29 - Dương Công Tiến - 1/5 - Biên

Câu 1: $e^x(xy' + y) = x(3 - e^x y)$, $(x > 0)$

$\Leftrightarrow e^x x y' + e^x y = 3x - e^x x y$

$\Leftrightarrow e^x x y' + (e^x + e^x x) y = 3x$

$\Leftrightarrow y' + \dfrac{e^x + e^x x}{e^x x} y = \dfrac{3x}{e^x}$

$\Leftrightarrow y' + \dfrac{1 + x}{x} y = \cancel{3x} \dfrac{3x}{e^x}$

Ta có $\begin{cases} p(x) = \dfrac{1+x}{x} \\ q(x) = \cancel{3x} \dfrac{3x}{e^x} \end{cases}$

$\int p(x)\,dx = \int \dfrac{1+x}{x} dx = \int \left(1 + \dfrac{1}{x}\right) dx = \int dx + \int \dfrac{1}{x} dx = x + \ln|x|$

$= x + \ln x$

$\Rightarrow \begin{cases} e^{\int p(x)\,dx} = e^{x + \ln x} = e^x e^{\ln x} = e^x . x \\ e^{-\int p(x)\,dx} = \dfrac{1}{e^x . x} \end{cases}$

NTQ: $y = e^{-\int p(x)\,dx} \left[\int q(x) . e^{\int p(x)\,dx} dx + C \right]$

$= \cancel{\dfrac{1}{e^x x} \left[\int \dfrac{3x . x^x . x}{e} dx + C \right]}$

$= \dfrac{1}{e^x x} \left[\int \dfrac{3x}{e^x} . e^x . x \, dx + C \right]$

$= \dfrac{1}{e^x x} \left(\int 3x^2 dx + C \right)$

$= \dfrac{1}{e^x x} \left(x^3 + C \right)$

29 - Dương Công Tiến - 2/5 - Giới

Câu 2: $y'' - 2y' - 15y = (x-1)e^x$ (1)

+) Giải phương trình: $y'' - 2y' - 15y = 0$ (2)

P.T.Đ.T: $k^2 - 2k - 15 = 0$ (*)

$(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 5 \\ k = -3 \end{array}\right.$

N.T.Q của (2) là $\bar{y} = c_1 e^{5x} + c_2 e^{-3x}$, c_1, c_2 là hằng số

+) Tìm 1 nghiệm riêng y^* của phương trình (1):

Ta có $f(x) = (x-1)e^x \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \text{ (không phải là nghiệm của (*))} \\ n = 1 \end{cases}$

Do đó $y^* = e^x(Ax+B)$

$y^{*\prime} = e^x(Ax+B) + e^x A = e^x[Ax + (A+B)]$

$y^{*\prime\prime} = e^x[Ax+(A+B)] + e^x A = e^x[Ax + (2A+B)]$

Thay vào (1) ta được:

$$+\begin{cases} y^{*\prime\prime} = e^x[Ax + (2A+B)] \\ -2y^{*\prime} = e^x[-2Ax + (-2A-2B)] \\ -15y^* = e^x[-15Ax \quad -15B] \end{cases}$$

$VT(1) = e^x[-16Ax + (-16B)] = VP(1) = e^x(x-1)$

$$\Rightarrow \begin{cases} -16A = 1 \\ -16B = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -1/16 \\ B = 1/16 \end{cases} \Rightarrow y^* = e^x\left(-\frac{1}{16}x + \frac{1}{16}\right)$$

N.T.Q của (1): $y = \bar{y} + y^* = c_1 e^{5x} + c_2 e^{-3x} + e^x\left(\frac{-1}{16}x + \frac{1}{16}\right)$

c_1, c_2 là hằng số

29 - Dương Công Tiến - 3/5 - Tiến

Câu 3: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{n^{-2}} - \sin^2 \frac{1}{n}\right)^{-n^4}$

~~Xét~~ Đặt $a_n = \left(e^{n^{-2}} - \sin^2 \frac{1}{n}\right)^{-n^4}$

Xét $\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} \left(e^{n^{-2}} - \sin^2 \frac{1}{n}\right)^{-n^4}$ (1^{∞})

$= e^{\lim_{n \to +\infty} (-n^4) \ln\left(e^{n^{-2}} - \sin^2 \frac{1}{n}\right)}$

$= e^{\lim_{n \to +\infty} (-n^4) \cdot \ln\left[1 + \left(e^{n^{-2}} - \sin^2 \frac{1}{n} - 1\right)\right]}$

$= e^{\lim_{n \to +\infty} (-n^4) \left(e^{n^{-2}} - \sin^2 \frac{1}{n} - 1\right)}$

$\cancel{= e^{\lim_{n \to +\infty} (-n^4)(e^{n^{-2}} - 1) - \lim_{n \to +\infty} (-n^4) \sin^2 \frac{1}{n}}}$

$\cancel{= e^{\lim_{n \to +\infty} (-n^4)(n^{-2})}}$

Xét $\lim_{x \to +\infty} (-x^4)\left(e^{x^{-2}} - \sin^2 \frac{1}{x} - 1\right)$ $x \in R$

$= \lim_{x \to \infty} \dfrac{e^{x^{-2}} - \sin^2 \frac{1}{x} - 1}{\frac{-1}{x^4}}$ $\left(\frac{0}{0}\right)$

$= \lim_{x \to \infty} \dfrac{\frac{-2}{x^3} e^{x^{-2}} - 2 \sin \frac{1}{x} \cdot \cos \frac{1}{x} \cdot \frac{-1}{x^2}}{\frac{-4}{x^5}}$

$= \lim_{x \to +\infty} \dfrac{\frac{-2}{x^3} e^{x^{-2}} - 2 \cdot \frac{-1}{x^3}}{\frac{-4}{x^5}} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x^{-2}} - 1}{\frac{+2}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \dfrac{\frac{1}{x^2}}{\frac{2}{x^2}}$

$= \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n = e^{1/2} \not\to 0$

Vậy chuỗi đã cho phân kì

29 - Dương Công Tiến - 4/5 - Biểu

Câu 4: $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n (x-10)^n}{n\sqrt{n}+1}$ (1) $= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n (x-10)^n}{\sqrt{n^3}+1}$

Đặt $t = x - 10$ khi đó (1) trở thành:

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n t^n}{\sqrt{n^3}+1}$ (2)

+) Tìm B.K.H.T của (2)

Ta có $a_n = \frac{2^n}{\sqrt{n^3}+1} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{\sqrt{(n+1)^3}+1}$

$l = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{2(\sqrt{n^3}+1)}{\sqrt{(n+1)^3}+1} \right| = 2$

Suy ra $R = \frac{1}{l} = \frac{1}{2}$. Do đó, KHT của (2) là $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

+) Xét khi $t = +\frac{1}{2}$

$(2) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n^3}+1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}+1}$ (3)

Ta có • $\frac{1}{\sqrt{n^3}+1} \sim \frac{1}{n^{3/2}}$, $n \to +\infty$

• $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ hội tụ

Theo tiêu chuẩn so sánh 2 ta suy ra (3) hội tụ

+) Xét khi $t = -\frac{1}{2}$

$(2) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{\sqrt{n^3}+1} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n^3}+1}$ (4)

Ta có $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n^3}+1} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3}+1}$ hội tụ. Do đó (4) httđ nên nó hội tụ

+) Kết luận MHT của (2) là $-\frac{1}{2} \le t \le \frac{1}{2}$, suy ra $\frac{19}{2} \le x \le \frac{21}{2}$

29 - Dương Công Tiến - 5/5 - Điến

Câu 5: $D = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (5n+3)}{3^n (2n+1)}$

$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(5n + \frac{5}{2}) + \frac{1}{2}}{3^n (2n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\frac{5}{2}(2n+1) + \frac{1}{2}}{3^n (2n+1)}$

$= \frac{5}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{3}\right)^n + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{2n+1}$

$= \frac{5}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{3}\right)^n + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n}}{2n+1}$

$= \frac{5}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{3}\right)^n + \frac{\sqrt{3}}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n+1}}{2n+1}$

+) Xét $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = -\frac{1}{3} + \left(\frac{-1}{3}\right)^2 + \dots = \frac{-1/3}{1 + \frac{1}{3}} = -\frac{1}{4}$

+) Xét $A(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1) \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$; Ta có

$A'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = -x^2 + x^4 - x^6 + \dots = \frac{-x^2}{1+x^2} = -1 + \frac{1}{1+x^2}$

$\Rightarrow A(x) - A(0) = \int_0^x A'(t)\,dt = \int_0^x \left(-1 + \frac{1}{1+t^2}\right) dt = -\int_0^x dt + \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$

$= \cancel{x - \arctan x}\ \arctan x - x$

Bởi vì $A(0) = 0$ nên $A(x) = \arctan x - x$. Do đó,

$D = \frac{5}{2}\left(\frac{-1}{4}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2} A\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{-5}{8} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\pi}{6} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$