PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TUYẾN TÍNH CẤP 2 HỆ SỐ HẰNG

Dạng: $y'' + p\,y' + q\,y = f(x)$ (1), p và q là các hằng số.

Cách giải;

Bước 1. GPT: $y'' + p\,y' + q\,y = 0$ (2)

Phương trình đặc trưng: $k^2 + pk + q = 0$ (*)

Xảy ra ba trường hợp:

TH1: Nếu (*) có hai nghiệm thực phân biệt $k_1 \neq k_2$, thì

NTQ của (2) là: $\overline{y} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$

TH2: Nếu (*) có 1 nghiệm thực kép $k = k_1 = k_2$, thì

NTQ của (2) là: $\overline{y} = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx}$

TH3: Nếu (*) có 2 nghiệm phức liên hợp: $k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, thì

NTQ của (2) là: $\overline{y} = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

Bước 2. Tìm một nghiệm riêng y^* của phương trình (1):

Ta chỉ giải bài toán trong trường hợp: $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$

TH1: α không là nghiệm của PTĐT (*): $y^* = e^{\alpha x} Q_n(x)$, $Q_n(x)$ là đa thức bậc n.

TH2: α là nghiệm đơn của PTĐT (*): $y^* = x e^{\alpha x} Q_n(x)$, $Q_n(x)$ là đa thức bậc n.

TH3: α là nghiệm kép của PTĐT (*): $y^* = x^2 e^{\alpha x} Q_n(x)$, $Q_n(x)$ là đa thức bậc n.

Bước 3. Kết luận: NTQ của (1) là: $y = \overline{y} + y^*$.

$$y^* = x^m e^{\alpha x} Q_n(x)$$

Ví dụ: Giải phương trình: $y'' - 3y' + 2y = xe^{2x}$ (1)

Lời giải:

- GPT: $y'' - 3y' + 2y = 0$ (2)

  PTĐT: $k^2 - 3k + 2 = 0$ (*)

$$(*) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 1 \\ k = 2 \end{array}\right.$$

  NTQ của (2): $\overline{y} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.

- Tìm một nghiệm riêng y^* của phương trình (1):

  Ta có: $f(x) = e^{2x} x \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 & (la\ nghiem\ don\ cua\ (*)) \\ n = 1 \end{cases}$

  Do đó: $y^* = xe^{2x}(Ax + B) = e^{2x}(Ax^2 + Bx)$

$$y^{*\prime} = 2e^{2x}(Ax^2 + Bx) + e^{2x}(2Ax + B) = e^{2x}\left[2Ax^2 + (2A + 2B)x + B\right]$$

$$\begin{aligned} y^{*\prime\prime} &= 2e^{2x}\left[2Ax^2 + (2A + 2B)x + B\right] + e^{2x}\left[4Ax + (2A + 2B)\right] \\ &= e^{2x}\left[4Ax^2 + (8A + 4B)x + (2A + 4B)\right] \end{aligned}$$

Thay vào (1) ta được:

$$+\begin{cases} y^{*\prime\prime} = e^{2x}\left[\ 4Ax^2 + (8A + 4B)x + (2A + 4B)\right] \\ -3y^{*\prime} = e^{2x}\left[-6Ax^2 + (-6A - 6B)x - 3B\right] \\ 2y^* = e^{2x}\left[\ 2Ax^2 + 2Bx\right] \end{cases}$$

$$VT(1) = e^{2x}\left[\ 0 + (2A + 0)x + (2A + B)\right] = VP(1) = e^{2x} x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2A = 1 \\ 2A + B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1/2 \\ B = -1 \end{cases} \Rightarrow y^* = xe^{2x}\left(\frac{1}{2}x - 1\right)$$

- NTQ của (1): $y = \overline{y} + y^* = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + xe^{2x}\left(\frac{1}{2}x - 1\right)$

(1) $y'' - 3y' + 2y = xe^{-5x}$

(2) $2y'' + y' - 3y = 2xe^{5x}$

(3) $y'' + y' + y = x^2 + x + 1$

(4) $y'' - 2y' + y = 3e^x$

(5) $y'' - 6y' + 5y = e^{5x}$

(6) $3y'' + 2y' - 5y = x^2 e^x$

(7) $y'' + 4y = xe^{-5x}$

(8) $y'' - 6y' + 5y = x^2 + e^{3x}$