TÍCH PHÂN KÉP (TÍCH PHÂN 2 LỚP)

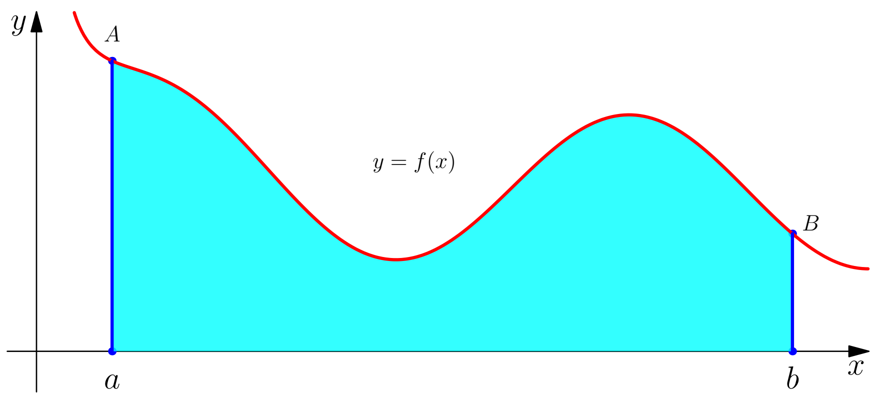
Chử Văn Tiệp

Giải tích II- 2023-2024, ĐHBKĐN

1 Tóm tắt lý thuyết

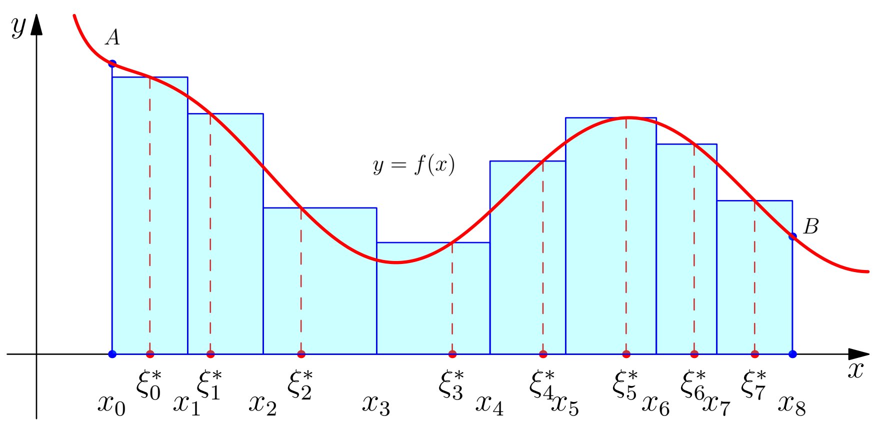
1. Đặt bài toán:

- Tích phân xác định (Tích phân một lớp) xuất phát từ bài toán tính DIỆN TÍCH hình thang cong.
  Bài toán: Hãy tính diện tích hình phẳng nằm bên dưới đồ thị của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[a, b]$ như hình vẽ bên dưới.



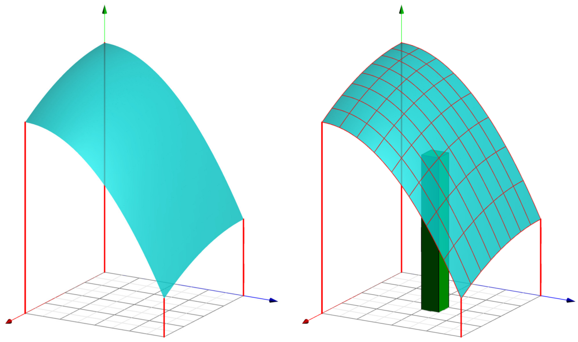
Chia đoạn $[a, b]$ thành các đoạn nhỏ bởi $n + 1$ điểm chia $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, trên mỗi đoạn nhỏ đó lấy một điểm ξ_i^* tùy ý và lập tổng

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i^*)\Delta x_i$$



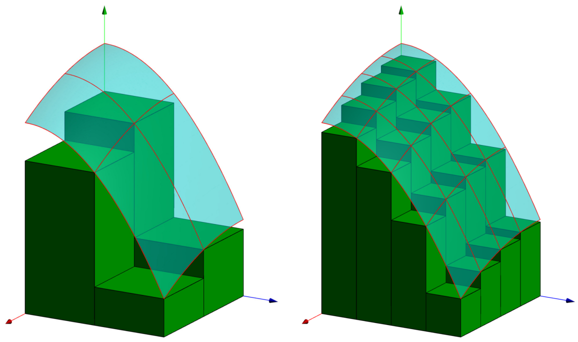
$$S = \int_a^b f(x)dx = \lim_{|\Delta x_i| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i^*)\Delta x_i.$$

- Tích phân kép (Tích phân hai lớp) xuất phát từ bài toán tính THỂ TÍCH hình trụ cong.
  Bài toán: Hãy ước lượng thể tích một nhà kho có mái vòm là mặt cong $z = f(x, y)$ như hình vẽ bên dưới.



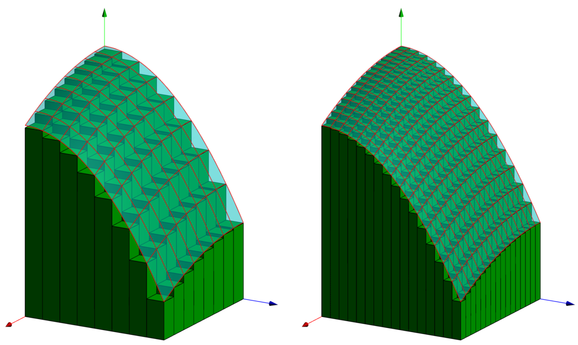
Hình 1: Thể tích ?

Ước lượng thô cận dưới



Hình 2: $(m, n) = (2, 2)$ và $(m, n) = (4, 4)$

Để tăng độ chính xác, ta giảm kích thước hình chữ nhật đáy.



Hình 3: $V = \lim\limits_{m,n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} f(x_i^*, y_j^*)\Delta x_i \Delta y_j$

2. Định nghĩa: Tích phân kép của hàm f trên hình chữ nhật D là

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D f(x,y)dA = \lim_{|\Delta A_i|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*, y_i^*)\Delta A_i$$

nếu giới hạn trên tồn tại.

Nếu D là một miền bị chặn bất kỳ trong mặt phẳng $\mathbb{R}^2$. Khi đó tồn tại một hình chữ nhật R sao cho $D \subset R$. Đặt hàm mới

$$F(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{nếu } (x,y) \in D \\ 0 & \text{nếu } (x,y) \in R \setminus D \end{cases}$$

Khi đó ta định nghĩa

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_R F(x,y)dxdy.$$

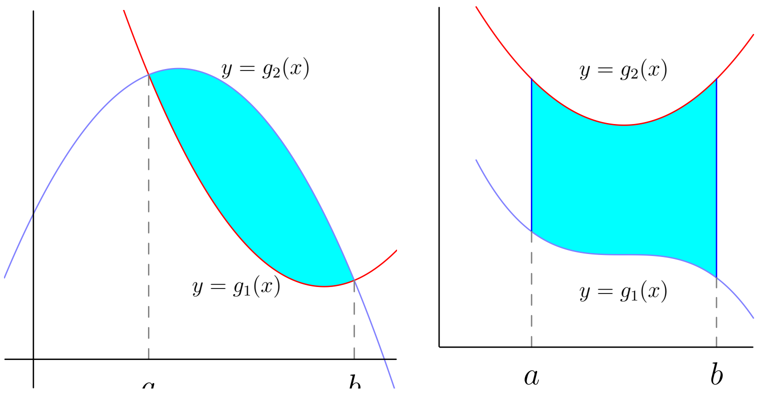
3. Công thức tính tích phân kép trong tọa độ Decartes

(a) Nếu $f : D \to \mathbb{R}$ liên tục trên miền D có dạng

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$$

thì

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy = \overbrace{\int_a^b \underbrace{\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy}\, dx}.$$

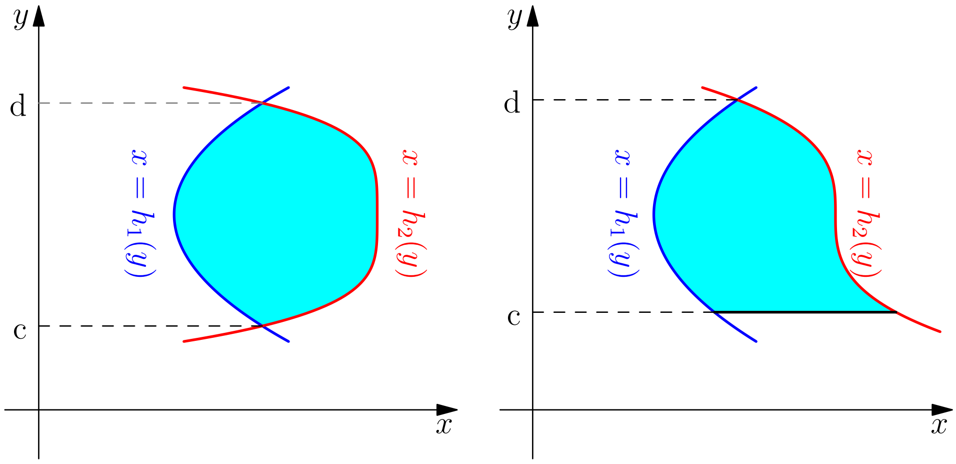


(b) Nếu $f : D \to \mathbb{R}$ liên tục trên miền D có dạng

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \le y \le d,\ h_1(y) \le x \le h_2(y)\}$$

thì

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx = \overbrace{\int_c^d \underbrace{\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx}\, dy}.$$

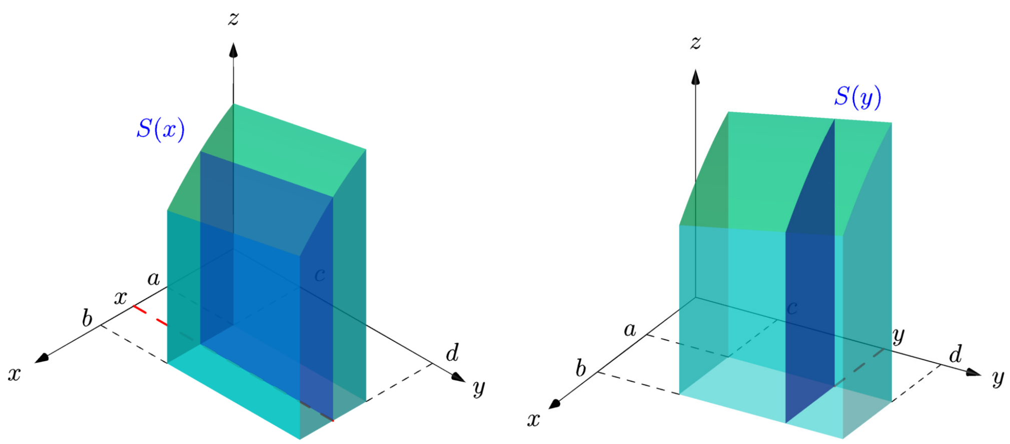


Định lý 1 (Định lý Fubini). Nếu hàm f liên tục trên hình chữ nhật

$$R = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\},$$

thì

$$\boxed{\iint_R f(x,y)dA = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx}$$



Hình 4: Minh họa công thức Fubini

4. Tích phân kép trong tọa độ cực.

   Nếu miền D trong hệ tọa độ cực có dạng

   $$\{(r, \theta) : \alpha \leq \theta \leq \beta,\ r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta)\}$$

   thì

   $$\iint_D f(x,y)dxdy = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr.$$

5. Công thức đổi biến

   $$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_{uv}} f(x(u,v), y(u,v))|J|dudv$$

trong đó Jacobian J được tính như sau:

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = x'_u y'_v - x'_v y'_u.$$

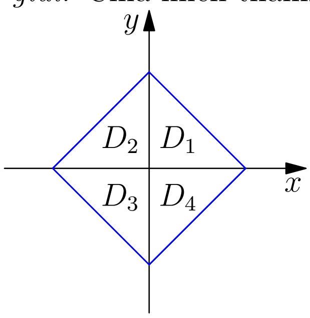
6. Ứng dụng (Xem trong Giáo trình)

- Tính diện tích hình phẳng
- Tính thể tích khối trụ cong
- Diện tích mặt cong
- Khối lượng bản phẳng không thuần nhất
- Tọa độ trọng tâm
- Moment

2 Matlab

Ví dụ 1 (Tính tích phân dùng Matlab). Tính $\iint_{|x|+|y|\le 1} (|x|+|y|)dxdy$

Lời giải. Chia miền thành 4 phần



$$\begin{aligned} I &= \iint_{|x|+|y|\le 1} (|x|+|y|)dxdy \\ &= \iint_{D_1} (|x|+|y|)dxdy + \iint_{D_2} (|x|+|y|)dxdy + \iint_{D_3} (|x|+|y|)dxdy + \iint_{D_4} (|x|+|y|)dxdy. \end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned} \iint_{D_1} (|x|+|y|)dxdy &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (|x|+|y|)dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x+y)dy \\ &= \int_0^1 \left(xy + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^{1-x} dx = \int_0^1 x(1-x) + \frac{(1-x)^2}{2} dx \\ &= \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2}\left(x - x^2 + \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Tính toán tương tự ta cũng có 3 tích phân còn lại bằng $\frac{1}{3}$. Vậy $I = \frac{4}{3}$.

Cách 2.

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_D (|x|+|y|)dxdy = \int_{-1}^{1} dx \int_{-(1-|x|)}^{1-|x|} (|x|+|y|)dy \\
&= 2\int_{-1}^{1} dx \int_{0}^{1-|x|} (|x|+|y|)dy = 2\int_{-1}^{1} dx \int_{0}^{1-|x|} (|x|+y)dy \\
&= 2\int_{-1}^{1} |x|y + \frac{y^2}{2}\Big|_0^{1-|x|} dx = 2\int_{-1}^{1} |x|(1-|x|) + \frac{(1-|x|)^2}{2} dx \\
&= 4\int_{0}^{1} |x|(1-|x|) + \frac{(1-|x|)^2}{2} dx = 4\int_{0}^{1} x(1-x) + \frac{(1-x)^2}{2} dx = \frac{4}{3}.
\end{aligned}
$$

Matlab code

```
syms x y; f(x,y)=abs(x)+abs(y);
I=int(int(f,y,-(1-abs(x)),1-abs(x)),x,-1,1)
```

■

Matlab code


```
syms x y; f(x,y)=abs(x)+abs(y);
I=int(int(f,y,-(1-abs(x)),1-abs(x)),x,-1,1)
```


3 Ví dụ mẫu

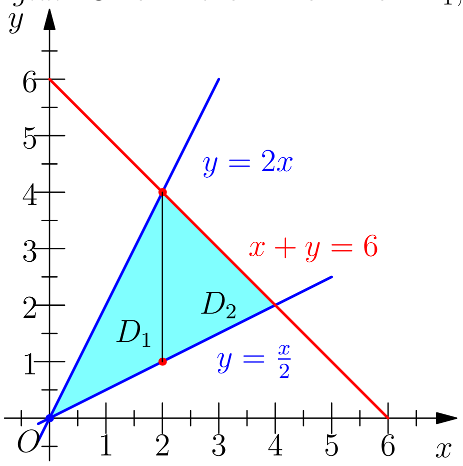
VÍ DỤ 2 (MINH HỌA ĐỊNH LÝ FUBINI). Tính tích phân kép sau

$$\iint_D \frac{1}{(1+x+y)^2} dxdy$$

trong đó D là miền giới hạn bởi các đường

$$x = 2y, \ y = 2x, \ x + y = 6.$$

Lời giải. Chia D thành hai miền D_1, D_2 như hình vẽ.



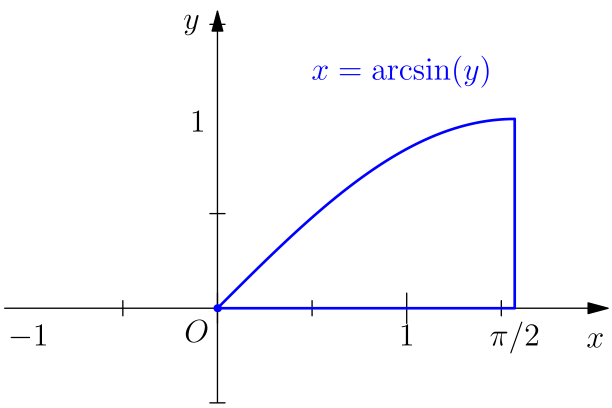
$$
\begin{aligned}
I &= \iint_D \frac{1}{(1+x+y)^2}dxdy = \iint_{D_1} \frac{1}{(1+x+y)^2}dxdy + \iint_{D_2} \frac{1}{(1+x+y)^2}dxdy \\
&= \int_0^2 dx \int_{x/2}^{2x} \frac{1}{(1+x+y)^2}dy + \int_2^4 dx \int_{x/2}^{6-x} \frac{1}{(1+x+y)^2}dy \\
&= \int_0^2 dx \int_{x/2}^{2x} \frac{1}{(1+x+y)^2}d(1+x+y) + \int_2^4 dx \int_{x/2}^{6-x} \frac{1}{(1+x+y)^2}d(1+x+y) \\
&= \int_0^2 -\frac{1}{1+x+y}\Bigg|_{x/2}^{2x} dx + \int_2^4 -\frac{1}{1+x+y}\Bigg|_{x/2}^{6-x} dx \\
&= \int_0^2 -\frac{1}{1+3x} + \frac{1}{1+3x/2}dx + \int_2^4 -\frac{1}{7} + \frac{1}{1+3x/2}dx \\
&= \left[-\frac{\ln|1+3x|}{3} + \frac{2\ln|1+3x/2|}{3}\right]\Bigg|_0^2 + \left[-\frac{1}{7}x + \frac{2\ln|1+3x/2|}{3}\right]\Bigg|_2^4 \\
&= -\frac{\ln 7}{3} + \frac{2\ln 4}{3} - \frac{4}{7} + \frac{2\ln 7}{3} + \frac{2}{7} - \frac{2\ln 4}{3} = -\frac{2}{7} + \frac{\ln 7}{3}.
\end{aligned}
$$

■

Ví dụ 3. Tính các tích phân sau bằng cách đổi thứ tự lấy tích phân

1. $\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2} dxdy$
2. $\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{1}{y^3+1} dydx$
3. $I = \int_0^1 \int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\sqrt{1+\cos^2 x}dxdy$

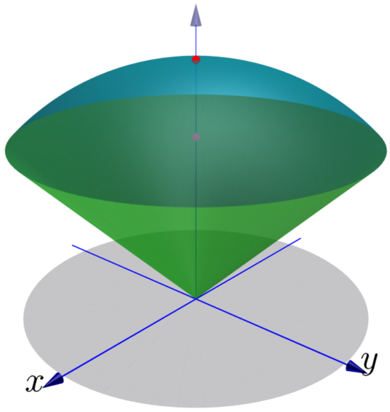
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 1, \arcsin y \le x \le \pi/2\}$$



$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le \pi/2, 0 \le y \le \sin x\}$$

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\sin x} \cos x\sqrt{1+\cos^2 x}dydx \\
&= \int_0^{\pi/2} y\cos x\sqrt{1+\cos^2 x}\Big|_0^{\sin x} dx \\
&= \int_0^{\pi/2} \sin x\cos x\sqrt{1+\cos^2 x}dx \quad (\text{Đổi biến} \ \ t = 1+\cos^2 x) \\
&= -\int_2^1 t^{1/2}\frac{dt}{2} \\
&= \frac{1}{2}\int_1^2 t^{1/2}dt = \frac{t^{3/2}}{3}\Big|_1^2 = \frac{\sqrt{8}-1}{3}.
\end{aligned}
$$

Ví dụ 4 (Đổi biến tọa tọa độ cực). Tính thể tích miền V bị chặn bởi $x^2+y^2+z^2 \leq 4$ và $z \geq \sqrt{x^2+y^2}$.



Lời giải.

Trước hết ta xác định hình chiếu xuống mặt phẳng xoy

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\}.$$

đổi biến tọa độ cực

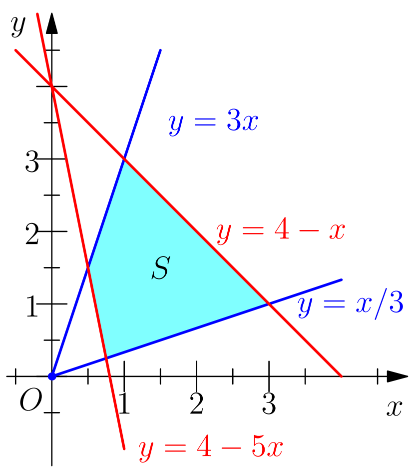
$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi, \end{cases} \quad J = r \Rightarrow |J| = r$$

với $0 \leq r \leq \sqrt{2},\ 0 \leq \varphi < 2\pi$. Khi đó ta có công thức tính thể tích như sau:

$$\begin{aligned} V &= \iint_{\{x^2+y^2\leq 2\}} (\sqrt{4-x^2-y^2} - \sqrt{x^2+y^2})dxdy \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} (\sqrt{4-r^2} - r) r dr \\ &= 2\pi \times \left[-\frac{1}{3}(4-r^2)^{3/2} - \frac{r^3}{3} \right] \Bigg|_0^{\sqrt{2}} = \frac{2\pi}{3}(-2^{3/2} - 2^{3/2} + 4^{3/2}) = \frac{8\pi}{3}(2-\sqrt{2}) \end{aligned}$$

■

Ví dụ 5 (Đổi biến tổng quát). Tính tích phân sau $\displaystyle\iint_S \frac{dxdy}{x^2y^2}$, $\quad S : 3y = x,\ y = 3x,\ y = 4-5x,\ y = 4-x;$



Lời giải.

Đặt

$$\begin{cases} u = \dfrac{x}{y} \\ v = \dfrac{y-4}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4u}{1-uv} \\ y = \dfrac{4}{1-uv} \end{cases}, (u,v) \in [1/3,3] \times [-5,-1].$$

$$J = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{4(1-uv)+4uv}{(1-uv)^2} & \dfrac{4u^2}{(1-uv)^2} \\ \dfrac{4v}{(1-uv)^2} & \dfrac{4u}{(1-uv)^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{4}{(1-uv)^2} & \dfrac{4u^2}{(1-uv)^2} \\ \dfrac{4v}{(1-uv)^2} & \dfrac{4u}{(1-uv)^2)} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{16u - 16u^2v}{(1-uv)^4} = \frac{16u}{(1-uv)^3} > 0, \forall (u,v) \in [1/3,3] \times [-5,-1].$$

Theo công thức đổi biến ta có

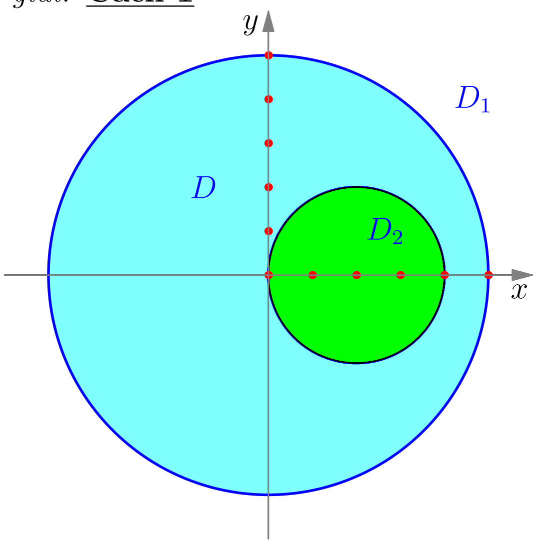
$$\begin{aligned}
\iint\limits_S \frac{dxdy}{x^2y^2} &= \iint_{[1/3,3]\times[-5,-1]} \frac{(1-uv)^4}{256u^2} \times \frac{16u}{(1-uv)^3} dvdu \\
&= \iint_{[1/3,3]\times[-5,-1]} \frac{1-uv}{16u} dvdu = \iint_{[1/3,3]\times[-5,-1]} \frac{1}{16u} - \frac{v}{16} dvdu \\
&= \iint_{[1/3,3]\times[-5,-1]} \frac{1}{16u} dvdu - \iint_{[1/3,3]} \frac{v}{16} dvdu \\
&= \frac{1}{16} \ln u \Big|_{1/3}^{3} v \Big|_{-5}^{-1} - u \Big|_{1/3}^{3} \frac{v^2}{32} \Big|_{-5}^{-1} = \frac{\ln 3}{2} + 2
\end{aligned}$$

■

Ví dụ 6 (Ví dụ tổng hợp). Tính tích phân kép sau $\iint_D x dx dy$ trong đó D là miền

$$4x \le x^2 + y^2 \le 25.$$

Lời giải. **Cách 1**



Do

$$D_1 = D \cup D_2$$

và hai miền trên ko đè lên nhau nên

$$\iint_D x dx dy = \underbrace{\iint_{D_1} x dx dy}_{I_1} - \underbrace{\iint_{D_2} x dx dy}_{I_2}.$$

Để tính I_1 ta có thể dùng đổi biến tọa độ cực

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi, \end{cases} \quad J = r \Rightarrow |J| = r$$

với $0 \le r \le 5,\ 0 \le \varphi < 2\pi$. Từ đó ta có

$$\iint_{D_1} x dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^5 r\cos\varphi r dr = \left(\int_0^{2\pi} \cos\varphi d\varphi\right) \times \left(\int_0^5 r^2 dr\right)$$
$$= \left(\sin\varphi\Big|_0^{2\pi}\right) \times \left(\frac{r^3}{3}\Big|_0^5\right) = 0.$$

Phương trình đường tròn nhỏ có thể viết dưới dạng

$$(x-2)^2 + y^2 = 4.$$

Để tính I_2 ta có thể dùng đổi biến tọa độ cực (suy rộng)

$$\begin{cases} x - 2 = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi, \end{cases}$$

với $0 \le r \le 2,\ 0 \le \varphi < 2\pi$. Jacobiên của phép đổi biến

$$J = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r \Rightarrow |J| = r$$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned} I_2 &= \iint_{D_2} xdxdy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (2 + r\cos\varphi) rdr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (2r + r^2\cos\varphi) dr \\ &= \int_0^{2\pi} \left(r^2 + \frac{r^3}{3}\cos\varphi \right) \Big|_0^2 d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(4 + \frac{8}{3}\cos\varphi \right) d\varphi = \left(4\varphi + \frac{8}{3}\sin\varphi \right) \Big|_0^{2\pi} = 8\pi. \end{aligned}$$

Vậy

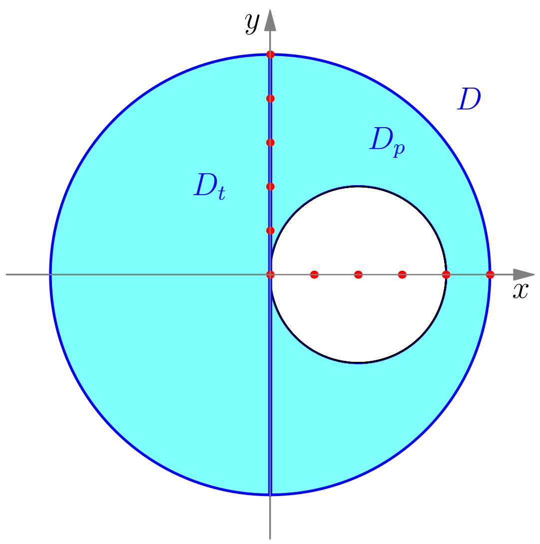
$$\iint_D xdxdy = \iint_{D_1} xdxdy - \iint_{D_2} xdxdy = 0 - 8\pi = -8\pi.$$

Cách 2 Tách D thành hai nửa trái và phải

$$D = D_t \cup D_p$$

hai miền trên ko đè lên nhau nên

$$\iint_D xdxdy = \underbrace{\iint_{D_t} xdxdy}_{K_1} + \underbrace{\iint_{D_p} xdxdy}_{K_2}.$$



Để tính K_1 ta dùng đổi biến tọa độ cực

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi, \end{cases} \quad J = r \Rightarrow |J| = r$$

với $0 \le r \le 5$, $\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{3\pi}{2}$. Từ đó ta có

$$\iint_{D_t} xdxdy = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\varphi \int_0^5 r\cos\varphi r dr = \left(\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos\varphi d\varphi\right) \times \left(\int_0^5 r^2 dr\right)$$
$$= \left(\sin\varphi\Big|_{\pi/2}^{3\pi/2}\right) \times \left(\frac{r^3}{3}\Big|_0^5\right) = -2 \cdot \frac{125}{3} = -\frac{250}{3}.$$

Để tính K_2 ta cũng dùng đổi biến tọa độ cực

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi, \end{cases} \quad J = r \Rightarrow |J| = r.$$

với $-\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$. Để xác định cận cho r ta để ý rằng r chạy từ đường tròn nhỏ có phương trình tọa độ cực dạng $r = 4\cos\varphi$ đến đường tròn lớn có phương trình $r = 5$. Vậy

$$4\cos\varphi \le r \le 5.$$

Từ đó

$$K_2 = \iint_{D_p} xdxdy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_{4\cos\varphi}^5 r\cos\varphi r dr = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_{4\cos\varphi}^5 r^2\cos\varphi dr$$
$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{r^3}{3}\Big|_{4\cos\varphi}^5\right)\cos\varphi d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{125}{3} - \frac{64}{3}\cos^3\varphi\right)\cos\varphi d\varphi$$
$$= \frac{125}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi d\varphi - \frac{64}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\varphi d\varphi.$$

Ta có

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\varphi d\varphi = \sin\varphi\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2.$$

Sử dụng công thức hạ bậc

$$\cos^2\varphi = \frac{1+\cos 2\varphi}{2}$$

ta được

$$\cos^4\varphi = (\cos^2\varphi)^2 = \left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{\cos 2\varphi}{2} + \frac{\cos^2 2\varphi}{4}$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{\cos 2\varphi}{2} + \frac{1+\cos 4\varphi}{8} = \frac{3}{8} + \frac{\cos 2\varphi}{2} + \frac{\cos 4\varphi}{8}.$$

Từ đó

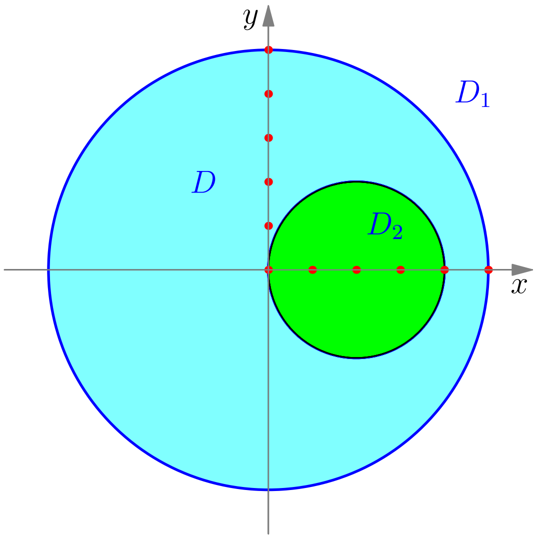
$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4\varphi d\varphi = \frac{3}{8}\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{4} + \frac{\sin 4\varphi}{32}\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{3\pi}{8}.$$

Vậy

$$K_2 = \frac{125}{3} \cdot 2 - \frac{64}{3} \cdot \frac{3\pi}{8} = \frac{250}{3} - 8\pi.$$

Vậy

$$\iint_D xdxdy = -\frac{250}{3} + \frac{250}{3} - 8\pi = -8\pi.$$



Cách 3 Ta sẽ tính trực tiếp bằng cách sử dụng tọa độ Descartes (xem hình vẽ ở cách 1)

$$\iint_D xdxdy = \underbrace{\iint_{D_1} xdxdy}_{I_1} - \underbrace{\iint_{D_2} xdxdy}_{I_2}.$$

Ta xem D_1 như miền loại II như sau

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -5 \le y \le 5,\ \ -\sqrt{25-y^2} \le x \le \sqrt{25-y^2}\}.$$

Khi đó

$$I_1 = \iint_{D_1} xdxdy = \int_{-5}^{5} dy \int_{-\sqrt{25-y^2}}^{\sqrt{25-y^2}} xdx = 0$$

vì với mỗi y tích phân $\displaystyle\int_{-\sqrt{25-y^2}}^{\sqrt{25-y^2}} xdx$ là tích phân của hàm lẻ trên cận đối xứng nên bằng 0.

Tương tự, ta cũng xem D_2 là miền loại II như sau

$$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \le y \le 2,\ 2-\sqrt{4-y^2} \le x \le 2+\sqrt{4-y^2}\}.$$

Khi đó

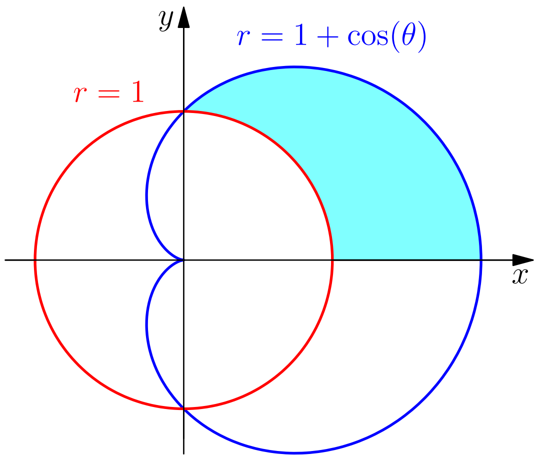
$$\begin{aligned}
I_2 &= \iint_{D_2} xdxdy = \int_{-2}^{2} dy \int_{2-\sqrt{4-y^2}}^{2+\sqrt{4-y^2}} xdx \\
&= \int_{-2}^{2} \frac{x^2}{2}\Big|_{2-\sqrt{4-y^2}}^{2+\sqrt{4-y^2}} dy = \int_{-2}^{2} \frac{(2+\sqrt{4-y^2})^2}{2} - \frac{(2-\sqrt{4-y^2})^2}{2} dy \\
&= 4\int_{-2}^{2} \sqrt{4-y^2}dy = 4\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4\cos^2 tdt \qquad\qquad (\text{Đổi biến } y = 2\sin t) \\
&= 8\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1+\cos 2t)dt = 16\int_{0}^{\pi/2} (1+\cos 2t)dt = 16t + 8\sin 2t\Big|_0^{\pi/2} = 8\pi.
\end{aligned}$$

Vậy

$$I = I_1 - I_2 = -8\pi.$$

■

Ví dụ 7 (Ứng dụng tính diện tích). Tính diện tích miền tô màu dưới đây



Lời giải. Gọi D là phần miền cần tính diện tích. Sử dụng tọa độ cực ta có:

$$
\begin{aligned}
S &= \iint_D dxdy = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_1^{1+\cos\theta} rdr \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{r^2}{2}\Big|_1^{1+\cos\theta} d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\left((1+\cos\theta)^2 - 1\right) d\theta \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \left(2\cos\theta - \cos^2\theta\right) d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left(2\cos\theta + \frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) d\theta \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\theta + 2\sin\theta + \frac{\sin 2\theta}{4}\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{8} + 1.
\end{aligned}
$$

■

Ví dụ 8 (Cách tính tích phân liên quan đến phân phối chuẩn tắc trong xác suất thống kê). Tính $I = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2} dx$

Lời giải.

$$
\begin{aligned}
I^2 &= \left(\int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^\infty e^{-y^2}\mathrm{d}y\right) \\
&= \int_{x=0}^\infty \int_{y=0}^\infty e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{r=0}^\infty e^{-r^2} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty e^{-r^2} r\mathrm{d}r \\
&= \frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right)\Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2}\left(\lim_{c\to\infty} -\frac{1}{2}e^{-c^2} + \frac{1}{2}e^{-0^2}\right) \\
&= \frac{\pi}{2}\left(0 + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4},
\end{aligned} \tag{5}
$$

Vậy $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Chú ý sử dụng tích phân từng phần ta có

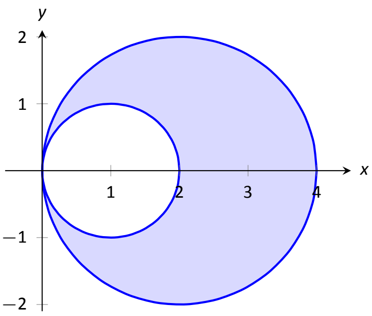
$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx &= -\frac{1}{2} x e^{-x^2}\Big|_0^\infty + \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \left(\lim_{c\to\infty} -\frac{1}{2} c e^{-c^2}\right) + \frac{1}{2} 0 e^{-0^2} + \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= 0 + 0 + \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.
\end{aligned}
$$

Đối với tích phân $\displaystyle\int_0^\infty \sqrt{x} e^{-x} dx$ ta đặt $t = \sqrt{x}$ suy ra

$$
\int_0^\infty \sqrt{x} e^{-x} dx = \int_0^\infty 2t^2 e^{-t^2} dt = 2\int_0^\infty t^2 e^{-t^2} dt = 2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{4} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.
$$

■

Ví dụ 9 (Ứng dụng tính thể tích). Tính thể tích của miền nằm bên dưới paraboloid $z = 4 - (x-2)^2 - y^2$ bị chặn bởi mặt phẳng xoy và bị giới hạn bởi $(x-1)^2 + y^2 = 1$ và $(x-2)^2 + y^2 = 4$.



Lời giải.

$$
\iint_R f(x,y)\,dxdy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{2\cos\theta}^{4\cos\theta} \Big(4 - \big(r\cos\theta - 2\big)^2 - \big(r\sin\theta\big)^2\Big) r\; dr\; d\theta
$$

$$
= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{2\cos\theta}^{4\cos\theta} \big(-r^3 + 4r^2\cos\theta\big)\; dr\; d\theta
$$

$$
= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(-\frac{1}{4}r^4 + \frac{4}{3}r^3\cos\theta\right)\Bigg|_{2\cos\theta}^{4\cos\theta} d\theta
$$

$$
= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(-\frac{256\cos^4\theta}{4} + \frac{4(64\cos^4\theta)}{3} - \left[-\frac{16\cos^4\theta}{4} + \frac{4}{3}(8\cos^4\theta)\right]\right)\; d\theta
$$

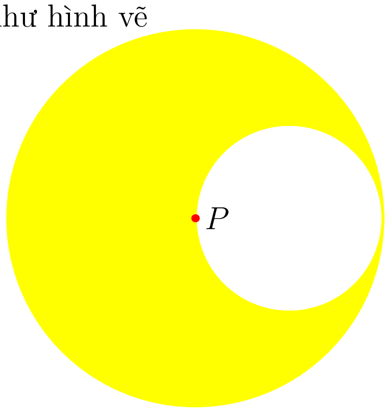
$$
= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{44}{3}\cos^4\theta\; d\theta
$$

$$
= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{44}{3}\left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos(2\theta) + \frac{1}{8}\cos(4\theta)\right) d\theta
$$

$$
= \frac{44}{3}\left(\frac{3}{8}\theta + \frac{1}{4}\sin(2\theta) + \frac{1}{32}\sin(4\theta)\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{11}{2}\pi.
$$

■

Ví dụ 10 (Ứng dụng trong vật lý). Cho một chiếc hoa tai tạo thành từ một đĩa kinh loại mỏng phẳng, đồng chất bán kính R bằng việc khoét đi một hình tròn bán kính r như hình vẽ

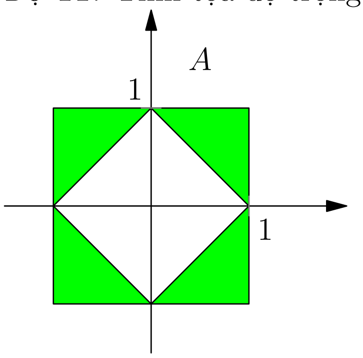


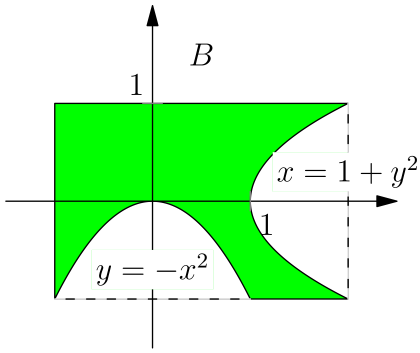
1. Tìm tọa độ trong tâm của chiếc hoa tai theo r và R.

2. CMR khi trọng tâm của chiếc hoa tai là tại điểm P thì tỉ số

$$\frac{R}{r} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Ví dụ 11. Tính tọa độ trọng tâm của các hình sau:





4 Luyện tập

CÂU 1. Tính tích phân $\iint\limits_R y\sin(xy)dA$ trong đó $R = [1,2]\times[0,\pi]$ bằng 2 cách.

CÂU 2. Tìm thể tích của vật rắn S bị chặn bởi elliptic paraboloit $x^2+2y^2+z=16$, các mặt phẳng $x=2, y=2$ và ba mặt phẳng tọa độ.

CÂU 3. Tính $\iint\limits_D x+2ydA$, trong đó D là bị chặn bởi hai parabol $y=2x^2$ và $y=1+x^2$.

CÂU 4. Tính thể tích vật rắn nằm phía dưới paraboloid $z=x^2+y^2$ và phía trên miền D trong mặt phẳng xy bị chặn bởi đường thẳng $y=2x$ và parabol $y=x^2$.

CÂU 5. Tính thể tích của tứ diện sau tạo bởi bốn mặt phẳng sau:$x+2y+z=2, x=2y, x=0, z=0$.

CÂU 6. Tính tích phân sau: $\int_0^1\int_x^1 \sin(y^2)dydx$.

CÂU 7. Tính các tích phân sau:

(a) $\iint_D y^2dA, D=\{(x,y)|-1\le y\le 1, -y-2\le x\le y\}$

(b) $\iint_D xdA, D=\{(x,y)|0\le x\le\pi, 0\le y\le\sin x\}$

(c) $\iint_D y^2e^{xy}dA, D=\{(x,y)|0\le y\le 4, 0\le x\le y\}$

(d) $\iint_D x\cos ydA, D$ bị chặn bởi $y=0, y=x^2, x=1$.

(e) $\iint_D(2x-y)dA, D$ bị chặn bởi hình tròn tâm tại gốc tọa độ và bán kính bằng 2

CÂU 8. Tính thể tích của vật rắn sau:

(a) Bên dưới mặt phẳng $x+2y-z=0$ và bên trên miền bị chặn bởi $y=x$ và $y=x^4$

(b) Nằm dưới mặt $z=xy$ và trên tam giác có ba đỉnh $(1,1),(4,1)$ và (1,2)

(c) Bị chặn bởi các mặt phẳng tọa độ và mặt phẳng $3x+2y+z=6$

(d) Bị chặn bởi $z=x^2, y=x^2$ và các mặt phẳng $z=0, y=4$

(e) Bị chặn bởi $y=1-x^2, y=x^2-1$ và các mặt phẳng $x+y+z=2, 2x+2y-z+10=0$

CÂU 9. Vẽ miền lấy tích phân và đổi thứ tự lấy tích phân sau:

(a) $\displaystyle\int_0^4\int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)dydx$

(b) $\displaystyle\int_0^3\int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x,y)dxdy$

(c) $\int_1^2 \int_0^{\ln x} f(x,y)dydx$

CÂU 10. Tính các tích phân sau bằng cách đổi thứ tự lấy tích phân

(a) $\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2}dxdy$

(b) $\int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{1}{y^3+1}dydx$

(c) $\int_0^1 \int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\sqrt{1+\cos^2 x}dxdy$

CÂU 11. Tính tích phân sau bằng cách chuyển sang tọa độ cực.

(a) $\iint_D (3x+4y^2)dA$, D là miền thuộc nửa mặt phẳng trên bị chặn bởi hai đường tròn $x^2+y^2=1$ và $x^2+y^2=4$

(b) $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (x^2+y^2)dxdy$

(c) $\int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a-x^2}} dydx$

(d) $\int_{-1}^0 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 \frac{2}{1+\sqrt{x^2+y^2}}dydx$

(e) $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^0 \frac{4\sqrt{x^2+y^2}}{1+x^2+y^2}dydx$

(f) $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} \frac{x+y}{x^2+y^2}dxdy$

CÂU 12. Dùng tích phân hai lớp tính diện tích các miền sau:

(a) Tính diện tích của miền nằm bên trong đường cardioid $r=1+\cos 2\theta$ và bên ngoài đường tròn $r=1$

(b) Tính diện tích của một nhánh cách hoa hồng cho bởi $r=12\cos 3\theta$

(c) Tính diện tích của miền nằm trong 2 đường cardioid $r=1+\cos\theta$ và $r=1-\cos\theta$

CÂU 13. Sử dụng tọa độ cực tính thể tích của các vật sau:

(a) Tính thể tích của vật thể bị chặn bởi mặt phẳng $z=0$ và paraboloid $z=1-x^2-y^2$.

(b) Tính thể tích của vật thể nằm bên dưới paraboloid $z=x^2+y^2$, bên trên mặt phẳng xy và bên trong của hình trụ $x^2+y^2=2x$.

CÂU 14. Tính các tích phân kép sau

(a) $\iint\limits_S (12x^2y^2 + 16x^3y^3)dxdy, \qquad S: x = 1, y = x^2, y = -\sqrt{x};$

(b) $\iint\limits_S (9x^2y^2 + 48x^3y^3)dxdy, \qquad S: x = 1, y = \sqrt{x}, y = -x^2;$

(c) $\iint\limits_S (36x^2y^2 - 96x^3y^3)dxdy, \qquad S: x = 1, y = \sqrt[3]{x}, y = -x^3;$

(d) $\iint\limits_S (18x^2y^2 + 32x^3y^3)dxdy, \qquad S: x = 1, y = x^3, y = -\sqrt[3]{x};$

(e) $\iint\limits_S (27x^2y^2 + 48x^3y^3)dxdy, \qquad S: x = 1, y = x^2, y = -\sqrt[3]{x};$

(f) $\iint\limits_S (18x^2y^2 + 32x^3y^3)dxdy, \qquad S: x = 1, y = \sqrt[3]{x}, y = -x^2;$

(g) $\iint\limits_S (18x^2y^2 + 32x^3y^3)dxdy, \qquad S: x = 1, y = x^3, y = -\sqrt{x};$

(h) $\iint\limits_S (27x^2y^2 + 48x^3y^3)dxdy, \qquad S: x = 1, y = \sqrt{x}, y = -x^3;$

(i) $\iint\limits_S (4xy + 3x^2y^2)dxdy, \qquad S: x = 1, y = x^2, y = -\sqrt{x};$

(j) $\iint\limits_S (12xy + 9x^2y^2)dxdy, \qquad S: x = 1, y = \sqrt{x}, y = -x^2.$

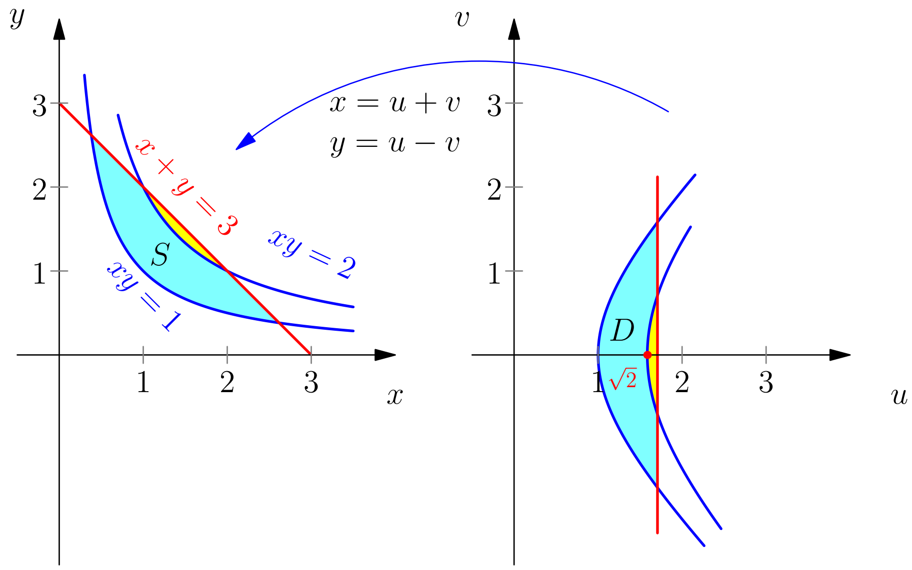
CÂU 15. $\iint\limits_S \frac{x}{y}dxdy, \qquad S: y = x^2,\ 8y = x^2,\ x = y^2,\ 8x = y^2;$

CÂU 16. $\iint\limits_S (x + y)dxdy, \qquad S: xy = 1, xy = 3, y = x, y = x - 2;$

CÂU 17. $\iint\limits_S \frac{dxdy}{x^2y^2}, \qquad S: 2y = x,\ y = 2x,\ y = 1 - x,\ y = 1 - 3x;$

CÂU 18. $\iint\limits_S x^2dxdy, \qquad S: xy = 2,\ xy = 4,\ y = x,\ y = 3x(x > 0, y > 0);$

CÂU 19. $\iint\limits_S (2x + y)dxdy, \qquad S: xy = 1,\ xy = 2,\ x + y = 3;$



Lời giải. Đổi biến

$$\begin{cases} x = u + v \\ y = u - v. \end{cases}$$

Jacobian

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2, |J| = 2.$$

Ta có

$$xy = 1 \Leftrightarrow u^2 - v^2 = 1.$$

$$xy = 2 \Leftrightarrow u^2 - v^2 = 2.$$

$$x + y = 3 \Leftrightarrow u = 1.5.$$

Ta có

$$\begin{aligned} \iint_S (2x+y)dxdy &= \iint_D (3u+v)2dudv = \iint_D 6u + 2vdudv \\ &= \int_1^{1.5} du \int_{-\sqrt{u^2-1}}^{\sqrt{u^2-1}} 6u + 2vdv - \int_{\sqrt{2}}^{1.5} du \int_{-\sqrt{u^2-2}}^{\sqrt{u^2-2}} 6u + 2vdv \\ &= 2\int_1^{1.5} du \int_0^{\sqrt{u^2-1}} 6udv - 2\int_{\sqrt{2}}^{1.5} du \int_0^{\sqrt{u^2-2}} 6udv \end{aligned}$$

(tính chất tích phân hàm chẵn, lẻ trên cận đối xứng)

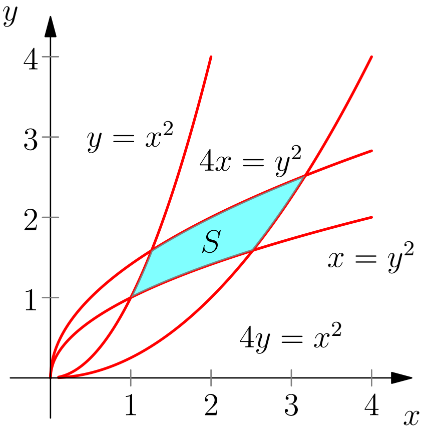
$$\begin{aligned} &= 2\int_1^{1.5} 6uv\Big|_0^{\sqrt{u^2-1}} du - 2\int_{\sqrt{2}}^{1.5} 6uv\Big|_0^{\sqrt{u^2-2}} du \\ &= 12\int_1^{1.5} u\sqrt{u^2-1}du - 12\int_{\sqrt{2}}^{1.5} u\sqrt{u^2-2}du \\ &= 6\int_1^{1.5} (u^2-1)^{1/2}d(u^2-1) - 6\int_{\sqrt{2}}^{1.5} (u^2-2)^{1/2}d(u^2-2) \\ &= 6 \times \frac{2}{3}(u^2-1)^{3/2}\Big|_1^{1.5} - 6 \times \frac{2}{3}(u^2-2)^{3/2}\Big|_{\sqrt{2}}^{1.5} = \frac{5\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

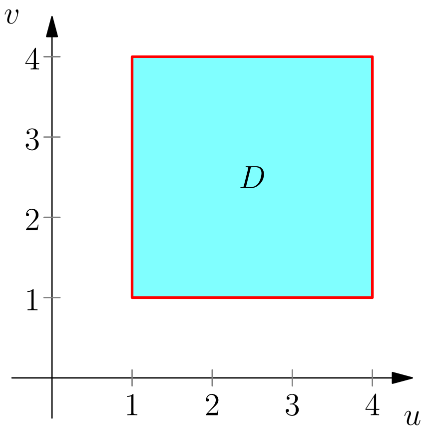
Chú ý, ta vẫn có thể làm trực tiếp như sau:

$$\iint_S (2x+y)dxdy = \int_{(3-\sqrt{5})/2}^{(3+\sqrt{5})/2} \int_{1/x}^{3-x} 2x+ydydx - \int_1^2 \int_{1/x}^{3-x} 2x+ydydx.$$

Tính toán một cách tỉ mỉ ta vẫn thu được kết quả trên. Có điều các bước tính có hơi cồng kềnh hơn cách đổi biến một chút. ■

CÂU 20. $\displaystyle\iint\limits_S \frac{x}{y}dxdy,$ $\quad S: x=y^2,\ 4x=y^2,\ y=x^2,\ 4y=x^2;$





Lời giải.

$$\begin{cases} u = \dfrac{y^2}{x}, & u \in [1,4] \\ v = \dfrac{x^2}{y}, & v \in [1,4] \end{cases}$$

Jacobian

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} -\dfrac{y^2}{x^2} & \dfrac{2y}{x} \\ \dfrac{2x}{y} & -\dfrac{x^2}{y^2} \end{vmatrix} = -5.$$

Suy ra $J = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \dfrac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = -\dfrac{1}{5}, |J| = \dfrac{1}{5}$ và

$$f(x,y) = \frac{x}{y} = \sqrt[3]{\frac{v}{u}}.$$

Từ đó

$$\begin{aligned} \iint\limits_S \frac{x}{y}dxdy &= \iint_D \sqrt[3]{\frac{v}{u}} \cdot \frac{1}{5}dudv = \frac{1}{5}\int_1^4 \int_1^4 \sqrt[3]{\frac{v}{u}}dudv \\ &= \frac{1}{5}\int_1^4 u^{1/3}du \int_1^4 v^{-1/3}dv \\ &= \frac{1}{5}\frac{3}{4}u^{4/3}\Big|_1^4 \times \frac{3}{2}u^{2/3}\Big|_1^4 = \cdots \end{aligned}$$

■

CÂU 21. $\displaystyle\iint_S xydxdy,$ $S : |x+2y| \leq 3, |x-y| \leq 3.$

CÂU 24. Tính tích phân kép sau $\displaystyle\iint_D x^2+y^2dxdy$ trong đó

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 2x\}.$$

Lời giải. ĐS: $\dfrac{216}{35}$. ■

CÂU 25. Tính tích phân kép $\displaystyle\iint_D (x-2y)dxdy$ trong đó D là miền giới hạn bởi các đường

$$x = 0, \; y = 7-x, \; y = \frac{1}{2}x + 1.$$

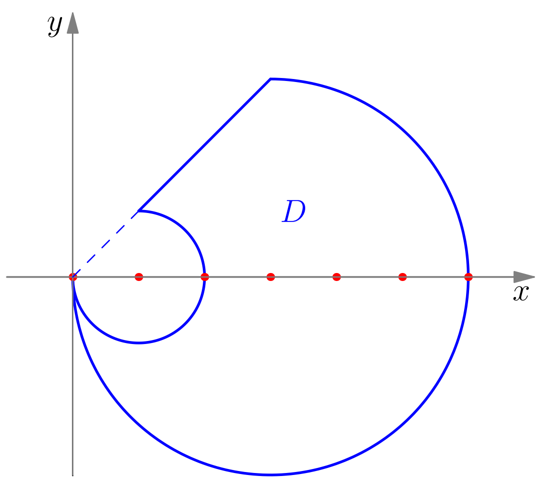
Lời giải. Gợi ý:

$$\iint_D (x-2y)dxdy = \int_0^4 dx \int_{\frac{x}{2}+1}^{7-x} (x-2y)dy = ... = -72$$

■

CÂU 26. Tính tích phân kép sau $\displaystyle\iint_D xdxdy$ trong đó D là miền giới hạn bởi

$$2x \leq x^2+y^2 \leq 6x, y \leq x.$$



Lời giải.

Sử dụng tọa độ cực ta có (viết hơi tắt)

$$\iint_D xdxdy = \int_{-\pi/2}^{\pi/4} d\varphi \int_{2\cos\varphi}^{6\cos\varphi} r\cos\varphi r dr = \int_{-\pi/2}^{\pi/4} \frac{r^3}{3}\cos\varphi\Big|_{2\cos\varphi}^{6\cos\varphi} d\varphi$$

$$= \frac{208}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/4} \cos^4\varphi d\varphi = \frac{208}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/4}\left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^2 d\varphi$$

$$= \frac{208}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/4}\left(\frac{1}{4}+\frac{\cos 2\varphi}{2}+\frac{\cos^2 2\varphi}{4}\right) d\varphi$$

$$= \frac{208}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/4}\left(\frac{1}{4}+\frac{\cos 2\varphi}{2}+\frac{1+\cos 4\varphi}{8}\right) d\varphi$$

$$= \frac{208}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/4}\left(\frac{3}{8}+\frac{\cos 2\varphi}{2}+\frac{\cos 4\varphi}{8}\right) d\varphi$$

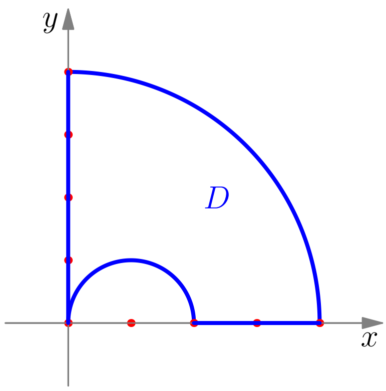
$$= \frac{208}{3}\left(\frac{3}{8}\varphi+\frac{\sin 2\varphi}{4}+\frac{\sin 4\varphi}{32}\right)\Big|_{-\pi/2}^{\pi/4}$$

$$= \frac{208}{3}\frac{9\pi+8}{32} = \frac{13(9\pi+8)}{6} = \frac{117\pi+104}{6}$$

■

CÂU 27. Tính tích phân kép sau $\iint_D 1+\sqrt{x^2+y^2}dxdy$ trong đó D là miền giới hạn bởi

$$2x \le x^2+y^2 \le 16, x\ge 0, y \ge 0.$$



Lời giải.

$$\iint_D 1+\sqrt{x^2+y^2}dxdy = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^4 (1+r)rdr - \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} (1+r)rdr$$

$$= \frac{\pi}{2}\times\left(\frac{r^2}{2}+\frac{r^3}{3}\right)\Big|_0^4 - \int_0^{\pi/2}\left(\frac{r^2}{2}+\frac{r^3}{3}\right)\Big|_0^{2\cos\varphi} d\varphi$$

$$= \frac{44\pi}{3} - \int_0^{\pi/2}\left(2\cos^2\varphi + \frac{8\cos^3\varphi}{3}\right)d\varphi$$

$$= \frac{44\pi}{3} - \frac{9\pi+32}{18} = \frac{85\pi}{6} - \frac{16}{9}$$

■

CÂU 28. Tính tích phân kép sau

$$\int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{\ln(1+\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}} dy.$$

Lời giải. ĐS: $\dfrac{\pi}{2}(2\ln 2 - 1)$. ■

Câu 29. Tính tích phân $\displaystyle\iint_D \cos\frac{1}{2}\pi x^2 dxdy$ trong đó D là miền giới hạn bởi các đường sau

$$y = 0,\ x = 1,\ y = x.$$

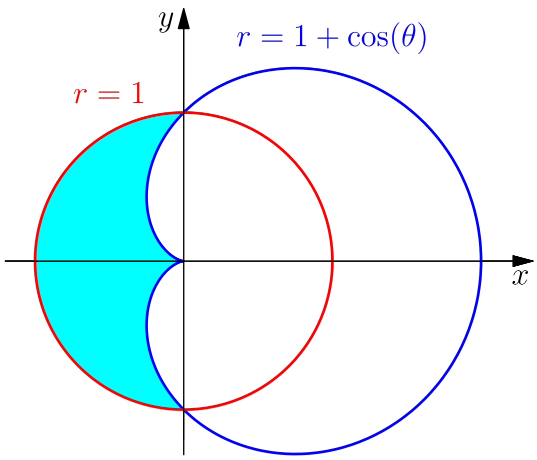
Lời giải. ĐS: $\dfrac{1}{\pi}$ ■

Câu 30. Tính thể tích của vật thể bị chặn trên bởi nón $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ và bị chặn dưới bởi hình tròn $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$.

Lời giải. ■

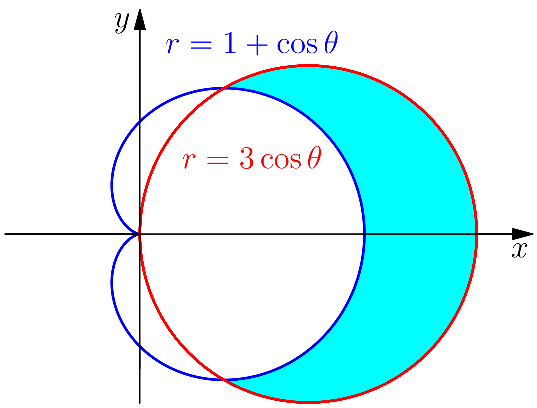
Câu 31. Tính tích phân kép sau $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(1+x+y)^{3/2}} dxdy$ trong đó D là tam giác OAB với đỉnh $O = (0,0), A = (1,0)$ và $B = (1,1)$.

Câu 32. Tính diện tích miền tô màu dưới đây



Lời giải. ■

Câu 33. Tính diện tích miền tô màu dưới đây



Câu 34. Tính $\displaystyle\int_0^4 \int_0^{2\sqrt{z}} \int_0^{\sqrt{4z - x^2}} dydxdz$.

Lời giải. ĐS: 8π. ■

Câu 35. Tính $\displaystyle\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \frac{dzdydx}{\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}}$.

Lời giải. ĐS: $\dfrac{\pi^2 a^2}{8}$. ■

Câu 36. Tính thể tích của miền bị chặn bởi mặt cầu $x^2+y^2+z^2=a^2$ nằm trong mặt trụ $x^2+y^2=ay$.

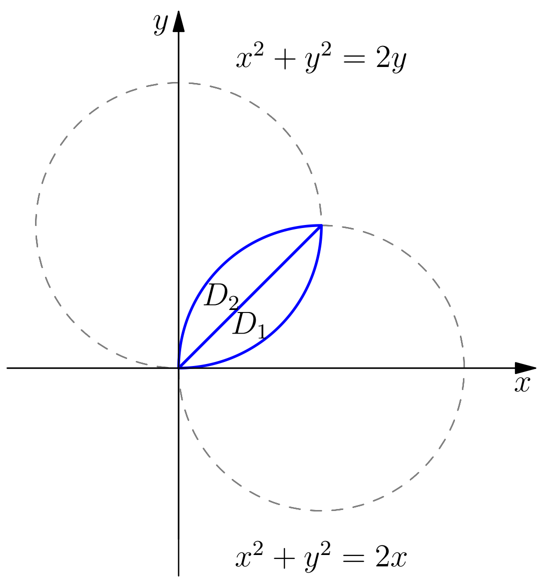
Lời giải. ĐS: $\dfrac{2a^3}{9}(3\pi-4)$. ■

Câu 37. Tính tích phân

$$\iint_D xdxdy$$

trong đó D là miền bị chặn bởi hai đường tròn

$$x^2+y^2=2x, \quad x^2+y^2=2y$$



Lời giải.

$$\begin{aligned}
\iint_{D_1} xdxdy &= \int_0^{\pi/4}\int_0^{2\sin\varphi} r\cos\varphi \, r\, drd\varphi \\
&= \int_0^{\pi/4}\int_0^{2\sin\varphi} r^2\cos\varphi drd\varphi = \int_0^{\pi/4} \frac{r^3}{3}\cos\varphi\Big|_0^{2\sin\varphi} d\varphi \\
&= \int_0^{\pi/4} \frac{8\sin^3\varphi}{3}\cos\varphi d\varphi = \int_0^{\pi/4} \frac{8\sin^3\varphi}{3} d(\sin\varphi) \\
&= \frac{2\sin^4\varphi}{3}\Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{6} - 0 = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\iint_{D_2} xdxdy &= \int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\varphi} r\cos\varphi\, r\, drd\varphi \\
&= \int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\varphi} r^2\cos\varphi drd\varphi = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{r^3}{3}\cos\varphi\Big|_0^{2\cos\varphi} d\varphi \\
&= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{8}{3}\cos^4\varphi d\varphi = \frac{8}{3}\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{3}{8} + \frac{\cos 2\varphi}{2} + \frac{\cos 4\varphi}{8} d\varphi \\
&= \int_{\pi/4}^{\pi/2} 1 + \frac{4\cos 2\varphi}{3} + \frac{\cos 4\varphi}{3} d\varphi = \left[\varphi + \frac{2\sin 2\varphi}{3} + \frac{\sin 4\varphi}{12}\right]\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

Do đó

$$
\iint_D xdxdy = \iint_{D_1} xdxdy + \iint_{D_2} xdxdy = \frac{1}{6} + \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.
$$

Cách 2 sử dụng tọa độ Decartes. Phương trình đường tròn $x^2 + y^2 = 2y$ có thể viết lại dưới dạng $x^2 + (y-1)^2 = 1$. Từ đó trong góc phần tư thứ nhất ta suy ra

$$
y = 1 - \sqrt{1 - x^2}, x \in [0, 1].
$$

Trong góc phần tư thứ nhất phương trình $x^2 + y^2 = 2x$ có dạng

$$
y = \sqrt{2x - x^2}, x \in [0, 1].
$$

Do đó

$$
\begin{aligned}
\iint_D xdxdy &= \int_0^1 \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} xdydx = \int_0^1 xy\Big|_{1-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} dx \\
&= \int_0^1 x\sqrt{2x - x^2} - x + x\sqrt{1 - x^2}dx \\
&= \int_0^1 x\sqrt{2x - x^2}dx - \int_0^1 xdx + \int_0^1 x\sqrt{1 - x^2}dx \\
&= I_1 - I_2 + I_3.
\end{aligned}
$$

Dễ thấy $I_2 = \dfrac{1}{2}$. Ta có

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 x\sqrt{2x - x^2}dx = \int_0^1 x\sqrt{1-(1-x)^2}dx, \quad (t = 1 - x, dt = -dx)\\
&= -\int_1^0 (1-t)\sqrt{1-t^2}dt = \int_0^1 (1-t)\sqrt{1-t^2}dt\\
&= \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx - I_3.\\
\Rightarrow I_1 - I_2 + I_3 &= -\frac{1}{2} + \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx \qquad (x = \sin t, dx = \cos t dt)\\
&= -\frac{1}{2} + \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} + \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2}dt\\
&= -\frac{1}{2} + \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right]\Bigg|_0^{\pi/2} = -\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

Cách 3. Xem D là miền loại II. Phương trình đường tròn $x^2 + y^2 = 2y$ có thể viết lại dưới dạng $x^2 + (y-1)^2 = 1$. Từ đó trong góc phần tư thứ nhất ta suy ra

$$x = \sqrt{2y - y^2}, y \in [0, 1].$$

Trong góc phần tư thứ nhất phương trình $x^2 + y^2 = 2x$ có dạng

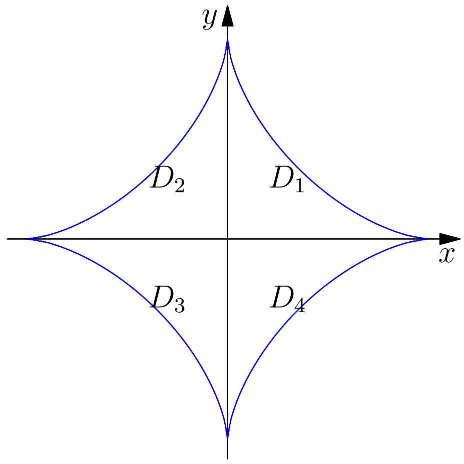
$$x = 1 - \sqrt{2y - y^2}, y \in [0, 1].$$

$$\begin{aligned}
\iint_D xdxdy &= \int_0^1 \int_{1-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}} xdxdy\\
&= \int_0^1 \frac{x^2}{2}\Bigg|_{1-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}} dy = \int_0^1 \frac{2y-y^2}{2} - \frac{(1-\sqrt{1-y^2})^2}{2}dy\\
&= \int_0^1 y - 1 + \sqrt{1-y^2}dy = \left(\frac{y^2}{2} - y\right)\Bigg|_0^1 + \int_0^1 \sqrt{1-y^2}dy\\
&= -\frac{1}{2} + \int_0^1 \sqrt{1-y^2}dy \qquad (y = \sin t, dy = \cos t dt)\\
&= -\frac{1}{2} + \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} + \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2}dt\\
&= -\frac{1}{2} + \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right]\Bigg|_0^{\pi/2} = -\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

■

CÂU 38. Tính diện tích hình phẳng bị chặn bởi đường cong phương trình

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 1.$$



Bản phác thảo (còn lỗi sai) Lưu hành nội bộ. Làm hoàn thiện một ý nhỏ được tính một điểm.