Sprawozdanie - laboratorium nr 2

Odwracanie macierzy, obliczanie wyznacznika i wskaźnika uwarunkowania macierzy przy użyciu rozkładu LU

Anna Szumilas 10.03.2021

1. Wstęp teoretyczny

Tematem drugich laboratoriów był rozkład LU i używanie go do obliczenia wyznacznika macierzy, odwrócenia jej i obliczenia wskaźnika uwarunkowania macierzy.

1.1. Rozkład LU

Rozkład LU macierzy współczynników układu A polega na znalezieniu macierzy L i U których iloczyn będzie równy macierzy początkowej, przy czym L to macierz trójkątna dolna z 1 na diagonali a U to macierz trójkątna górna z elementami niezerowymi na diagonali.

Macierz LU otrzymujemy np. stosując metodę eliminacji Gaussa

1.2. Obliczanie wyznacznika macierzy A

Wyznacznik macierzy A można obliczyć jako iloczyn elementów diagonalnych macierzy LU. Jako że elementy na diagonali macierzy L są jedynkami, pod uwagę bierzemy tylko elementy macierzy U.

1.3. Znajdywanie macierzy odwrotnej A^{-1}

Z definicji $A \cdot A^{-1} = I$, więc macierz odwrotną do A znajdujemy rozwiązując n układów równań $A \cdot \overrightarrow{x_i} = \overrightarrow{b_i}$, gdzie $\overrightarrow{b_i}$ to i-ta kolumna macierzy jednostkowej. Macierz wynikową A' otrzymujemy składając ze sobą wektory $\overrightarrow{x_i}$: $A^{-1} = [\overrightarrow{x_0}, \overrightarrow{x_1}, \ldots, \overrightarrow{x_{n-1}}]$

1.4. Wskaźnik uwarunkowania macierzy

Wskaźnik uwarunkowania macierzy pokazuje nam jak bardzo zaburzenia danych wejściowych mają wpływ na błąd wyniku. Gdy wskaźnik jest w pobliżu 1 to znaczy że błąd wyniku nie powinien być duży.

Wskaźnik ten obliczamy korzystając ze wzoru $cond = \parallel A \parallel_{\alpha,\beta} \cdot \parallel A^{-1} \parallel_{\alpha,\beta}$, gdzie $\parallel A \parallel_{1,\infty} = \max\limits_{1 \le i,j \le n} |a_{i,j}|$

2. Zadanie do wykonania

2.1. Opis problemu

Naszym zadaniem było stworzenie macierzy kwadratowej A o liczbie wierszy i kolumn równej 4, której lelmenty są zdefiniowane następująco:

$$a_{i,j} = \frac{1}{i + j + \delta}$$

Gdzie $\delta = 2$ dla biblioteki GSL

Na początku należało znaleźć rozkład LU macierzy A przy użyciu funkcji *gsl_linalg_LU_decomp.* Zastępuje ona macierz A macierzami L i U.

Następnie mieliśmy zapisać do pliku elementy diagonalne macierzy U oraz obliczony z nich wyznacznik, który był też wyznacznikiem dla macierzy A.

Kolejną rzeczą było znalezienie macierzy A^{-1} rozwiązując układ równań podany w podpunkcie 1.3. Do tego celu wykorzystaliśmy procedurę *gsl_linalg_LU_solve.* Jako rozwiązanie wyszły nam wektory $\overrightarrow{b_i}$ które następnie przekopiowaliśmy do macierzy A^{-1} i zapisaliśmy ją do pliku.

Następnym zadaniem było sprawdzenie czy nasza macierz A^{-1} jest prawidłowa, czyli obliczenie iloczynu $A \cdot A^{-1}$ i zapisanie go do pliku. Iloczyn macierzy liczyliśmy ze wzoru $C = A \cdot B$, gdzie $C_{i,j} = \sum_{k=0}^{n} A_{i.k} B_{k,j}$

Ostatnią rzeczą było obliczenie i zapisanie do pliku wskaźnika uwarunkowania macierzy, tak jak w podpunkcie 1.4.

2.2. Wyniki

Macierz A stworzona na podstawie wzoru miała postać:

$$\begin{pmatrix} 0.5 & 0.333333 & 0.25 & 0.2 \\ 0.333333 & 0.25 & 0.2 & 0.166667 \\ 0.25 & 0.2 & 0.166667 & 0.142857 \\ 0.2 & 0.166667 & 0.142857 & 0.125 \end{pmatrix}$$

Po dokonaniu rozkładu LU otrzymaliśmy macierze:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 & 0 \\ 0.666667 & 0.833333 & 1 & 0 \\ 0.4 & 1 & -0.857143 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.333333 & 0.25 & 0.2 \\ 0 & 0.0333333 & 0.0416667 & 0.0428571 \\ 0 & 0 & -0.00138889 & -0.00238095 \\ 0 & 0 & 0 & 0.000102041 \end{pmatrix}$$

Wyznacznik *det*(A) = 2.36206e-09 wyszedł niezerowy więc można odwrócić macierz

Wynik odwracania:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 200 & -1200 & 2100 & -1120 \\ -1200 & 8100 & -15120 & 8400 \\ 2100 & -15120 & 29400 & -16800 \\ -1120 & 8400 & -16800 & 9800 \end{pmatrix}$$

Wynik mnożenia $A \cdot A^{-1}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1.07661e-09 & -2.055e-09 & 1.15961e-09 \\ -1.01727e-05 & 1 & -1.71212e-09 & -4.06891e-05 \\ -1.09935e-10 & 7.6875e-10 & 1 & 8.28095e-10 \\ -9.62075e-11 & 6.72799e-10 & -1.28421e-09 & 1 \end{pmatrix}$$

Powyższa macierz nie jest macierzą jednostkową, ale po wykonaniu przybliżeń taka by się stała. Pokazuje to że metoda rozwiązywania macierzy jest prawidłowa ale niedokładna, prawdopodobnie przez ograniczoną precyzję liczb zapisywanych w pamięci komputera.

Współczynnik uwarunkowania wyszedł 14700, czyli bardzo duży.

3. Wnioski

Otrzymany wysoki wspólczynnik uwarunkowania macierzy może być skutkiem źle dobranych danych wejściowych, co sprawiło że wyznacznik macierzy A był bliski 0, co klasyfikuje A blisko macierzy osobliwej. Przykładem tego jest wynik mnożenia macierzy $A \cdot A^{-1}$ który nie jest macierzą jednostkową