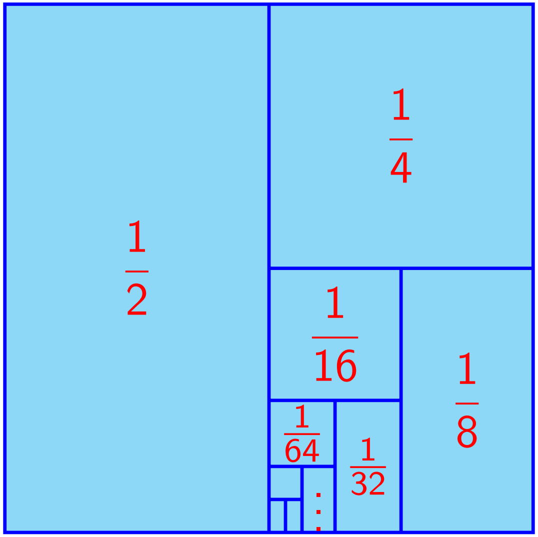
Ghi nhớ

Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$, với $a \neq 0$, hội tụ khi và chỉ khi $|r| < 1$; và khi đó tổng của chuỗi là $\dfrac{a}{1-r}$.

Ví dụ 2

Chứng minh rằng chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ *hội tụ và tính tổng của nó.*

Ta có $a=\dfrac{1}{2}, r=\dfrac{1}{2}\in(-1,1)$ nên chuỗi cấp số nhân hội tụ và có tổng bằng $\dfrac{1/2}{1-1/2}=1$.



Ví dụ 3

Tính tổng của chuỗi sau $\sum_{n=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-n}$.

Đây là chuỗi cấp số nhân với $a = 9 \cdot 10^{-1}$ và $r = 1/10 \in (-1, 1)$ nên chuỗi hội tụ và có tổng bằng

$$\sum_{n=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-n} = \frac{9 \cdot 10^{-1}}{1 - 1/10} = \frac{9/10}{9/10} = 1.$$

Nhận xét 2

Chuỗi trên có thể viết dưới dạng

$$\begin{aligned} 9 \cdot 10^{-1} + 9 \cdot 10^{-2} + 9 \cdot 10^{-3} + \cdots &= 0,9 + 0,09 + 0,009 + \cdots \\ &= 0,999 \ldots . \end{aligned}$$

Vậy $\boxed{0,\overline{9} = 0,999\ldots = 1}$.

Ví dụ 4

Viết số $2,3\overline{17} = 2,3171717\ldots$ *dưới dạng phân số* $\frac{a}{b}$ *với* $a, b \in \mathbb{Z}^*$.

Ta có

$$
\begin{aligned}
2,3171717\ldots &= 2,3 + \frac{17}{10^3} + \frac{17}{10^5} + \frac{17}{10^7} + \cdots \\
&= 2,3 + \frac{\frac{17}{10^3}}{1 - \frac{1}{10^2}} = 2,3 + \frac{\frac{17}{1000}}{\frac{99}{100}} \\
&= \frac{23}{10} + \frac{17}{990} = \frac{1147}{495}.
\end{aligned}
$$

Ví dụ 5

Tính tổng $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

Ta có

$$\begin{aligned}
S_n &= \ln\left(1-\frac{1}{2^2}\right)+\ln\left(1-\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\\
&= \ln\left(\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\right)\\
&= \ln\frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\frac{2\cdot 4}{3\cdot 3}\frac{3\cdot 5}{4\cdot 4}\cdot\ldots\cdots\frac{(n-1)(n+1)}{n\cdot n}\\
&= \ln\frac{n+1}{2n}.
\end{aligned}$$

Do đó $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\ln\frac{n+1}{2n} = \ln\frac{1}{2} = -\ln 2$. Vậy chuỗi trên hội tụ và có tổng bằng $S = -\ln 2$.

Ví dụ 6

Chứng minh rằng chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ *hội tụ và tính tổng của nó.*

Sử dụng tính chất $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ ta có

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right). \end{aligned}$$

Từ đó

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

Vậy chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ hội tụ và có tổng bằng 1.

Ví dụ 7

Chứng minh rằng chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})\sqrt{n(n+1)}}$ *hội tụ và tính tổng của nó.*

$$a_n = \frac{1}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})\sqrt{n(n+1)}} = \frac{(\sqrt{n+1})^2-(\sqrt{n})^2}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})\sqrt{n(n+1)}}$$

$$= \frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})\sqrt{n(n+1)}} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})\sqrt{k(k+1)}} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \to 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})\sqrt{n(n+1)}} = 1.$$

Ví dụ 8

Chứng minh rằng chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ *phân kỳ.*

Ta có

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \\
&= \overbrace{\ln\left(1+\frac{1}{1}\right)}^{k=1} + \overbrace{\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)}^{k=2} + \overbrace{\ln\left(1+\frac{1}{3}\right)}^{k=3} + \cdots + \overbrace{\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)}^{k=n-1} + \overbrace{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}^{k=n} \\
&= \ln(2) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln\left(\frac{4}{3}\right) + \cdots + \ln\left(\frac{n}{n-1}\right) + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\
&= \ln\left(2 \times \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{n}{n-1} \times \frac{n+1}{n}\right) \\
&= \ln(n+1) \to \infty \, (n \to \infty).
\end{aligned}
$$

Vậy chuỗi phân kỳ.

Điều kiện cần để chuỗi hội tụ

Định lý 1

Nếu chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ thì* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Thật vậy, nếu chuỗi hội tụ thì $S_n \to S$ (với $S \in \mathbb{R}$ nào đó) khi $n \to \infty$. Suy ra

$$a_n = S_n - S_{n-1} \to S - S = 0 \ (n \to \infty).$$

Hệ quả 1 (Điều kiện đủ để chuỗi phân kỳ)

Nếu $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ *thì* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *phân kỳ.*

Ví dụ 9

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+5}{10n^2+2}$ *phân kỳ bởi vì*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+5}{10n^2+2} = \frac{3}{10} \neq 0.$$

Ví dụ 10

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2-1}{3n^2+1}\right)^{n^2+2}$ *phân kỳ bởi vì*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n^2-1}{3n^2+1}\right)^{n^2+2} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{2}{3n^2+1}\right)^{n^2+2}$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty} -\frac{2(n^2+2)}{3n^2+1}} = e^{-2/3} \neq 0.$$

Nhận xét 3

Khi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ *chuỗi có thể hội tụ hoặc phân kỳ.*

Ví dụ 11 (Chuỗi điều hòa)

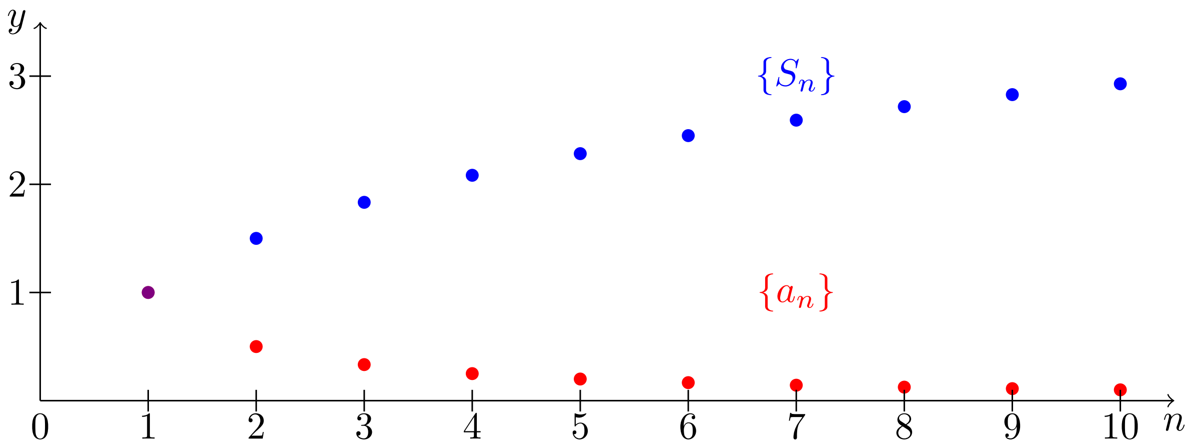
Xét chuỗi số sau $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Ta thấy chuỗi trên có số hạng tổng quát dần về 0 nhưng nó phân kỳ. Thật vậy, giả sử phản chứng chuỗi trên hội tụ và có tổng là S khi đó

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} = S_n + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} > S_n + n \cdot \frac{1}{2n} = S_n + 1/2.$$

Cho $n \to \infty$, ta suy ra $S \geq S + \frac{1}{2}$ (mâu thuẫn). Chứng tỏ giả sử phản chứng là sai. Vậy chuỗi điều hòa phân kỳ.

$\boxed{0.57721566490153286060651209008240243104215933593\ldots}$



Số hạng tổng quát và dãy tổng riêng của chuỗi điều hòa $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

Chú ý: Có thể chứng minh rằng

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = C + \ln n + \epsilon_n}$$

với $C = 0,5772\ldots$ là hằng số Euler-Mascheroni, $\epsilon_n \to 0$ $(n \to \infty)$.

Thêm một cách chứng minh chuỗi điều hòa phân kỳ

Ta có

$$\begin{aligned}
S_2 &= 1 + \frac{1}{2} \\
S_4 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 + \frac{2}{2} \\
S_8 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \\
&> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) = 1 + \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Sử dụng phương pháp quy nạp ta chứng minh được $S_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$ (dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $n \in \{0, 1\}$). Do đó

$$\lim_{n\to\infty} S_{2^n} = +\infty.$$

Vậy chuỗi điều hòa phân kỳ.

Tính chất của chuỗi số hội tụ

Định lý 2

Nếu $\sum a_n$ *và* $\sum b_n$ *là hai chuỗi hội tụ thì các chuỗi* $\sum ca_n$ *(c là hằng số),* $\sum(a_n + b_n)$ *và* $\sum(a_n - b_n)$ *cũng hội tụ và ta có:*

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n;$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n;$

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$

Matlab code

```
syms m;
limit(symsum(1/m,m,1,n)-log(n),n,inf)

ans =
eulergamma

>> vpa(ans,50)
ans =
0.57721566490153286060651209008240243104215933593992
```

Ví dụ 12

Tìm tổng của chuỗi sau $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n(n+1)}+\frac{1}{2^n}\right)$.

Ta có (theo Ví dụ 2)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1/2}{1-1/2}=1$$

và (theo Ví dụ 6)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1.$$

Vậy

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n(n+1)}+\frac{1}{2^n}\right)=3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=3+1=4.$$

Chuỗi số dương

Chuỗi số $\sum a_n$ được gọi là chuỗi số dương nếu $a_n \geq 0$ với mọi n.

Nhận xét 4

Với chuỗi số dương, dãy tổng riêng $\{S_n\}$ là dãy không giảm. Vậy chuỗi số dương hội tụ khi và chỉ khi dãy các tổng riêng bị chặn (trên).

Ví dụ 13

Xét chuỗi số $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{n(n+1)}$.

Ta có $0 \leq \dfrac{\cos^2 k}{k(k+1)} \leq \dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$. Do đó

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos^2 k}{k(k+1)} \leq \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} < 1.$$

Vậy dãy tổng riêng bị chặn (trên) nên chuỗi đã cho hội tụ.

Một số định lý quan trọng của chuỗi số dương:

- Dấu hiệu so sánh trực tiếp
- Dấu hiệu so sánh qua giới hạn
- Dấu hiệu tích phân
- Dấu hiệu d'Alembert
- Dấu hiệu Cauchy
- $\dots$

Định lý 3 (Dấu hiệu so sánh I)

Cho hai chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *và* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. *Giả sử tồn tại* n_0 *sao cho* $a_n \leq b_n, \forall n \geq n_0$. *Khi đó:*

- *Nếu* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *hội tụ thì* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ;*
- *Nếu* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *phân kỳ thì* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *phân kỳ.*

Ví dụ 14

Xét sự hội tụ của chuỗi số sau $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\sin^2 n}{n^2-\cos n}$.

Giải: Ta có

$$\frac{n+\sin^2 n}{n^2-\cos n} \geq \frac{n}{n^2+1} \geq \frac{n}{n^2+n^2} = \frac{1}{2n}, \forall n.$$

Mà chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ phân kỳ nên theo dấu hiệu so sánh chuỗi ban đầu phân kỳ.

Ví dụ 15

Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi sau: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$.

Ta có

$$0 < \frac{e^{1/n}}{n^2} < \frac{e}{n^2}, \forall n.$$

Mà chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e}{n^2}$ hội tụ nên chuỗi ban đầu hội tụ.

Nhận xét 5

Khi các số hạng của chuỗi đang xét nhỏ hơn các số hạng của một chuỗi phân kỳ hoặc lớn hơn các số hạng của một chuỗi hội tụ thì dấu hiệu so sánh I không áp dụng được. Ví dụ với chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - 1}$, *bất đẳng thức* $\frac{1}{2^n - 1} > \frac{1}{2^n}$ *không có ý nghĩa gì nếu sử dụng tiêu chuẩn so sánh.*

Định lý 4 (Dấu hiệu so sánh II)

Cho hai chuỗi số dương $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *và* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

- *Nếu* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = c$ *với* $0 < c < \infty$ *thì* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *và* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *cùng hội tụ hay cùng phân kỳ.*
- *Nếu* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$ *và* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *hội tụ thì* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ.*
- *Nếu* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = +\infty$ *và* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *phân kỳ thì* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *phân kỳ.*

Ví dụ 16

Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi sau $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+3}{n^2-n+1}$.

Đặt $a_n = \dfrac{\sqrt{n}+3}{n^2-n+1}$, chọn $b_n = \dfrac{1}{n^{3/2}}$, ta có

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n}+3)/(n^2-n+1)}{1/n^{3/2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{3/2}(\sqrt{n}+3)}{n^2-n+1} = 1.$$

Mà chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ hội tụ nên theo dấu hiệu so sánh, chuỗi ban đầu hội tụ.

Nhận xét 6

Nếu chọn $b_n = \dfrac{1}{n^2}$ *thì* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(\sqrt{n}+3)}{n^2-n+1} = \infty$. *Khi đó ta sẽ không thu được kết luận gì. Do đó, cần chú ý trong việc chọn chuỗi số để so sánh cho đúng.*

Ví dụ 17

Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi sau: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{2n^3-4n+5}$.

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n-1}{2n^3-4n+5}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(3n-1)\,n^2}{2n^3-4n+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n^3-n^2}{2n^3-4n+5}.$$

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3\cancel{n^3}}{\cancel{n^3}} - \frac{n^2}{n^3}}{\frac{2\cancel{n^3}}{\cancel{n^3}} - \frac{4n}{n^3} + \frac{5}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3-\frac{1}{n}}{2-\frac{4}{n^2}+\frac{5}{n^3}} = \frac{3}{2}.$$

Mà chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ hội tụ nên chuỗi ban đầu hội tụ.

Ví dụ 18

Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi sau: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2n^2+n+5}$.

Xét chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$.

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{n}}{2n^2+n+5}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\cdot n^{\frac{3}{2}}}{2n^2+n+5}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2n^2+n+5} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}}}{\frac{2\cancel{n^2}}{\cancel{n^2}} + \frac{n}{n^2} + \frac{5}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2+\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}} = \frac{1}{2}.$$

Mà chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ hội tụ nên chuỗi ban đầu hội tụ.

Ví dụ 19

Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi sau:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{n\sqrt{n+1}} + \ldots$$

Xét chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$.

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}\sqrt{n}}{\cancel{n}\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}}}{\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}} + \frac{1}{n}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{n}}} = 1.$$

Mà chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ hội tụ nên chuỗi ban đầu hội tụ.

Chú ý

Nếu $a_n > 0$ và $b_n > 0$ là hai VCB tương đương thì $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.

Ví dụ 20

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\pi}{2^n}$ *hội tụ vì* $\sin \frac{\pi}{2^n} \sim \frac{\pi}{2^n}$ *khi* $n \to \infty$ *và chuỗi* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2^n}$ *hội tụ.*

Nhận xét 7

Nếu bỏ đi điều kiện dương thì kết luận trên không còn đúng. Xét ví dụ $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{n} \sim \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ *khi* $n \to \infty$ *nhưng chuỗi* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ *hội tụ (CM xem phần chuỗi đan dấu ở sau) còn chuỗi* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$ *phân kỳ.*

Ví dụ 21

Khảo sát sự hội tụ của chuỗi sau $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n + n^3}{2^n + \ln^3 n}$.

Ta có $e^n + n^3 \sim e^n$, và $2^n + \ln^3 n \sim 2^n$ khi $n \to \infty$. Suy ra

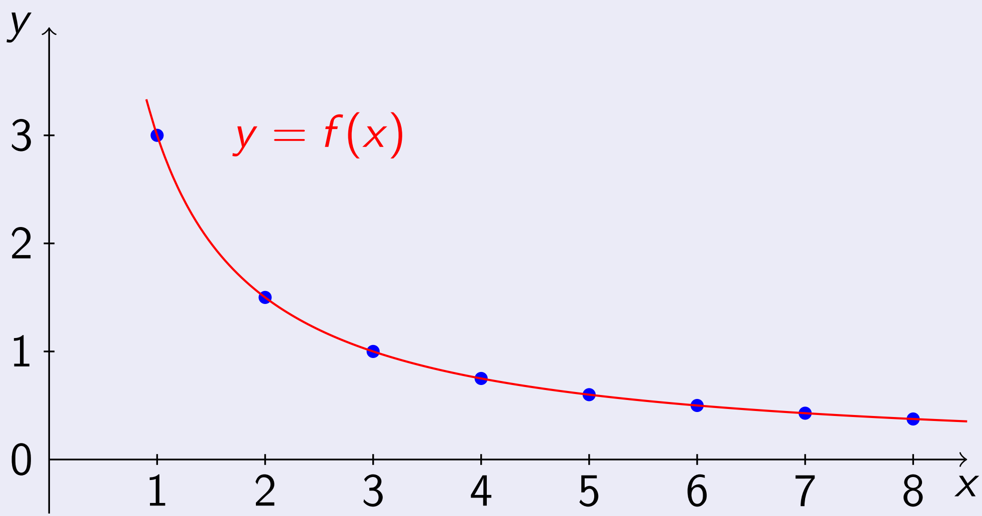
$$\frac{e^n + n^3}{2^n + \ln^3 n} \sim \left(\frac{e}{2}\right)^n > 1, \text{ khi } \; n \to \infty.$$

Vậy chuỗi đã cho phân kỳ.

Dấu hiệu tích phân

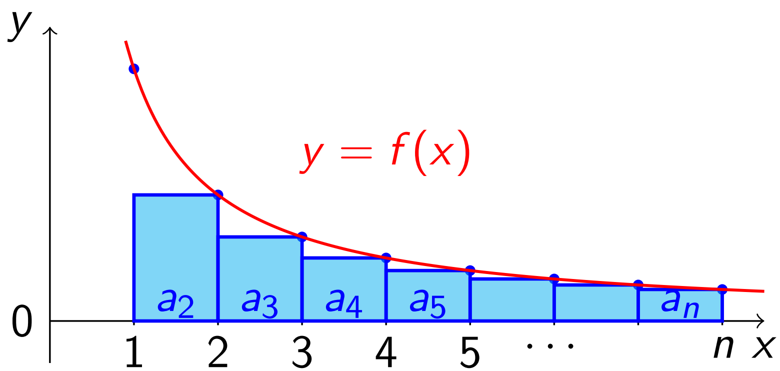
Định lý 5

Cho f là một hàm không âm, liên tục, đơn điệu giảm trên đoạn $[1, +\infty)$. Khi đó chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n := \sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ *và tích phân suy rộng* $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx$ *cùng hội tụ hoặc cùng phân kỳ.*

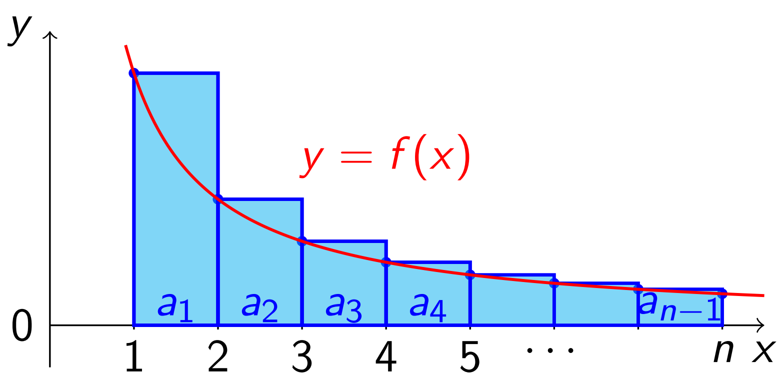


Phác họa chứng minh

1. Nếu tích phân $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ hội tụ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hội tụ.



2. Nếu tích phân $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ phân kỳ thì chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ phân kỳ.



Ví dụ 22

Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi sau: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{1+10n}$.

Dễ thấy hàm $f(x) = \dfrac{1}{1+10x}$ dương và giảm về 0 khi $x \to \infty$.

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{1+10x} = \lim_{t\to\infty} \int\limits_1^{t} \frac{dx}{1+10x} = \lim_{t\to\infty} \left[\frac{1}{10} \ln(1+10x) \right] \Bigg|_1^t$$
$$= \frac{1}{10} \lim_{t\to\infty} [\ln(1+10t) - \ln 11] = \infty.$$

Vậy chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{1+10n}$ phân kỳ theo dấu hiệu tích phân.

Ví dụ 23 (Chuỗi Riemann)

Chứng minh rằng chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ *hội tụ khi* $p > 1$.

Dễ thấy $f(x) = 1/x^p$ liên tục, dương, giảm trên $[1, +\infty)$.

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{t\to\infty} \int\limits_1^{t} \frac{dx}{x^p} = \lim_{t\to\infty} \int\limits_1^{t} x^{-p} dx = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{1}{-p+1} x^{-p+1} \right) \Big|_1^t$$

$$= \frac{1}{1-p} \lim_{t\to\infty} \left(\frac{1}{x^{p-1}} \right) \Big|_1^t = \frac{1}{1-p} \lim_{t\to\infty} \left(\frac{1}{t^{p-1}} - 1 \right) = \frac{1}{p-1}.$$

Vậy chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ hội tụ khi $p > 1$.

Ghi nhớ: Chuỗi số $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$

- Hội tụ nếu $p > 1$;
- Phân kỳ nếu $p \leq 1$.

Ví dụ 24

Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi sau $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$.

Dễ dàng kiểm tra được rằng hàm số $f(x) = \ln x / x^2$ là hàm số liên tục, dương và giảm trên $[2, +\infty)$. Sử dụng tích phân từng phần ta có

$$\begin{aligned}
\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}\, dx &= \lim_{b \to \infty} \int_1^{b} \frac{\ln x}{x^2}\, dx \\
&= \lim_{b \to \infty} -\frac{1}{x} \ln x \Big|_1^b + \int_1^b \frac{1}{x^2}\, dx \\
&= \lim_{b \to \infty} \left(-\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} \right) \Big|_1^b \\
&= \lim_{b \to \infty} \left(1 - \frac{1}{b} - \frac{\ln b}{b} \right) = 1.
\end{aligned}$$

Vậy tích phân $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}\, dx$ hội tụ nên chuỗi số $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ cũng hội tụ.

Ví dụ 25

Xét sự hội tụ của chuỗi số $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

Dễ thấy hàm $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ là hàm liên tục và dương và đơn điệu giảm trên $[2, +\infty)$. Ta có

$$\int \frac{dx}{x \ln x} = \int \frac{d \ln x}{\ln x} = \ln|\ln x| + C.$$

Do đó

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \lim_{b \to \infty} \ln|\ln x|\Big|_2^b = \lim_{b \to \infty} \ln|\ln b| - \ln|\ln 2| = +\infty.$$

Vậy chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ phân kỳ.

Ví dụ 26

Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi sau: $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\arctan n}{1+n^2}$.

Ta thấy $\arctan n < \dfrac{\pi}{2}$. Áp dụng DHTP cho chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{1+n^2}$ ta có:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{t\to\infty} (\arctan x)\Big|_1^t$$

$$= \lim_{t\to\infty} (\arctan t - \arctan 1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Dễ thấy $a_n = \dfrac{1}{1+n^2}$ đơn điệu và giảm về 0 khi $n \to \infty$. Vậy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$ hội tụ nên theo dấu hiệu so sánh chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\arctan n}{1+n^2}$ hội tụ.

Chú ý: Sử dụng trực tiếp dấu hiệu so sánh với chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\pi}{2n^2}$ sẽ dễ hơn.

Ví dụ 27

Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi sau: $\sum_{n=0}^{\infty} ne^{-n}$.

Dễ thấy hàm số $f(x) = xe^{-x}$ liên tục, dương và đơn điệu giảm trên đoạn $[1, +\infty]$ $(f'(x) = (1-x)e^{-x})$. Xét tích phân suy rộng sau

$$\int_0^{\infty} xe^{-x}dx = \lim_{t\to\infty} \int_0^t xe^{-x}dx.$$

Sử dụng công thức tích phân từng phần

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} \int_0^t xe^{-x}dx &= \lim_{t\to\infty} \left[-xe^{-x}\Big|_0^t - \int_0^t \left(-e^{-x}\right) dx \right] \\ &= \lim_{t\to\infty} \left[\left(-te^{-t} + 0\right) - e^{-x}\Big|_0^t \right] \\ &= \lim_{t\to\infty} \left[-te^{-t} - e^{-t} + 1 \right] = 1.\end{aligned}$$

Vậy chuỗi hội tụ.

Chú ý: Chúng ta cũng có thể sử dụng dấu hiệu so sánh để giải ví dụ này.

Nhận xét 8

Nếu $a_n \sim \dfrac{C}{n^p}$ *khi* $n \to \infty$, $C > 0$ *thì chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

- *hội tụ nếu* $p > 1$;
- *phân kỳ nếu* $p \leq 1$.

Ví dụ 28

Chuỗi số $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n\sqrt{n+3}}$ *phân kỳ vì* $\dfrac{2n-1}{n\sqrt{n+3}} \sim \dfrac{2n}{n\sqrt{n}} = \dfrac{2}{n^{0.5}}$, *khi* $n \to \infty$.

Ví dụ 29

Chuỗi số $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \sin \frac{1}{n}}{2n^3+3n+1}$ *hội tụ vì* $\dfrac{n^2 \sin \frac{1}{n}}{2n^3+3n+1} \sim \dfrac{n^2}{2n^3} \cdot \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{2n^2}$, *khi* $n \to \infty$.

Ví dụ 30

Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi số sau: $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^p \ln\frac{n+1}{n-1}$.

Giải: Ta có

$$a_n = (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^p \ln\frac{n+1}{n-1} = \frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})^p}\ln\left(1+\frac{2}{n-1}\right)$$
$$\sim \frac{1}{(2n^{1/2})^p}\left(\frac{2}{n-1}\right) \sim \frac{1}{2^{p-1}}\frac{1}{n^{p/2+1}} \quad (n\to\infty).$$

Suy ra

- Nếu $p/2+1>1$ tức là $p>0$ thì chuỗi đã cho hội tụ;
- Nếu $p/2+1\le 1$ tức là $p\le 0$ thì chuỗi đã cho phân kỳ.

Ví dụ 31

Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi số sau: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-n\sin\frac{1}{n}\right)^{\alpha}$.

Sử dụng khai triển Maclaurin của hàm $\sin x$ ta có

$$\begin{aligned}
a_n &= \left(1-n\sin\frac{1}{n}\right)^{\alpha}\\
&= \left(1-n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{6n^3}+o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)\right)^{\alpha}\\
&= \left(\frac{1}{6n^2}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)^{\alpha}\sim\frac{1}{6^{\alpha}n^{2\alpha}}\ \ (n\to\infty).
\end{aligned}$$

Ta có chuỗi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{6^{\alpha}n^{2\alpha}}$ hội tụ nếu $\alpha>\frac{1}{2}$ và phân kỳ nếu $\alpha\le\frac{1}{2}$. Vậy chuỗi ban đầu hội tụ nếu $\alpha>\frac{1}{2}$ và phân kỳ nếu $\alpha\le\frac{1}{2}$.

Dấu hiệu d'Alembert

Định lý 6 (Dấu hiệu d'Alembert)

Cho chuỗi dương $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. *Giả sử tồn tại hữu hạn hay vô hạn*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = d.$$

Khi đó:

- *Nếu* $d < 1$ *thì* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ;*
- *Nếu* $d > 1$ *thì* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *phân kỳ.*

Chú ý: Nếu $d = 1$ thì $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ có thể hội tụ, có thể phân kỳ.

Ví dụ 32

Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi sau $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)^2}}{\frac{3^n}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{3^{n+1}}{3^n} \cdot \frac{n^2}{(n+1)^2}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[3\left(\frac{n}{n+1}\right)^2\right] = 3 \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^2$$

$$= 3 \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^2 = 3.$$

Vậy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2}$ phân kỳ.

Ví dụ 33

Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi sau: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(\ln 3)^n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^3}{(\ln 3)^{n+1}}}{\frac{n^3}{(\ln 3)^n}} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{(\ln 3)^n}{(\ln 3)^{n+1}} \cdot \frac{(n+1)^3}{n^3}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{\ln 3} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^3\right] = \frac{1}{\ln 3} \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3$$

$$= \frac{1}{\ln 3} \cdot 1 = \frac{1}{\ln 3} < 1.$$

Vậy chuỗi đã cho hội tụ theo dấu hiệu d'Alembert.

Ví dụ 34

Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi sau:

$$\frac{(1!)^2}{2!}+\frac{(2!)^2}{4!}+\ldots+\frac{(n!)^2}{(2n)!}+\ldots$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{((n+1)!)^2}{(n!)^2}\cdot\frac{(2n)!}{(2n+2)!}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(n!\,(n+1))^2}{(n!)^2}\cdot\frac{\cancel{(2n)!}}{\cancel{(2n)!}\,(2n+1)\,(2n+2)}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\cancel{(n!)^2}(n+1)^2}{\cancel{(n!)^2}}\cdot\frac{1}{(2n+1)\,(2n+2)}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{4n^2+2n+4n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{4n^2+6n+2}=\frac{1}{4}.$$

Vậy chuỗi đã cho hội tụ theo dấu hiệu d'Alembert.

Ví dụ 35

Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi sau:

$$\frac{3\cdot 1!}{1}+\frac{3^2\cdot 2!}{2^2}+\frac{3^3\cdot 3!}{3^3}+\ldots+\frac{3^n\cdot n!}{n^n}+\ldots$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{3^n n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{3^{n+1}(n+1)!}{3^n n!}\cdot\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{3\cancel{n!}\cancel{(n+1)}}{\cancel{n!}}\cdot\frac{n^n}{(n+1)^n\cancel{(n+1)}}\right]$$

$$=3\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}=3\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$=\frac{3}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}=\frac{3}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{3}{e}>1.$$

Kết luận chuỗi đã cho phân kỳ.

Dấu hiệu Cauchy

Định lý 7 (Dấu hiệu Cauchy)

Cho chuỗi dương $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. *Giả sử tồn tại hữu hạn hay vô hạn*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = c.$$

Khi đó:

- *Nếu* $c < 1$ *thì* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *hội tụ;*
- *Nếu* $c > 1$ *thì* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *phân kỳ.*

Chú ý: Nếu $c = 1$ thì $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ có thể hội tụ, có thể phân kỳ.

Ví dụ 36

Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi sau: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^{3n-1}}$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{2^{3n-1}}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^{3-\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^3 \cdot 2^{-\frac{1}{n}}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot 2^{\frac{1}{n}}}{8} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{8} \cdot \lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{n}} \\
&= \infty \cdot 1 = \infty.
\end{aligned}$$

Vậy theo dấu hiệu Cauchy chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^{3n-1}}$ phân kỳ.

Ví dụ 37

Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^5 \left(\frac{3n+2}{4n+3}\right)^n$.

Ta có

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^5 \left(\frac{3n+2}{4n+3}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{4n+3} \sqrt[n]{n^5}$$
$$= \frac{3}{4} \lim_{n\to\infty} e^{\frac{5\ln n}{n}} = \frac{3}{4} e^0 = \frac{3}{4} < 1.$$

Vậy chuỗi hội tụ theo dấu hiệu Cauchy.

Ví dụ 38

Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^3}$.

Ta có

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^2}$$
$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}n^2\ln\left(\cos\frac{1}{n}\right)}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}n^2\ln\left(1-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)}$$
$$=e^{\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)}=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}<1.$$

Vậy chuỗi hội tụ theo dấu hiệu Cauchy.

Ví dụ 39

Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\sqrt{n^4+3n+1}}$.

Ta có

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\sqrt{n^4+3n+1}}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{\frac{\sqrt{n^4+3n+1}}{n}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^{-\frac{n+1}{2}}\right]^{-\frac{2}{n+1}\cdot\frac{\sqrt{n^4+3n+1}}{n}}=e^{-2}=\frac{1}{e^2}<1.$$

Vậy chuỗi hội tụ theo dấu hiệu Cauchy.

Nhận xét 9

Dấu hiệu d'Alembert dễ sử dụng hơn dấu hiệu Cauchy. Tuy nhiên dấu hiệu Cauchy mạnh hơn dấu hiệu d'Alembert.

Ví dụ 40

Xét sự hội tụ của chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{(-1)^n - n}$.

Xét tỉ số

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{(-1)^{n+1}-(n+1)}}{2^{(-1)^n-n}} = 2^{(-1)^{n+1}-(n+1)-(-1)^n+n} = 2^{2(-1)^{n+1}-1}$$
$$= \begin{cases} 2^{-3} = 1/8 & n = 2k \\ 2^1 = 2 & n = 2k-1. \end{cases}$$

Vậy dãy tỉ số không thỏa mãn giả thiết của dấu hiệu d'Alembert nên ta không áp dụng được.

Áp dụng dấu hiệu Cauchy ta có

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{2^{(-1)^n - n}} = 2^{\dfrac{(-1)^n - n}{n}} \to 2^{-1} < 1.$$

Vậy chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{(-1)^n - n}$ hội tụ theo dấu hiệu Cauchy.

Chuỗi có dấu bất kỳ

Định lý 8 (Dấu hiệu Leibniz)

Giả sử a_n *là dãy số dương sao cho*

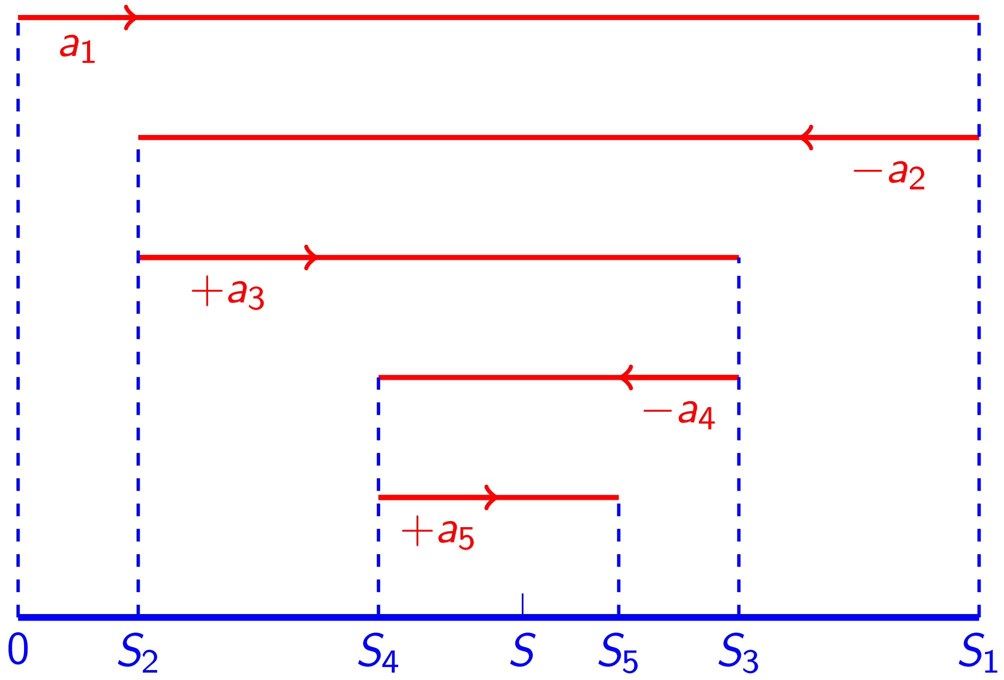
- $a_{n+1} < a_n, \ \forall n,$
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Khi đó chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ *hội tụ và có tổng* $0 < S < a_1$.

Nhận xét 10

Với chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ $(a_n > 0)$, *ta cũng có kết luận tương tự.*

Minh họa dấu hiệu Leibniz



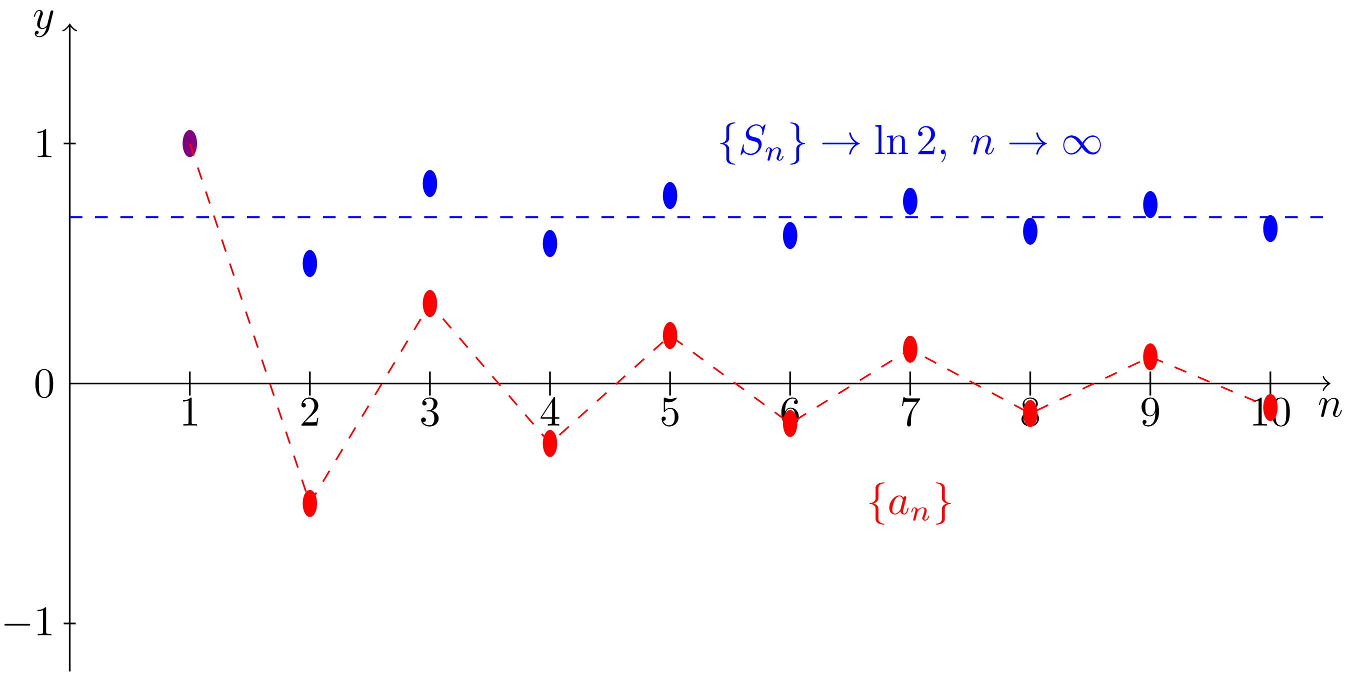
Ví dụ 41 (Chuỗi điều hòa đan dấu)

Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi sau: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

Xét $a_n = \dfrac{1}{n}$. Dễ thấy

- $a_n = \dfrac{1}{n} \to 0$ khi $n \to \infty$.
- $a_{n+1} = \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n} = a_n, \forall n$.

Theo định lý Leibniz chuỗi điều hòa đan dấu hội tụ.



Số hạng tổng quát và dãy tổng riêng của chuỗi điều hòa đan dấu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

Ví dụ 42

Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi sau: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^{n+1}}$.

Ta thấy số hạng tổng quát của chuỗi $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^{n+1}} \to 0$ khi $n \to \infty$. Tuy nhiên chuỗi trên phân kỳ. Thật vậy , ta có

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^{n+1}} = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{n-1} = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n-1} + \frac{1}{n-1}.$$

Chuỗi số $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n-1}$ hội tụ theo dấu hiệu Leibniz, còn chuỗi thứ hai $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1}$ phân kỳ nên chuỗi $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^{n+1}}$ phân kỳ.

Ví dụ 43

Xét sự hội tụ của chuỗi số sau $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n-5}{n^2+2}$.

Giải:

Với $n > 5$ ta có $a_n = \dfrac{n-5}{n^2+2} > 0$ và dần tới 0 khi $n \to \infty$. Để xét tính đơn điệu của a_n ta xét hàm số

$$f(x) = \frac{x-5}{x^2+2}, \ x \in [5, +\infty).$$

Ta có

$$f'(x) = \frac{x^2+2-(x-5)2x}{(x^2+2)^2} = \frac{-x^2+10x+2}{(x^2+2)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2+10x+2 = 0 \Leftrightarrow x = 5 \pm \sqrt{27}.$$

x	$-\infty$		$5-\sqrt{27}$		$5+\sqrt{27}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	0

Từ bảng biến thiên ta thấy với $x > 5+\sqrt{27}$ hàm $f(x)$ giảm. Vậy a_n giảm với mọi $n \geq 11 = 5+\sqrt{36} > 5+\sqrt{27}$. Do đó theo dấu hiệu Leibniz chuỗi $\sum\limits_{n=11}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n-5}{n^2+2}$ hội tụ. Mà tính chất hội tụ, phân kỳ của một chuỗi không phụ thuộc vào một số hữu hạn số hạng ban đầu nên chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{n-5}{n^2+2}$ hội tụ.

Ví dụ 44

Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi sau: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-3}\sqrt{n}}{n+4}$.

Nhận xét: Lũy thừa của -1 không có dạng $(-1)^n$ hay $(-1)^{n-1}$ không ảnh hưởng đến việc áp dụng dấu hiệu Leibniz.
Ta có

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n+4} = 0.$$

Để kiểm tra tính đơn điệu giảm của a_n ta xét hàm số: $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+4}$. Ta có :

$$f'(x) = \frac{4-x}{2\sqrt{x}(x+4)^2} < 0, \forall x > 4.$$

Vậy hàm số f giảm trên đoạn $[4, +\infty)$ nên $a_{n+1} < a_n, \forall n \geq 4$.
Vậy chuỗi đan dấu trên hội tụ theo dấu hiệu Leibniz.

Ví dụ 45

Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi sau: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+3}{3n+4}$.

Ta thấy chuỗi trên là chuỗi đan dấu nhưng

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2n+3}{3n+4} = \frac{2}{3}$$

nên điều kiện thứ hai của dấu hiệu Leibniz không thỏa mãn cho nên ta không áp dụng được dấu hiệu Leibniz. Tuy nhiên vì số hạng tổng quát không dần tới 0:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{3} \neq 0$$

nên chuỗi đã cho phân kỳ.

Ví dụ 46

Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi sau: $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \ln n}{n}$.

Sử dụng quy tắc l'Hôpital cho hàm $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, ta có

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0.$$

Để kiểm tra tính đơn điệu giảm của a_n ta xét hàm số $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$. Ta có :

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0, \forall x > e.$$

Vậy hàm số f giảm trên đoạn $[e, +\infty)$ nên $a_{n+1} < a_n, \forall n \geq 3$.
Vậy chuỗi đan dấu trên hội tụ theo dấu hiệu Leibniz.

Luyện tập

Ví dụ 47 (Đề thi năm 2019)

Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số sau $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{1}{n}-\sqrt{1-\tan\frac{1}{n}}\right)$

Ta có $a_n = \cos\dfrac{1}{n} - \sqrt{1-\tan\dfrac{1}{n}} = \cos\dfrac{1}{n} - 1 + 1 - \sqrt{1-\tan\dfrac{1}{n}}$. Ta có

$$\cos\frac{1}{n} - 1 \sim -\frac{1}{2}\frac{1}{n^2},\ (n\to\infty).$$

$$\sqrt{1-\tan\frac{1}{n}} - 1 \sim -\frac{1}{2}\tan\frac{1}{n} \sim -\frac{1}{2}\frac{1}{n}$$

Vậy $a_n \sim \dfrac{1}{2n}$. Chuỗi phân kỳ.

Ví dụ 48 (Đề thi năm 2019)

Khảo sát sự hội tụ của chuỗi số sau $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\tan\frac{1}{n^2}-\ln\left(\cos\frac{2}{n}\right)\right)$

Hội tụ tuyệt đối và bán hội tụ

Định nghĩa 2

- *Chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *với* a_n *có dấu bất kỳ được gọi là hội tụ tuyệt đối nếu chuỗi* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *hội tụ.*
- *Một chuỗi hội tụ nhưng không hội tụ tuyệt đối được gọi là hội tụ có điều kiện hay bán hội tụ.*

Định lý 9

Mọi chuỗi hội tụ tuyệt đối đều hội tụ.

Ví dụ 49

- *Chuỗi* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ *hội tụ có điều kiện,*
- *Chuỗi* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$ *hội tụ tuyệt đối.*

Ví dụ 50

Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi sau: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Vậy chuỗi hội tụ tuyệt đối, nên hội tụ.

Ví dụ 51

Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi sau: $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\sqrt{n}}{\ln n}$.

Xét $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\ln n}$. Ta có

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\ln n} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\ln x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{2} \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \lim_{x\to\infty} \sqrt{x} = \infty.$$

Số hạng tổng quát không dần về 0. Vậy chuỗi phân kỳ.

Ví dụ 52

Xét sự hội tụ, phân kỳ của chuỗi sau: $\frac{2}{3!} - \frac{2^2}{5!} + \frac{2^3}{7!} - \frac{2^4}{9!} + \dots$

Số hạng tổng quát của chuỗi: $(-1)^{n+1}\frac{2^n}{(2n+1)!}$. Ta có

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}(2n+1)!}{2^n(2n+3)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{(2n+2)(2n+3)} = 0.$$

Vậy chuỗi hội tụ tuyệt đối,nên hội tụ.

Ví dụ 53

Chứng minh rằng chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{5n-1}$ *hội tụ có điều kiện (bán hội tụ).*

Gợi ý: Chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{5n-1}$ hội tụ theo dấu hiệu Leibniz nhưng chuỗi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{5n-1}$ phân kỳ (sử dụng dấu hiệu so sánh II với chuỗi phân kỳ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$). Vậy chuỗi ban đầu hội tụ có điều kiện.

Đọc thêm

Định lý 10 (Định lý Riemann)

- *Nếu chuỗi hội tụ tuyệt đối và có tổng bằng S thì khi thay đổi thứ tự các số hạng của nó một cách tùy ý, và (hoặc) nhóm một cách tùy ý các số hạng của chuỗi ta sẽ luôn nhận được một chuỗi hội tụ tuyệt đối và có tổng là S.*
- *Nếu chuỗi đã cho bán hội tụ thì có thể thay đổi thứ tự các số hạng của nó để nhận được một chuỗi hội tụ và có tổng bằng một số bất kỳ cho trước; hay được một chuỗi phân kỳ; thậm chí được một chuỗi phân kỳ ra vô hạn.*

Tổng kết

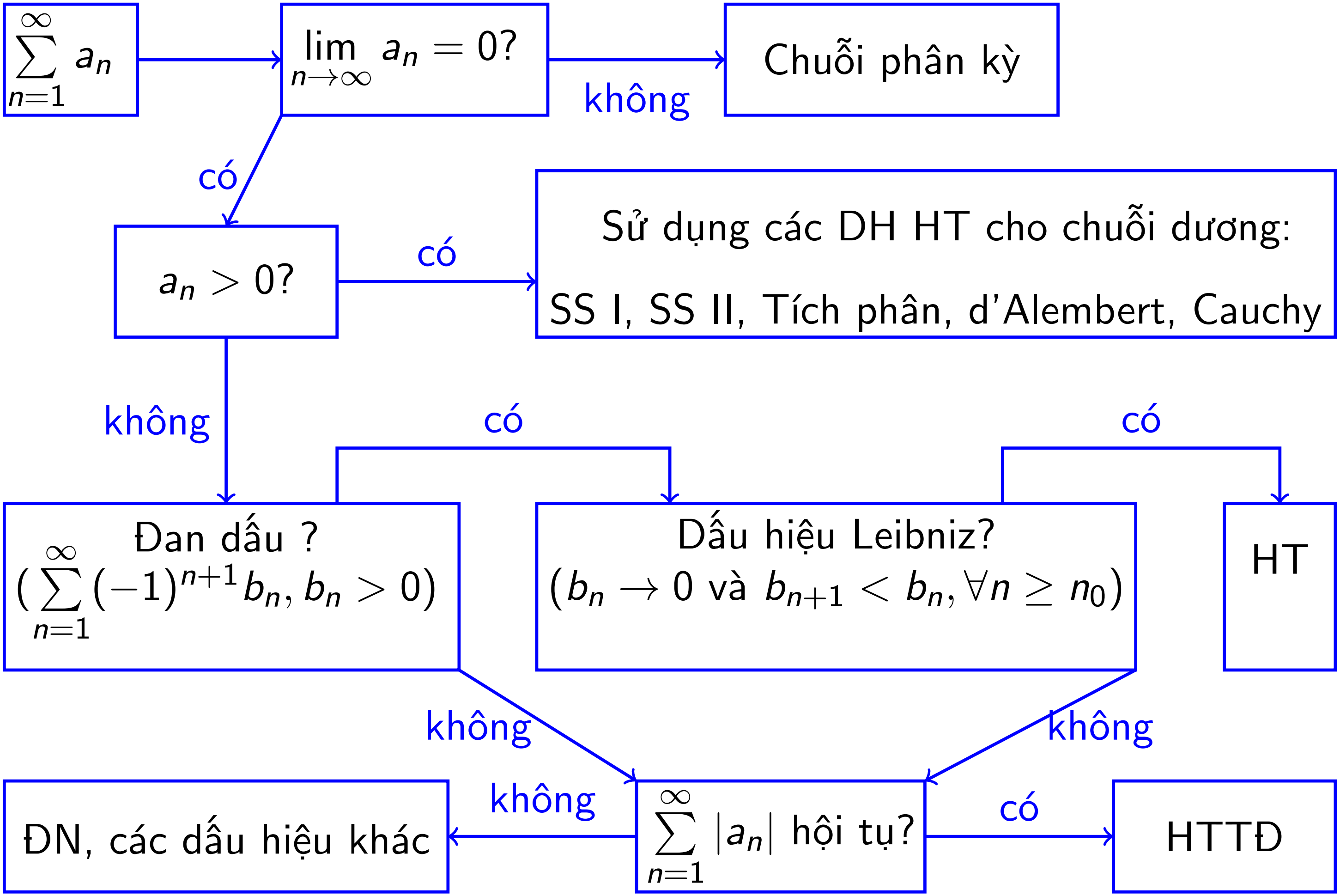
Một số gợi ý khi xét sự hội tụ của một chuỗi số $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$:

1. Dạng $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$: $p > 1$ chuỗi hội tụ, $p \leq 1$ chuỗi phân kỳ.
2. Dạng $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ $(a \neq 0)$: $|q| < 1$ chuỗi hội tụ, $|q| \geq 1$ chuỗi phân kỳ.
3. Chuỗi có dạng tương tự trường hợp 1 và 2 thì có thể nghĩ đến dấu hiệu so sánh.
4. Nếu $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ thì chuỗi phân kỳ.
5. a_n chứa $n!, c^n$ hay n^n: tìm cách áp dụng dấu hiệu d'Alembert. Chú ý nếu số hạng tổng quát a_n có dạng $\frac{1}{n^p}, P_k(n), \frac{P_k(n)}{Q_m(n)}$ dấu hiệu d'Alembert không cho ta kết luận gì vì $|a_{n+1}/a_n| \to 1$ khi $n \to \infty$.

Tổng kết (II)

6. Nếu a_n có dạng $(b_n)^n$ tìm cách áp dụng dấu hiệu Cauchy.
7. Dạng $\sum(-1)^{n+1}b_n$ hoặc $\sum(-1)^n b_n$: Kiểm tra xem có thể áp dụng dấu hiệu Leibniz không?
8. Nếu $a_n = f(n)$ trong đó tích phân suy rộng $\displaystyle\int_1^{\infty} f(x)dx$ dễ tính thì kiểm tra xem có thể áp dụng dấu hiệu tích phân hay không?

Sơ đồ khảo sát sự hội tụ của chuỗi số



Bài tập 1

Tìm tổng riêng và tổng của các chuỗi sau

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;

b) $\displaystyle\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \cdots$;

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{6^n}$;

d) $\displaystyle\frac{1}{1\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 7} + \frac{1}{7\cdot 10} + \cdots$;

e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$;

f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

Bài tập 2

Sử dụng dấu hiệu so sánh, xét sự hội tụ của các chuỗi

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{(n+2)n}$;

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)\sqrt{n}}$;

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$;

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi}{2n}$;

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})$;

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}$;

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{2+3^n}$;

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n\sqrt{n}}$;

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$;

j) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)(n+2)}}$.

Bài tập 3

Dùng dấu hiệu d'Alembert, xét sự hội tụ của các chuỗi sau

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n+1)!}$;

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$;

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 3\cdots(3n-1)}{1\cdot 3\cdots(4n-3)}$;

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2 e^n}$;

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{1-2n}}{n^2+1}$;

f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{5n+1}$;

g) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{e^{4n}}{(n-2)!}$;

h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3+n^2}{(n+1)!}$;

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{5^{1-n}(n+1)}$;

j) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!}{(3n)!}$.

Bài tập 4

Dùng dấu hiệu Cauchy, xét sự hội tụ của các chuỗi sau

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(1+n)}$;

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{3n+1}\right)^n$;

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n^2}}{n^{n^2}3^n}$;

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$;

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{4-2n}\right)^{2n}$;

f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{1-3n}}{4^{2n}}$;

g) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{5n^2-2n+1}{3n^2+n-3}\right)^{-n}$;

h) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^{3+5n}}{n^{1+n^2}}$;

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{6-9n}{2+4n}\right)^{\frac{1}{3}n}$;

j) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5n-3n^3}{7n^3+2}\right)^n$.

Bài tập 5

Dùng dấu hiệu tích phân, xét sự hội tụ của các chuỗi sau

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}$;

b) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln(\ln n)}$;

c) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n[\ln(\ln n)]^{\alpha}}$;

d) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{\alpha}}$;

e) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n+7)^{3}}$.

Bài tập 6

Xét sự hội tụ của các chuỗi sau

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + n}{3^n + n^3 + 3}$;

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{n^2 - 1}{n^3 + 3}$;

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$;

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2 - 1}{3n^2 + 3}\right)^n$;

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$;

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100^n}{n!}$.

Bài tập 7

Xét sự hội tụ tuyệt đối và bán hội tụ của các chuỗi sau

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$;

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$;

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n + \cos^2 n}{n^2}$;

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n!)}{n\sqrt{n}}$;

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$;

f) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n!)}$.