TRƯỜNG ĐẠI HỌC BÁCH KHOA HÀ NỘI
VIỆN TOÁN ỨNG DỤNG VÀ TIN HỌC

PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN GIẢI PHƯƠNG TRÌNH STOKES

Giảng viên hướng dẫn: TS. Phan Xuân Thành

Nhóm Sinh viên thực hiện:

Nguyễn Anh Tú

Phạm Anh Tuấn

Lớp: KSTN Toán Tin K60

HÀ NỘI - 1/2019

Mục lục

Chương 1

Kiến thức cơ sở

1.1 Tích vô hướng

V- Không gian vectơ trên R, tích vô hướng $(u, v)_V : V \times V \to \mathbb{R}$ có các tính chất: $\forall u, v, w \in V$

1. $(u, v) = (v, u)$
2. $(u, v + w) = (u, v) + (u, w)$
3. $(u, kv) = k(u, v)$
4. $(u, u) \geq 0$
5. $(u, u) = 0 \Leftrightarrow u \equiv \theta \in V$

Bất đẳng thức:

$$(u, v)^2 \leq (u, u).(v, v) \quad \forall u, v \in V$$

1.2 Không gian Hilbert

Không gian vectơ V (V là không gian đủ) với tích vô hướng $(.,.)$ gọi là không gian Hilbert.

Chuẩn trong không gian Hilbert:

$$\|u\|_V = \sqrt{(u,u)_V}$$

Bất đẳng thức của tích vô hướng được chuyển về:

$$|(u,v)| \leq \|u\|_V \,.\, \|v\|_V$$

1.3 Đạo hàm yếu

Xét hàm $u(x), x \in [a,b]$, u khả vi: tồn tại $u'(x) = \underset{h\to 0}{lim}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}$ Đạo hàm yếu của hàm $u(x)$ là hàm $g(x) = \frac{\partial u}{\partial x_k}$ sao cho:

$$\int\limits_a^b g(x)v(x)dx = -\int\limits_a^b u(x)\frac{\partial v}{\partial x_k}dx \quad \forall v \in D(a,b)$$

Ta định nghĩa tương tự với đạo hàm cấp $|\alpha|$:

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|}u}{\partial^{\alpha_1}x_1\partial^{\alpha_2}x_2...\partial^{\alpha_n}x_n}$$

1.4 Một số không gian hay dùng

Không gian $L_2(\Omega)$: là không gian các hàm $u(x)$ thoả mãn:

$$\int\limits_{\Omega} |u(x)|^2 \, dx < +\infty$$

Chuẩn và tích vô hướng cho không gian $L_2(\Omega)$:

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} = \left(\int\limits_{\Omega} |u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$(u, v)_{L_2(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} u(x)v(x)dx$$

Do không gian $L_2(\Omega)$ là không gian Hilbert nên:

$$\left(\int\limits_{\Omega} u(x)v(x)dx \right)^2 \leq \int\limits_{\Omega} |u|^2 \, dx . \int\limits_{\Omega} |v|^2 \, dx$$

Tương tự cho không gian $L_p(\Omega)$: là không gian các hàm $u(x)$ thoả mãn $\int_{\Omega} |u|^p \, dx < +\infty$

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} = \left(\int\limits_{\Omega} |u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left| \int\limits_{\Omega} u(x)v(x)dx \right| \leq \left(\int\limits_{\Omega} |u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} . \left(\int\limits_{\Omega} |v|^q \, dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

với $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

Không gian $W_p^m(\Omega)$: $H^m(\Omega) \equiv W_2^m(\Omega)$

$$W_m^p(\Omega) = \{u | D^\alpha u \in L_p(\Omega) \forall \alpha : |\alpha| \leq m, m \in \mathbb{N}\}$$

Chuẩn và tích vô hướng:

$$(u,v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\le m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L_2(\Omega)}$$

$$(u,v)_{L_2(\Omega)} = \int\limits_\Omega u(x)v(x)dx$$

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \sqrt{(u,u)_{H^m(\Omega)}}$$

Không gian $H^m(\Omega)$: là không gian Hilbert: $H^0(\Omega) \equiv L_2(\Omega)$:

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \sqrt{\int\limits_\Omega u^2(x)dx + \sum_{k=1}^n \int\limits_\Omega \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx}$$

1.5 Bất đẳng thức Poincare

Xét $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, Ω bị chặn. Với $\forall u \in H^1(\Omega)$, tồn tại hằng số C (phụ thuộc Ω) sao cho:

$$\int\limits_\Omega u^2(x)dx \le C\left(\sum_{k=1}^n \int\limits_\Omega u_{x_k}^2 dx + \oint\limits_\Gamma u^2(x)dS\right)$$

Trong các phần sau, để cho ngắn gọn, khi miền xác định đã rõ, ta kí hiệu

$$||u||_0 := ||u||_{L_2(\Omega)}$$

$$||u||_1 := ||u||_{H_1^0(\Omega)}$$

Chương 2

Hệ phương trình Stokes

Trong bài báo cáo này, chúng ta quan tâm đến việc giải gần đúng nghiệm của hệ phương trình Stokes đối với bài toán dòng chảy không nhớt. Ở dạng đơn giản nhất, hệ phương trình Stokes trong trường hợp 2 chiều trên miền Ω được phát biểu như sau:

$$\begin{cases} -\Delta u + gradp \ = \ f \\ divu = 0 \\ u|_{\Gamma} = g \end{cases}$$

trong đó u là hàm vector khả vi hai lần trên miền Ω và $\Gamma = \partial\Omega$

2.1 Xây dựng bài toàn yếu

Đặt $e_{ij}(u) = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})$ $\forall i, j = 1, 2$. Ta có

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_j} e_{kj}(u) &= \sum_{j-1}^{2} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j^2} + \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_k} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j^2} + \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{2} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_k} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) \\
&= \frac{1}{2} \Delta u_k(x) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} div\ u(x) \quad \forall\ k = 1, 2
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Nhân thêm hàm thử $v_k(x)$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_j} e_{kj}(u) v_k(x) &= v_k(x) \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_j} e_{kj}(u) + \sum_{j=1}^{2} e_{kj}(u) \frac{\partial v_k(x)}{\partial x_j} \\
&= \frac{1}{2} v_k(x) \Delta u_k + \frac{1}{2} v_k \frac{\partial}{\partial x_k} div u(x) + \sum_{j=1}^{2} e_{kj}(u) \frac{\partial v_k(x)}{\partial x_j}
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Lấy tổng trên $k = 1, 2$ ta có

$$\sum_{k,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_j} e_{kj}(u) v_k(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2} \left[\Delta u_k + \frac{\partial}{\partial x_k} div\ u(x) \right] v_k(x) + \sum_{i,j=1}^{2} e_{kj}(u) e_{kj}(v) \tag{2.3}$$

Chuyển Δu_k sang vế trái, ta thu được

$$\begin{aligned}-\sum_{k=1}^{2} v_k(x)\Delta u_k(x) = 2\sum_{k,j=1}^{2} e_{kj}(u)e_kj(v) - 2\sum_{i,j=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_j}(e_{kj}(u)v_k(x))\\ +\sum_{k=1}^{2} v_k(x)\frac{\partial}{\partial x_k}div\ u(x)\end{aligned} \tag{2.4}$$

Nhân hai vế của phương trình Stoke $-\Delta u + \nabla p(x) = f(x)$ với hàm thử $v(x)$ và lấy tích phân trên miền Ω, ta có

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega} f_k(x)v_k(x)dx &= -\int\limits_{\Omega} v_k(x)\Delta u_k(x)dx + \int\limits_{\Omega}\frac{\partial p(x)}{\partial x_k}v_k(x)dx\\ &= -\int\limits_{\Omega} v_k(x)\Delta u_k(x)dx - \int\limits_{\Omega} p(x)\frac{\partial v_k}{\partial x_k}dx + \int\limits_{\Gamma} p(x)v_k(x)n_k(x)dS\\ &\forall k = 1,2\end{aligned} \tag{2.5}$$

Lấy tổng theo $k = 1, 2$, và thay vào phương trình (4), ta thu được

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega} v(x)^T f(x)dx = 2\sum_{k,j=1}^{2}\int\limits_{\Omega} e_kj(u,x)e_{kj}(v,x) - 2\sum_{k,j=1}^{2}\int\limits_{\Omega}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[e_{kj}(u,x)v_k(x)\right]\\ +\sum_{k=1}^{2}\int\limits_{\Omega} v_k(x)\frac{\partial}{\partial x_k}div\ u(x)dx - \int\limits_{\Omega} p(x)div\ v(x)dx\\ +\sum_{k=1}^{2}\int\limits_{\Gamma} v_k(x)n_k(x)dS\end{aligned} \tag{2.6}$$

Áp dụng công thức tích phân từng phần ta thu được công thức Green cho bài toán Stoke

$$\int_\Omega v(x)^T f(x)dx = 2\sum_{k,j=1}^{2}\int_\Omega e_kj(u,x)e_{kj}(v,x) + 2\sum_{k,j=1}^{2}\int_\Gamma e_{kj}(u,x)v_k(x)n_j(x)dS$$
$$-\int_\Omega div\ udiv\ vdx + \int_\Gamma div\ un^T(x)v(x)dS$$
$$-\int_\Omega p(x)div\ vdx + \sum_{k=1}^{2}\int_\Gamma p(x)v_k(x)n_k(x)dS \tag{2.7}$$

Chọn hàm thử $v \in [H_0^1(\Omega)]^2$, vì u bằng 0 trên biên Γ và $div\ u = 0$, nên ta có

$$2\sum_{k,j=1}^{2}\int_\Omega e_{kj}(u,x)e_{kj}(v,x)dx - \int_\Omega pdiv\ vdx = \int_\Omega v^T(x)f(x)dx\ \forall\ v \in [H_0^1(\Omega)]^2 \tag{2.8}$$

Đặt :

$$\alpha(u,v) = 2\sum_{k,j=1}^{2}\int_\Omega e_{kj}(u,x)e_{kj}(v,x)$$
$$\beta(v,q) = \int_\Omega q(x)\ div\ vdx$$

Ta thấy rằng nghiệm của $p(x)$ có thể sai khác nhau một hằng số, do đó đặt $Q = q(x)|inL_2(\Omega)\ v\ \int_\Omega q(x)dx = 0$. Ta có bài toán yếu cho phương trình Stoke:

Tìm hàm $u \in [H_0^1(\Omega)]^2$ và hàm $p \in Q$ sao cho

$$\begin{cases} \alpha(u,v) - \beta(v,p) =< f, v > \ \ \forall\ v \in [H_0^1(\Omega)]^2 \\ \beta(u,q) = 0\ \forall\ q \in Q \end{cases}$$

2.2 Tính đặt chỉnh

Ở dạng tổng quát, bài toán Stoke được gọi là bài toán hỗn hợp (mixed problem) được miêu tả như sau [4]:

Tìm $u \in V$ và $p \in M'$ thỏa mãn

$$\begin{cases} Au + B^*p = f, \\ Bu = g \end{cases}$$

trong đó V và M là hai không gian Banach, $A : V \to V'$ và $B : V \to M$ là hai ánh xạ tuyến tinh bị chặn (ở đây, ta kí hiệu X' là không gian đối ngẫu của X). $B* : M' \to V'$ là toán tử đối ngẫu của B (adjoint operator), $f \in V'$ và $g \in M$. Mục đích của phần này là ta sẽ miêu tả tính đặt chỉnh (well-posedness) của hệ phương trình trên, từ đó liên hệ với bài toán Stoke.

Gọi $ker(B)$ là nhân của toán tử B và $A_\pi : ker(B) \to ker(B')$ sao cho $< A_\pi v, w >_{V',V} =< Av, w >_{V',V}$ với mọi $v, w \in ker(B)$, khi đó $A_\pi = J_B^* A J_B$ với J_B là đơn ánh từ $ker(B)$ vào V và J_B^* là toán tử đối ngẫu của J_B. Theo [4], ta có định lý sau về tính đặt chỉnh của phương trình trên

Kết quả 2.2.1. *Phương trình trên là đặt chỉnh khi và chỉ khi A_π là đẳng cấu và B là toán ánh*

Giả sử rằng, V và M là không gian Banach phản xạ (reflexive Banach) và $Q = M'$. Bây giờ, ta xét hai dạng song tuyết tính bị chặn $\alpha(V, V)$ và $\beta(V, Q)$, thỏa mãn $\alpha(v, w) =< Av, w >_{V',V}$ và $b(v, q) =< Bv, q >_{Q',Q}$. Đặt

$$\begin{aligned} ||\alpha|| &= \sup_{(v,w)\in VxV} \frac{\alpha(v,w)}{||v||_V||w||_V} \\ ||\beta|| &= \sup_{(v,q)\in VxQ} \frac{\beta(v,q)}{||v||_V||q||_Q} \end{aligned} \tag{2.9}$$

Với $f \in V'$ và $g \in Q'$. Hệ phương trình có thể viết lại như sau:

Tìm $u \in V$ và $p \in Q$ thỏa mãn

$$\begin{cases} \alpha(u, w) + \beta(w, p) = f(w), \ \forall w \in V \\ \beta(u, q) = g(q), \ \forall q \in Q \end{cases}$$

Ở đây, ta kí hiệu $f(v) =< f, v >_{V',V}$ và $g(q) =< g, q >_{Q',Q}$. Khi đó, ta có định lý sau về tính đặt chỉnh

Kết quả 2.2.2. *Hệ phương trình trên đặt chỉnh (well-posed) khi và chỉ khi*

$$\begin{aligned} \inf_{v\in ker(B)} \sup_{w\in ker(B)} \frac{\alpha(v,w)}{||v||_V||w||_V} = a > 0 \\ \inf_{q\in Q} \sup_{v\in V} \frac{\beta(v,q)}{||v||_V||q||_Q} = b > 0 \end{aligned} \tag{2.10}$$

và $\forall w \in ker(B)$, *nếu* $\alpha(v, w) = 0$ *với mọi* $v \in ker(B)$ *thì* $w = 0$

Ở đây, ta thấy rằng, nếu $\alpha(u, v)$ là $V - elliptic$ thì khí đó điều kiện thứ nhất và điều kiện thứ ba dễ dàng được thỏa mãn

Chương 3

Phương trình Stoke bằng phương pháp phần tử hữu hạn

3.1 Phần tử hữu hạn cho bài toán Stoke

Trong phần này, ta đi giải bài toán yếu của phương trình stoke bằng phương pháp phần tử hữu hạn, tức là ta đi tìm hàm u_h, v_h thuộc vào hai không gian con hữu hạn chiều V_h, Q_h của $[H_0^1(\Omega)]^2$ và $L_2(\Omega)$ thỏa mãn phương trình

$$\begin{cases} \alpha(u_h, v) - \beta(v, p_h) =< f, v > \ \forall \ v \in V_h \\ \beta(u_h, q) = 0 \ \forall \ q \in Q_h \end{cases}$$

Theo [1], ta cần phải chọn không gian V_h và Q_h thỏa mãn điều kiện inf-sup

$$\inf_{q_h \in Q_h} \sup_{v_h \in V_h} \frac{\int_\Omega q_h \; div \; v_h dx}{||v_h||_1 ||q_h||_{0/R}}$$

Trong phần này, bài báo cáo sẽ chỉ ra một cách xây dựng hai không gian thỏa mãn điều kiện inf-sup. Ta biết rằng, bài toán Stoke thỏa mãn điều kiện inf-sup, theo [2], để kiêm tra điều kiện inf-sup cho hai không gian con hữu hạn chiều V_h và Q_h ta cần xây dựng một ánh xạ $\Pi_h : [H_0^1(\Omega)]^2 \to V_h$ sao cho

$$\begin{cases} \int_\Omega q_h div(\Pi_h v - v)dx = 0 \\ ||\Pi_h v|| \leq c||v|| \end{cases}$$

Vì q_h có khả vi cấp một, sử dụng công thức tích phân từng phần, ta có điều kiện đầu tương đương với

$$\int\limits_\Omega (v - \Pi_h v) grad \; q_h dx = 0 \; \forall \; q_h \; \in Q_h \tag{3.1}$$

Ở đây, miền Ω là một miền đa giác trong không gian hai chiều và được chia thành các phần tử hữu hạn là các tam giác T. Và nếu q_h là hàm đa thức bâc k trên mỗi tam giác T, điều kiện (9) tương đương với

$$\int\limits_T (v - \Pi_h v)\Phi_h dx = 0 \; \forall \; \Phi_h \; \in P_{k-1}(T) \tag{3.2}$$

Gọi một cách chia miền Ω thành các phần tử hữu hạn là T_h. Ta định nghĩa

$$M^k(T_h) \; \{v | v \in C^0(\Omega), v_{|T} \in P_k(T) \; \forall T \in T_h\}$$

$$M_0^k(T_h) = M_0^k(T_h) \cap H_0^1(\Omega)$$

$$B^k(T_h) = \{v | v_{|T} \in P_k(T) \cap H_0^1(T)\ \forall T \in T_h\}$$

Phương pháp phần tử hữu hạn MINI sử dụng không gian

$$V_h = (M_0^1)^2 \bigoplus (B^3)^2$$

$$Q_h = M_0^1$$

Trong trường hợp này, điều kiện (10) trở thành

$$\int_T (v - \Pi_h v) dx = 0\ \forall\ T,\ \forall\ v \in (H_0^1)^2 \tag{3.3}$$

Với cách chọn không gian như trên, ta chỉ cần xây dựng ánh xạ Π_h thỏa mãn điều kiện được miêu tả như trên (theo [2]) để chứng minh rằng cách chọn không gian như vậy thỏa mãn điều kiện inf-sup. Theo [3], ta có thể xây dựng được ánh xạ $\overline{\Pi}_h : (H_0^1)^2 \to (M_0^1)^2$ thỏa mãn (với $r = 0, 1$ và $h_T = diamT$)

$$\sum_T h_T^{2r-2} ||\overline{\Pi}_h v - v||_{r,T}^2 \leq C||v||_{1,\Omega}^2 \tag{3.4}$$

Để đảm bảo điểu kiện (11), ta cộng thêm vào ánh xạ $\overline{\Pi}_h$ một bội số của hàm bubble trên mỗi tam giác. Cụ thể, ta đặt

$$\Pi_h v = \overline{\Pi}_h v + \alpha_T \Phi_T \tag{3.5}$$

Để thỏa mãn điều kiện (11), ta có

$$\alpha_T \int_T \Phi_T dx = \int_T (\overline{\Pi}_h v - v) dx \tag{3.6}$$

Ta có

$$||\Pi_h v||_{1,T} \leq ||\overline{\Pi}_h||_{1,T} + ||\alpha_T \Phi_T||_{1,T} \tag{3.7}$$

Mặt khác, ta có

$$\begin{aligned} ||\alpha_T \Phi_T|| &\leq c||\alpha_T|| \\ |\alpha_T| &\leq c h_T^{-1} ||\Pi_h v - v||_{0,T} \end{aligned} \tag{3.8}$$

Lấy tổng theo T và sử dụng (12) ta chứng minh được phương phần tử MINI thỏa mãn điều kiện inf-sup.
Trên mỗi tam giác T, hàm u và p được xấp xỉ bằng tổ hớp tuyến tính của các hàm cơ sở như sau

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^{3} \phi_i(\mathbf{x}) u_i + \phi_b(\mathbf{x}) u_b \\ p(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^{3} \phi_i(\mathbf{x}) p_i \end{aligned} \tag{3.9}$$

trong đó u_i vàn p_i là giá trị nốt của hàm u u và p. Phương pháp phần tử hữu hạn $P^1 - bubbble/P^1$(MINI) sử dụng hàm các hàm cở được định nghĩa như sau

$$\Phi_1(\mathbf{x}) = 1 - x - y,\ \Phi_2(\mathbf{x}) = x,\ \Phi_3(\mathbf{x}) = y,\ \Phi_b(\mathbf{x}) = 27\Phi_1(\mathbf{x})\Phi_2(\mathbf{x})\Phi_3(\mathbf{x})$$

Nếu ta đặt

$$\overline{u}_i = \begin{bmatrix} u_1^i \\ u_2^i \\ u_{i,b} \end{bmatrix}, i = 1, 2$$

$$\overline{f}_i = \begin{bmatrix} f_1^i \\ f_2^i \\ f_{i,b} \end{bmatrix}, i = 1, 2$$

Thì hệ phương trình Stoke trên một phần tử hữu hạn có thể viết được dưới dạng như sau,

$$\begin{bmatrix} \overline{A} & 0 & -\overline{B}_1^t \\ 0 & \overline{A} & -\overline{B}_2^t \\ -\overline{B}_1 & -\overline{B}_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{u}_1 \\ \overline{u}_2 \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{f}_1 \\ \overline{f}_2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

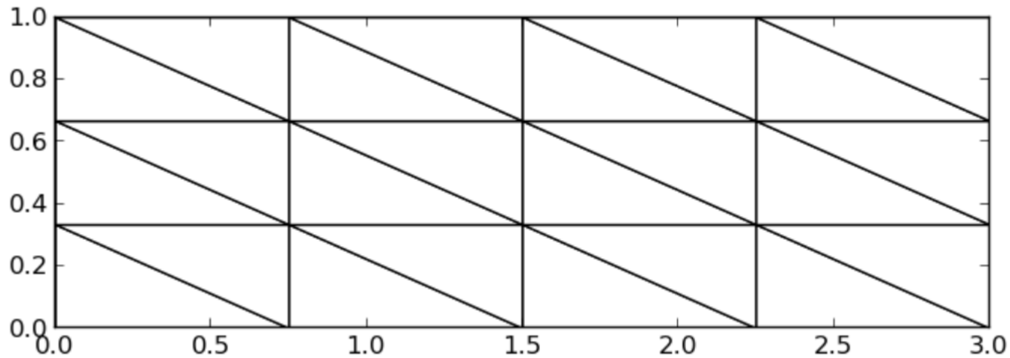
trong đó

$$\begin{aligned} \overline{A}_{ij}^T &= \int_T \nabla\Phi_i.\nabla\Phi_j dx \\ \overline{B}_{ij}^T &= \int_T \partial_1\Phi_i\Phi_j dx + \int_T \partial_2\Phi_i\Phi_j dx \\ \overline{f}_i^T &= \int_T f\Phi_i dx \end{aligned} \tag{3.11}$$

Ta cần phải ghép và tính toán các phần tử của ma trận để thu được hệ phương trình trên toàn bộ miền Ω

3.2 Các phần tử trên ma trận

Để giải quyết bài toán, ta chia miền chữ nhật như sau



Với mỗi tam giác T, gọi $\{(x_i, y_i)\}_{i=1,2,3}$ là các đỉnh và $\{\Phi_i\}_{i=1,2,3}$ là các hàm cơ sở tương ứng. Khi đó, gradient của Φ_i được tính bằng công thức sau

$$\begin{bmatrix} \nabla\Phi_1^t \\ \nabla\Phi_2^t \\ \nabla\Phi_3^t \end{bmatrix} = \frac{1}{2|T|} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & x_3 - x_2 \\ y_3 - y_1 & x_1 - x_3 \\ y_1 - y_2 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

với $|T|$ là diện tích của tam giác T, được tính bằng công thức

$$2|T| = det \begin{bmatrix} x_2 - y_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

Ta kí hiệu

$$x_{ij} = x_i - x_j,\ y_{ij} = y_i - y_j$$

và

$$x^{(T)} = \begin{bmatrix} x_{32} \\ x_{13} \\ x_{21} \end{bmatrix}$$

$$y^{(T)} = \begin{bmatrix} y_{23} \\ y_{31} \\ y_{12} \end{bmatrix}$$

Lí do đưa ra hai vector $x^{(T)}$ và $y^{(T)}$ vì nó sẽ được sử dụng để thực hiện lập trình song song trong chương trình Matlab. Khi đó các phần tử của ma trận $\overline{A}$ được tính như sau

$$\overline{A}_{ij} = \int_T \nabla\Phi_i \nabla\Phi_j dx = \frac{1}{4|T|}(y_i^{(T)} y_j^{(T)} + x_i^{(T)} x_j^{(T)}) \tag{3.14}$$

Khi đó, các phần tử không chứa bubble của ma trận A có thể tính như sau: $A = \frac{1}{4|T|}\left[y^{(T)}(y^{(T)})^t + x^{(T)}(x^{(T)})^t\right]$

Vì $\overline{A}$ là ma trận đối xứng, nên ta chỉ cần còn phải tính $\overline{bj}$ với $j = 1, 2, 3, b$.

$$\overline{A}_{bj} = \frac{9|T|}{4} \sum_{i=1}^{3} \nabla\Phi_i = 0, \ j = 1, 2, 3 \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned} \overline{A}_{bb} &= \int_T 27^2 \nabla(\Phi_1\Phi_2\Phi_3)\nabla(\Phi_1\Phi_2\Phi_3) dx \\ &= \frac{81|T|}{10}(|\nabla\Phi_1|^2 + |\nabla\Phi_1|^2 + |\nabla\Phi_1|^2 + \nabla\Phi_1\nabla\Phi_2 + \nabla\Phi_2\nabla\Phi_3 + \nabla\Phi_1\nabla\Phi_3) \\ &=: \omega_A \end{aligned} \tag{3.16}$$

Như vậy, với kết quả trên, ma trận $\overline{A}$ có dạng

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & \omega_A \end{bmatrix}$$

Bây giờ, ta đi tính các phần tử của ma trận $\overline{B}_i$. Ta có

$$-(\nabla u_h, q_h) = \overline{B} = \left[-\overline{B}_1 - \overline{B}_2\right]$$
$$= |T| \begin{bmatrix} -s\nabla\Phi_1 & -s\nabla\Phi_2 & -s\nabla\Phi_3 & t\nabla\Phi_1 \\ -s\nabla\Phi_1 & -s\nabla\Phi_2 & -s\nabla\Phi_3 & t\nabla\Phi_2 \\ -s\nabla\Phi_1 & -s\nabla\Phi_2 & -s\nabla\Phi_3 & t\nabla\Phi_3 \end{bmatrix} \tag{3.17}$$

Trong đó $s = \frac{1}{3}$ và $t = \frac{9}{20}$. Khi đó ta đặt

$$B_i = \frac{|T|}{3} \begin{bmatrix} \partial_i\Phi_1 & \partial_i\Phi_2 & \partial_i\Phi_3 \\ \partial_i\Phi_1 & \partial_i\Phi_2 & \partial_i\Phi_3 \\ \partial_i\Phi_1 & \partial_i\Phi_2 & \partial_i\Phi_3 \end{bmatrix}$$

$$B_{ib} = \frac{9|T|}{20} \begin{bmatrix} \partial_i\Phi_1 \\ \partial_i\Phi_2 \\ \partial_i\Phi_3 \end{bmatrix}$$

Khi đó, ta có

$$\overline{B}_i = |B_i - B_{ib}|$$

và

$$B_{1ij} = \frac{|T|}{3}\partial_1\Phi_i \tag{3.18}$$

Sử dụng các kết quả trên, các phần tử của ma trận B_1 và B_2 trở thành

$$B_1 = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} (y^{(T)})^t \\ (y^{(T)})^t \\ (y^{(T)})^t \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}(x^{(T)})^t\\(x^{(T)})^t\\(x^{(T)})^t\end{bmatrix}$$

$$B_{1b} = \frac{9}{40}y^{(T)},$$

Cuối cùng ta chỉ còn phải tính các phần tử của ma trận vế phải. Cụ thể, ta có

$$f_i^{(T)} = \frac{|T|}{3}f_{iT}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \tag{3.19}$$

trong đó f_{iT} là giá trị trung bình của hàm f_i trên tam giác T

$$f_{iT} = (f_i(x_1) + f_i(x_2) + f_i(x_3))$$

Chương 4

Kết quả