TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC

- -

THUẬT TOÁN XÁC ĐỊNH TẬP ẢNH GIÁ TRỊ HỮU HIỆU CỦA BÀI TOÁN TUYẾN TÍNH HAI MỤC TIÊU VÀ ỨNG DỤNG

ĐỒ ÁN II

Chuyên ngành: TOÁN TIN ỨNG DỤNG

Thầy hướng dẫn: PGS.TS. NGUYỄN THỊ BẠCH KIM

Sinh viên thực hiện: VŨ THỊ THÚY NGỌC

Lớp: TOÁN TIN 1 - K54

HÀ NỘI - 2012

Mục lục

Mở đầu

Trong cuộc sống, chúng ta thường phải lựa chọn ra một phương án để đạt được nhiều mục tiêu cùng một lúc trong những điều kiện nhất định. Ví dụ hàng ngày khi chúng ta đi chợ mua thức ăn, muốn chọn mua được một loại thức ăn vừa rẻ nhất, đảm bảo an toàn nhất và hợp với khẩu vị của các thành viên trong gia đình. Mô hình toán học của bài toán này là bài toán tối ưu đa mục tiêu.

Bài toán quy hoạch tuyến tính đa mục tiêu là cực đại (hoặc cực tiểu) hàm mục tiêu $\langle C, x \rangle$ trong đó C là ma trận cấp $(p \times n)$, $p \geq 2$ và tập chấp nhận được là tập lồi đa diện $X \subset \mathbb{R}^n$. Mục đích của bài toán quy hoạch tuyến tính đa mục tiêu là xác định được toàn bộ hoặc một phần tập nghiệm hữu hiệu $X_E \subset X \subset \mathbb{R}^n$. Cho đến nay, đã có rất nhiều phương pháp đưa ra để giải bài toán này như: phương pháp vô hướng hoá, phương pháp tham số, phương pháp đơn hình đa mục tiêu và các dạng cải biên, phương pháp nón pháp tuyến, ...

Nhưng trong những năm gần đây thay vì việc tìm trực tiếp tập nghiệm hữu hiệu X_E trong không gian quyết định, một số tác giả đã nghiên cứu giải bài toán tối ưu đa mục tiêu trong không gian ảnh $\mathbb{R}^p$. Ta thấy rằng số chiều không gian ảnh nhỏ hơn nhiều so với số chiều của không gian quyết định. Vì vậy, các thuật toán giải bài toán quy hoạch tuyến tính đa mục tiêu trên không gian ảnh cho phép giảm khối lượng tính toán.

Mục đích của Đồ án là nghiên cứu bài toán quy hoạch tuyến tính hai mục tiêu trên không gian ảnh. Đồ án gồm có hai chương. Chương 1 trình bày một số khái niệm và kết quả bổ trợ cần dùng đến trong chương sau. Thuật toán chi tiết xác định tập ảnh giá trị hữu hiệu của bài toán tuyến tính hai mục tiêu và các ví dụ minh họa được trình bày trong Chương 2.

Đồ án hoàn thành với nhiều cố gắng nhưng khó tránh khỏi những thiếu sót. Mong thầy cô và các bạn đóng góp ý kiến để em có thể làm tốt hơn sau này.

Cuối cùng em xin trân trọng cám ơn PGS.TS. Nguyễn Thị Bạch Kim đã tận tình hướng dẫn để em có thể hoàn thành tốt đồ án này.

Hà Nội, tháng 12 năm 2012

Vũ Thị Thúy Ngọc

Chương 1

Một số khái niệm và kết quả bổ trợ

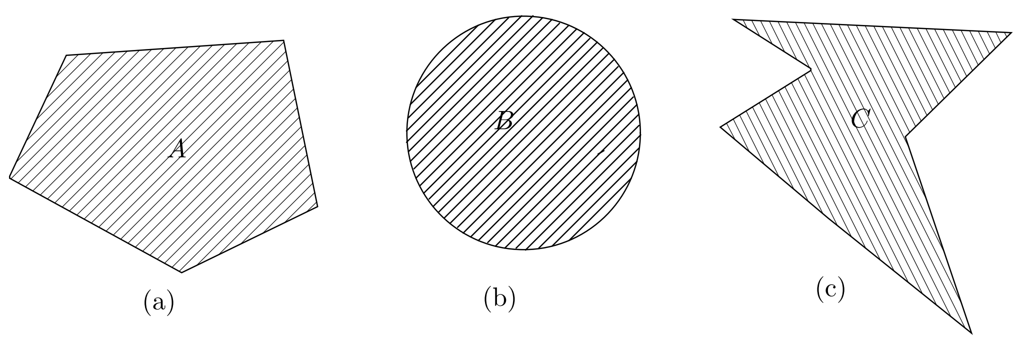
Chương này dành để nhắc lại một số khái niệm và kết quả cần dùng đến trong Đồ án như tập lồi đa diện, ảnh của tập lồi đa diện, điểm hữu hiệu, ... Nội dung chính của chương này được tham khảo trong [1] .

1.1 Tập lồi và tập lồi đa diện

1.1.1 Tập lồi

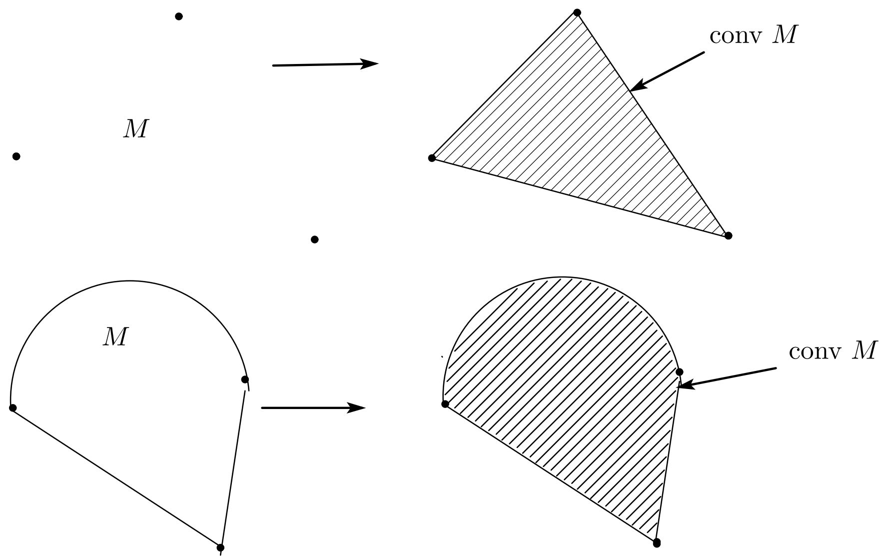
Tập $M \subseteq \mathbb{R}^n$ được gọi là *tập lồi* (convex set) nếu nó chứa trọn đoạn thẳng nối hai điểm bất kỳ thuộc nó, tức là mọi x^1, x^2 và $0 \leq \lambda \leq 1$ ta có $\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in M$.
Giao của một họ các tập lồi là tập lồi, hợp của các tập lồi chưa chắc là tập lồi.

Minh họa hình 1.1 là ví dụ đơn giản về tập lồi và tập không lồi.



Hình 1.1: (a), (b) - Tập lồi, (c) - Tập không lồi

Bao lồi của tập $M \subset \mathbb{R}^n$ là giao của tất cả các tập lồi chứa M và được ký hiệu là conv$M$. Hình 1.2 minh họa hai ví dụ về bao lồi.



Hình 1.2: Ví dụ về bao lồi

Cho tập lồi $M \subset \mathbb{R}^n$. Một điểm $x \in M$ được gọi là *điểm cực biên* của M nếu x không thể biểu diễn dưới dạng tổ hợp lồi chặt của hai điểm phân biệt bất kỳ nào đó của M, tức

$$\nexists\, y, z \in M, y \neq z \text{ sao cho } x = \lambda y + (1-\lambda)z \text{ với } 0 < \lambda < 1.$$

Số điểm cực biên của tập lồi có thể hữu hạn hoặc vô hạn. Tập lồi A ở Hình 1.1(a) có năm điểm cực biên và tập lồi B ở Hình 1.1(b) có vô số điểm cực biên.

1.1.2 Tập lồi đa diện

Tập lồi đa diện $P \subset \mathbb{R}^n$ là giao của một số hữu hạn nửa không gian đóng. Nói cách khác, *tập lồi đa diện* là tập nghiệm của một hệ hữu hạn các bất đẳng thức tuyến tính

$$\langle a^i, x\rangle \geq b_i, i = 1, 2, \ldots, \ell,$$

trong đó $a^i \in \mathbb{R}^n, b_i \in \mathbb{R}$ với mọi $i = 1, 2, \ldots, \ell$.
Một tập lồi đa diện bị chặn thường được gọi là đa diện lồi.

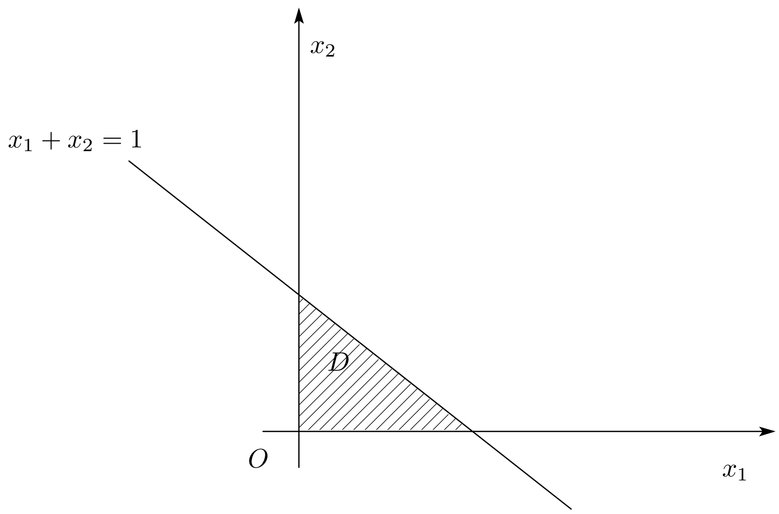
Ví dụ 1.1. Hình 1.3 minh họa đa diện $D \subset \mathbb{R}^2$ xác định bởi hệ ba bất đẳng thức tuyến tính:

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & & & \geq & 0 \\ x_2 & & & \geq & 0 \\ x_1 & + & x_2 & \leq & 1. \end{array}$$

Mỗi điểm cực biên của tập lồi đa diện được gọi là một *đỉnh* của nó.

Một tập con khác rỗng F của tập lồi đa diện P được gọi là một *diện* của P nếu

$$y \in P, z \in P, x = \lambda y + (1-\lambda)z \in F \text{ với } 0 < \lambda < 1 \Rightarrow y \in F, z \in F.$$



Hình 1.3: Tập D là tập lồi đa diện

Một diện của tập lồi đa diện P cũng là một tập lồi đa diện. Hơn nữa mỗi đỉnh của một diện P cũng là một đỉnh của P.

1.2 Ảnh của tập lồi đa diện qua ánh xạ tuyến tính

Cho C là ma trận cấp $(p \times n)$. Tập

$$Y = \{y \in \mathbb{R}^p \mid y = Cx, x \in X\}$$

được gọi là *tập ảnh* của X qua ánh xạ C.

Mệnh đề 1.1. *Nếu $X \subset \mathbb{R}^n$ là tập lồi đa diện và C là ma trận cấp $(p \times n)$ thì $Y \subset \mathbb{R}^p$ cũng là tập lồi đa diện.*

Theo tính chất của ánh xạ tuyến tính, nếu X là tập compact thì Y cũng là tập compact. Kết hợp sự kiện này với Mệnh đề 1.1 ta có:

Hệ quả 1.1. *Cho C là ma trận cấp $(p \times n)$ và X là đa diện trong $\mathbb{R}^n$. Khi đó tập ảnh $Y = \{y \in \mathbb{R}^p \mid y = Cx, x \in X\}$ cũng là đa diện trong $\mathbb{R}^p$.*

1.3 Điểm hữu hiệu

1.3.1 Thứ tự

Cho $u, v \in \mathbb{R}^p$, với $p \geq 2$, $u = (u_1, u_2, \ldots, u_p)^T$ và $v = (v_1, v_2, \ldots, v_p)^T$ thuộc $\mathbb{R}^p$. Ta viết

$$u \geq v \Leftrightarrow u_i \geq v_i, \forall i = 1, 2, \ldots, p$$
$$u \gg v \Leftrightarrow u_i > v_i, \forall i = 1, 2, \ldots, p.$$

Nói cách khác

$$u \geq v \Leftrightarrow u \in (v + \mathbb{R}^p_+)$$
$$u \gg v \Leftrightarrow u \in (v + \text{int}\mathbb{R}^p_+),$$

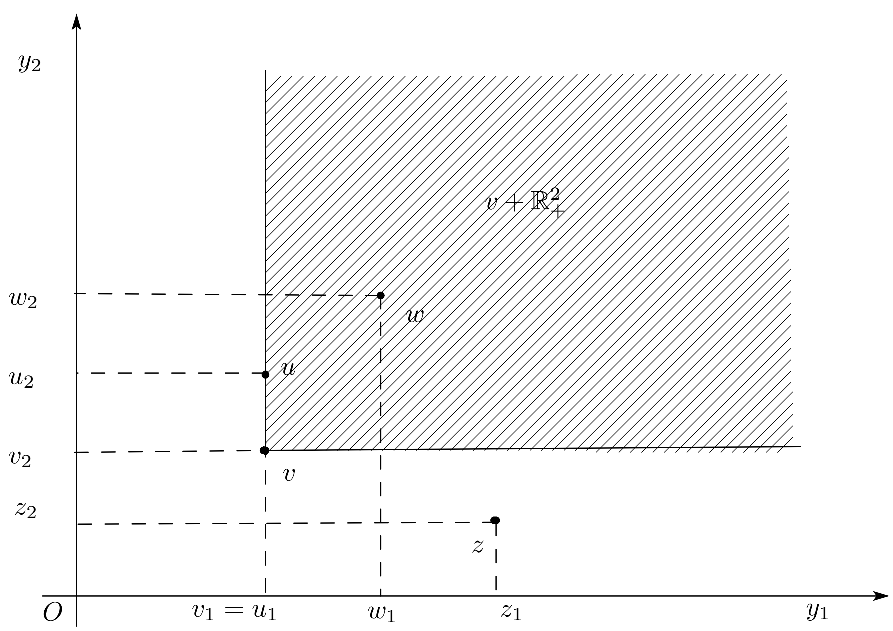
trong đó

$$\mathbb{R}^p_+ = \left\{ y = (y_1, y_2, \ldots, y_p)^T \in \mathbb{R}^p \mid y_i \geq 0, i = 1, 2, \ldots, p \right\}$$

và

$$\text{int}\mathbb{R}^p_+ = \left\{ y = (y_1, y_2, \ldots, y_p)^T \in \mathbb{R}^p \mid y_i > 0, i = 1, 2, \ldots, p \right\}.$$

Ví dụ 1.2. Xét bốn điểm $u = (u_1, u_2)^T$, $v = (v_1, v_2)^T$, $w = (w_1, w_2)^T$, $z = (z_1, z_2)^T$ như minh họa ở Hình 1.4. Theo định nghĩa, ta có $u \geq v$, $w \gg v$, z và v không so sánh được.



Hình 1.4: Thứ tự trong $\mathbb{R}^2$

1.3.2 Điểm hữu hiệu

Cho tập $Y \subset \mathbb{R}^p$ và $a^0 \in Y$. Ta nói:

i) a^0 là *điểm hữu hiệu* của Y nếu

$$\nexists\, a \in Y : a \geqslant a^0 \text{ và } a \neq a^0;$$

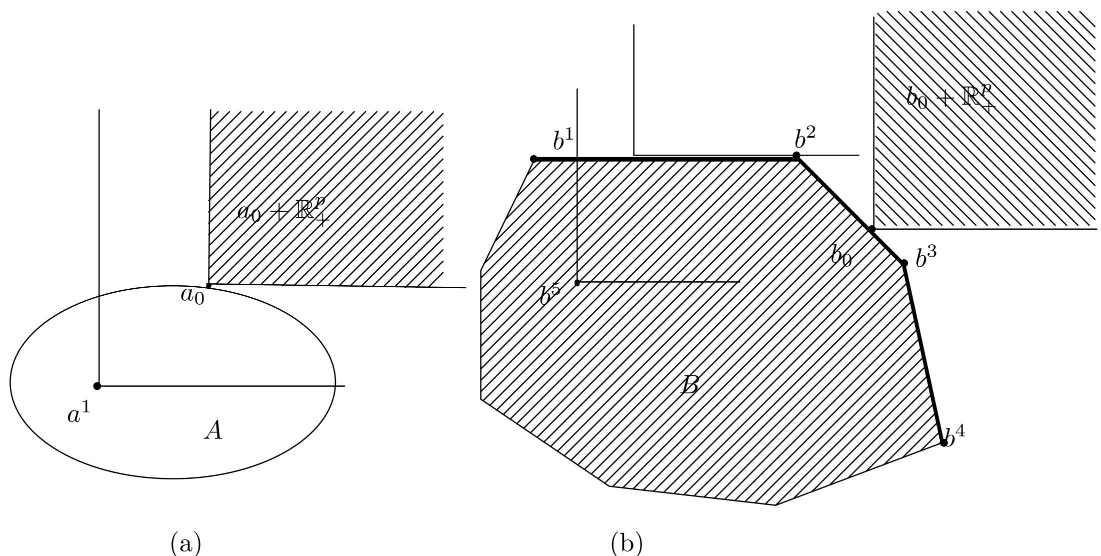
ii) a^0 là *điểm hữu hiệu yếu* của Y nếu

$$\nexists\, a \in Y : a \gg a^0.$$

Ký hiệu Y_E là tập các điểm hữu hiệu của Y, và Y_{WE} là tập các điểm hữu hiệu yếu của Y. Theo hình học, dễ thấy

$$a^0 \in Y_E \text{ nếu } \left(a^0 + \mathbb{R}^p_+\right) \cap Y = \left\{a^0\right\}$$

$$a^0 \in Y_{WE} \text{ nếu } \left(a^0 + \text{int}\mathbb{R}^p_+\right) \cap Y = \emptyset.$$



Hình 1.5: Ví dụ về điểm hữu hiệu

Hình 1.5 minh họa a^0 (tương ứng b^0) là điểm hữu hiệu của tập A (tương ứng tập B); a^1 không là điểm hữu hiệu của tập A và b^5 không là điểm hữu hiệu của tập B. Tập điểm hữu hiệu

$$B_E = \left[b^2, b^3\right] \cup \left[b^3, b^4\right]$$

và tập các điểm hữu hiệu yếu

$$B_{WE} = \left[b^1, b^2\right] \cup \left[b^2, b^3\right] \cup \left[b^3, b^4\right].$$

Nhận xét rằng, ngay trong trường hợp đơn giản này, tập B_E và tập B_{WE} đã không phải là tập lồi.

Ở đây, ký hiệu $[u, v]$ để chỉ *đoạn thẳng* nối hai điểm $u, v \in \mathbb{R}^p$, tức

$$[u, v] = \{w \in \mathbb{R}^p \mid w = \lambda u + (1 - \lambda) v, 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

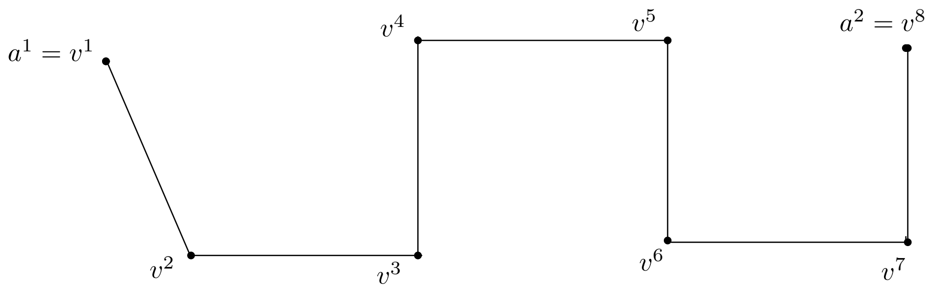
Mệnh đề 1.2. *Nếu Y là tập compact thì $Y_E \neq \emptyset$.*

Định lý 1.1. *Xét tập lồi đa diện $Y \subset \mathbb{R}^p$ có tập điểm hữu hiệu Y_E khác rỗng. Tập điểm hữu hiệu Y_E là tập liên thông đường gấp khúc bao gồm một số diện đóng của Y.*

Tập $Y \subset \mathbb{R}^p$ được gọi là *tập liên thông đường gấp khúc* nếu

$$\forall\, a^1, a^2 \in Y,\, \exists\, v^i, i = 1, 2, \ldots, k,$$

sao cho $\left[v^i, v^{i+1}\right] \subset Y$, $\forall\, i = 1, 2, \ldots, k - 1$, và $v^1 = a^1, v^k = a^2$. Xem minh họa ở Hình 1.6.



Hình 1.6: Ví dụ về tập liên thông đường gấp khúc

Hệ quả 1.2. *Cho đa diện $Y \subset \mathbb{R}^2$. Khi đó Y_E là tập liên thông gấp khúc bao gồm một số cạnh của Y.*

1.4 Kết luận

Trong chương này em đã trình bày một số khái niệm và kết quả bổ trợ. Các kết quả này là cơ sở quan trọng để xây dựng thuật toán xác định tập ảnh giá trị hữu hiệu của bài toán tuyến tính hai mục tiêu được trình bày trong Chương 2.

Chương 2

Thuật toán xác định tập ảnh giá trị hữu hiệu của bài toán tuyến tính hai mục tiêu

Nội dung chính của chương này là phát biểu mô hình toán học của bài toán tuyến tính hai mục tiêu, mô tả thuật toán xác định tập ảnh giá trị hữu hiệu của bài toán tuyến tính hai mục tiêu và một số ví dụ minh họa.

2.1 Phát biểu bài toán

Xét bài toán quy hoạch tuyến tính hai mục tiêu

$$\operatorname{Max}\{Cx, x \in X\}, \qquad (BP)$$

trong đó C là ma trận cấp $(2 \times n)$ với các hàng $c^1, c^2 \in \mathbb{R}^n$ và $X \subset \mathbb{R}^n$ là đa diện khác rỗng xác định bởi

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$$

và $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m$.

Định nghĩa 2.1. Điểm $x^0 \in \mathbb{R}^n$ được gọi là *nghiệm hữu hiệu* của bài toán hai mục tiêu tuyến tính (BP) nếu

$$\begin{cases} x^0 \in X \\ \nexists\, x \in X \text{ sao cho } Cx \geqslant Cx^0 \text{ và } Cx \neq Cx^0. \end{cases}$$

Nói cách khác, $x^0 \in X$ là nghiệm hữu hiệu của bài toán tuyến tính hai mục tiêu (BP) nếu $y^0 = Cx^0 \in Y_E$, tức $y^0 = Cx^0$ là một điểm hữu hiệu của tập ảnh

$$Y = \{y \in \mathbb{R}^p \mid y = Cx, x \in X\}.$$

Ký hiệu X_E là tập tất cả các điểm hữu hiệu của bài toán tuyến tính hai mục tiêu (BP). Theo định nghĩa ta có

$$Y_E = \{y \in \mathbb{R}^p \mid y = Cx, x \in X_E\}.$$

Vì vậy, người ta còn gọi Y_E là *tập giá trị hữu hiệu* của bài toán tuyến tính hai mục tiêu (BP).

Theo Mệnh đề 1.1, vì $X \subset \mathbb{R}^n$ là đa diện nên $Y \subset \mathbb{R}^2$ cũng là đa diện. Theo Mệnh đề 1.2, ta có $Y_E \neq \emptyset$. Ký hiệu Y_{ex} là tập tất cả các đỉnh của tập ảnh Y.

Giả sử $Y_E \cap Y_{ex} = \left\{y^1, \ldots, y^k\right\}$, với $k \geq 1$.

Định nghĩa 2.2. Điểm $y^I = \left(y_1^I, y_2^I\right) \in \mathbb{R}^2$ gọi là *điểm hữu hiệu lý tưởng* của Y nếu với mỗi $i \in \{1, 2\}$, tọa độ y_i^I là giá trị tối ưu của bài toán

$$\max y_i \qquad \text{v.đ.k. } y \in Y.$$

Nhận xét 2.1. Ta thấy rằng điểm hữu hiệu lý tưởng y^I có thể thuộc Y (xem Hình 2.1.(a)) hoặc không thuộc Y (Hình 2.1.(b)). Nếu $y^I \in Y$ thì ta có $Y_E \cap Y_{Ex} = \left\{y^I\right\}$, tức tập Y có duy nhất một đỉnh hữu hiệu.

Với mỗi $i \in \{1, 2\}$, ký hiệu F_i là tập nghiệm tối ưu của bài toán quy hoạch tuyến tính

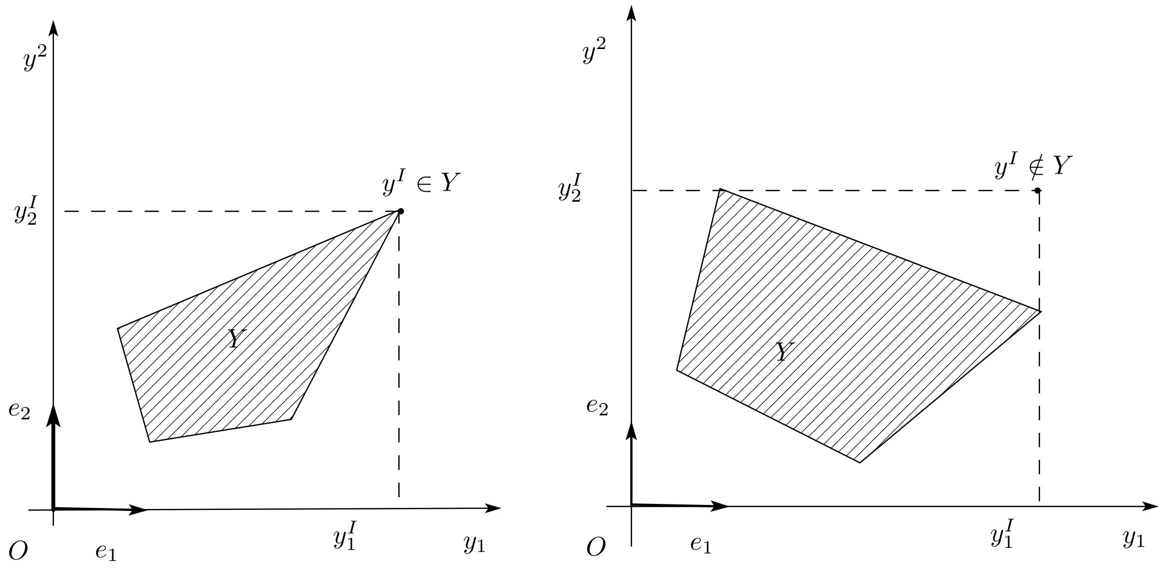
$$\max y_i \qquad \text{v.đ.k. } y \in Y.$$

Gọi y^{start} là nghiệm tối ưu của bài toán quy hoạch tuyến tính

$$\max\{y_1 \mid y \in F_2\}$$

và y^{end} là nghiệm tối ưu của bài toán quy hoạch tuyến tính

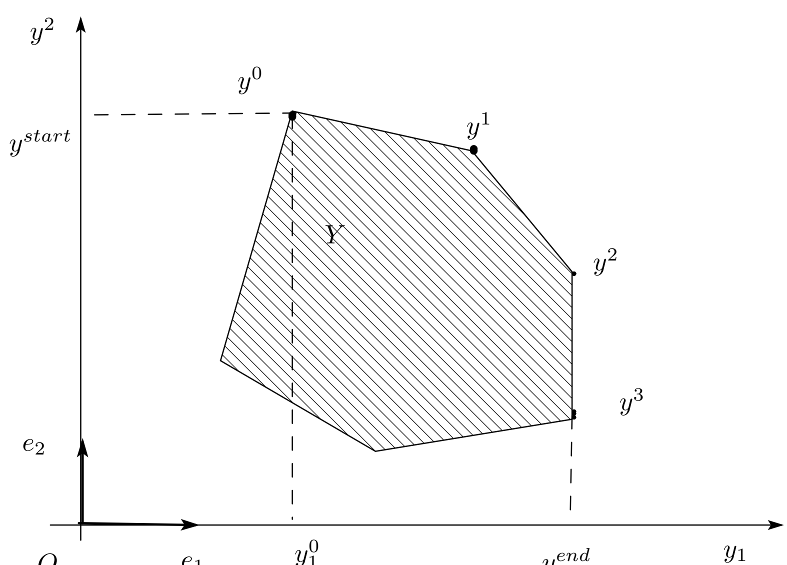
$$\max\{y_2 \mid y \in F_1\}.$$



(a) (b)

Hình 2.1: Ví dụ về điểm hữu hiệu lý tưởng

Ví dụ 2.1. Giả sử tập ảnh Y là đa diện như minh họa ở Hình 2.2. Ta có $F_1 = \left[y^2, y^3\right]$ và $F_2 = \left\{y^0\right\}$.



Hình 2.2: $y^{start} = y^0$ là nghiệm tối ưu của bài toán $\max\{y_1 \mid y \in F_2\}$ và $y^{end} = y^2$ là nghiệm tối ưu của bài toán $\max\{y_2 \mid y \in F_1\}$

Mệnh đề 2.1. *y^{start} và y^{end} là điểm cực biên hữu hiệu của Y, tức $y^{start}, y^{end} \in (Y_E \cap Y_{ex})$.*

Hệ quả 2.1.

i) Nếu $\overline{y}^1$ *là nghiệm tối ưu duy nhất của bài toán*

$$\max\{y_2 \mid y \in Y\}$$

thì $y^{start} = \overline{y}^1 \in (Y_E \cap Y_{ex})$;

ii) Nếu $\overline{y}^2$ *là nghiệm tối ưu duy nhất của bài toán*

$$\max\{y_1 \mid y \in Y\}$$

thì $y^{end} = \overline{y}^2 \in (Y_E \cap Y_{ex})$.

Chú ý 2.1. Trong trường hợp $y^{start} = y^{end} = y^I$, theo định nghĩa ta có $Y_E = \left\{y^I\right\}$.

Theo Hệ quả 1.2, tập điểm hữu hiệu Y_E là tập liên thông đường gấp khúc bao gồm một số cạnh của Y. Do đó

$$Y_E = \bigcup_{i=1}^{k-1} [y^i, y^{i+1}],$$

với $y^1 := y^{start}; y^k := y^{end}$ và $\left[y^i, y^{i+1}\right], i = 1, 2, \ldots, k-1$, là cạnh hữu hiệu của Y.

Ký hiệu $G^{i,j} =\text{conv}\left\{y^i, \ldots, y^j\right\}$ là bao lồi của các điểm cực biên hữu hiệu $y^i, \ldots, y^j$ với $1 \leq i < j \leq k$. Khi đó

$$G^{i,j} = \left\{y \in Y \mid \langle \ell^{i,j}, y\rangle \geq \alpha_{i,j}\right\}$$

và tập

$$\left\{y \in \mathbb{R}^2 \mid \langle \ell^{i,j}, y\rangle = \alpha_{i,j}\right\}$$

là một đường thẳng đi qua hai điểm y^i và y^j, trong đó $\ell^{i,j}$ và $\alpha_{i,j}$ được xác định bởi

$$\ell^{i,j} = \left(\frac{1}{y_1^j - y_1^i}, \frac{1}{y_2^i - y_2^j}\right),$$

và

$$\alpha_{i,j} = \frac{y_1^i}{y_1^j - y_1^i} + \frac{y_2^i}{y_2^i - y_2^j}.$$

Ta có véc tơ $\ell^{i,j}$ xác định dương ($\ell_1^{i,j} > 0, \ell_2^{i,j} > 0$). Đa diện $G^{i,j}$ được biểu diễn tường minh như sau

$$G^{i,j} = \left\{ y \in \mathbb{R}^2 : y = Cx, Ax \le b, x \ge 0, \langle \ell^{i,j}, y \rangle \ge \alpha_{i,j} \right\}.$$

Tập $G^{i,j}$ đóng vai trò quan trọng trong việc xây dựng thuật toán tìm tất cả các điểm cực biên hữu hiệu của tập Y.

Mệnh đề 2.2. *Gọi $\widehat{y}$ là phương án cực biên tối ưu của bài toán tuyến tính*

$$\max \left\{ \langle \ell^{i,j}, y \rangle : y \in G^{i,j} \right\}.$$

Nếu $\widehat{y} \in \left\{ y^i, y^j \right\}$ thì $[y^i, y^j]$ là cạnh hữu hiệu của Y_E. Ngược lại,

$$\widehat{y} \in \left\{ y^{i+1}, \ldots, y^{j-1} \right\}.$$

Trong trường hợp $y^i = y^1 = y^{start}$ và $y^j = y^k = y^{end}$, ta ký hiệu

$$G = G^{1,k}, \ell = \ell^{1,k} \text{ và } \alpha = \alpha_{1,k}.$$

Nhận xét 2.2. Gọi G_{ex} là tập tất cả các điểm cực biên của G. Dễ thấy $G_{ex} = Y_E \cap Y_{ex}$.

Mệnh đề 2.3. $Y_E = G_E$.

2.2 Thuật toán xác định tất cả các điểm cực biên hữu hiệu của tập ảnh giá trị

Ta muốn thực hiện thuật toán xác định tập ảnh giá trị hữu hiệu của bài toán (BP) thì cần phải biết các điểm cực biên hữu hiệu y^{start} và y^{end}. Sau đây là thủ tục xác định điểm y^{start} và y^{end}.

Thủ tục SE: (Xác định y^{start} và y^{end})

Bước 1. Tìm nghiệm cực biên tối ưu $\overline{y}^1$ của bài toán

$$\max \left\{ y_2 \mid y \in Y \right\}. \tag{T1}$$

Nếu $\overline{y}^1$ là nghiệm tối ưu duy nhất của bài toán (T1) thì $y^{start} = \overline{y}^1$. Ngược lại, nếu tìm được nghiệm cực biên tối ưu $\overline{\overline{y}}^1$ khác $\overline{y}^1$ thì $y^{start} = (y_1^*, \overline{y}_2^1)$, với $y_1^* = \max \left\{ \overline{y}_1^1, \overline{\overline{y}}_1^1 \right\}$.

Bước 2. Tìm nghiệm cực biên tối ưu $\overline{y}^2$ của bài toán

$$\max\{y_1 \mid y \in Y\}. \tag{T2}$$

Nếu $\overline{y}^2$ là nghiệm tối ưu duy nhất của bài toán (T2) thì $y^{end} = \overline{y}^2$. Ngược lại, nếu tìm được nghiệm cực biên tối ưu $\overline{\overline{y}}^2$ khác $\overline{y}^1$ thì $y^{end} = (\overline{y}_1^2, y_2^*)$, với $y_2^* = \max\left\{\overline{y}_2^2, \overline{\overline{y}}_2^2\right\}$.

Thuật toán: Xác định $Y_E \cap Y_{ex}$ được mô tả chi tiết như sau

Bước 0. Xác định y^{start} và y^{end} theo Thủ tục SE.

Bước 1. Đặt $n := 2, y^1 := y^{start}, y^2 := y^{end}$;
$k := 1$;

Bước 2. **While** $n > 1$ **do**
Begin

Tìm nghiệm cực biên tối ưu $\widehat{y}$ của bài toán

$$\max\left\{\langle l^{n-1,n}, y\rangle : y \in G^{n-1,n}\right\};$$

If $\widehat{y} \notin \left\{y^n, y^{n-1}\right\}$ **Then** (*$\widehat{y}$ là nghiệm cực biên hữu hiệu mới)*

Gán $y^{n+1} := y^n; y^n := \widehat{y}$ và $n := n + 1$;

Else Gán $g^k := y^n; k := k + 1$ và $n := n - 1$;

End

Bước 3. Đặt $g^k = y^{start}$

For $i = 1$ to k do
$y^i := g^{k-i+1}$;
Kết quả đạt được tập $Y_E \cap Y_{ex} = \left\{y^1, \ldots, y^k\right\}$.

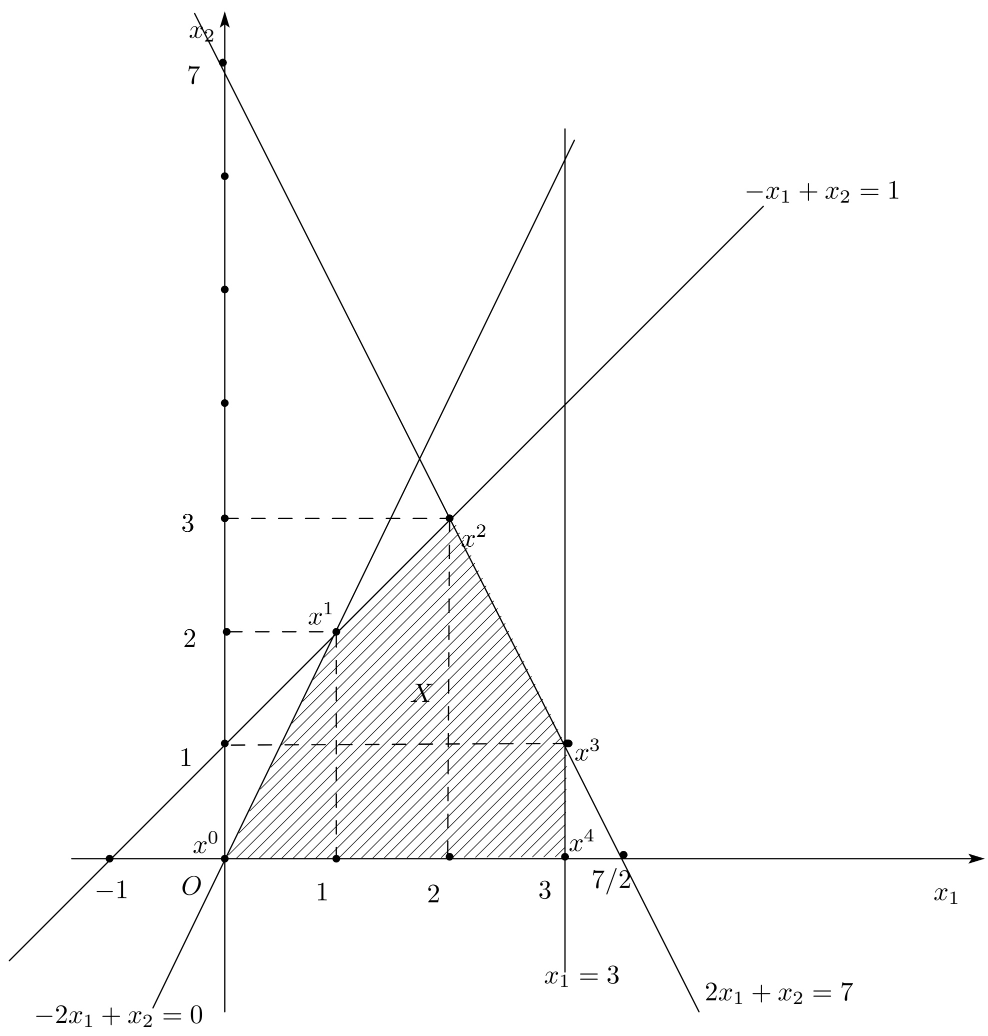
Ví dụ 2.2. Cho bài toán tuyến tính hai mục tiêu

$$\text{Max}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{v.đ.k.}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Bước 0. Xác định y^{start} và y^{end} theo Thủ tục SE.



Hình 2.3: Tập chấp nhận được X

Ta có tập chấp nhận được của bài toán này là đa diện $X = \text{conv}\left\{x^0, \ldots, x^4\right\}$, với $x^0 = (0,0)^T, x^1 = (1,2)^T, x^2 = (2,3)^T, x^3 = (3,1)^T, x^4 = (3,0)^T$. (Xem Hình 2.3).

Giả sử X_{ex} là tập tất cả các đỉnh của đa diện X nên ta có

$$X_{ex} = \left\{x^0, x^1, x^2, x^3, x^4\right\}.$$

Do

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

nên

$$\overline{y^0} = Cx^0 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{y^1} = Cx^1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overline{y^2} = Cx^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\overline{y^3} = Cx^3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

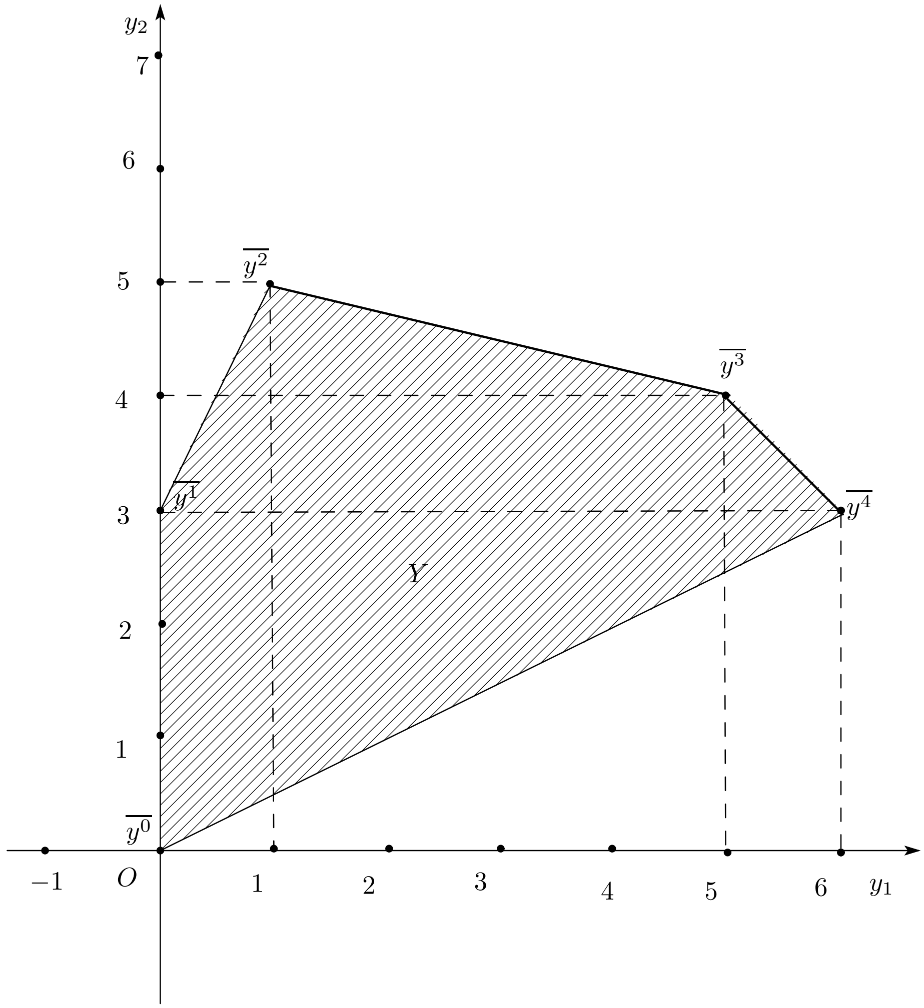
$$\overline{y^4} = Cx^4 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\Rightarrow Y = \text{conv}\left\{\overline{y^0}, \overline{y^1}, \overline{y^2}, \overline{y^3}, \overline{y^4}\right\}.$$

Hình 2.4 minh họa tập ảnh giá trị của bài toán.
Ta có $F_1 = \left\{\overline{y^4}\right\} \Rightarrow y^{end} = (6,3)^T$ là nghiệm tối ưu của bài toán $\max\{y_2 \mid y \in F_1\}$, và $F_2 = \left\{\overline{y^2}\right\} \Rightarrow y^{start} = (1,5)^T$ là nghiệm tối ưu của bài toán $\max\{y_1 \mid y \in F_2\}$.

Bước 1. Đặt $n := 2, y^1 := y^{start} = (1,5)^T, y^2 := y^{end} = (6,3)^T$;
$k := 1$;

Bước 2. Thực hiện các bước lặp sau



Hình 2.4: Tập ảnh giá trị Y

Bước lặp 1. ($n = 2$) Ta có

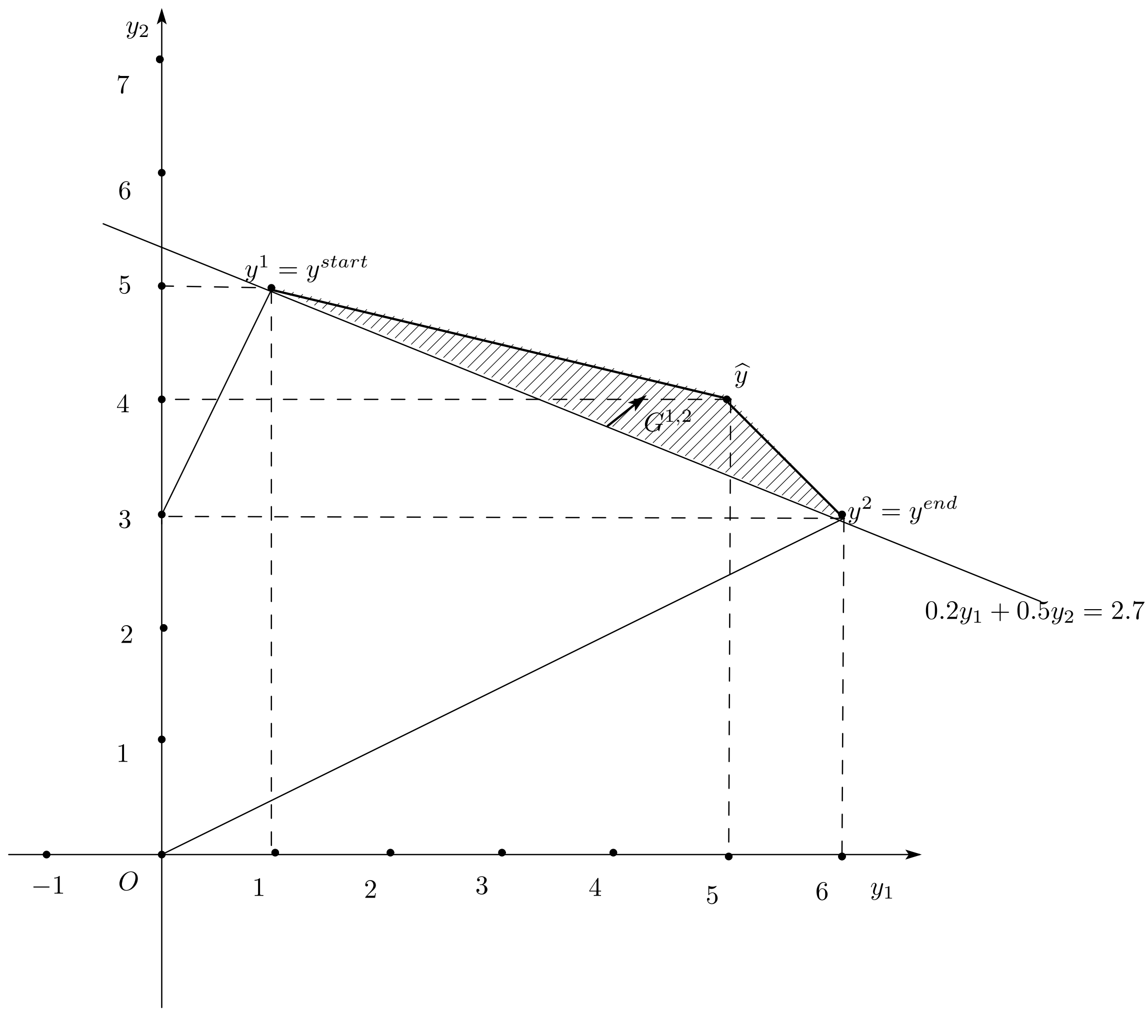
$$\ell^{1,2} = \left(\frac{1}{y_1^2 - y_1^1}, \frac{1}{y_2^1 - y_2^2}\right) = \left(\frac{1}{6-1}, \frac{1}{5-3}\right) = (0.2, 0.5)\,,$$

$$\alpha_{1,2} = \frac{y_1^1}{y_1^2 - y_1^1} + \frac{y_2^1}{y_2^1 - y_2^2} = \left(\frac{1}{6-1} + \frac{5}{5-3}\right) = 2.7.$$

Đường thẳng đi qua hai điểm y^1, y^2 là $0.2y_1 + 0.5y_2 = 2.7$. Với

$$G^{1,2} = \left\{y \in Y \mid \langle \ell^{1,2}, y\rangle \geq \alpha_{1,2}\right\}.$$

Hình 2.5 minh họa đường thẳng qua hai điểm y^1, y^2 và tập $G^{1,2}$.



Hình 2.5: Tập $G^{1,2} = \{y \in Y \mid 0.2y_1 + 0.5y_2 \geq 2.7\}$

Giải bài toán tuyến tính

$$\max \left\{ \langle \ell^{1,2}, y \rangle : y \in G^{1,2} \right\},$$

đạt được nghiệm tối ưu là $\widehat{y} = (5,4)^T \notin \left\{ y^1, y^2 \right\}$, thì $\widehat{y}$ là nghiệm cực biên hữu hiệu mới.

Đặt

$y^{n+1} = y^{2+1} = y^3 := y^n = y^2 = (6,3)^T$;
$y^2 := \widehat{y} = (5,4)^T$;
$n := n+1 = 2+1 = 3$.

Bước lặp 2. $(k = 1, n = 3)$ Đường thẳng đi qua hai điểm $y^2 = (5,4)^T, y^3 = (6,3)^T$ là

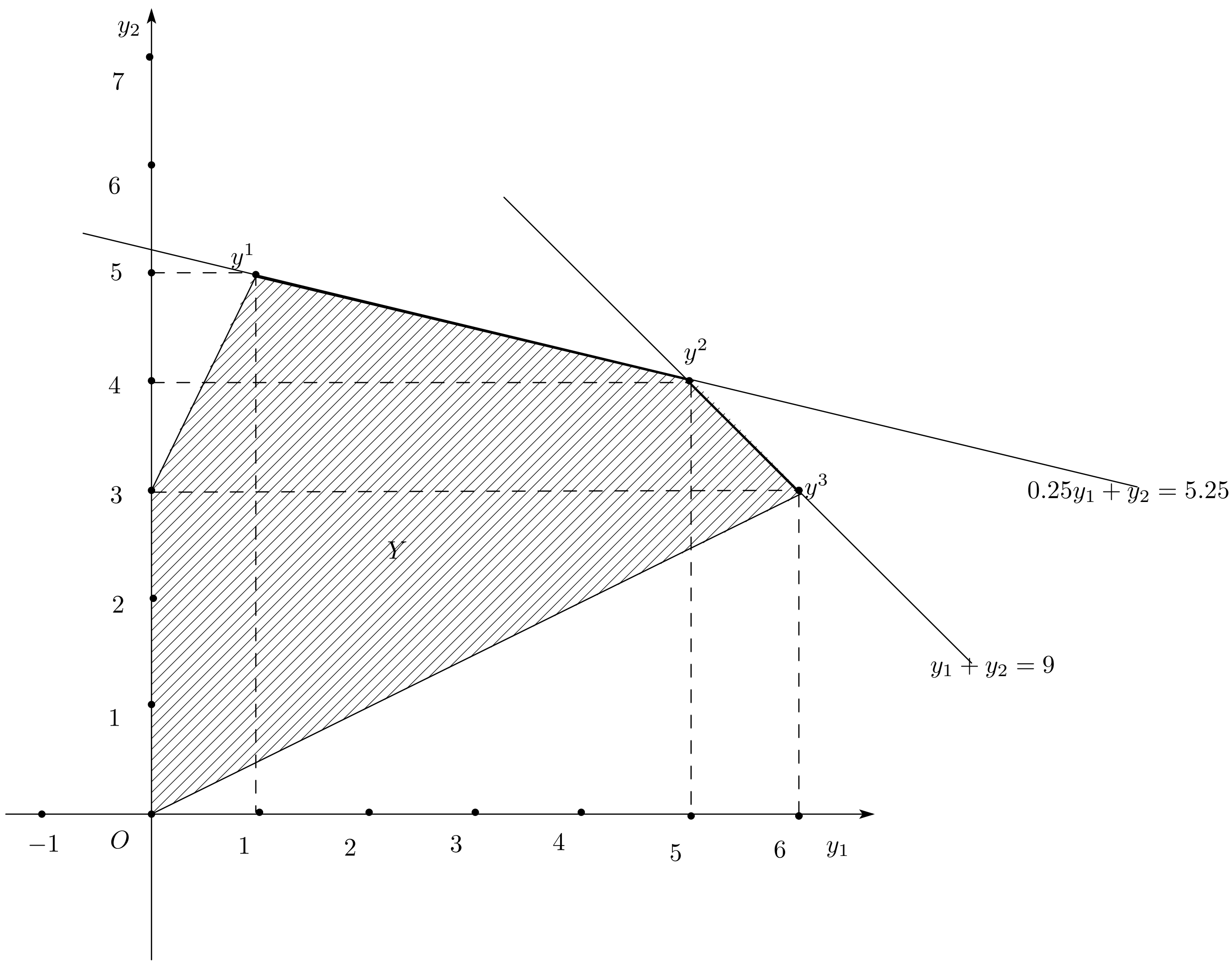
$$y_1 + y_2 = 9.$$

Giải bài toán tuyến tính

$$\max\left\{\langle \ell^{2,3}, y\rangle : y \in G^{2,3}\right\},$$

với $G^{2,3} = \left\{y \in Y \mid \langle \ell^{2,3}, y\rangle \geq \alpha_{2,3}\right\}, \ell^{2,3} = (1,1)$ và $\alpha_{2,3} = 9$.
Khi đó đạt được $\widehat{y} = (6,3)^T \in \left\{y^2, y^3\right\}$.

Hình 2.6 minh họa đường thẳng qua hai điểm y^2, y^3 và đường thẳng qua hai điểm y^1, y^2.



Hình 2.6: Tập $G^{2,3} = \left[y^2, y^3\right]$ và tập $G^{1,2} = \left[y^1, y^2\right]$

Đặt

$g^k = g^1 := y^n = y^3 = (6,3)^T$;
$k := k + 1 = 1 + 1 = 2$;
$n := n - 1 = 3 - 1 = 2$.

Bước lặp 3. $(k=2, n=2)$Đường thẳng đi qua hai điểm $y^1 = (1,5)^T, y^2 = (5,4)^T$ là

$$0.25y_1 + y_2 = 5.25.$$

Giải bài toán tuyến tính

$$\max\left\{\langle \ell^{1,2}, y\rangle : y \in G^{1,2}\right\},$$

với

$$G^{1,2} = \left\{y \in Y \mid \langle \ell^{1,2}, y\rangle \geq \alpha_{1,2}\right\},$$

và $\ell^{1,2} = (0.25, 1), \alpha_{1,2} = 5.25.$

Khi đó đạt được

$$\widehat{y} = (1,5)^T \in \left\{y^1, y^2\right\}.$$

Đặt

$g^k = g^2 := y^n = y^2 = (5,4)^T;$
$k := k+1 = 2+1 = 3;$
$n := n-1 = 2-1 = 1.$

Bước 3. Đặt

$$g^k = g^3 := y^{start} = (1,5)^T.$$

Kết quả đạt được

$y^1 := g^{3-1+1} = g^3 = (1,5)^T;$
$y^2 := g^{3-2+1} = g^2 = (5,4)^T;$
$y^3 := g^{3-3+1} = g^1 = (6,3)^T.$

Thuật toán kết thúc, ta xác định được

$$Y_E \cap Y_{ex} = \left\{y^1, y^2, y^3\right\}$$

và

$$Y_E = \left[y^1, y^2\right] \cup \left[y^2, y^3\right].$$

2.3 Kết luận

Trong chương này, em đã trình bày thuật toán xác định tập ảnh giá trị hữu hiệu của bài toán tuyến tính hai mục tiêu.

Kết luận

Trong đồ án này, em đã nhắc lại một số kết quả bổ trợ và trình bày thuật toán xác định tập ảnh giá trị hữu hiệu của bài toán tuyến tính hai mục tiêu. Như đã biết các thuật toán giải bài toán quy hoạch tuyến tính đa mục tiêu trên không gian ảnh cho phép giảm khối lượng tính toán. Nhưng vẫn gặp phải một số khó khăn như: khối lượng tính toán tăng nhanh khi kích thước bài toán tăng, tập nghiệm hữu hiệu là tập không lồi, . . . nên rất khó chọn được nghiệm thích hợp. Trong Đồ án em chưa chứng minh được một số định lý, mệnh đề nên em sẽ hoàn thiện trong Đồ án 3.

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Thị Bạch Kim, "Giáo trình Các Phương pháp Tối ưu Lý thuyết và Thuật toán", *Nhà xuất bản Bách Khoa, Hà Nội, 2008.*

[2] N. T. Bach Kim, N. T. Minh Hue and Dao P. Vu, *An Algorithm for Generating the Efficient Outcome Set in Bi-Criteria Linear Programming Problems and Applications,* East - West Journal of Mathematic, Vol. 8, No. 1, 2006, pp. 15 -25.