30 - Phạm Quốc Tú - 1.15 - Tú

Câu 1: $x e^{2x}(y' + 2y) = x - e^{2x} y \quad (x > 0) \quad (*)$

$\Leftrightarrow \quad y' + 2y = \dfrac{1}{e^{2x}} - \dfrac{y}{x} \quad (x > 0)$

$\Leftrightarrow \quad y' + y\left(2 + \dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{e^{2x}} \quad (x > 0)$

Đặt $p(x) = 2 + \dfrac{1}{x}$, $q(x) = \dfrac{1}{e^{2x}}$

Ta có:

$$\int p(x)\,dx = \int \left(2 + \frac{1}{x}\right) dx = 2x + \ln(x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^{\int p(x)dx} = e^{2x} \cdot x \\ e^{-\int p(x)dx} = \dfrac{1}{e^{2x} \cdot x} \end{cases}$$

Nghiệm tổng quát của phương trình (*)

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)\, e^{\int p(x)dx}\, dx + C\right]$$

$$= \frac{1}{e^{2x} \cdot x}\left(\int \frac{x \cdot e^{2x}}{e^{2x}}\, dx + C\right)$$

$$= \frac{1}{e^{2x} \cdot x}\left(\frac{x^2}{2} + C\right)$$

$$= \frac{x}{2e^{2x}} + \frac{C}{e^{2x} \cdot x}$$

30 - Phạm Quốc Tú - 215 - Tú

Câu 2. $y'' + 6y' + 8y = (x+2)e^{-x}$ (1)

⊕ Giải phương trình $y'' + 6y' + 8y = 0$ (2)

Phương trình đặc trưng: $k^2 + 6k + 8 = 0$ $(*)$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} k = -2 \\ k = -4 \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ Nghiệm tổng quát của (2)

$\bar{y} = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-4x}$

⊕ Tìm một nghiệm riêng y^* của phương trình (1)

Ta có $f(x) = (x+2).e^{-x}$ $\Rightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \text{ (không là nghiệm của } (*)) \\ n = 1 \end{cases}$

Do đó: $y^* = e^{-x}(Ax + B)$

$(y^*)' = -e^{-x}(Ax+B) + e^{-x}(A) = e^{-x}(-Ax + A - B)$

$(y^*)'' = -e^{-x}(-Ax + A - B) + e^{-x}(-A)$
$= e^{-x}(Ax - 2A + B)$

Thay vào (1), ta được

$$+\begin{cases} (y^*)'' = e^{-x}(Ax - 2A + B) \\ 6(y^*)' = e^{-x}(-6Ax + 6A - 6B) \\ 8y^* = e^{-x}(8Ax + 8B) \end{cases}$$

$VT(1) = e^{-x}(3Ax + 4A + 3B) = VP(1) = (x+2)e^{-x}$

$\Rightarrow \begin{cases} 3A = 1 \\ 4A + 3B = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1/3 \\ B = 2/9 \end{cases} \Rightarrow y^* = e^{-x}\left(\frac{x}{3} + \frac{2}{9}\right)$

Vậy, nghiệm của phương trình (1)

$$y = \bar{y} + y^* = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-4x} + e^{-x}\left(\frac{x}{3} + \frac{2}{9}\right)$$

30 - Pham Quốc Tú - 3/5 - [signature]

Câu 3: $\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{n^{-2}} - \tan^2\frac{1}{n}\right)^{n^4}$

Đặt $a_n = \left(e^{n^{-2}} - \tan^2\frac{1}{n}\right)^{n^4}$

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(e^{n^{-2}} - \tan^2\frac{1}{n}\right)^{n^4}$

$= e^{\lim_{n\to\infty} n^4 \ln\left(e^{n^{-2}} - \tan^2\frac{1}{n}\right)} = e^{L}$

⊕ $L = \lim_{n\to\infty} n^4 \ln\left(e^{n^{-2}} - \tan^2\frac{1}{n}\right)$

$= \lim_{n\to\infty} n^4 \ln\left[1 + \left(e^{n^{-2}} - \tan^2\frac{1}{n} - 1\right)\right]$

$= \lim_{n\to\infty} n^4\left(e^{n^{-2}} - \tan^2\frac{1}{n} - 1\right)$

$= \lim_{n\to\infty} n^4\left(e^{n^{-2}} - \frac{1}{\cos^2\frac{1}{n}}\right)$ $\left(\text{vì } \tan^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}\right)$

$= \lim_{n\to\infty} n^4\left(\frac{e^{n^{-2}}\cos^2\frac{1}{n} - 1}{\cos^2\frac{1}{n}}\right)$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\cos^2\frac{1}{n}} \cdot \lim_{n\to\infty} n^4\left(e^{n^{-2}}\cos^2\frac{1}{n} - 1\right)$

$= \lim_{n\to\infty} n^4\left(e^{n^{-2}}\cos^2\frac{1}{n} - 1\right)$

30 - Phạm Quốc Tú - 4/5 - ...

Câu 4: $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n (2x-1)^n}{6^n(3\sqrt{n}+7)}$ (1)

Đặt $t = 2x-1$

(1) trở thành $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \cdot t^n}{6^n(3\sqrt{n}+7)}$ (2)

⊕ Tìm bán kính hội tụ của (2)

Ta có: $a_n = \dfrac{(-1)^n}{6^n(3\sqrt{n}+7)} \Rightarrow a_{n+1} = \dfrac{(-1)^{n+1}}{6^{n+1}(3\sqrt{n+1}+7)}$

$$\ell = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n}{(-1)^{n+1}} \cdot \frac{6^{n+1}}{6^n} \cdot \frac{3\sqrt{n+1}+7}{3\sqrt{n}+7} \right| = \frac{1}{6}$$

$\Rightarrow R = \dfrac{1}{\ell} = 6$, khoảng hội tụ của (2) là $(-6; 6)$

⊕ Xét $t = -6$, (2) $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \cdot (-6)^n}{6^n(3\sqrt{n}+7)} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3\sqrt{n}+7}$ (3)

Ta có $\dfrac{1}{3\sqrt{n}+7} \sim \dfrac{1}{3\sqrt{n}} \sim \dfrac{1}{n^{1/2}}$ (khi $n \to \infty$)

$\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{1/2}}$ phân kỳ ($\alpha = \dfrac{1}{2} < 1$)

Theo tiêu chuẩn so sánh 2, chuỗi (3) phân kỳ

⊕ Xét $t = 6$, (2) $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \cdot 6^n}{6^n(3\sqrt{n}+7)} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{3\sqrt{n}+7}$ (4)

Ta có: $\cancel{U_n = \dfrac{(-1)^n}{3\sqrt{}}}$ $U_n = \dfrac{1}{3\sqrt{n}+7}$ là dãy giảm $\forall\, n \in (1; +\infty)$

$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{3\sqrt{n}+7} = 0$

Theo tiêu chuẩn Leibnitz thì chuỗi (4) hội tụ

Vậy miền hội tụ của chuỗi (2) là: $-6 < t \leq 6$

$\Rightarrow$ miền hội tụ của chuỗi (1) là $-\dfrac{5}{2} < t \leq \dfrac{7}{2}$

30 - Phạm Quốc Tú - 515 - Tú

Câu 5: $D = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(3n+2)}{3^n(2n-1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(3n-1,5) + (-1)^{n+1}\, 3,5}{3^n(2n-1)}$

$= \sum_{n=1}^{\infty} 1,5 . \frac{(-1)^{n+1}}{3^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7}{2} \frac{(-1)^{n+1} . \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n}}{2n-1}$

$= \sum_{n=1}^{\infty} 1,5 \frac{(-1)^{n+1}}{3^n} + \frac{7}{2} \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} . \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n-1}}{2n-1}$

+ $\sum_{n=1}^{\infty} 1,5 \frac{(-1)^{n+1}}{3^n} = 1,5\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{27} - \dots\right) = \frac{3}{2} . \frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{8}$

+ Đặt $A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} . x^{2n-1}}{2n-1}$, $A(0) = 0$

$A'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^{2n-2}$

$= 1 - x^2 + x^4 - \dots = \frac{1}{1+x^2}$

Suy ra

$A(x) - A(0) = \int_0^x A'(t)\, dt = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\, dt$

$= \arctan t \Big|_{t=0}^{t=x} = \arctan x$

$\Rightarrow A(x) = \arctan x + A(0) = \arctan x$

$\Rightarrow$ ~~Vậy~~ $A\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

Vậy, $D = \frac{3}{8} + \frac{7}{2\sqrt{3}} A\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3}{8} + \frac{7}{2\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$