

# TÍCH PHÂN KÉP (TÍCH PHÂN 2 LỚP)

Chữ Văn Tiệp

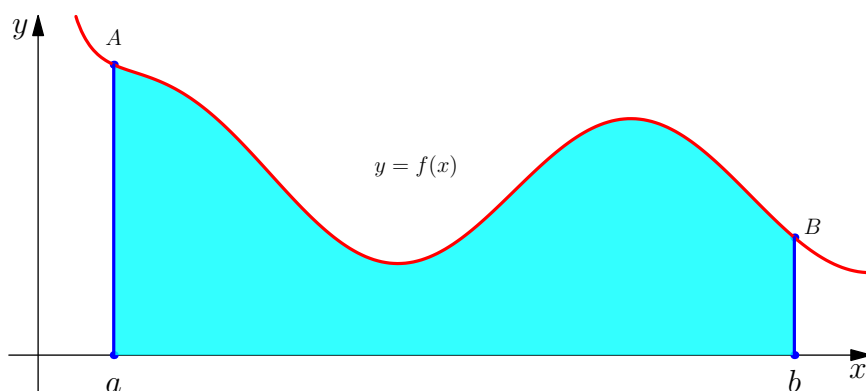
Giải tích II- 2023-2024, DHBKDN

## 1 Tóm tắt lý thuyết

1. Đặt bài toán:

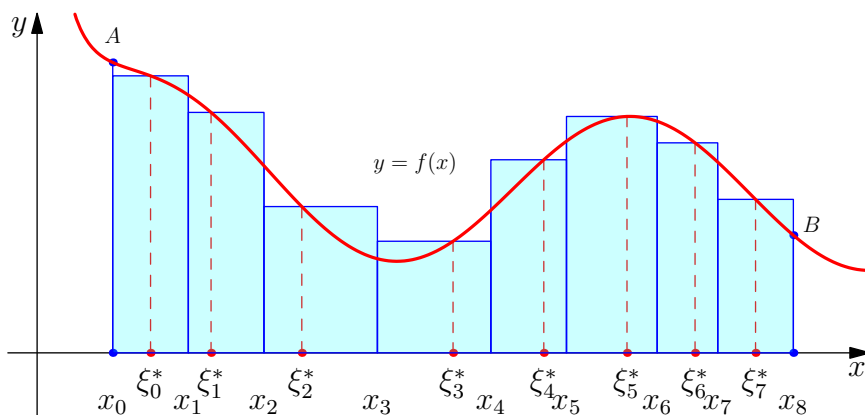
- Tích phân xác định (Tích phân một lớp) xuất phát từ bài toán tính DIỆN TÍCH hình thang cong.

Bài toán: Hãy tính diện tích hình phẳng nằm bên dưới đồ thị của hàm số  $y = f(x)$  trên đoạn  $[a, b]$  như hình vẽ bên dưới.



Chia đoạn  $[a, b]$  thành các đoạn nhỏ bởi  $n + 1$  điểm chia  $x_0 = a < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ , trên mỗi đoạn nhỏ đó lấy một điểm  $\xi_i^*$  tùy ý và lập tổng

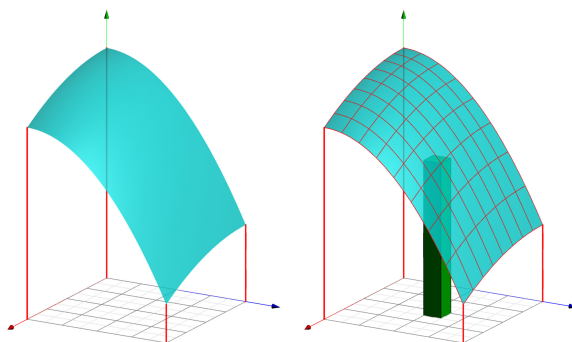
$$S \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i^*) \Delta x_i$$



$$S = \int_a^b f(x)dx = \lim_{|\Delta x_i| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i^*) \Delta x_i.$$

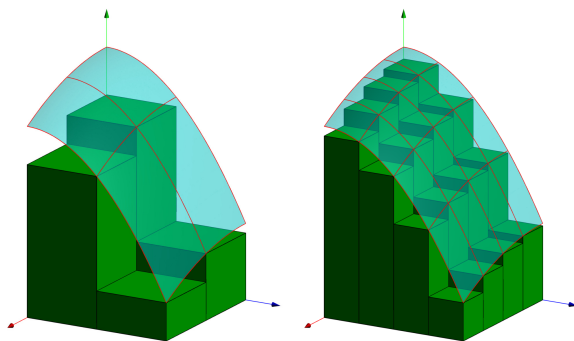
- Tích phân kép (Tích phân hai lớp) xuất phát từ bài toán tính <sup>2</sup>THỂ TÍCH hình trụ cong.

Bài toán: Hãy ước lượng thể tích một nhà kho có mái vòm là mặt cong  $z = f(x, y)$  như hình vẽ bên dưới.



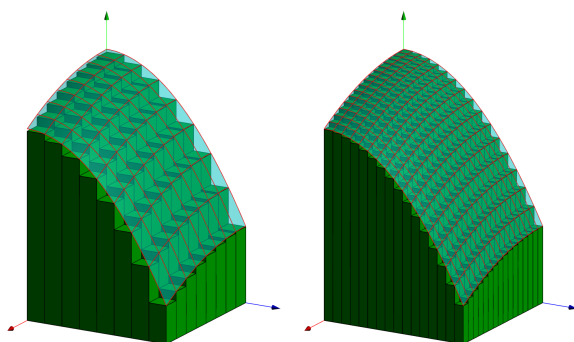
Hình 1: Thể tích ?

Ước lượng thô cận dưới



Hình 2:  $(m, n) = (2, 2)$  và  $(m, n) = (4, 4)$

Để tăng độ chính xác, ta giảm kích thước hình chữ nhật đáy.



Hình 3:  $V = \lim_{m,n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_i^*, y_j^*) \Delta x_i \Delta y_j$

2. Định nghĩa: Tích phân kép của hàm  $f$  trên hình chữ nhật  $D$  là

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(x, y) dA = \lim_{|\Delta A_i| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i^*, y_i^*) \Delta A_i$$

nếu giới hạn trên tồn tại.

Nếu  $D$  là một miền bị chặn bất kỳ trong mặt phẳng  $\mathbb{R}^2$ . Khi đó tồn tại một hình chữ nhật  $R$  sao cho  $D \subset R$ . Đặt hàm mới

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{nếu } (x, y) \in D \\ 0 & \text{nếu } (x, y) \in R \setminus D \end{cases}$$

Khi đó ta định nghĩa

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_R F(x, y) dx dy.$$

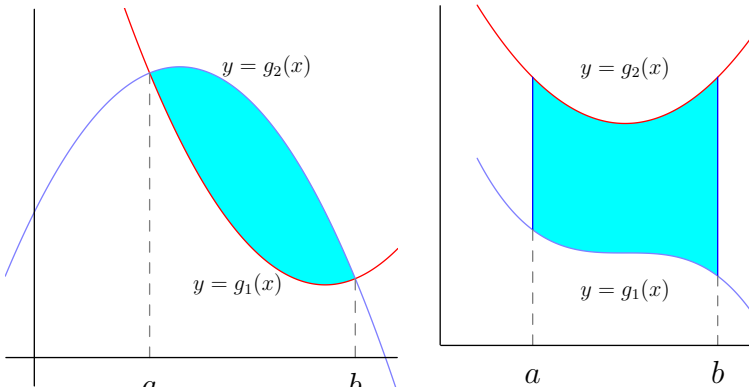
3. Công thức tính tích phân kép trong tọa độ Decartes

(a) Nếu  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  liên tục trên miền  $D$  có dạng

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

thì

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy = \underbrace{\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx}_{\text{}}.$$

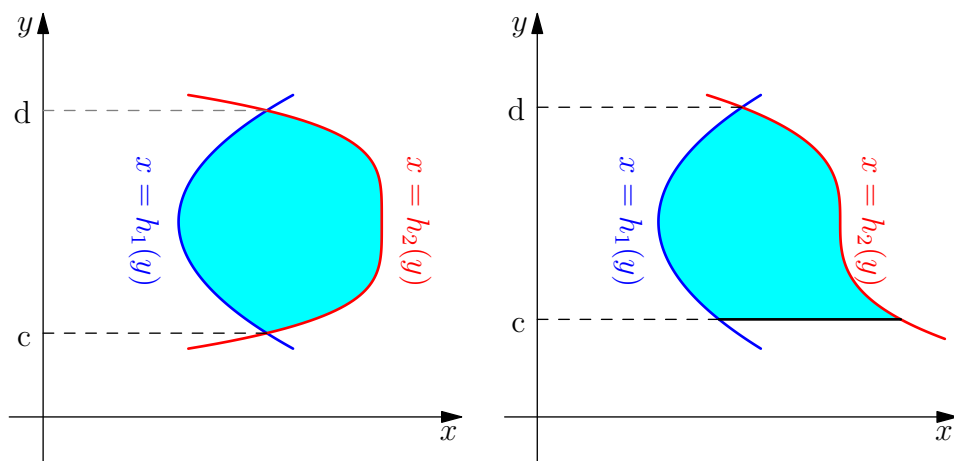


(b) Nếu  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  liên tục trên miền  $D$  có dạng

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

thì

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx = \underbrace{\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy}_{\text{}}.$$

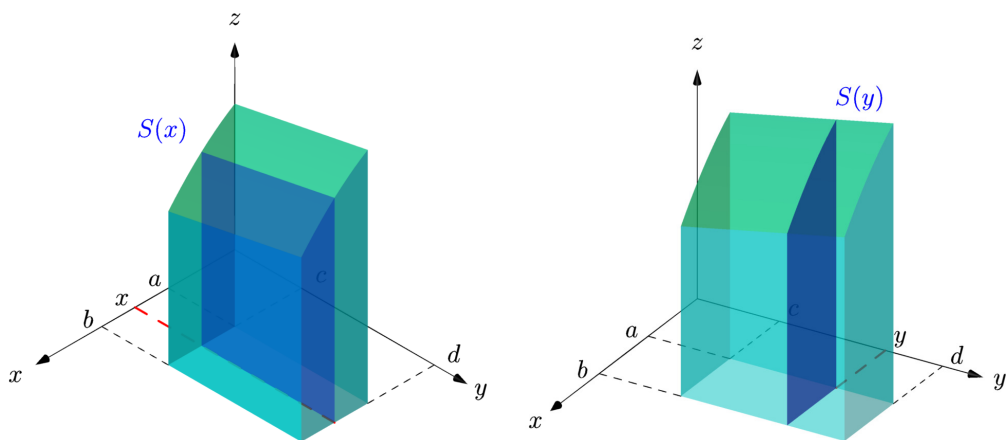


ĐỊNH LÝ 1 (ĐỊNH LÝ FUBINI). Nếu hàm  $f$  liên tục trên hình chữ nhật

$$R = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\},$$

thì

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$$



Hình 4: Minh họa công thức Fubini

4. Tích phân kép trong tọa độ cực.

Nếu miền  $D$  trong hệ tọa độ cực có dạng

$$\{(r, \theta) : \alpha \leq \theta \leq \beta, r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta)\}$$

thì

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr.$$

5. Công thức đổi biến

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_{uv}} f(x(u, v), y(u, v)) |J| du dv$$

trong đó Jacobian  $J$  được tính như sau:

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = x'_u y'_v - x'_v y'_u.$$

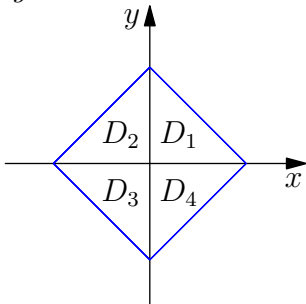
6. Ứng dụng (Xem trong Giáo trình)

- Tính diện tích hình phẳng
- Tính thể tích khối trụ cong
- Diện tích mặt cong
- Khối lượng bản phẳng không thuần nhất
- Tọa độ trọng tâm
- Moment

## 2 Matlab

VÍ DỤ 1 (TÍNH TÍCH PHÂN DÙNG MATLAB). Tính  $\iint_{|x|+|y|\leq 1} (|x| + |y|) dx dy$

Lời giải. Chia miền thành 4 phần



$$\begin{aligned}
I &= \iint_{|x|+|y|\leq 1} (|x| + |y|) dx dy \\
&= \iint_{D_1} (|x| + |y|) dx dy + \iint_{D_2} (|x| + |y|) dx dy + \iint_{D_3} (|x| + |y|) dx dy + \iint_{D_4} (|x| + |y|) dx dy.
\end{aligned}$$

Ta có

$$\begin{aligned}
\iint_{D_1} (|x| + |y|) dx dy &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (|x| + |y|) dy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x + y) dy \\
&= \int_0^1 \left( xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{1-x} dx = \int_0^1 x(1-x) + \frac{(1-x)^2}{2} dx \\
&= \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \left( x - x^2 + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Tính toán tương tự ta cũng có 3 tích phân còn lại bằng  $\frac{1}{3}$ . Vậy  $I = \frac{4}{3}$ .

Cách 2.

$$\begin{aligned}
I &= \iint_D (|x| + |y|) dx dy = \int_{-1}^1 dx \int_{-(1-|x|)}^{1-|x|} (|x| + |y|) dy \\
&= 2 \int_{-1}^1 dx \int_0^{1-|x|} (|x| + |y|) dy = 2 \int_{-1}^1 dx \int_0^{1-|x|} (|x| + y) dy \\
&= 2 \int_{-1}^1 |x|y + \frac{y^2}{2} \Big|_0^{1-|x|} dx = 2 \int_{-1}^1 |x|(1-|x|) + \frac{(1-|x|)^2}{2} dx \\
&= 4 \int_0^1 |x|(1-|x|) + \frac{(1-|x|)^2}{2} dx = 4 \int_0^1 x(1-x) + \frac{(1-x)^2}{2} dx = \frac{4}{3}.
\end{aligned}$$

Matlab code

```
syms x y; f(x,y)=abs(x)+abs(y);
I=int(int(f,y,-(1-abs(x)),1-abs(x)),x,-1,1)
```

■

Matlab code

```
syms x y; f(x,y)=abs(x)+abs(y);
I=int(int(f,y,-(1-abs(x)),1-abs(x)),x,-1,1)
```

### 3 Ví dụ mẫu

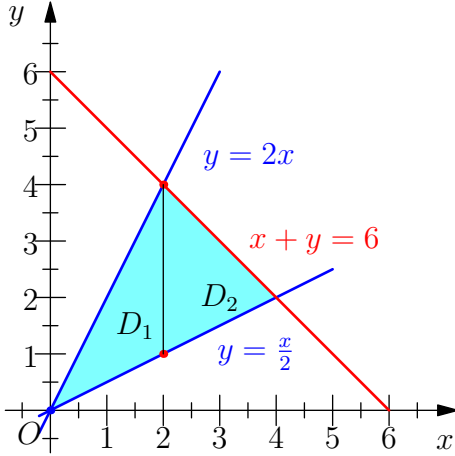
VÍ DỤ 2 (MINH HỌA ĐỊNH LÝ FUBINI). Tính tích phân kép sau

$$\iint_D \frac{1}{(1+x+y)^2} dx dy$$

trong đó  $D$  là miền giới hạn bởi các đường

$$x = 2y, \quad y = 2x, \quad x + y = 6.$$

*Lời giải.* Chia  $D$  thành hai miền  $D_1, D_2$  như hình vẽ.



$$\begin{aligned} I &= \iint_D \frac{1}{(1+x+y)^2} dx dy = \iint_{D_1} \frac{1}{(1+x+y)^2} dx dy + \iint_{D_2} \frac{1}{(1+x+y)^2} dx dy \\ &= \int_0^2 dx \int_{x/2}^{2x} \frac{1}{(1+x+y)^2} dy + \int_2^4 dx \int_{x/2}^{6-x} \frac{1}{(1+x+y)^2} dy \\ &= \int_0^2 dx \int_{x/2}^{2x} \frac{1}{(1+x+y)^2} d(1+x+y) + \int_2^4 dx \int_{x/2}^{6-x} \frac{1}{(1+x+y)^2} d(1+x+y) \\ &= \int_0^2 -\frac{1}{1+x+y} \Big|_{x/2}^{2x} dx + \int_2^4 -\frac{1}{1+x+y} \Big|_{x/2}^{6-x} dx \\ &= \int_0^2 -\frac{1}{1+3x} + \frac{1}{1+3x/2} dx + \int_2^4 -\frac{1}{7} + \frac{1}{1+3x/2} dx \\ &= \left[ -\frac{\ln|1+3x|}{3} + \frac{2\ln|1+3x/2|}{3} \right] \Big|_0^2 + \left[ -\frac{1}{7}x + \frac{2\ln|1+3x/2|}{3} \right] \Big|_2^4 \\ &= -\frac{\ln 7}{3} + \frac{2\ln 4}{3} - \frac{4}{7} + \frac{2\ln 7}{3} + \frac{2}{7} - \frac{2\ln 4}{3} = -\frac{2}{7} + \frac{\ln 7}{3}. \end{aligned}$$

■



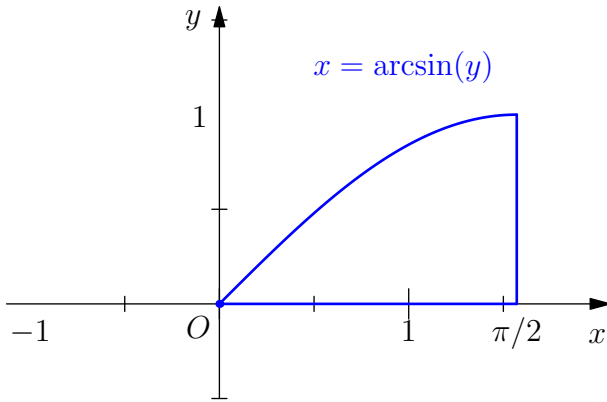
VÍ DỤ 3. Tính các tích phân sau bằng cách đổi thứ tự lấy tích phân

$$1. \int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2} dx dy$$

$$2. \int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{1}{y^3 + 1} dy dx$$

$$3. I = \int_0^1 \int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sqrt{1 + \cos^2 x} dx dy$$

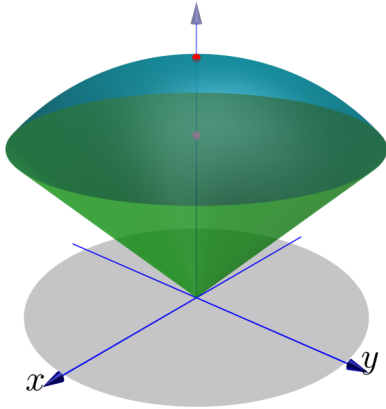
$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, \arcsin y \leq x \leq \pi/2\}$$



$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi/2, 0 \leq y \leq \sin x\}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sin x} \cos x \sqrt{1 + \cos^2 x} dy dx \\ &= \int_0^{\pi/2} y \cos x \sqrt{1 + \cos^2 x} \Big|_0^{\sin x} dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin x \cos x \sqrt{1 + \cos^2 x} dx \quad (\text{Đổi biến } t = 1 + \cos^2 x) \\ &= - \int_2^1 t^{1/2} \frac{dt}{2} \\ &= \frac{1}{2} \int_1^2 t^{1/2} dt = \frac{t^{3/2}}{3} \Big|_1^2 = \frac{\sqrt{8} - 1}{3}. \end{aligned}$$

VÍ DỤ 4 (ĐỔI BIẾN TỌA TỌA ĐỘ CỰC). Tính thể tích miền  $V$  bị chặn bởi  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$  và  $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$ .



Lời giải.

Trước hết ta xác định hình chiếu xuống mặt phẳng  $xoy$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\}.$$

đổi biến tọa độ cực

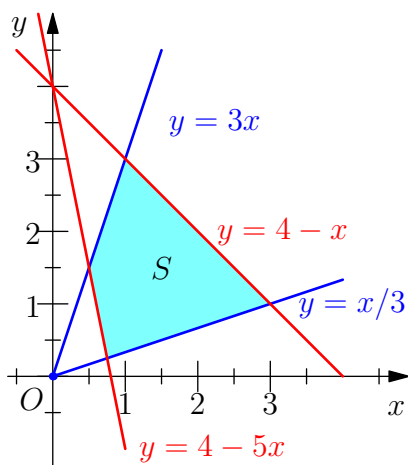
$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi, \end{cases} \quad J = r \Rightarrow |J| = r$$

với  $0 \leq r \leq \sqrt{2}$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ . Khi đó ta có công thức tính thể tích như sau:

$$\begin{aligned} V &= \iint_{\{x^2+y^2 \leq 2\}} (\sqrt{4-x^2-y^2} - \sqrt{x^2+y^2}) dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{2}} (\sqrt{4-r^2} - r) r dr \\ &= 2\pi \times \left[ -\frac{1}{3}(4-r^2)^{3/2} - \frac{r^3}{3} \right] \Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{2\pi}{3} (-2^{3/2} - 2^{3/2} + 4^{3/2}) = \frac{8\pi}{3} (2 - \sqrt{2}) \end{aligned}$$

■

VÍ DỤ 5 (ĐỔI BIẾN TỔNG QUÁT). Tính tích phân sau  $\iint_S \frac{dx dy}{x^2 y^2}$ ,  $S : 3y = x, y = 3x, y = 4 - 5x, y = 4 - x$ ;



Lời giải.

Đặt

$$\begin{cases} u = \frac{x}{y} \\ v = \frac{y-4}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4u}{1-uv} \\ y = \frac{4}{1-uv} \end{cases}, (u, v) \in [1/3, 3] \times [-5, -1].$$

$$\begin{aligned} J &= \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{4(1-uv) + 4uv}{(1-uv)^2} & \frac{4u^2}{(1-uv)^2} \\ \frac{4v}{(1-uv)^2} & \frac{4u}{(1-uv)^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{4}{(1-uv)^2} & \frac{4u^2}{(1-uv)^2} \\ \frac{4v}{(1-uv)^2} & \frac{4u}{(1-uv)^2} \end{vmatrix} \\ &= \frac{16u - 16u^2v}{(1-uv)^4} = \frac{16u}{(1-uv)^3} > 0, \forall (u, v) \in [1/3, 3] \times [-5, -1]. \end{aligned}$$

Theo công thức đổi biến ta có

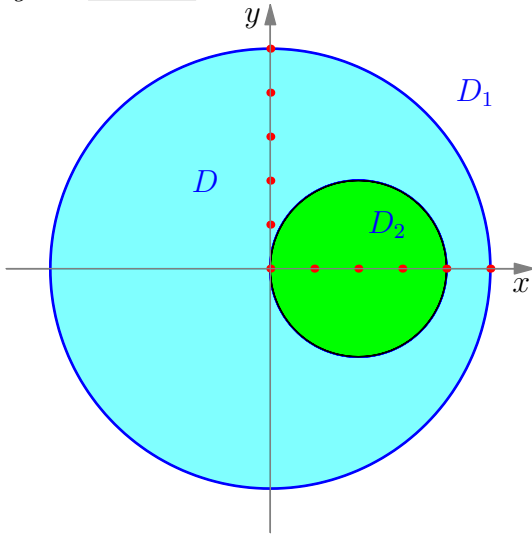
$$\begin{aligned} \iint_S \frac{dx dy}{x^2 y^2} &= \iint_{[1/3, 3] \times [-5, -1]} \frac{(1-uv)^4}{256u^2} \times \frac{16u}{(1-uv)^3} dv du \\ &= \iint_{[1/3, 3] \times [-5, -1]} \frac{1-uv}{16u} dv du = \iint_{[1/3, 3] \times [-5, -1]} \frac{1}{16u} - \frac{v}{16} dv du \\ &= \iint_{[1/3, 3] \times [-5, -1]} \frac{1}{16u} dv du - \iint_{[1/3, 3] \times [-5, -1]} \frac{v}{16} dv du \\ &= \frac{1}{16} \ln u \Big|_{1/3}^3 v \Big|_{-5}^{-1} - u \Big|_{1/3}^3 \frac{v^2}{32} \Big|_{-5}^{-1} = \frac{\ln 3}{2} + 2 \end{aligned}$$

■

VÍ DỤ 6 (VÍ DỤ TỔNG HỢP). Tính tích phân kép sau  $\iint_D x dx dy$  trong đó  $D$  là miền

$$4x \leq x^2 + y^2 \leq 25.$$

Lời giải. **Cách 1**



Do

$$D_1 = D \cup D_2$$

và hai miền trên không đè lên nhau nên

$$\iint_D x dx dy = \underbrace{\iint_{D_1} x dx dy}_{I_1} - \underbrace{\iint_{D_2} x dx dy}_{I_2}.$$

Để tính  $I_1$  ta có thể dùng đổi biến tọa độ cực

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi, \end{cases} \quad J = r \Rightarrow |J| = r$$

với  $0 \leq r \leq 5$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ . Từ đó ta có

$$\begin{aligned} \iint_{D_1} x dx dy &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^5 r \cos \varphi r dr = \left( \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi \right) \times \left( \int_0^5 r^2 dr \right) \\ &= \left( \sin \varphi \Big|_0^{2\pi} \right) \times \left( \frac{r^3}{3} \Big|_0^5 \right) = 0. \end{aligned}$$

Phương trình đường tròn nhỏ có thể viết dưới dạng

$$(x - 2)^2 + y^2 = 4.$$

Để tính  $I_2$  ta có thể dùng đổi biến tọa độ cực (suy rộng)

$$\begin{cases} x - 2 = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi, \end{cases}$$

với  $0 \leq r \leq 2$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ . Jacobiên của phép đổi biến

$$J = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r \Rightarrow |J| = r$$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned} I_2 &= \iint_{D_2} x dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (2 + r \cos \varphi) r dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (2r + r^2 \cos \varphi) dr \\ &= \int_0^{2\pi} \left( r^2 + \frac{r^3}{3} \cos \varphi \right) \Big|_0^2 d\varphi = \int_0^{2\pi} \left( 4 + \frac{8}{3} \cos \varphi \right) d\varphi = \left( 4\varphi + \frac{8}{3} \sin \varphi \right) \Big|_0^{2\pi} = 8\pi. \end{aligned}$$

Vậy

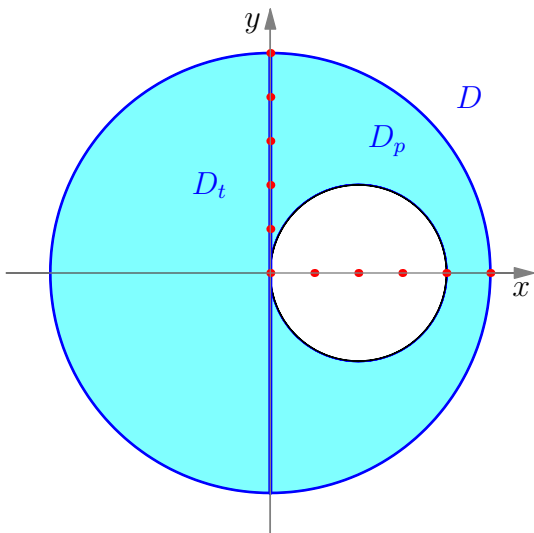
$$\iint_D x dx dy = \iint_{D_1} x dx dy - \iint_{D_2} x dx dy = 0 - 8\pi = -8\pi.$$

**Cách 2** Tách  $D$  thành hai nửa trái và phải

$$D = D_t \cup D_p$$

hai miền trên ko đè lên nhau nên

$$\iint_D x dx dy = \underbrace{\iint_{D_t} x dx dy}_{K_1} + \underbrace{\iint_{D_p} x dx dy}_{K_2}.$$



Để tính  $K_1$  ta dùng đổi biến tọa độ cực

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi, \end{cases} \quad J = r \Rightarrow |J| = r$$

với  $0 \leq r \leq 5$ ,  $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$ . Từ đó ta có

$$\begin{aligned} \iint_{D_t} x dx dy &= \int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\varphi \int_0^5 r \cos \varphi r dr = \left( \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos \varphi d\varphi \right) \times \left( \int_0^5 r^2 dr \right) \\ &= \left( \sin \varphi \Big|_{\pi/2}^{3\pi/2} \right) \times \left( \frac{r^3}{3} \Big|_0^5 \right) = -2 \cdot \frac{125}{3} = -\frac{250}{3}. \end{aligned}$$

Để tính  $K_2$  ta cũng dùng đổi biến tọa độ cực

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi, \end{cases} \quad J = r \Rightarrow |J| = r.$$

với  $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ . Để xác định cận cho  $r$  ta để ý rằng  $r$  chạy từ đường tròn nhỏ có phương trình tọa độ cực dạng  $r = 4 \cos \varphi$  đến đường tròn lớn có phương trình  $r = 5$ . Vậy

$$4 \cos \varphi \leq r \leq 5.$$

Từ đó

$$\begin{aligned} K_2 &= \iint_{D_p} x dx dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_{4 \cos \varphi}^5 r \cos \varphi r dr = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_{4 \cos \varphi}^5 r^2 \cos \varphi dr \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left( \frac{r^3}{3} \Big|_{4 \cos \varphi}^5 \right) \cos \varphi d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left( \frac{125}{3} - \frac{64}{3} \cos^3 \varphi \right) \cos \varphi d\varphi \\ &= \frac{125}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi - \frac{64}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 \varphi d\varphi. \end{aligned}$$

Ta có

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi = \sin \varphi \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2.$$

Sử dụng công thức hạ bậc

$$\cos^2 \varphi = \frac{1 + \cos 2\varphi}{2}$$

ta được

$$\begin{aligned} \cos^4 \varphi &= (\cos^2 \varphi)^2 = \left( \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{\cos 2\varphi}{2} + \frac{\cos^2 2\varphi}{4} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{\cos 2\varphi}{2} + \frac{1 + \cos 4\varphi}{8} = \frac{3}{8} + \frac{\cos 2\varphi}{2} + \frac{\cos 4\varphi}{8}. \end{aligned}$$

Từ đó

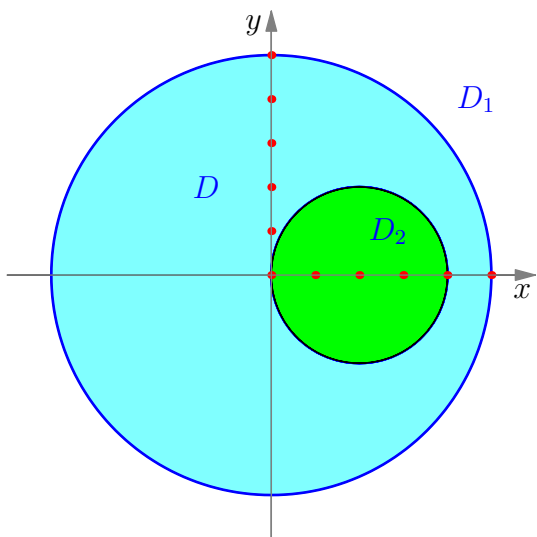
$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^4 \varphi d\varphi = \frac{3}{8}\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{4} + \frac{\sin 4\varphi}{32} \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{3\pi}{8}.$$

Vậy

$$K_2 = \frac{125}{3} \cdot 2 - \frac{64}{3} \cdot \frac{3\pi}{8} = \frac{250}{3} - 8\pi.$$

Vậy

$$\iint_D x dx dy = -\frac{250}{3} + \frac{250}{3} - 8\pi = -8\pi.$$



**Cách 3** Ta sẽ tính trực tiếp bằng cách sử dụng tọa độ Descartes (xem hình vẽ ở cách 1)

$$\iint_D x dx dy = \underbrace{\iint_{D_1} x dx dy}_{I_1} - \underbrace{\iint_{D_2} x dx dy}_{I_2}.$$

Ta xem  $D_1$  như miền loại II như sau

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -5 \leq y \leq 5, -\sqrt{25-y^2} \leq x \leq \sqrt{25-y^2}\}.$$

Khi đó

$$I_1 = \iint_{D_1} x dx dy = \int_{-5}^5 dy \int_{-\sqrt{25-y^2}}^{\sqrt{25-y^2}} x dx = 0$$

vì với mỗi  $y$  tích phân  $\int_{-\sqrt{25-y^2}}^{\sqrt{25-y^2}} x dx$  là tích phân của hàm lẻ trên cận đối xứng nên bằng 0.

Tương tự, ta cũng xem  $D_2$  là miền loại II như sau

$$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq y \leq 2, 2 - \sqrt{4-y^2} \leq x \leq 2 + \sqrt{4-y^2}\}.$$

Khi đó

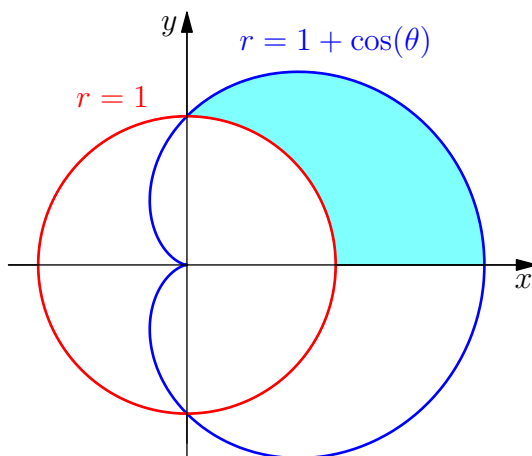
$$\begin{aligned}
 I_2 &= \iint_{D_2} x dx dy = \int_{-2}^2 dy \int_{2-\sqrt{4-y^2}}^{2+\sqrt{4-y^2}} x dx \\
 &= \int_{-2}^2 \frac{x^2}{2} \Big|_{2-\sqrt{4-y^2}}^{2+\sqrt{4-y^2}} dy = \int_{-2}^2 \frac{(2+\sqrt{4-y^2})^2}{2} - \frac{(2-\sqrt{4-y^2})^2}{2} dy \\
 &= 4 \int_{-2}^2 \sqrt{4-y^2} dy = 4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4 \cos^2 t dt \quad (\text{Đổi biến } y = 2 \sin t) \\
 &= 8 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt = 16 \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt = 16t + 8 \sin 2t \Big|_0^{\pi/2} = 8\pi.
 \end{aligned}$$

Vậy

$$I = I_1 - I_2 = -8\pi.$$

■

VÍ DỤ 7 (ỨNG DỤNG TÍNH DIỆN TÍCH). Tính diện tích miền tô màu dưới đây



Lời giải. Gọi  $D$  là phần miền cần tính diện tích. Sử dụng tọa độ cực ta có:

$$\begin{aligned}
 S &= \iint_D x dx dy = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_1^{1+\cos \theta} r dr \\
 &= \int_0^{\pi/2} \frac{r^2}{2} \Big|_1^{1+\cos \theta} d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} ((1 + \cos \theta)^2 - 1) d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (2 \cos \theta - \cos^2 \theta) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \left( 2 \cos \theta + \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) d\theta \\
 &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \theta + 2 \sin \theta + \frac{\sin 2\theta}{4} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{8} + 1.
 \end{aligned}$$



VÍ DỤ 8 (CÁCH TÍNH TÍCH PHÂN LIÊN QUAN ĐẾN PHÂN PHỐI CHUẨN TẮC TRONG XÁC SUẤT THỐNG KÊ). Tính  $I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$

Lời giải.

$$\begin{aligned}
 I^2 &= \left( \int_0^\infty e^{-x^2} dx \right) \left( \int_0^\infty e^{-y^2} dy \right) \\
 &= \int_{x=0}^\infty \int_{y=0}^\infty e^{-x^2-y^2} dx dy \\
 &= \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^\infty e^{-r^2} r dr d\theta = \frac{\pi}{2} \int_0^\infty e^{-r^2} r dr \\
 &= \frac{\pi}{2} \left( -\frac{1}{2} e^{-r^2} \right) \Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2} \left( \lim_{c \rightarrow \infty} -\frac{1}{2} e^{-c^2} + \frac{1}{2} e^{-0^2} \right) \\
 &= \frac{\pi}{2} \left( 0 + \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{4},
 \end{aligned} \tag{5}$$

Vậy  $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .

Chú ý sử dụng tích phân từng phần ta có

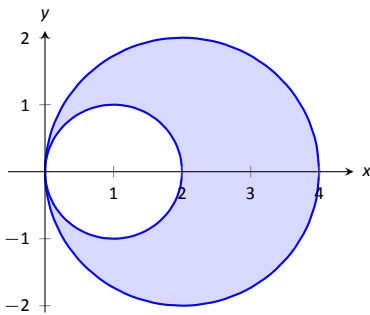
$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx &= -\frac{1}{2} x e^{-x^2} \Big|_0^\infty + \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-x^2} dx \\
 &= \left( \lim_{c \rightarrow \infty} -\frac{1}{2} c e^{-c^2} \right) + \frac{1}{2} 0 e^{-0^2} + \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-x^2} dx \\
 &= 0 + 0 + \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-x^2} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}.
 \end{aligned}$$

Đối với tích phân  $\int_0^\infty \sqrt{x} e^{-x} dx$  ta đặt  $t = \sqrt{x}$  suy ra

$$\int_0^\infty \sqrt{x} e^{-x} dx = \int_0^\infty 2t^2 e^{-t^2} dt = 2 \int_0^\infty t^2 e^{-t^2} dt = 2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{4} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

■

**VÍ DỤ 9 (ỨNG DỤNG TÍNH THỂ TÍCH).** Tính thể tích của miền nằm bên dưới paraboloid  $z = 4 - (x - 2)^2 - y^2$  bị chặn bởi mặt phẳng xoy và bị giới hạn bởi  $(x - 1)^2 + y^2 = 1$  và  $(x - 2)^2 + y^2 = 4$ .

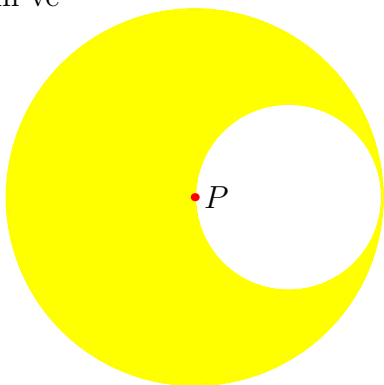


Lời giải.

$$\begin{aligned}
\iint_R f(x, y) \, dx dy &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{2 \cos \theta}^{4 \cos \theta} \left( 4 - (r \cos \theta - 2)^2 - (r \sin \theta)^2 \right) r \, dr \, d\theta \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_{2 \cos \theta}^{4 \cos \theta} (-r^3 + 4r^2 \cos \theta) \, dr \, d\theta \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left( -\frac{1}{4}r^4 + \frac{4}{3}r^3 \cos \theta \right) \Big|_{2 \cos \theta}^{4 \cos \theta} d\theta \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left( -\frac{256 \cos^4 \theta}{4} + \frac{4(64 \cos^4 \theta)}{3} - \left[ -\frac{16 \cos^4 \theta}{4} + \frac{4}{3}(8 \cos^4 \theta) \right] \right) d\theta \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{44}{3} \cos^4 \theta \, d\theta \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{44}{3} \left( \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos(2\theta) + \frac{1}{8} \cos(4\theta) \right) d\theta \\
&= \frac{44}{3} \left( \frac{3}{8}\theta + \frac{1}{4} \sin(2\theta) + \frac{1}{32} \sin(4\theta) \right) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{11}{2}\pi.
\end{aligned}$$

■

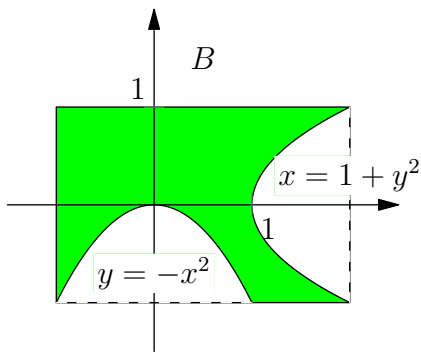
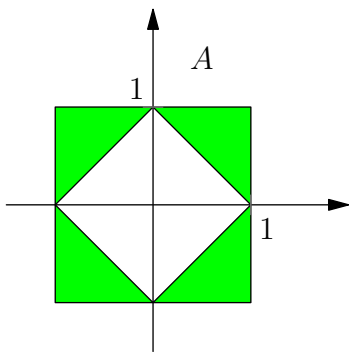
VÍ DỤ 10 (ỨNG DỤNG TRONG VẬT LÝ). Cho một chiếc hoa tai tạo thành từ một đĩa kính loại mỏng phẳng, đồng chất bán kính  $R$  bằng việc khoét đi một hình tròn bán kính  $r$  như hình vẽ



1. Tìm tọa độ trọng tâm của chiếc hoa tai theo  $r$  và  $R$ .
2. CMR khi trọng tâm của chiếc hoa tai là tại điểm  $P$  thì tỉ số

$$\frac{R}{r} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

VÍ DỤ 11. Tính tọa độ trọng tâm của các hình sau:



## 4 Luyện tập

CÂU 1. Tính tích phân  $\iint_R y \sin(xy) dA$  trong đó  $R = [1, 2] \times [0, \pi]$  bằng 2 cách.

CÂU 2. Tìm thể tích của vật rắn  $S$  bị chặn bởi elliptic paraboloid  $x^2 + 2y^2 + z = 16$ , các mặt phẳng  $x = 2, y = 2$  và ba mặt phẳng tọa độ.

CÂU 3. Tính  $\iint_D x + 2y dA$ , trong đó  $D$  là bị chặn bởi hai parabol  $y = 2x^2$  và  $y = 1 + x^2$ .

CÂU 4. Tính thể tích vật rắn nằm phía dưới paraboloid  $z = x^2 + y^2$  và phía trên miền  $D$  trong mặt phẳng  $xy$  bị chặn bởi đường thẳng  $y = 2x$  và parabol  $y = x^2$ .

CÂU 5. Tính thể tích của tứ diện sau tạo bởi bốn mặt phẳng sau:  $x + 2y + z = 2, x = 2y, x = 0, z = 0$ .

CÂU 6. Tính tích phân sau:  $\int_0^1 \int_x^1 \sin(y^2) dy dx$ .

CÂU 7. Tính các tích phân sau:

(a)  $\iint_D y^2 dA, D = \{(x, y) | -1 \leq y \leq 1, -y - 2 \leq x \leq y\}$

(b)  $\iint_D x dA, D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \sin x\}$

(c)  $\iint_D y^2 e^{xy} dA, D = \{(x, y) | 0 \leq y \leq 4, 0 \leq x \leq y\}$

(d)  $\iint_D x \cos y dA, D$  bị chặn bởi  $y = 0, y = x^2, x = 1$ .

(e)  $\iint_D (2x - y) dA, D$  bị chặn bởi hình tròn tâm tại gốc tọa độ và bán kính bằng 2

CÂU 8. Tính thể tích của vật rắn sau:

(a) Bên dưới mặt phẳng  $x + 2y - z = 0$  và bên trên miền bị chặn bởi  $y = x$  và  $y = x^4$

(b) Nằm dưới mặt  $z = xy$  và trên tam giác có ba đỉnh  $(1, 1), (4, 1)$  và  $(1, 2)$

(c) Bị chặn bởi các mặt phẳng tọa độ và mặt phẳng  $3x + 2y + z = 6$

(d) Bị chặn bởi  $z = x^2, y = x^2$  và các mặt phẳng  $z = 0, y = 4$

(e) Bị chặn bởi  $y = 1 - x^2, y = x^2 - 1$  và các mặt phẳng  $x + y + z = 2, 2x + 2y - z + 10 = 0$

CÂU 9. Vẽ miền lấy tích phân và đổi thứ tự lấy tích phân sau:

$$(a) \int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y) dy dx$$

$$(b) \int_0^3 \int_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x, y) dx dy$$

$$(c) \int_1^2 \int_0^{\ln x} f(x, y) dy dx$$

CÂU 10. Tính các tích phân sau bằng cách đổi thứ tự lấy tích phân

$$(a) \int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2} dx dy$$

$$(b) \int_0^4 \int_{\sqrt{x}}^2 \frac{1}{y^3 + 1} dy dx$$

$$(c) \int_0^1 \int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sqrt{1 + \cos^2 x} dx dy$$

CÂU 11. Tính tích phân sau bằng cách chuyển sang tọa độ cực.

$$(a) \iint_D (3x + 4y^2) dA, \quad D \text{ là miền thuộc nửa mặt phẳng trên bị chặn bởi hai đường tròn } x^2 + y^2 = 1 \text{ và } x^2 + y^2 = 4$$

$$(b) \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} (x^2 + y^2) dx dy$$

$$(c) \int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy dx$$

$$(d) \int_{-1}^0 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 \frac{2}{1 + \sqrt{x^2 + y^2}} dy dx$$

$$(e) \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^0 \frac{4\sqrt{x^2 + y^2}}{1 + x^2 + y^2} dy dx$$

$$(f) \int_0^2 \int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} \frac{x + y}{x^2 + y^2} dx dy$$

CÂU 12. Dùng tích phân hai lớp tính diện tích các miền sau:

$$(a) \text{ Tính diện tích của miền nằm bên trong đường cardioid } r = 1 + \cos 2\theta \text{ và bên ngoài đường tròn } r = 1$$

$$(b) \text{ Tính diện tích của một nhánh cách hoa hồng cho bởi } r = 12 \cos 3\theta$$

$$(c) \text{ Tính diện tích của miền nằm trong 2 đường cardioid } r = 1 + \cos \theta \text{ và } r = 1 - \cos \theta$$

CÂU 13. Sử dụng tọa độ cực tính thể tích của các vật sau:

- (a) Tính thể tích của vật thể bị chặn bởi mặt phẳng  $z = 0$  và paraboloid  $z = 1 - x^2 - y^2$ .
- (b) Tính thể tích của vật thể nằm bên dưới paraboloid  $z = x^2 + y^2$ , bên trên mặt phẳng  $xy$  và bên trong của hình trụ  $x^2 + y^2 = 2x$ .

CÂU 14. Tính các tích phân kép sau

(a)  $\iint_S (12x^2y^2 + 16x^3y^3)dxdy, \quad S : x = 1, y = x^2, y = -\sqrt{x};$

(b)  $\iint_S (9x^2y^2 + 48x^3y^3)dxdy, \quad S : x = 1, y = \sqrt{x}, y = -x^2;$

(c)  $\iint_S (36x^2y^2 - 96x^3y^3)dxdy, \quad S : x = 1, y = \sqrt[3]{x}, y = -x^3;$

(d)  $\iint_S (18x^2y^2 + 32x^3y^3)dxdy, \quad S : x = 1, y = x^3, y = -\sqrt[3]{x};$

(e)  $\iint_S (27x^2y^2 + 48x^3y^3)dxdy, \quad S : x = 1, y = x^2, y = -\sqrt[3]{x};$

(f)  $\iint_S (18x^2y^2 + 32x^3y^3)dxdy, \quad S : x = 1, y = \sqrt[3]{x}, y = -x^2;$

(g)  $\iint_S (18x^2y^2 + 32x^3y^3)dxdy, \quad S : x = 1, y = x^3, y = -\sqrt{x};$

(h)  $\iint_S (27x^2y^2 + 48x^3y^3)dxdy, \quad S : x = 1, y = \sqrt{x}, y = -x^3;$

(i)  $\iint_S (4xy + 3x^2y^2)dxdy, \quad S : x = 1, y = x^2, y = -\sqrt{x};$

(j)  $\iint_S (12xy + 9x^2y^2)dxdy, \quad S : x = 1, y = \sqrt{x}, y = -x^2.$

CÂU 15.  $\iint_S \frac{x}{y}dxdy, \quad S : y = x^2, 8y = x^2, x = y^2, 8x = y^2;$

CÂU 16.  $\iint_S (x + y)dxdy, \quad S : xy = 1, xy = 3, y = x, y = x - 2;$

CÂU 17.  $\iint_S \frac{dxdy}{x^2y^2},$

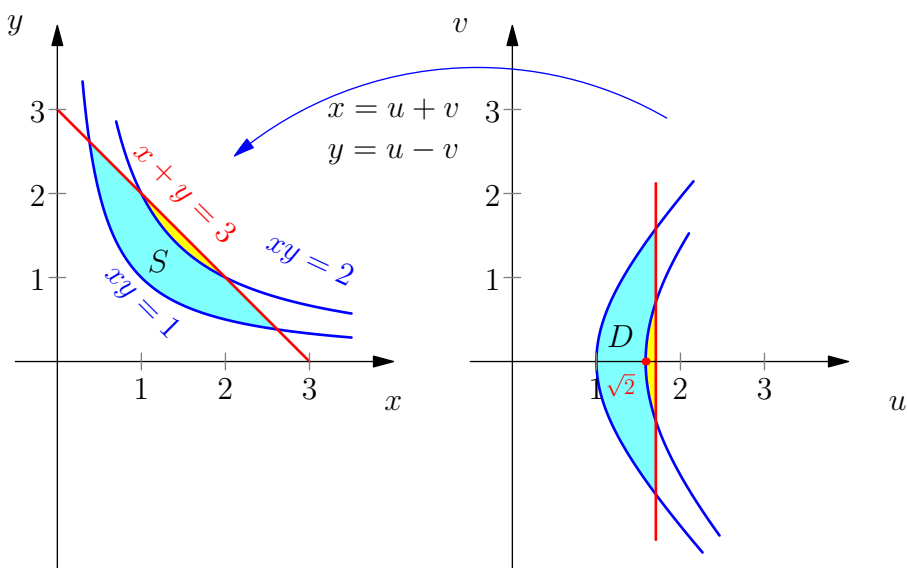
$$S : 2y = x, y = 2x, y = 1 - x, y = 1 - 3x;$$

CÂU 18.  $\iint_S x^2 dxdy,$

$$S : xy = 2, xy = 4, y = x, y = 3x (x > 0, y > 0);$$

CÂU 19.  $\iint_S (2x + y) dxdy,$

$$S : xy = 1, xy = 2, x + y = 3;$$



Lời giải. Đổi biến

$$\begin{cases} x = u + v \\ y = u - v. \end{cases}$$

Jacobian

$$J = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2, |J| = 2.$$

Ta có

$$xy = 1 \Leftrightarrow u^2 - v^2 = 1.$$

$$xy = 2 \Leftrightarrow u^2 - v^2 = 2.$$

$$x + y = 3 \Leftrightarrow u = 1.5.$$



Ta có

$$\begin{aligned}\iint_S (2x + y) dx dy &= \iint_D (3u + v) 2 du dv = \iint_D 6u + 2v du dv \\ &= \int_1^{1.5} du \int_{-\sqrt{u^2-1}}^{\sqrt{u^2-1}} 6u + 2v dv - \int_{\sqrt{2}}^{1.5} du \int_{-\sqrt{u^2-2}}^{\sqrt{u^2-2}} 6u + 2v dv \\ &= 2 \int_1^{1.5} du \int_0^{\sqrt{u^2-1}} 6u dv - 2 \int_{\sqrt{2}}^{1.5} du \int_0^{\sqrt{u^2-2}} 6u dv\end{aligned}$$

(tính chất tích phân hàm chẵn, lẻ trên cận đối xứng)

$$\begin{aligned}&= 2 \int_1^{1.5} 6uv \Big|_0^{\sqrt{u^2-1}} du - 2 \int_{\sqrt{2}}^{1.5} 6uv \Big|_0^{\sqrt{u^2-2}} du \\ &= 12 \int_1^{1.5} u \sqrt{u^2-1} du - 12 \int_{\sqrt{2}}^{1.5} u \sqrt{u^2-2} du \\ &= 6 \int_1^{1.5} (u^2-1)^{1/2} d(u^2-1) - 6 \int_{\sqrt{2}}^{1.5} (u^2-2)^{1/2} d(u^2-2) \\ &= 6 \times \frac{2}{3} (u^2-1)^{3/2} \Big|_1^{1.5} - 6 \times \frac{2}{3} (u^2-2)^{3/2} \Big|_{\sqrt{2}}^{1.5} = \frac{5\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

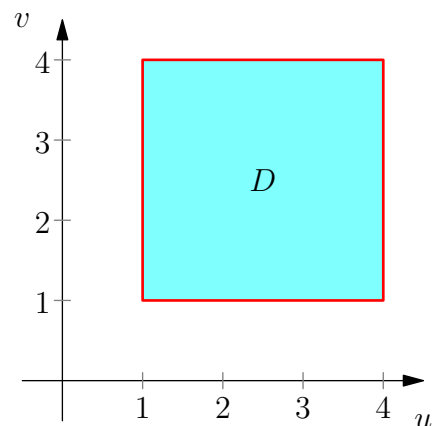
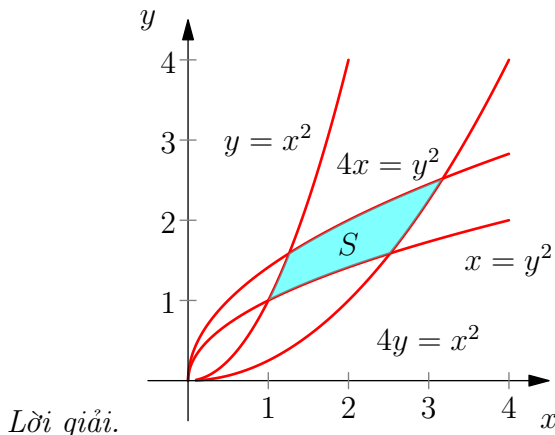
Chú ý, ta vẫn có thể làm trực tiếp như sau:

$$\iint_S (2x + y) dx dy = \int_{(3-\sqrt{5})/2}^{(3+\sqrt{5})/2} \int_{1/x}^{3-x} 2x + y dy dx - \int_1^2 \int_{1/x}^{3-x} 2x + y dy dx.$$

Tính toán một cách tỉ mỉ ta vẫn thu được kết quả trên. Có điều các bước tính có hơi cồng kềnh hơn cách đổi biến một chút. ■

CÂU 20.  $\iint_S \frac{x}{y} dx dy,$

$$S : x = y^2, 4x = y^2, y = x^2, 4y = x^2;$$



$$\begin{cases} u = \frac{y^2}{x}, & u \in [1, 4] \\ v = \frac{x^2}{y}, & v \in [1, 4] \end{cases}$$

Jacobian

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \\ \frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2} \end{vmatrix} = -5.$$

Suy ra  $J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}} = -\frac{1}{5}, |J| = \frac{1}{5}$  và

$$f(x, y) = \frac{x}{y} = \sqrt[3]{\frac{v}{u}}.$$

Từ đó

$$\begin{aligned} \iint_S \frac{x}{y} dx dy &= \iint_D \sqrt[3]{\frac{v}{u}} \cdot \frac{1}{5} du dv = \frac{1}{5} \int_1^4 \int_1^4 \sqrt[3]{\frac{v}{u}} du dv \\ &= \frac{1}{5} \int_1^4 u^{1/3} du \int_1^4 v^{-1/3} dv \\ &= \frac{1}{5} \frac{3}{4} u^{4/3} \Big|_1^4 \times \frac{3}{2} u^{2/3} \Big|_1^4 = \dots \end{aligned}$$

■

CÂU 21.  $\iint_S xy dx dy,$

$$S : |x + 2y| \leq 3, |x - y| \leq 3.$$

CÂU 24. Tính tích phân kép sau  $\iint_D x^2 + y^2 dx dy$  trong đó

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 2x\}.$$

Lời giải. ĐS:  $\frac{216}{35}.$

■

CÂU 25. Tính tích phân kép  $\iint_D (x - 2y) dx dy$  trong đó  $D$  là miền giới hạn bởi các đường

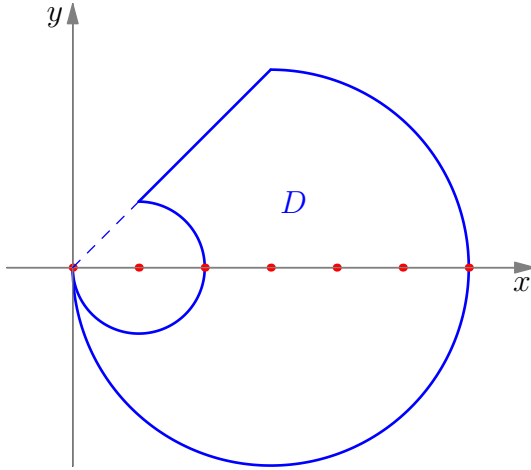
$$x = 0, y = 7 - x, y = \frac{1}{2}x + 1.$$

Lời giải. Gợi ý:

$$\iint_D (x-2y) dx dy = \int_0^4 dx \int_{\frac{x}{2}+1}^{7-x} (x-2y) dy = \dots = -72$$

CÂU 26. Tính tích phân kép sau  $\iint_D x dx dy$  trong đó  $D$  là miền giới hạn bởi

$$2x \leq x^2 + y^2 \leq 6x, y \leq x.$$



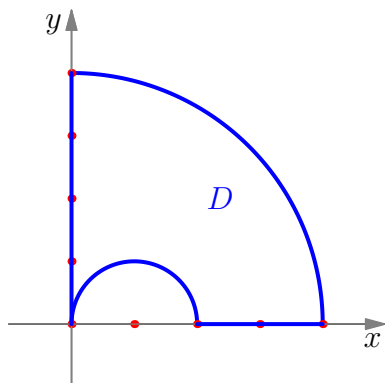
Lời giải.

Sử dụng tọa độ cực ta có (viết hơi tắt)

$$\begin{aligned} \iint_D x dx dy &= \int_{-\pi/2}^{\pi/4} d\varphi \int_{2\cos\varphi}^{6\cos\varphi} r \cos\varphi r dr = \int_{-\pi/2}^{\pi/4} \frac{r^3}{3} \cos\varphi \Big|_{2\cos\varphi}^{6\cos\varphi} d\varphi \\ &= \frac{208}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/4} \cos^4\varphi d\varphi = \frac{208}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/4} \left( \frac{1+\cos 2\varphi}{2} \right)^2 d\varphi \\ &= \frac{208}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/4} \left( \frac{1}{4} + \frac{\cos 2\varphi}{2} + \frac{\cos^2 2\varphi}{4} \right) d\varphi \\ &= \frac{208}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/4} \left( \frac{1}{4} + \frac{\cos 2\varphi}{2} + \frac{1+\cos 4\varphi}{8} \right) d\varphi \\ &= \frac{208}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/4} \left( \frac{3}{8} + \frac{\cos 2\varphi}{2} + \frac{\cos 4\varphi}{8} \right) d\varphi \\ &= \frac{208}{3} \left( \frac{3}{8}\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{4} + \frac{\sin 4\varphi}{32} \right) \Big|_{-\pi/2}^{\pi/4} \\ &= \frac{208}{3} \frac{9\pi+8}{32} = \frac{13(9\pi+8)}{6} = \frac{117\pi+104}{6} \end{aligned}$$

CÂU 27. Tính tích phân kép sau  $\iint_D 1 + \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$  trong đó  $D$  là miền giới hạn bởi

$$2x \leq x^2 + y^2 \leq 16, x \geq 0, y \geq 0.$$



Lời giải.

$$\begin{aligned} \iint_D 1 + \sqrt{x^2 + y^2} dx dy &= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^4 (1+r)r dr - \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} (1+r)r dr \\ &= \frac{\pi}{2} \times \left( \frac{r^2}{2} + \frac{r^3}{3} \right) \Big|_0^4 - \int_0^{\pi/2} \left( \frac{r^2}{2} + \frac{r^3}{3} \right) \Big|_0^{2\cos\varphi} d\varphi \\ &= \frac{44\pi}{3} - \int_0^{\pi/2} \left( 2\cos^2\varphi + \frac{8\cos^3\varphi}{3} \right) d\varphi \\ &= \frac{44\pi}{3} - \frac{9\pi + 32}{18} = \frac{85\pi}{6} - \frac{16}{9} \end{aligned}$$

■

CÂU 28. Tính tích phân kép sau

$$\int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{\ln(1 + \sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy.$$

Lời giải. DS:  $\frac{\pi}{2}(2\ln 2 - 1)$ .

■

CÂU 29. Tính tích phân  $\iint_D \cos \frac{1}{2} \pi x^2 dx dy$  trong đó  $D$  là miền giới hạn bởi các đường sau  
 $y = 0, x = 1, y = x$ .

Lời giải. DS:  $\frac{1}{\pi}$

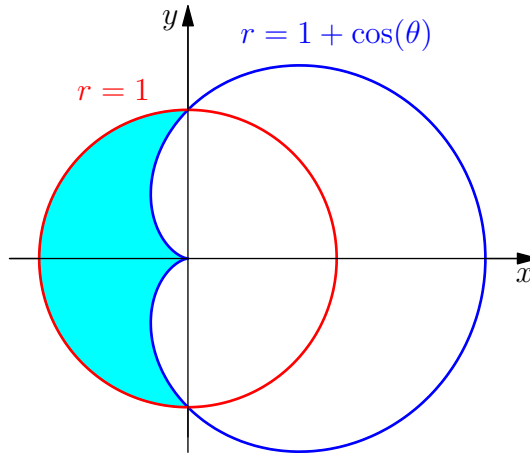
■

CÂU 30. Tính thể tích của vật thể bị chặn trên bởi nón  $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$  và bị chặn dưới bởi hình tròn  $(x - 1)^2 + y^2 \leq 1$ .

Lời giải. ■

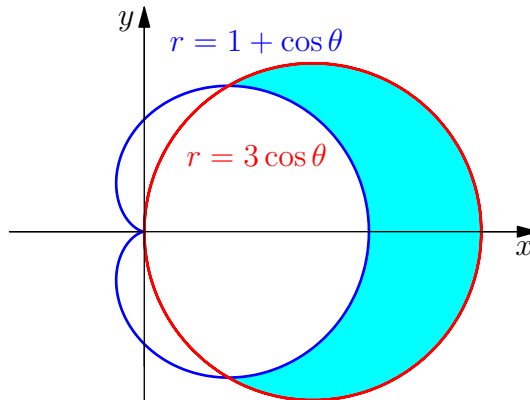
CÂU 31. Tính tích phân kép sau  $\iint_D \frac{1}{(1+x+y)^{3/2}} dx dy$  trong đó  $D$  là tam giác  $OAB$  với đỉnh  $O = (0, 0)$ ,  $A = (1, 0)$  và  $B = (1, 1)$ .

CÂU 32. Tính diện tích miền tô màu dưới đây



Lời giải. ■

CÂU 33. Tính diện tích miền tô màu dưới đây



CÂU 34. Tính  $\int_0^4 \int_0^{2\sqrt{z}} \int_0^{\sqrt{4z-x^2}} dy dx dz$ .

Lời giải. ĐS:  $8\pi$ . ■

CÂU 35. Tính  $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \frac{dz dy dx}{\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}}$ .

Lời giải. ĐS:  $\frac{\pi^2 a^2}{8}$ . ■

CÂU 36. Tính thể tích của miền bị chặn bởi mặt cầu  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$  nằm trong mặt trụ  $x^2 + y^2 = ay$ .

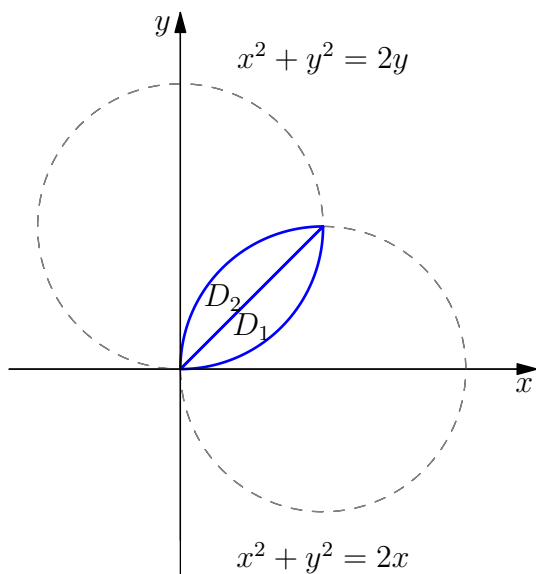
Lời giải. ĐS:  $\frac{2a^3}{9}(3\pi - 4)$ . ■

CÂU 37. Tính tích phân

$$\iint_D x dx dy$$

trong đó  $D$  là miền bị chặn bởi hai đường tròn

$$x^2 + y^2 = 2x, \quad x^2 + y^2 = 2y$$



Lời giải.

$$\begin{aligned} \iint_{D_1} x dx dy &= \int_0^{\pi/4} \int_0^{2 \sin \varphi} r \cos \varphi \, r dr d\varphi \\ &= \int_0^{\pi/4} \int_0^{2 \sin \varphi} r^2 \cos \varphi dr d\varphi = \int_0^{\pi/4} \frac{r^3}{3} \cos \varphi \Big|_0^{2 \sin \varphi} d\varphi \\ &= \int_0^{\pi/4} \frac{8 \sin^3 \varphi}{3} \cos \varphi d\varphi = \int_0^{\pi/4} \frac{8 \sin^3 \varphi}{3} d(\sin \varphi) \\ &= \frac{2 \sin^4 \varphi}{3} \Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{6} - 0 = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iint_{D_2} x dx dy &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{2 \cos \varphi} r \cos \varphi dr d\varphi \\
&= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{2 \cos \varphi} r^2 \cos \varphi dr d\varphi = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{r^3}{3} \cos \varphi \Big|_0^{2 \cos \varphi} d\varphi \\
&= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{8}{3} \cos^4 \varphi d\varphi = \frac{8}{3} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{3}{8} + \frac{\cos 2\varphi}{2} + \frac{\cos 4\varphi}{8} d\varphi \\
&= \int_{\pi/4}^{\pi/2} 1 + \frac{4 \cos 2\varphi}{3} + \frac{\cos 4\varphi}{3} d\varphi = \left[ \varphi + \frac{2 \sin 2\varphi}{3} + \frac{\sin 4\varphi}{12} \right] \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Do đó

$$\iint_D x dx dy = \iint_{D_1} x dx dy + \iint_{D_2} x dx dy = \frac{1}{6} + \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

Cách 2 sử dụng tọa độ Decartes. Phương trình đường tròn  $x^2 + y^2 = 2y$  có thể viết lại dưới dạng  $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ . Từ đó trong góc phần tư thứ nhất ta suy ra

$$y = 1 - \sqrt{1 - x^2}, x \in [0, 1].$$

Trong góc phần tư thứ nhất phương trình  $x^2 + y^2 = 2x$  có dạng

$$y = \sqrt{2x - x^2}, x \in [0, 1].$$

Do đó

$$\begin{aligned}
\iint_D x dx dy &= \int_0^1 \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} x dy dx = \int_0^1 xy \Big|_{1-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} dx \\
&= \int_0^1 x\sqrt{2x-x^2} - x + x\sqrt{1-x^2} dx \\
&= \int_0^1 x\sqrt{2x-x^2} dx - \int_0^1 x dx + \int_0^1 x\sqrt{1-x^2} dx \\
&= I_1 - I_2 + I_3.
\end{aligned}$$

Để thấy  $I_2 = \frac{1}{2}$ . Ta có

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_0^1 x\sqrt{2x-x^2}dx = \int_0^1 x\sqrt{1-(1-x)^2}dx, \quad (t=1-x, dt=-dx) \\
 &= -\int_1^0 (1-t)\sqrt{1-t^2}dt = \int_0^1 (1-t)\sqrt{1-t^2}dt \\
 &= \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx - I_3. \\
 \Rightarrow I_1 - I_2 + I_3 &= -\frac{1}{2} + \int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx \quad (x=\sin t, dx=\cos t dt) \\
 &= -\frac{1}{2} + \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} + \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2} dt \\
 &= -\frac{1}{2} + \left[ \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right] \Big|_0^{\pi/2} = -\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}
 \end{aligned}$$

Cách 3. Xem  $D$  là miền loại II. Phương trình đường tròn  $x^2 + y^2 = 2y$  có thể viết lại dưới dạng  $x^2 + (y-1)^2 = 1$ . Từ đó trong góc phần tư thứ nhất ta suy ra

$$x = \sqrt{2y-y^2}, y \in [0, 1].$$

Trong góc phần tư thứ nhất phương trình  $x^2 + y^2 = 2x$  có dạng

$$x = 1 - \sqrt{2y-y^2}, y \in [0, 1].$$

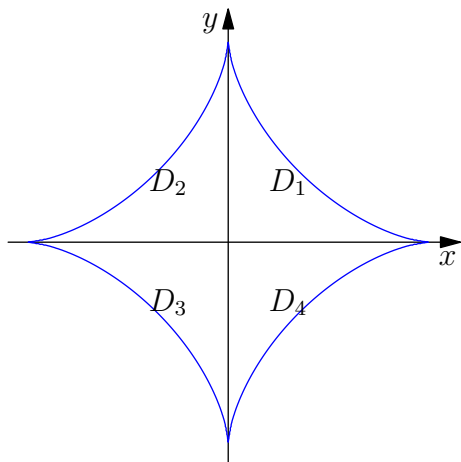
$$\begin{aligned}
 \iint_D x dx dy &= \int_0^1 \int_{1-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}} x dx dy \\
 &= \int_0^1 \frac{x^2}{2} \Big|_{1-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}} dy = \int_0^1 \frac{2y-y^2}{2} - \frac{(1-\sqrt{1-y^2})^2}{2} dy \\
 &= \int_0^1 y - 1 + \sqrt{1-y^2} dy = \left( \frac{y^2}{2} - y \right) \Big|_0^1 + \int_0^1 \sqrt{1-y^2} dy \\
 &= -\frac{1}{2} + \int_0^1 \sqrt{1-y^2} dy \quad (y=\sin t, dy=\cos t dt) \\
 &= -\frac{1}{2} + \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} + \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2} dt \\
 &= -\frac{1}{2} + \left[ \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4} \right] \Big|_0^{\pi/2} = -\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}
 \end{aligned}$$

■



CÂU 38. Tính diện tích hình phẳng bị chặn bởi đường cong phương trình

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 1.$$



Bản phác thảo (còn lỗi sai) Lưu hành nội bộ. Làm hoàn thiện một ý nhỏ được tính một điểm.