

### 4.3 Teoría general de los modos TE

Un gran número de líneas puede conducir una onda TEM; por ejemplo, la línea bifilar, el cable coaxial y las placas paralelas. Pero otras no, como es el caso de las guías huecas rectangulares o circulares; en éstas sólo pueden propagarse ondas TE y TM (véase la sección 1.5). Además, en las líneas que originalmente llevan una onda TEM, también pueden aparecer modos de propagación TE y TM, conforme la frecuencia de operación se incrementa más y más.

Los modos TE tienen todo su campo eléctrico transversal a la dirección axial ( $E_z = 0$ ) y una componente  $H_z \neq 0$ . A continuación se deducirán las expresiones matemáticas para los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  de estos modos.

Las ecs. (4-16) y (4-17) escritas en coordenadas cartesianas dan el siguiente conjunto de ecuaciones simultáneas:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -j\omega\mu H_x \quad (4-44)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -j\omega\mu H_y \quad (4-45)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -j\omega\mu H_z \quad (4-46)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = j\omega\epsilon E_x \quad (4-47)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j\omega\epsilon E_y \quad (4-48)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j\omega\epsilon E_z \quad (4-49)$$

Si  $E_z = 0$  (modo TE) y se supone que la dependencia de los campos con relación a la dirección  $z$  está dada por la función  $e^{-\gamma z}$ , entonces las ecs. (4-44) y (4-45) se reducen a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial z} &= -\gamma E_y = j\omega\mu H_x \\ \Rightarrow E_y &= -\frac{j\omega\mu}{\gamma} H_x \end{aligned} \quad (4-50)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial z} &= -\gamma E_x = -j\omega\mu H_y \\ \Rightarrow E_x &= \frac{j\omega\mu}{\gamma} H_y \end{aligned} \quad (4-51)$$

Siguiendo el mismo criterio anterior para obtener las derivadas parciales con relación a  $z$ , las ecs. (4-47) y (4-48) quedan como:

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} + \gamma H_y = j\omega\epsilon E_x \quad (4-52)$$

$$-\gamma H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j\omega\epsilon E_y \quad (4-53)$$

y si en estas dos últimas se sustituyen (4-51) y (4-50), respectivamente, se obtiene:

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} + \gamma H_y = (j\omega\epsilon) \left( \frac{j\omega\mu}{\gamma} \right) H_y$$

$$\Rightarrow H_y = - \frac{\gamma}{\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon} \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad (4-54)$$

$$-\gamma H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} = (j\omega\epsilon) \left( -\frac{j\omega\mu}{\gamma} \right) H_x$$

$$\Rightarrow H_x = - \frac{\gamma}{\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon} \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad (4-55)$$

Las ecs. (4-54) y (4-55) satisfacen la ec. (4-49), ya que  $E_z = 0$  para las ondas TE. La última ecuación del sistema simultáneo original que falta por emplearse es la (4-46). Al sustituir en ésta las ecs. (4-50), (4-51), (4-54) y (4-55), se obtiene finalmente la ecuación diferencial que hay que resolver:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ -\frac{j\omega\mu}{\gamma} H_x \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{j\omega\mu}{\gamma} H_y \right] = -j\omega\mu H_z$$

$$\frac{j\omega\mu}{\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon} \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{j\omega\mu}{\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon} \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} = -j\omega\mu H_z$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + (\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon) H_z = 0 \quad (4-56)$$

La ec. (4-56) sólo incluye a la variable  $H_z$ . Nótese que ésta es una ecuación general para cualquier sistema con modos TE. Si, por ejemplo, se desea obtener la solución para una guía de ondas rectangular o para dos placas paralelas, la ecuación tendrá que resolverse aplicando las condiciones de frontera pertinentes en cada caso. Encontrada la solución, ésta se sustituye en las ecs. (4-54) y (4-55) para encontrar las otras dos componentes  $H_x$  y  $H_y$ , mismas que a la vez permiten encontrar  $E_x$  y  $E_y$  por medio de las ecs. (4-50) y (4-51).

## 4.4 Teoría general de los modos TM

Los modos TM tienen todo su campo magnético transversal a la dirección axial ( $H_z = 0$ ) y una componente  $E_z \neq 0$ . La metodología para encontrar las expresiones matemáticas de las componentes de los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  de estos modos es análoga a la que se empleó en la sección anterior para los modos TE.

Partiendo de las ecuaciones fundamentales (4-44) a (4-49), con  $H_z = 0$ , se obtiene una ecuación similar a la ec. (4-56), sólo que ahora la variable a encontrar es  $E_z$ :

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + (\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon) E_z = 0 \quad (4-57)$$

y las demás componentes de los campos se determinan con las expresiones siguientes:

$$E_x = - \frac{\gamma}{\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon} \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad (4-58)$$

$$E_y = - \frac{\gamma}{\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon} \frac{\partial E_z}{\partial y} \quad (4-59)$$

$$H_x = - \frac{j\omega \epsilon}{\gamma} E_y \quad (4-60)$$

$$H_y = \frac{j\omega \epsilon}{\gamma} E_x \quad (4-61)$$

## 4.5 La guía de dos placas paralelas

### 4.5.1 Generalidades

El análisis de un sistema de transmisión integrado por dos placas paralelas es el más sencillo dentro del grupo de las guías de ondas y, además, ofrece una buena visualización introductoria sobre los efectos de propagación dentro de una guía.

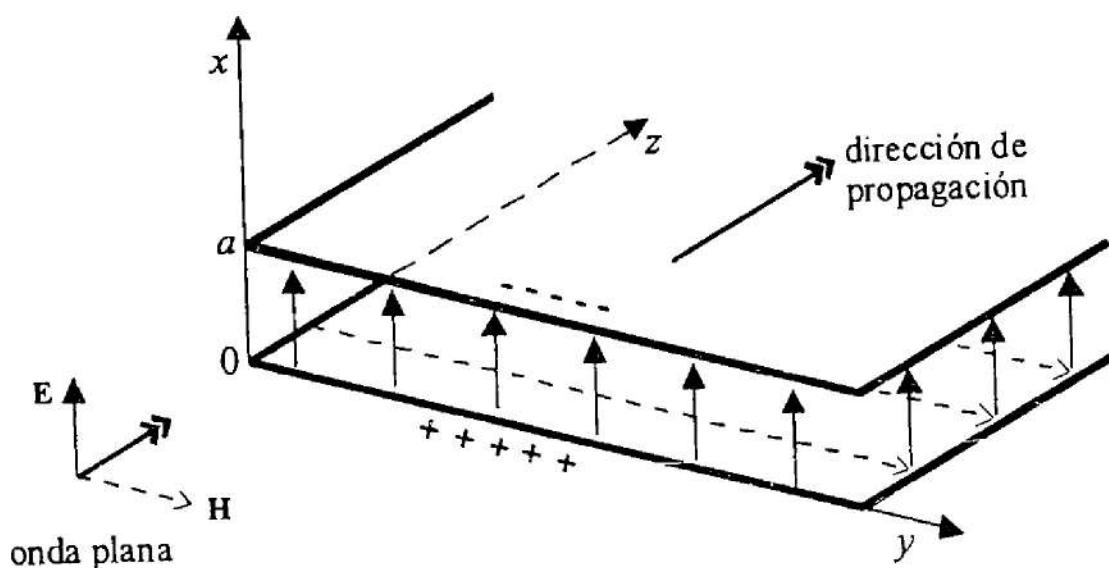


Fig. 4-3 Sistema de dos placas paralelas que “atraza” una porción de una onda plana incidente.

Considérense inicialmente una onda plana que viaja en la dirección  $z$  y dos placas paralelas perfectamente conductoras orientadas como se muestra en la Fig. 4-3.

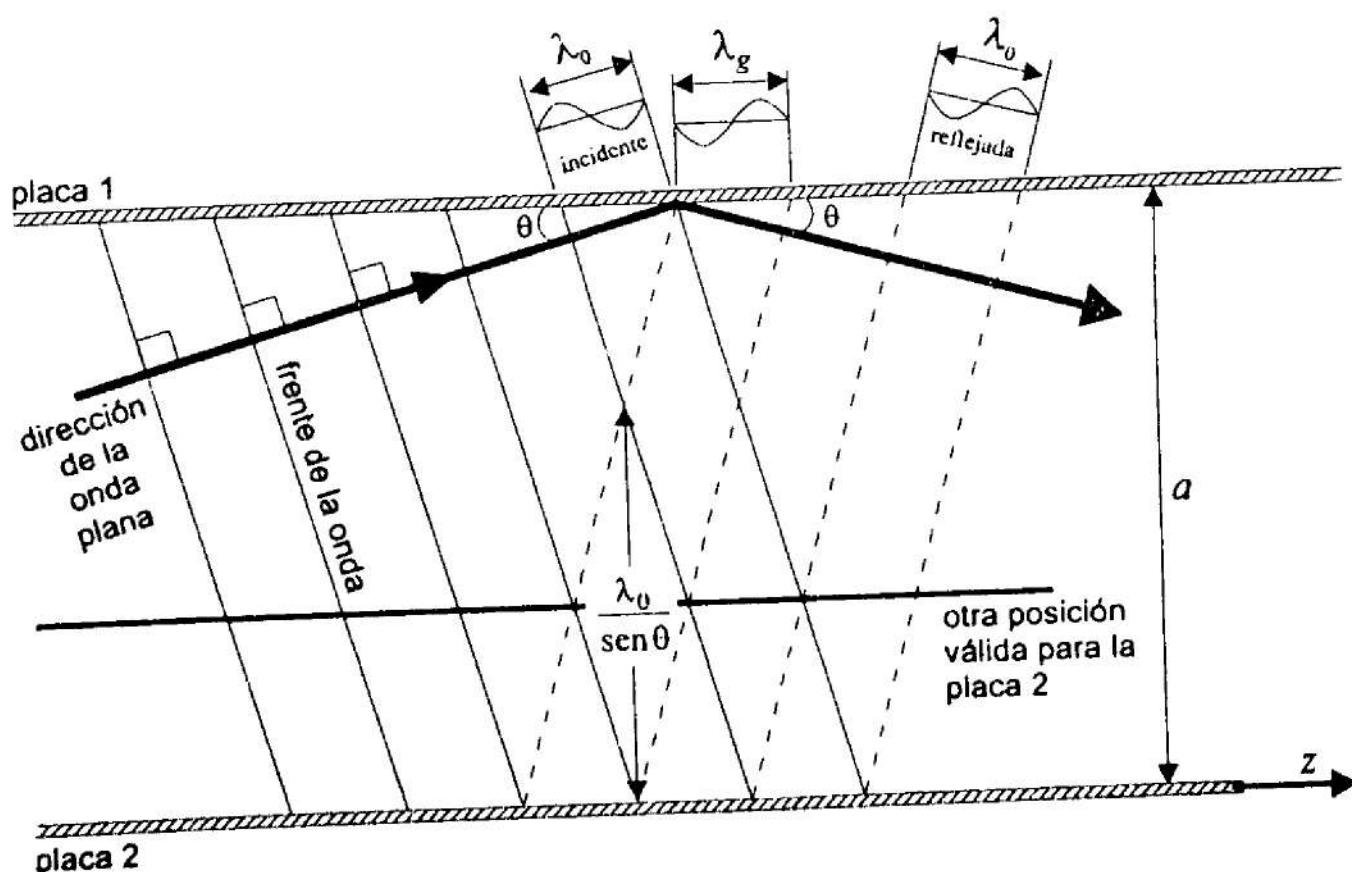
Como las dos placas son perpendiculares al campo eléctrico incidente de la onda plana, no afectan en absoluto su distribución, ya que debe cumplirse la condición de frontera de que el campo eléctrico tangencial en las superficies conductoras sea igual a cero. Es decir, el campo eléctrico sólo puede ser normal a las placas, dirección que coincide con el campo eléctrico de la onda plana incidente. Por su parte, el campo magnético dentro de las dos placas forma noventa grados con el campo eléctrico y con la dirección  $z$ , igual que en el caso de la onda plana.

Dicho de otra forma, la onda que se propaga entre las dos placas también es TEM, y la distribución de los campos es igual a la de la onda plana original, como si las placas no existieran. Un porción de la onda plana es “atraída” en el interior de las placas, y se sigue propagando a lo largo de la dirección  $z$  con las mismas características que las de una onda plana (o al menos, muy aproximadamente, pues en la práctica los conductores no son perfectos). Por lo tanto, las dos placas paralelas forman una *guía de ondas*.

El modo TEM de propagación dentro de las dos placas es el modo fundamental de transmisión de la guía y existe para toda frecuencia de operación.

Sin embargo, conforme la frecuencia de trabajo se incrementa más y más, dejando fija la separación entre las placas, irán apareciendo otras configuraciones o distribuciones de los campos dentro de la guía, llamadas modos TE y TM. Estos modos tendrán longitudes de onda y constantes de propagación diferentes a las de una onda plana (correspondiente al modo fundamental TEM).

Los modos TE y TM tienen componentes de campo en la dirección axial (eje z). Para estudiar sus propiedades, conviene considerar una onda plana que se refleja oblicuamente en un conductor perfecto plano, como se muestra en la Fig. 4-4 (placa 1). Las líneas sólidas paralelas representan el frente de la onda incidente, y en todos los puntos de cada línea el campo tiene la misma fase. Las líneas punteadas son el frente de la onda reflejada y también son líneas de igual fase en todos sus puntos. La longitud de onda característica  $\lambda_0$  es igual para las dos ondas, y el ángulo de incidencia es igual al de reflexión. Suponiendo que originalmente sólo existiera la placa 1, la placa 2 se puede colocar paralela a la placa 1 en la posición indicada en la figura



**Fig. 4-4** Propagación de una onda entre dos placas paralelas. El rayo que indica la dirección de la onda es perpendicular a las líneas de igual fase.

sin que la distribución de los campos se modifique, siempre y cuando la placa 2 pase por los puntos de cruce de las líneas de igual fase de las dos ondas (cruce de las líneas sólidas con las líneas punteadas). Así, por ejemplo, la línea fina horizontal intermedia también podría ser otra posición válida para la placa 2 y los campos seguirían sin ser perturbados. Cuando el rayo que muestra la dirección de la onda incida sobre la placa 2, se repetirá el mismo fenómeno de reflexión, y así sucesivamente, rebotando de una placa a la otra, hasta llegar al final de la guía.

A partir de la geometría mostrada en la Fig. 4-4, se deduce que la separación entre las dos placas es igual a:

$$a = \frac{n}{2} \left( \frac{\lambda_0}{\operatorname{sen} \theta} \right) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (4-62)$$

Es obvio que, a pesar de las reflexiones oblicuas sucesivas, al final de cuentas la onda (y su potencia) se mueve hacia la derecha, en la dirección  $z$ . Por tal razón, se define una nueva longitud de onda  $\lambda_g$ , medida a lo largo de las placas de la guía, tal como se muestra en la misma figura. Esta longitud  $\lambda_g$  es la distancia entre puntos de la onda con igual fase en la dirección efectiva de propagación ( $z$ ); se denomina *longitud de onda en la guía* y es mayor que la longitud de onda característica  $\lambda_0$  de la onda plana. A partir de la Fig. 4-4, se deduce entonces que:

$$\lambda_g = \frac{\lambda_0}{\cos \theta} \quad (4-63)$$

Como el  $\operatorname{sen} \theta$  debe ser menor o igual que la unidad, de la ec. (4-62) se tiene que

$$a \geq \frac{n}{2} \lambda_0$$

y la separación mínima requerida para que haya propagación está dada por el límite de esta expresión, es decir:

$$a = \frac{n}{2} \lambda_0 \quad \begin{matrix} \text{Supuesto} \\ \text{que} \\ \text{no} \\ \text{se} \\ \text{refleja} \end{matrix} \quad (4-64)$$

En la práctica, la separación  $a$  entre las dos placas es fija y lo que se puede cambiar es la frecuencia. Por lo tanto, es preferible definir una longitud de onda de corte  $\lambda_c$  que indique la misma condición límite, a partir de la ec. (4-64), como:

$$\lambda_c = \frac{2a}{n} \quad (4-65)$$

La frecuencia correspondiente para esta longitud de onda de corte será  $f_c$ , igual a:

$$f_c = \frac{c}{\lambda_c} = \frac{cn}{2a} \quad * \quad (4-66)$$

Ahora bien, si se combinan las ecs. (4-62) y (4-63) para eliminar el ángulo  $\theta$ , se llega a que:

$$\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_g}\right)^2 = 1 - \left(\frac{n\lambda_0}{2a}\right)^2$$

y sustituyendo en esta expresión la ec. (4-65), se concluye que:

$$\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_g}\right)^2 = 1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c}\right)^2$$

Finalmente, dividiendo ambos miembros de esta ecuación entre  $\lambda_0^2$ :

$$\frac{1}{\lambda_g^2} = \frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{\lambda_c^2} \quad (4-67)$$

La longitud de onda en la guía,  $\lambda_g$ , también se puede calcular en términos de la frecuencia de trabajo y la frecuencia de corte:

$$\lambda_g = \frac{c}{\sqrt{f^2 - f_c^2}} \quad (4-68)$$

\* Suponiendo que entre las dos placas hay aire.

Al observar la ec. (4-66), se ve que para cada valor de  $n$  hay una frecuencia de corte diferente, y de la ec. (4-68) es claro que para cada  $n$  también habrá un valor distinto de la longitud de onda en la guía,  $\lambda_g$ . En cada caso, el valor de  $n$  será precisamente el orden del modo superior de propagación que existe a partir de la  $f_c$  que le corresponde. De esta manera, irán apareciendo los modos  $TE_1$  y  $TM_1$ ,  $TE_2$  y  $TM_2$ , etc., conforme aumente la frecuencia de operación.

**Ejercicio 4-5** Una onda electromagnética se propaga entre dos placas paralelas separadas 5 cm entre sí. La frecuencia de la onda es 8 GHz. ¿Cuántos modos distintos hay en la guía? ¿Cuánto mide la longitud de onda en la guía para cada modo?

### Solución

La onda TEM existe para toda frecuencia. Si la frecuencia de corte de algún modo superior es menor o igual que 8 GHz (la frecuencia de operación), entonces ese modo también existe. De la ec. (4-66):

$$f_{c_1} = \frac{(3 \times 10^8)(1)}{(2)(0.05)} = 3 \text{ GHz}$$

$$f_{c_2} = \frac{(3 \times 10^8)(2)}{(2)(0.05)} = 6 \text{ GHz}$$

$$f_{c_3} = \frac{(3 \times 10^8)(3)}{(2)(0.05)} = 9 \text{ GHz}$$

Se concluye que sólo existen los modos TEM,  $TE_1$ ,  $TM_1$ ,  $TE_2$  y  $TM_2$  (Fig. 4-5), simultáneamente. Cinco modos en total.

De la ec. (4-68):

$$\lambda_g = \frac{c}{\sqrt{f^2 - f_c^2}}$$

Por lo tanto:

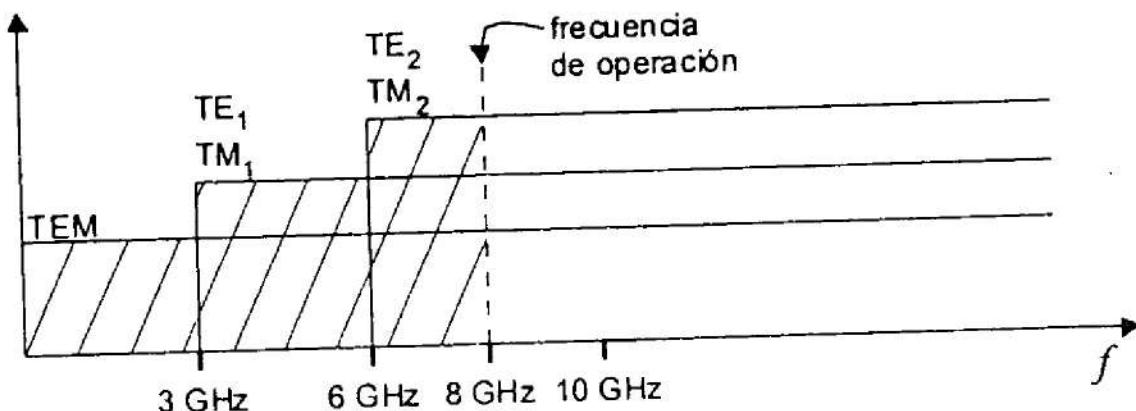


Fig. 4-5 Modos de propagación para las dos placas paralelas del Ejercicio 4-5.

$$\lambda_{g_1} = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{(8 \times 10^9)^2 - (3 \times 10^9)^2}} = 4.045 \text{ cm}$$

$$\lambda_{g_2} = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{(8 \times 10^9)^2 - (6 \times 10^9)^2}} = 5.669 \text{ cm}$$

En el caso de la onda TEM,  $\lambda_g = \lambda_0$ :

$$\lambda_0 = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{8 \times 10^9} = 3.75 \text{ cm}$$

A continuación se empleará un mayor rigor matemático para deducir las expresiones de las componentes de los campos **E** y **H**, y se demostrará que las frecuencias de corte para los modos TE<sub>n</sub> y TM<sub>n</sub> son iguales.

#### 4.5.2 Los modos TE

Si las placas paralelas de la Fig. 4-3 son muy anchas, puede considerarse que  $H_z$  es independiente de la coordenada  $y$ . Entonces, la ec. (4-56) de la teoría general de los modos TE se reduce a:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + (\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon) H_z = 0$$

cuya solución es de la forma ~~dimórfico~~:

$$H_z = (A \cos gx + B \operatorname{sen} gx) e^{-\gamma z} \quad (4-69)$$

con

$$g^2 = \gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon \quad (4-70)$$

Como se debe de cumplir la condición de frontera  $H_{\text{normal}} = H_x = 0$  en ambas placas, se deduce de la ec. (4-55) que también debe de cumplirse  $\frac{\partial H_z}{\partial x} = 0$ , en  $x = 0$  y en  $x = a$ . La condición para  $x = 0$ , al derivar la ec. (4-57) con relación a  $x$ , implica que  $B = 0$ , por lo que la solución final es:

$$H_z = (A \cos gx) e^{-\gamma z} \quad (4-71)$$

Derivando esta solución con respecto a  $x$ , para poder aplicar la segunda condición de frontera en  $x = a$ , se tiene:

$$\left. \frac{\partial H_z}{\partial x} \right|_{x=a} = (-A g \operatorname{sen} gx) e^{-\gamma z} \Big|_{x=a} = 0$$

El coeficiente  $A$  no puede valer cero, porque entonces  $H_z = 0$  en la ec. (4-71) y no habría ninguna solución. Por lo tanto, debe cumplirse que:

$$\operatorname{sen} ga = 0$$

o bien:

$$ga = n\pi \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (4-72)$$

Sustituyendo la ec. (4-72) en la ec. (4-70):

$$\frac{n^2 \pi^2}{a^2} - \omega^2 \mu \epsilon = \gamma^2 \quad (4-73)$$

La ec. (4-73) indica que  $\gamma$  solamente puede tomar valores reales o imaginarios puros, y que tiene un valor diferente para cada modo  $n$  a una frecuencia angular determinada,  $\omega$ . Si  $\gamma$  es real, esto corresponde a una atenuación exponencial en la ec. (4-71) y la onda prácticamente no avanza. En cambio, si  $\gamma$  es imaginaria pura, se tiene una onda progresiva sin atenuación, con un factor de desfasamiento  $\exp(-j \beta_n z)$ . Esta última es la

situación de interés práctico. El punto de transición entre un valor real y uno imaginario para  $\gamma$  se obtiene de la ec. (4-73), igualándola a cero:

$$\frac{n^2 \pi^2}{a^2} = \omega^2 \mu \epsilon$$

$$\Rightarrow \omega_c = \frac{n \pi}{a} \left( \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \right)$$

y para el vacío o el aire, esta fórmula se reduce a:

$$2\pi f_c = \frac{n \pi}{a} (c)$$

de donde

$$f_c = \frac{cn}{2a} \quad (4-74)$$

expresión que es idéntica a la ec. (4-66).

Si la frecuencia de operación es mayor que  $f_c$ ,  $\gamma$  es imaginaria y hay propagación del modo  $n$  correspondiente. Si la frecuencia es menor que  $f_c$ ,  $\gamma$  será real y no habrá propagación. Por lo tanto,  $f_{c_n}$  es la *frecuencia de corte* para que pueda comenzar a existir el modo  $n$ .

Conocidos  $H_z$  y  $\gamma$ , a través de las ecs. (4-71) y (4-73), las demás componentes de los campos para cada modo  $n$  se pueden obtener tal como se explicó en la sección 4.3:

$$H_z = (A \cos gx) e^{-\gamma_n z} \quad (4-71)$$

o sea:

$$H_z = A \cos \left( \frac{n \pi}{a} x \right) e^{-\gamma_n z} \quad (4-75)$$

en donde

$$\gamma_n = \sqrt{\left( \frac{n \pi}{a} \right)^2 - \omega^2 \mu \epsilon} \quad (4-76)$$

y la componente en  $x$  del campo magnético es

$$H_x = - \frac{\gamma_n}{\gamma_n^2 + \omega^2 \mu \epsilon} \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad = (4-55)$$

$$H_x = A \left( \frac{n\pi}{a} \right) \left( \frac{\gamma_n a^2}{n^2 \pi^2} \right) \sin \left( \frac{n\pi}{a} x \right) e^{-\gamma_n z}$$

$$H_x = A \left( \frac{\gamma_n a}{n\pi} \right) \sin \left( \frac{n\pi}{a} x \right) e^{-\gamma_n z} \quad (4-77)$$

Como  $H_z$  no depende de  $y$ , de las ecs. (4-54) y (4-51) se concluye que:

$$H_y = 0 \quad \text{y} \quad E_x = 0 \quad (4-78)$$

Finalmente, de la ec. (4-50):

$$E_y = - \frac{j\omega\mu}{\gamma_n} H_x$$

$$E_y = - A \left( \frac{j\omega\mu a}{n\pi} \right) \sin \left( \frac{n\pi}{a} x \right) e^{-\gamma_n z} \quad (4-79)$$

**Ejercicio 4-6** ¿Cuál es la separación máxima permisible entre dos placas paralelas para que de los modos TE sólo pueda propagarse el primero, a una frecuencia de 10 GHz? Suponga que entre las dos placas hay aire.

*Solución*

La frecuencia de corte del segundo modo TE sería, de la ec. (4-74):

$$f_{c_2} = \frac{cn}{2a} \Big|_{n=2} = \frac{3 \times 10^8}{a} > 10 \text{ GHz}$$

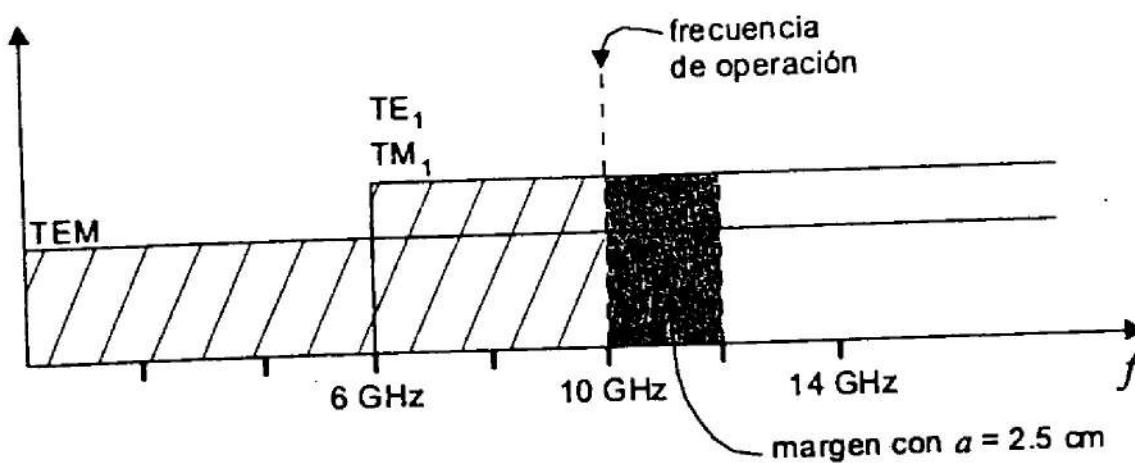
$$\Rightarrow a < \frac{3 \times 10^8}{10^{10}} = 3 \text{ cm} \quad \begin{array}{l} \text{(separación máxima)} \\ \text{(permisible pedida)} \end{array}$$

Si  $a = 3$  cm., además de los modos TEM,  $TE_1$  y  $TM_1$ , aparecerían los modos adicionales  $TE_2$  y  $TM_2$ , ya que la frecuencia de corte del modo 2 sería igual a 10 GHz, o sea la frecuencia de operación. La frecuencia de corte correspondiente para el modo 1 sería 5 GHz. La condición buscada es entonces  $a < 3$  cm. Si se eligiese por ejemplo  $a = 2.5$  cm., se tendría:

$$f_{c_1} = \frac{cn}{2a} = \frac{3 \times 10^8}{5 \times 10^{-2}} = 6 \text{ GHz}$$

$$f_{c_2} = (f_{c_1})(2) = 12 \text{ GHz}$$

Con esto, habría un margen seguro entre la frecuencia de operación y la de corte del segundo modo:



**Ejercicio 4-7** Dibuje la distribución aproximada de las componentes de los campos  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{H}$  entre dos placas paralelas, en un cierto instante, para el modo de propagación  $\text{TE}_1^*$ .

### Solución

De las ecs. (4-75), (4-77) y (4-79), las funciones que hay que graficar, para  $n = 1$ , son:

$$H_x = A \left( \frac{\gamma_1 a}{\pi} \right) \sin \left( \frac{\pi}{a} x \right) e^{-\gamma_1 z} \quad (\gamma_1 = j\beta_1)$$

$$H_z = A \cos \left( \frac{\pi}{a} x \right) e^{-\gamma_1 z}$$

$$E_y = -A \left( \frac{j\omega\mu a}{\pi} \right) \sin \left( \frac{\pi}{a} x \right) e^{-\gamma_1 z}$$

Las demás componentes son iguales a cero. En la Fig. 4-6 se muestra la distribución de las intensidades y direcciones de los campos.

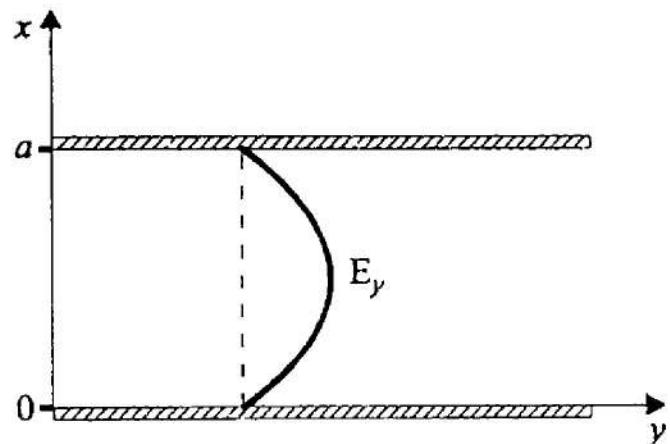
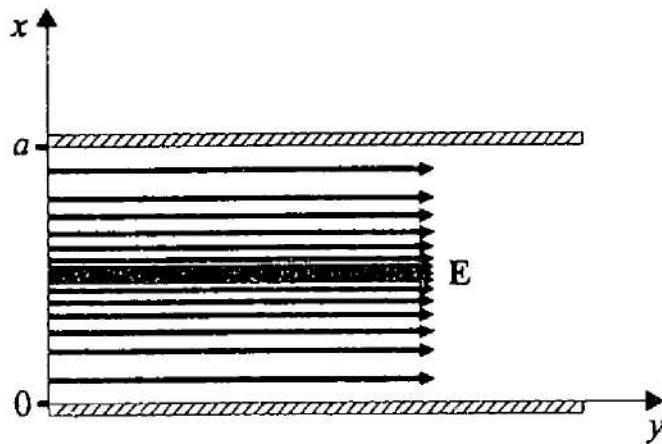
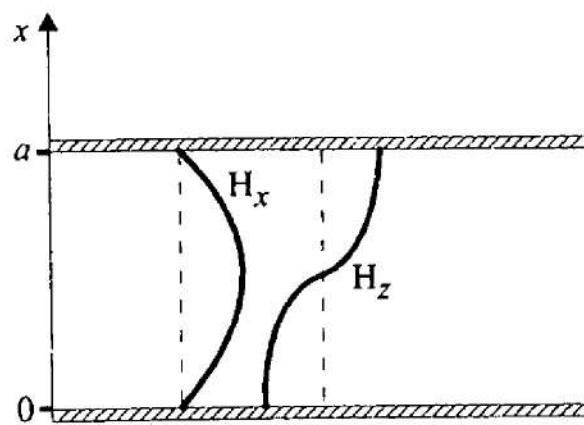
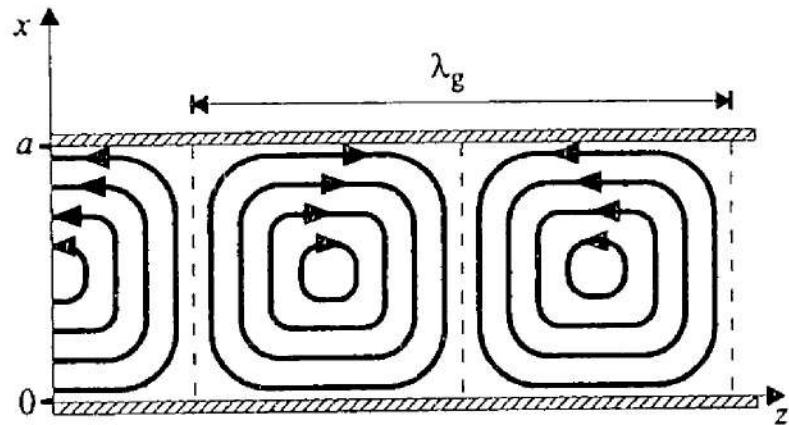
### 4.5.3 Los modos TM

En este caso,  $H_z = 0$  y  $E_z \neq 0$ . La teoría general correspondiente ya ha sido presentada en la sección 4.4, y para las dos placas paralelas la ecuación a resolver es:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + (\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon) E_z = 0$$

cuya solución es de la forma

\* Conviene aclarar que algunos autores prefieren utilizar la nomenclatura  $\text{TE}_{10}$ ,  $\text{TE}_{20}$ , etc., en lugar de  $\text{TE}_1$ ,  $\text{TE}_2$ , etc., para las placas paralelas. El segundo subíndice siempre vale cero y se puede omitir, como en este texto. Sin embargo, para identificar a los modos de propagación en otros tipos de guías sí se emplea el segundo subíndice; por ejemplo, en las guías rectangulares y circulares, pues ya tiene un verdadero significado, tal como se verá en las siguientes secciones 4.8 y 4.9. El mismo comentario aplica para los modos TM.

Intensidad de  $E_y$  en un instante dado.Líneas de intensidad, indicando la dirección del campo total  $\mathbf{E} = E_y \mathbf{a}_y$ .Intensidades de  $H_x$  y  $H_z$  en un instante dado.Líneas de intensidad, indicando la dirección del campo total  $\mathbf{H} = H_x \mathbf{a}_x + H_z \mathbf{a}_z$ .Fig. 4-6 Intensidad y distribución de los campos entre dos placas paralelas para el modo TE<sub>11</sub>.

$$E_z = (A \cos gx + B \sin gx) e^{-\gamma z}$$

con

$$g^2 = \gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon \quad = (4-70)$$

Para  $x = 0$ , la condición de frontera es que  $E$  tangencial valga cero, o sea que  $E_z = 0$ , de donde se concluye que el coeficiente  $A$  de la solución general vale cero, reduciéndose ésta a:

$$E_z = (B \sin gx) e^{-\gamma z} \quad (4-80)$$

En la pared interior de la otra placa, donde  $x = a$ ,  $E_z$  también debe valer cero, por lo que, para que la ec. (4-80) se satisfaga, debe cumplirse que:

$$\operatorname{sen} ga = 0$$

o bien:

$$g = \frac{n\pi}{a} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad = (4-72)$$

De las ecs. (4-70) y (4-72), que son idénticas para los modos TE y TM, se demuestra que la frecuencia de corte y la constante de propagación tienen el mismo valor para ambos modos, para cada  $n$  en particular:

$$f_c = \frac{cn}{2a} \quad = (4-74)$$

$$\gamma_n = j\beta_n = \sqrt{\frac{n^2\pi^2}{a^2} - \omega^2\mu\varepsilon} \quad = (4-73)$$

A partir de la ec. (4-80) y la ec. (4-58) se deduce que

$$E_x = \left( -\frac{\gamma B}{\sqrt{\gamma^2 + \omega^2\mu\varepsilon}} \right) \cos gx e^{-\gamma z} \quad = (4-81)$$

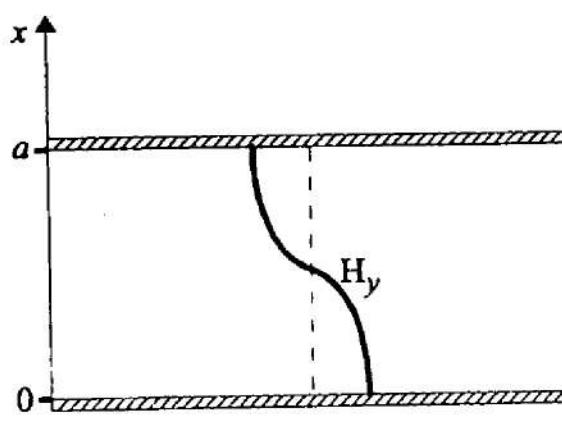
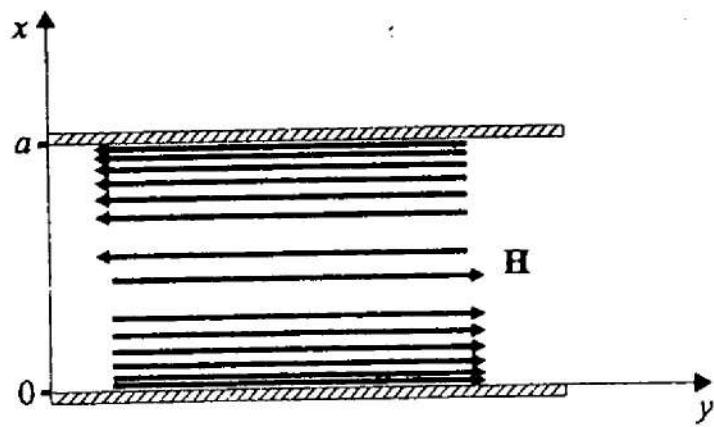
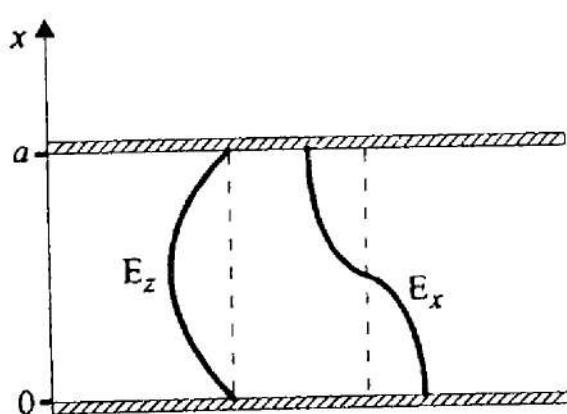
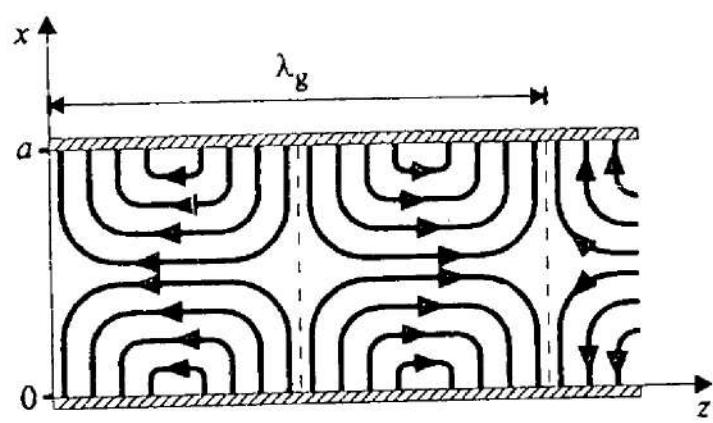
Asimismo, de las ecs. (4-59) y (4-60) se obtiene que

$$E_y = 0 \quad y \quad H_x = 0 \quad = (4-82)$$

y finalmente, combinando las ecs. (4-61) y (4-81):

$$H_y = \left( -\frac{j\omega\varepsilon B}{\sqrt{\gamma^2 + \omega^2\mu\varepsilon}} \right) \cos gx e^{-\gamma z} \quad = (4-83)$$

La distribución de los campos para el primer modo  $TM_1$  entre las dos placas se muestra en la Fig 4-7, para un cierto instante (compárese con los resultados del ejercicio 4-7 para el modo  $TE_1$ , Fig. 4-6).

Intensidad de  $H_y$  en un instante dado.Líneas de fuerza del campo total  $\mathbf{H} = H_y \mathbf{a}_y$ .Intensidades de  $E_x$  y  $E_z$  en un instante dado.Líneas de intensidad del campo total  $\mathbf{E} = E_x \mathbf{a}_x + E_z \mathbf{a}_z$ .Fig. 4-7 Intensidad y distribución de los campos entre dos placas paralelas para el modo  $TM_1$ .

Nótese que para los modos TM,  $n$  sí puede valer cero (ec. 4-72), pues aunque  $E_z$  se vuelve idéntica a cero, cos  $gx = 1$  y no todos los campos desaparecen. De hecho, sólo tienen valor las siguientes componentes, a partir de las ecs. (4-81) y (4-83):

$$E_x = C_1 e^{-\gamma z}$$

$$H_y = C_2 e^{-\gamma z}$$

que no es más que la onda transversal electromagnética TEM, o sea, el modo fundamental de transmisión de la guía. En realidad, el modo ya no es TM, puesto que  $E_z = 0$ .

**Ejercicio 4-8** Retomando el ejercicio 4-6, suponga ahora que entre las dos placas hay un material con  $\epsilon_r = 4$ . ¿Cuál sería ahora la separación que puede haber entre ellas para que solamente se propaguen los primeros modos TEM, TE<sub>1</sub> y TM<sub>1</sub> en un rango de frecuencias con  $f < 10$  GHz?

### Solución

A 10 GHz ya pueden existir los modos TE<sub>2</sub> y TM<sub>2</sub>. Por lo tanto:

#### 1<sup>a</sup> parte

$$f_c = \frac{c}{2\sqrt{\epsilon_r}} \frac{n}{a}$$

Para  $n = 2$ :

$$10 \times 10^9 = \frac{3 \times 10^8}{2 \times 2} \frac{2}{a}$$

$$\Rightarrow a = 0.015 \text{ m}$$

(valor límite que no debe ser alcanzado)

#### 2<sup>a</sup> parte

El modo TEM existe desde  $f = 0$ .

Para los modos TE<sub>1</sub> y TM<sub>1</sub> debe cumplirse:

$$f_{c_1} < 10 \text{ GHz}$$

Es decir  $\frac{c}{4a} < 10^{10} \Rightarrow a > 0.0075 \text{ m}$

Por lo tanto, el rango permisible para  $a$  es:

$$0.0075 \text{ m} < a < 0.015 \text{ m}$$

## 4.6 Velocidades de los modos TE y TM. Teoría general

Cuando se estudió la propagación de una onda plana en un medio sin pérdidas en la sección 4.2.1, se definió su velocidad de fase como

$$\nu = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\omega\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad = (4-31)$$

Claramente,  $\beta$  es una función lineal de  $\omega$ , lo cual convierte a  $\nu$  en una constante independiente de la frecuencia. Sin embargo, hay casos, tales como la propagación en un dieléctrico con pérdidas muy altas o dentro de una guía de ondas, en que  $\beta$  no es una función lineal de  $\omega$ . Esto quiere decir que ondas de diferente frecuencia se propagan con distintas velocidades de fase. Toda señal que contiene información no es una onda senoidal pura a una sola frecuencia, sino la superposición de muchas componentes armónicas dentro de la banda de frecuencias de la señal; estas componentes viajan a lo largo de una guía con distintas velocidades de fase, y esto causa distorsión en la forma de la señal recibida. En términos electromagnéticos, se dice que la onda "se dispersa", y por ello el fenómeno descrito recibe el nombre de *dispersión*. Acordemente, una guía de ondas es un medio de propagación dispersivo.

Por otra parte, en la sección 4.5 se demostró geométricamente para las placas paralelas que la longitud de onda en la guía es mayor que la longitud de onda característica:

$$\lambda_g > \lambda_0$$

Como ambas longitudes de onda representan la distancia entre dos puntos consecutivos de la onda con la misma fase, en un caso medida a lo largo de la guía, y en el otro a lo largo de la dirección de la onda plana (véase la Fig. 4-4), resulta que los puntos a lo largo de la guía se deben mover más rápido, pues tienen que recorrer una distancia mayor en el mismo tiempo que los puntos sobre la onda plana. Por tanto, la velocidad a lo largo de la guía es mayor que la velocidad de fase de la onda plana. Esto parece contradecir la teoría de la relatividad, pues si la onda plana viaja a la velocidad de la luz, ¿cómo es posible que exista una velocidad mayor a lo largo de la guía? La realidad es que no hay ninguna contradicción, ya que esta velocidad mayor

sólo es aparente. La potencia de la señal viaja en la misma dirección que la onda plana, a la misma velocidad de fase, que es inferior o igual a la velocidad de la luz según el tipo de material dieléctrico. De la Fig. 4-4 se deduce que:

$$\nu_p = \frac{c\lambda_g}{\lambda_0} \quad (4-84)$$

en donde  $\nu_p$  es la velocidad de fase **a lo largo de la guía**, a diferencia de  $\nu$  que representa la velocidad de fase **en la dirección de la onda plana**. Es claro que  $\nu_p > \nu$ .

Sin embargo, aún queda otra velocidad por definir, que es la más importante de todas, pues es la velocidad a la que realmente se mueve la información de una señal dentro de la guía. Esta nueva velocidad se denomina *velocidad de grupo* y se representa como  $v_g$ .

El significado de la velocidad de grupo se explicará retomando el asunto de la dispersión. Considérese para ello una señal modulada muy sencilla, por ejemplo en AM, en donde la frecuencia moduladora es muy pequeña comparada con la frecuencia portadora. Si la frecuencia de la portadora se designa como  $\omega$  y la de la señal moduladora como  $\delta\omega$ , resulta que la onda modulada es:

$$\begin{aligned} E = & E_0 \cos(\omega t - \beta z) \\ & + \frac{1}{2} E_0 m \cos(\omega t + \delta\omega t - \beta z - \delta\beta z) \\ & + \frac{1}{2} E_0 m \cos(\omega t - \delta\omega t - \beta z + \delta\beta z) \end{aligned}$$

en donde el primer término es la onda portadora y los otros dos son las bandas laterales. La ecuación anterior puede reescribirse como:

$$E = E_0 [1 + m \cos(\delta\omega t - \delta\beta z)] \cos(\omega t - \beta z)$$

Se observa que la portadora (fuera del paréntesis rectangular) se sigue propagando a la misma velocidad de fase dada por la ec. (4-31), pero la onda moduladora viaja a otra velocidad de fase, que puede obtenerse del argumento de la función coseno dentro del paréntesis rectangular como:

$$v_g = \frac{\delta \omega}{\delta \beta} = \frac{1}{\frac{\delta \beta}{\delta \omega}}$$

y en el límite  $v_g = \frac{1}{\partial \beta / \partial \omega}$ , ya que  $\beta$  es función de  $\omega$ . Esta es la velocidad de grupo, y en términos de la longitud de onda a lo largo de la guía,  $\lambda_g$ , se calcula como:

$$v_g = \frac{1}{\partial \beta / \partial \omega} = \left( \frac{\lambda_0}{\lambda_g} \right) c \quad (4-85)$$

Comparando las ecs. (4-84) y (4-85), se tiene que en general:

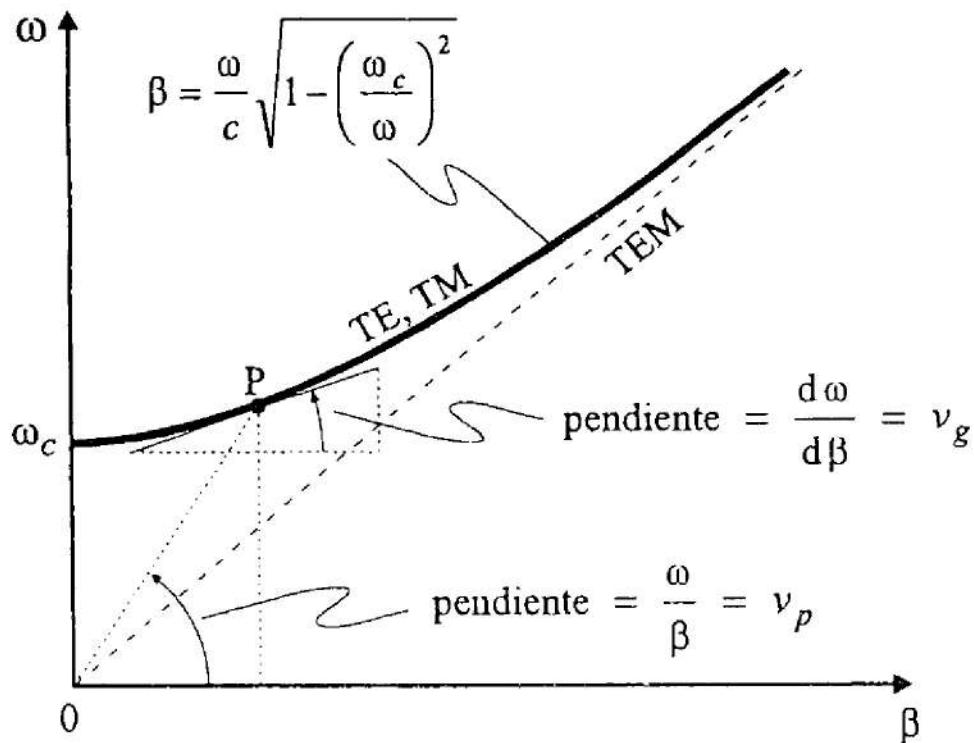
$$v_p > c > v_g$$

$$v_p v_g = c^2 \quad (4-86)$$

La velocidad de grupo es la velocidad a la que se mueve un "grupo" de frecuencias, es decir, el paquete de la información, siempre y cuando la señal sea de banda angosta. Para señales con espectros de frecuencia muy anchos es necesario emplear otro tipo de análisis, que queda fuera de los objetivos de este texto.

Al graficar  $\omega$  contra  $\beta$ , se obtiene una gráfica llamada "diagrama de dispersión". Este diagrama (Fig. 4-8) es muy útil, pues la pendiente de una línea recta dibujada desde el origen hasta un punto P sobre la gráfica da el valor de la velocidad de fase, y la pendiente local de una línea tangente a la gráfica en ese mismo punto P (derivada de  $\omega$  con respecto a  $\beta$ ) da el valor de la velocidad de grupo. La función graficada es la relación no lineal entre  $\beta$  y  $\omega$  para los modos TE y TM dentro de una guía ideal:

$$\beta = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \left( \frac{\omega_c}{\omega} \right)^2} \quad (4-87)$$



**Fig. 4-8** Diagrama de dispersión  $\omega$ - $\beta$  para los modos TE y TM en una guía de ondas, con frecuencia angular de corte  $\omega_c$ .

Por lo que:

$$\nu_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{c}{\sqrt{1 - (f_c/f)^2}} \quad (4-88)$$

$$\text{y} \quad \nu_g = \frac{1}{\frac{\partial \beta}{\partial \omega}} = \frac{c}{\frac{\partial}{\partial \omega} [\omega^2 - (2\pi f_c)^2]^{1/2}}$$

$$= \frac{c \sqrt{\omega^2 - (2\pi f_c)^2}}{\omega} = c \sqrt{1 - (f_c/f)^2} \quad (4-89)$$

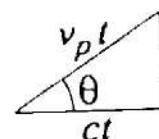
en donde  $c$  es la velocidad de la luz y  $f_c$  es la frecuencia de corte del modo de propagación. De las ecs. (4-88) y (4-89) se observa que, a medida que la frecuencia aumenta, ambas velocidades tienden a igualarse a la velocidad de la luz\*. Lo mismo puede apreciarse gráficamente en la Fig. 4-8, donde

\* Esto es suponiendo que el medio es aire o el vacío. Si el medio de propagación es un dieléctrico cualquiera con  $\epsilon_r \neq 1$ , ambas velocidades tenderán a igualarse a  $v = c/\sqrt{\epsilon_r}$ .

los valores de ambas pendientes tienden asintóticamente hacia la pendiente de la recta punteada, que equivaldría a la función lineal  $\omega = c \beta$  para una onda TEM en el espacio libre; la pendiente de esta recta es igual a  $c$ , la velocidad de la luz. También vale la pena notar que el producto  $v_p v_g$ , a partir de las ecs. (4-88) y (4-89), da  $c^2$  como resultado, lo cual concuerda con la ec. (4-86).

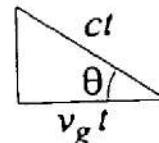
Por último, y con el fin de ilustrar geométricamente el significado de las tres velocidades vistas, se mostrará un sencillo método en base a triángulos rectángulos. Considérese para esto la Fig. 4-9. El rayo que avanza de la izquierda hacia la derecha representa la dirección de un frente de onda. Al reflejarse en cada pared, el campo eléctrico de la onda sufre un cambio de fase de  $180^\circ$ . Suponiendo que dentro de la guía haya aire, el frente de la onda viaja a una velocidad  $v = c$ , y en un tiempo  $t$  cubre una distancia  $ct$ . En cambio, la potencia de la señal, que efectivamente se desplaza en la dirección  $z$ , sólo avanza una distancia  $v_g t$  en el mismo tiempo. Por su parte, el punto de incidencia A del frente de la onda se mueve a lo largo de la pared de la guía una distancia  $v_p t$ . La relación entre estas velocidades y el ángulo de incidencia  $\theta$  se obtiene fácilmente de los triángulos rectángulos de la Fig. 4-9:

$$v_p = \frac{c}{\cos \theta} > c$$



$$\cos \theta = \frac{c}{v_p}$$

$$v_g = c \cos \theta < c$$



$$\cos \theta = \frac{v_g}{c}$$

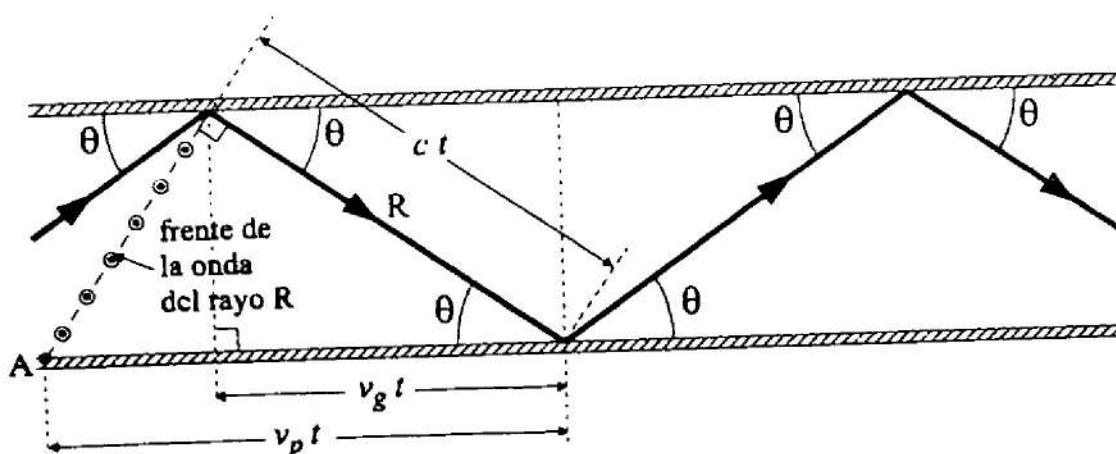


Fig. 4-9 Relación geométrica de velocidades en una guía. El símbolo  $\odot$  del frente de la onda indica que el vector de campo eléctrico sale del papel.

y desde luego:

$$v_p v_g = c^2$$

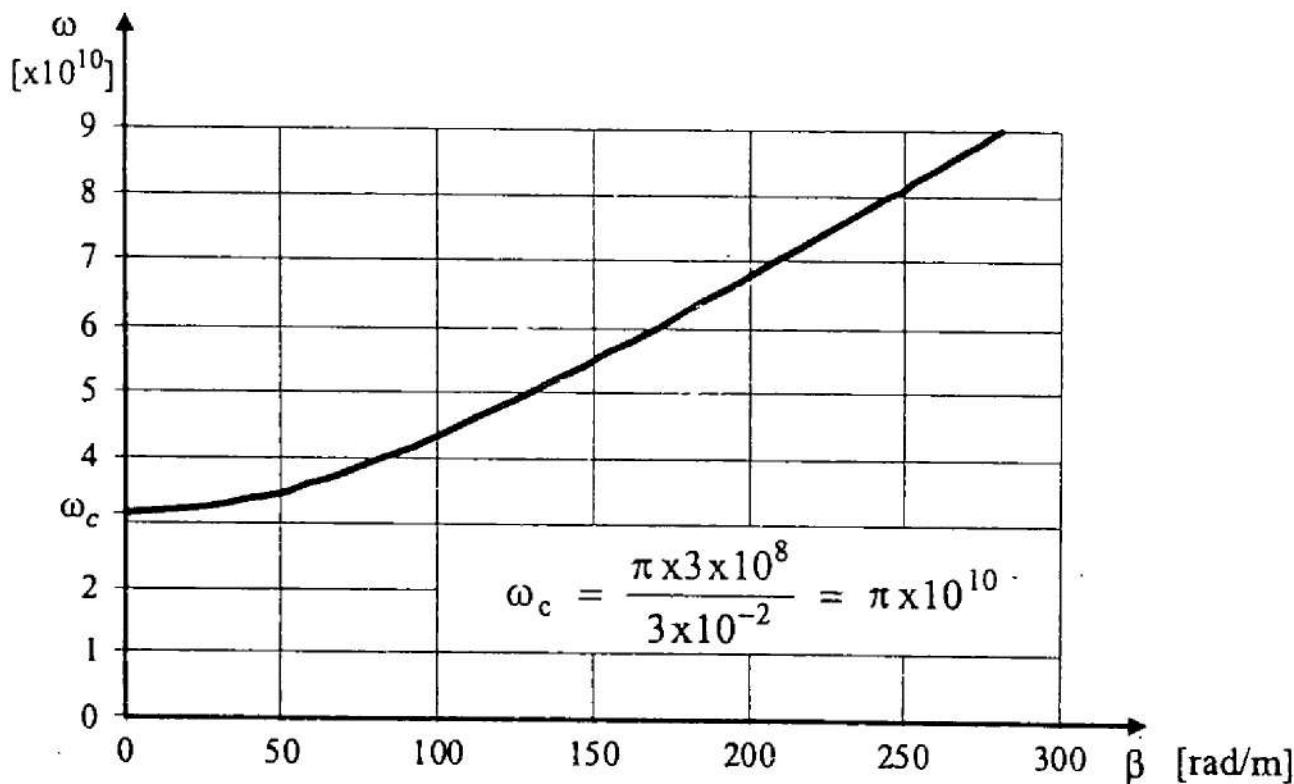
**Ejercicio 4-9** Obtenga el diagrama  $\omega$ - $\beta$  para el modo  $TE_1$  de propagación dentro de dos placas paralelas\*. Consideré que la separación de las placas es de 3 cm y que el medio de propagación es aire.

*Solución*

De las ecs. (4-87) y (4-74):

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{\omega}{c} \left[ 1 - \left( \frac{\omega_c}{\omega} \right)^2 \right]^{1/2} = \frac{\omega}{c} \left[ 1 - \left( \frac{2\pi c n}{2a\omega} \right)^2 \right]^{1/2} \\ &\approx \frac{\omega}{c} \left[ 1 - \left( \frac{(\pi)(3 \times 10^8)(1)}{(0.03)(\omega)} \right)^2 \right]^{1/2} = \frac{\omega}{3 \times 10^8} \sqrt{1 - \left( \frac{\pi \times 10^{10}}{\omega} \right)^2}\end{aligned}$$

y la gráfica correspondiente del diagrama de dispersión es:



\* Es importante recordar que la teoría general que se ha presentado en esta sección sobre velocidades es válida también para las demás guías que se verán en este capítulo. En este ejercicio se elige un par de placas paralelas porque es el único tipo de guía visto hasta ahora.

**Ejercicio 4-10** Calcule las velocidades de fase y de grupo de todos los modos que se pueden propagar a una frecuencia de 12 GHz entre dos placas paralelas de cobre, separadas 4 cm entre sí.

*Solución*

Para resolver este problema, podrían usarse directamente las ecs. (4-88) y (4-89). Sin embargo, se ilustrará un método alterno. Las fórmulas a aplicar están dadas por las ecs. (4-84) y (4-85):

$$v_p = \frac{\lambda_g}{\lambda_0} c \quad \text{y} \quad v_g = \frac{\lambda_0}{\lambda_g} c$$

La longitud de onda característica a 12 GHz es igual a

$$\lambda_0 = \frac{c}{12 \times 10^9} = 2.5 \text{ cm}$$

Las frecuencias de corte de los primeros modos son

$$f_{c_1} = \frac{c}{2a} (1) = \frac{3 \times 10^8}{2 \times 4 \times 10^{-2}} = 3.75 \text{ GHz}$$

$$f_{c_2} = 2f_{c_1} = 7.5 \text{ GHz}$$

$$f_{c_3} = 3f_{c_1} = 11.25 \text{ GHz}$$

Evidentemente, el modo 4 tiene una frecuencia de corte mayor que la frecuencia de operación (12 GHz) y no se propaga. Por tanto, los modos dentro de las placas son: TEM, TE<sub>1</sub>, TM<sub>1</sub>, TE<sub>2</sub>, TM<sub>2</sub>, TE<sub>3</sub> y TM<sub>3</sub>.

A continuación, se calcula la longitud de onda en la guía para cada modo, usando la ec. (4-68):

$$\lambda_{g_1} = \frac{c}{\sqrt{f^2 - f_{c_1}^2}} = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{(12^2 - 0.375^2)} \times 10^{10}} = 2.63 \text{ cm}$$

$$\lambda_{g_2} = \frac{c}{\sqrt{f^2 - f_{c_2}^2}} = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{1.2^2 - 0.75^2} \times 10^{10}} = 3.20 \text{ cm}$$

$$\lambda_{g_3} = \frac{c}{\sqrt{f^2 - f_{c_3}^2}} = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{1.2^2 - 1.125^2} \times 10^{10}} = 7.18 \text{ cm}$$

Sustituyendo estos valores en las expresiones para  $v_p$  y  $v_g$ , se obtienen los datos pedidos, que se encuentran concentrados en la tabla siguiente:

Modo	$n$	$\lambda_0$ (cm)	$\lambda_g$ (cm)	$v_p$ ( $\times 10^8$ m/s)	$v_g$ ( $\times 10^8$ m/s)
TEM	0	2.50	2.50	3.00	3.00
TE <sub>1</sub> y TM <sub>1</sub>	1	2.50	2.63	3.16	2.85
TE <sub>2</sub> y TM <sub>2</sub>	2	2.50	3.20	3.84	2.34
TE <sub>3</sub> y TM <sub>3</sub>	3	2.50	7.18	8.62	1.04

## 4.7 Impedancias de los modos TE y TM. Teoría general

En las secciones siguientes se verá que una guía de ondas hueca (rectangular o circular) se comporta como un filtro pasa-altas, puesto que no puede transmitir una onda TEM, sino sólo ondas TE o TM. Para un modo dado, habrá una región de corte y otra de paso, siendo  $f_c$ , la frecuencia de corte, el punto de transición a partir del cual existirá la transmisión del modo.

Sin embargo, para todas las guías (incluyendo las placas paralelas), a pesar de que haya propagación de un cierto modo TE o TM a partir de  $f_c$ , la relación entre las magnitudes de los campos eléctrico y magnético transversales a la dirección axial no es constante, sino que cambia con la frecuencia de trabajo. Por ello, conviene estudiar ahora la teoría general sobre el comportamiento de la impedancia de la onda en función de la frecuencia.

Para los modos TE, la impedancia de onda se obtiene a partir de la ec. (4-51):

$$Z_{TE} = \frac{E_x}{H_y} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} \quad (4-90)$$

y de la ec. (4-61) se obtiene la impedancia de onda para los modos TM:

$$Z_{TM} = \frac{E_x}{H_y} = \frac{\gamma}{j\omega\epsilon} \quad (4-91)$$

En términos de la frecuencia de corte del modo  $mn^*$  y de la impedancia intrínseca del medio de propagación,  $\eta$ , las ecuaciones anteriores toman la forma siguiente:

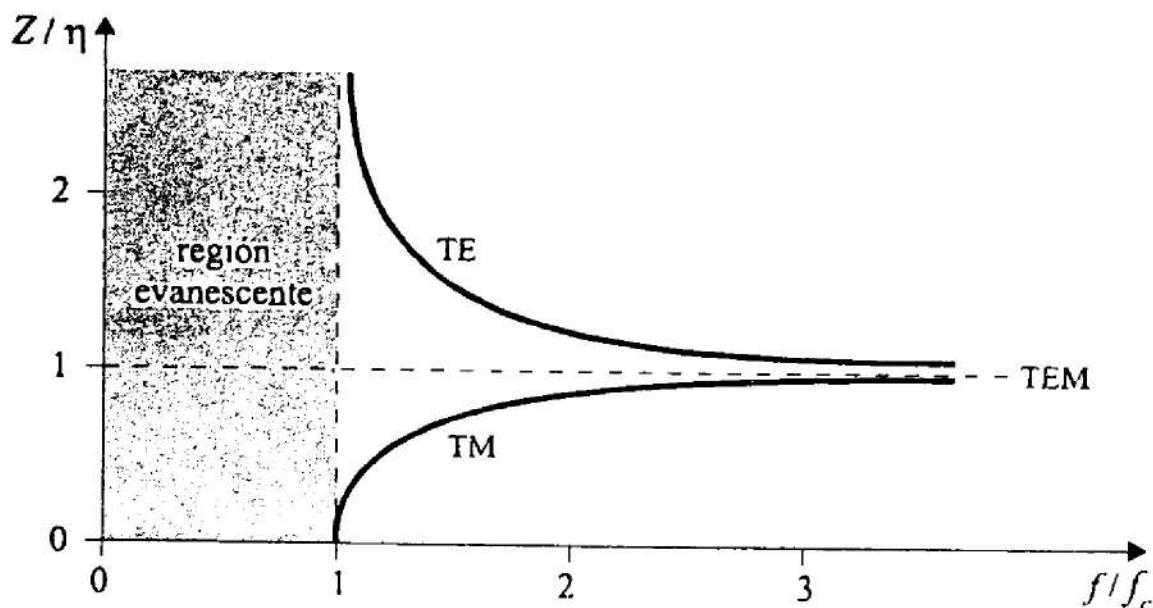
$$Z_{TE_{mn}} = \frac{\eta}{\sqrt{1 - (f_{c_{mn}}/f)^2}} \quad (4-92)$$

$$Z_{TM_{mn}} = \eta \sqrt{1 - \left(\frac{f_{c_{mn}}}{f}\right)^2} \quad (4-93)$$

Las ecs. (4-92) y (4-93) se pueden graficar para un modo cualquiera  $mn$  en función de la frecuencia, normalizada con relación a la frecuencia de corte correspondiente. También es conveniente, desde el punto de vista de interpretación, graficar la impedancia de onda normalizándola con relación a la impedancia intrínseca del medio. La forma típica de las curvas resultantes se muestra en la Fig. 4-10. En ella se observa que la impedancia  $Z_{TE}$  es resistiva pura, siempre es mayor que la impedancia intrínseca del medio, y conforme la frecuencia aumenta, se acerca más y más al valor de  $\eta$ , que correspondería a la impedancia de una onda TEM en el mismo medio. Asimismo, se puede apreciar que  $Z_{TM}$  también es resistiva pura, pero siempre es menor que la impedancia intrínseca del medio; conforme la frecuencia aumenta, también se acerca más y más al valor de  $\eta$ .

---

\* Para las placas paralelas,  $m = 1, 2, 3, \dots$  y  $n = 0$ . Para las guías huecas,  $n$  también puede tener valores diferentes de cero.



**Fig. 4-10** Gráfica típica de la impedancia de onda normalizada para los modos de propagación TE y TM, en general y para un medio sin pérdidas.

Para frecuencias inferiores a la frecuencia de corte, las impedancias de onda correspondientes para los modos TE y TM son reactivas puras (no se muestran en la gráfica), por lo que no puede haber flujo de potencia ni propagación. A esta región se le llama *evanescente*.

**Ejercicio 4-11** Para un sistema de dos placas paralelas, demuestre la validez de las ecs (4-92) y (4-93). A continuación grafique las impedancias de onda para los modos  $TE_1$ ,  $TM_1$ ,  $TE_3$  y  $TM_3$  del Ejercicio 4-10. Suponga que el medio entre las dos placas es aire.

### Solución

De acuerdo con el sistema de coordenadas de la Fig. 4-3 y con la ec. (4-78), se observa que la impedancia debe definirse en términos de las ecs. (4-77) y (4-79), que corresponden a los campos transversales de la onda que viaja en la dirección positiva de  $z$ . Es decir:

$$Z_{TE} = -\frac{E_y}{H_x} = \frac{j\omega\mu a n \pi}{n \pi \gamma_n a}$$

Ahora bien,  $\gamma_n$  está dada por la ec. (4-76):

$$\gamma_n = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - \omega^2\mu\varepsilon}$$

De modo que:

$$Z_{TE} = \frac{j\omega\mu}{\sqrt{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - \omega^2\mu\varepsilon}} = \frac{j\omega\mu}{\omega\sqrt{-\mu\varepsilon + \left(\frac{n\pi}{a\omega}\right)^2}}$$

$$= \frac{j\mu}{\sqrt{\mu\varepsilon\left[\left(\frac{n\pi}{a\omega}\right)^2\left(\frac{1}{\mu\varepsilon}\right) - 1\right]}} = \left(j\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{n\pi c}{a\omega}\right)^2 - 1}}\right)$$

y como  $\eta = \sqrt{\mu/\varepsilon}$  y  $f_c = cn/2a$ :

$$Z_{TE} = \frac{j\eta}{\sqrt{\left(\frac{2\pi f_c}{\omega}\right)^2 - 1}} = \frac{j\eta}{\sqrt{\left(\frac{2\pi f_c}{2\pi f}\right)^2 - 1}}$$

$$= \frac{j\eta}{\sqrt{[1 - (f_c/f)^2](-1)}} = \frac{\eta}{\sqrt{[1 - (f_c/f)^2]}}$$

que concuerda con la ec. (4-92).

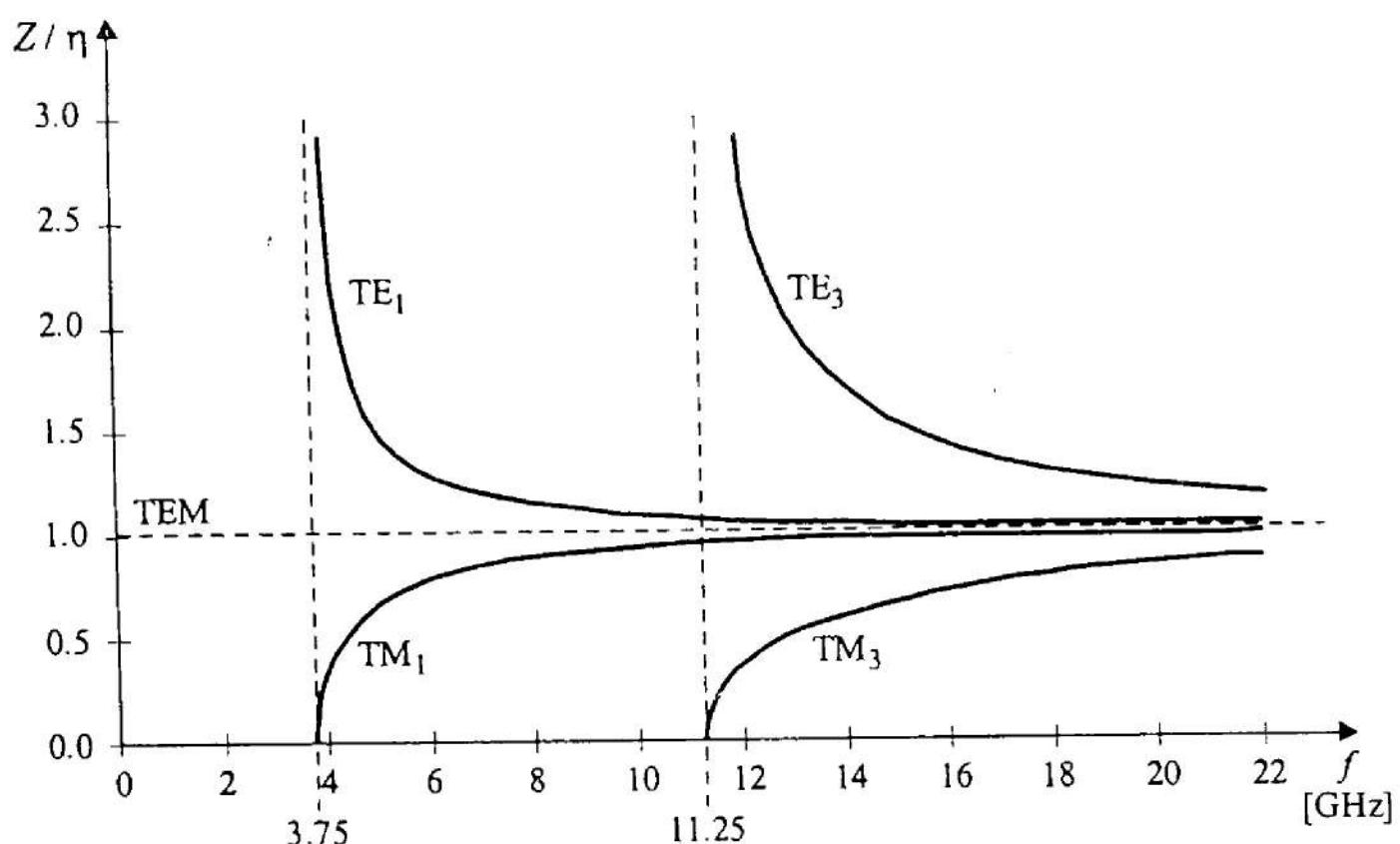
Siguiendo un procedimiento similar, el lector podrá fácilmente demostrar la validez de la ec. (4-93):

$$Z_{TM} = \eta \sqrt{1 - (f_c/f)^2}$$

Las frecuencias de corte obtenidas en el Ejercicio 4-10 fueron:

$$f_{c_1} = 3.75 \text{ GHz} \quad f_{c_3} = 11.25 \text{ GHz}$$

y las gráficas pedidas son:



## 4.8 Guías rectangulares

Los conceptos generales vistos en las secciones anteriores de este capítulo facilitarán enormemente la comprensión de la operación de las guías rectangulares, circulares y elípticas. Los parámetros ya estudiados, como la frecuencia de corte para los modos TE y TM, la impedancia de onda y las velocidades de fase y de grupo también son aplicables a estas guías, aunque desde luego hay ligeras modificaciones, en función de la geometría de cada una en particular.

Hasta ahora, la propagación de las ondas electromagnéticas en una guía, a partir de una cierta frecuencia de corte, se ha considerado sin pérdidas

(constante de atenuación  $\alpha = 0$ ), ya que se ha supuesto que los conductores son perfectos. Sin embargo, en una guía práctica sí habrá atenuación, debida a las corrientes en las paredes metálicas y a las pérdidas en el dieléctrico que haya dentro de la guía.

El objetivo de esta sección es analizar el funcionamiento de las guías rectangulares y de sus cavidades correspondientes. Estas guías se utilizan más que las circulares o las elípticas, y se emplean en muchos sistemas prácticos de radiofrecuencia, por ejemplo, en equipos de microondas terrestres y de comunicaciones por satélite. Son fáciles de fabricar, su ancho de banda es muy grande y presentan pocas pérdidas en sus frecuencias comunes de operación.

Considérese que en la Fig. 4-3, correspondiente a un sistema de dos placas paralelas, la extensión de dichas placas a lo largo de la coordenada  $y$  es pequeña, menor o comparable a la separación  $a$ . Esta nueva situación ya no permite considerar que la variación de los campos con relación a  $y$  (es decir,  $\partial/\partial y$ ) pueda suponerse igual a cero. Si, además, se colocan dos placas paralelas adicionales separadas entre sí una distancia  $b$ , en posición vertical y en los extremos de la guía, se obtiene una guía rectangular como la de la Fig. 4-11. Al comparar ambas figuras, nótese que el sistema de coordenadas rectangulares es el mismo y sólo ha sido girado  $90^\circ$  sobre el eje  $z$ . Es fácil intuir en este punto que el análisis matemático será relativamente sencillo, porque gran parte de éste ya se ha hecho al principio del capítulo.

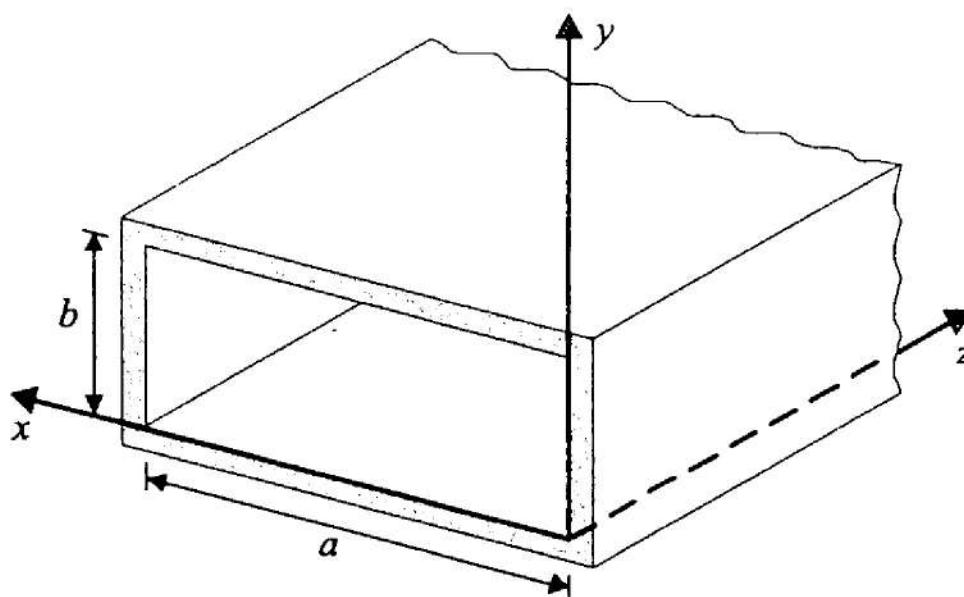


Fig. 4-11 Guía de ondas rectangular.

Suponiendo conductores perfectos inicialmente, las condiciones de frontera que deben cumplirse en las cuatro paredes son que el campo eléctrico tangencial valga cero y que el campo magnético normal también sea igual a cero.

En los conductores huecos (un solo conductor cerrado como la guía rectangular o la circular) no puede haber ondas TEM, porque para ello se necesita la existencia de un gradiente de potencial transversal. Dicho de otra forma, es imposible que haya líneas cerradas de campo magnético en cualquier plano transversal de la guía, y por lo tanto no hay onda TEM. Para entender mejor esto, se puede razonar al revés. Supóngase, entonces, que hay una onda TEM en el interior de la guía; esto quiere decir que las líneas de flujo de los campos **B** y **H** son trayectorias cerradas en un plano transversal al eje *z*. Sin embargo, la ley circuital de Ampere establece que la integral de línea cerrada del campo magnético en ese plano transversal debe ser igual a la suma de las corrientes longitudinales que pasan dentro de la trayectoria cerrada. Estas corrientes pueden ser de dos tipos: corriente de conducción y corriente de desplazamiento. Si no hay otro conductor dentro de la guía (en un cable coaxial sí lo hay, y por ello puede conducir una onda TEM), no puede haber corriente de conducción longitudinal. Por definición, la onda TEM no tiene componente  $E_z$ ; en consecuencia, tampoco hay corriente de desplazamiento longitudinal. Entonces, los dos tipos posibles de corriente valen cero, la integral de la ley circuital de Ampere vale cero, y no puede haber trayectorias cerradas de líneas de campo magnético en ningún plano transversal. Se concluye que la onda TEM no puede existir. Solamente habrá modos TE y TM. -

#### 4.8.1 Los modos TE

De la teoría general para los modos TE vista en la sección 4.3, la ecuación que debe resolverse es la (4-56):

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + (\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon) H_z = 0 \quad = (4-56)$$

Esta ecuación diferencial se puede resolver empleando el método de separación de variables, estableciendo que la solución sea el producto de tres funciones (una de *x*, una de *y*, y otra de *z*):

$$H_z = f_1(x) f_2(y) f_3(z)$$

La solución general resulta ser de la forma:

$$H_z = \underbrace{[A \cos px + B \sin px]}_{f_1(x)} \underbrace{[C \cos qy + D \sin qy]}_{f_2(y)} \underbrace{e^{-\gamma z}}_{f_3(z)} \quad (4-94)$$

Al diferenciar y sustituir esta solución en la ec. (4-56), se obtiene la siguiente relación que debe ser satisfecha:

$$(p^2 + q^2) = \gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon \quad (4-95)$$

Esta última relación es parecida a la ec. (4-70) que se obtuvo en el caso de las placas paralelas, de donde se intuye que los valores discretos de  $p$  y  $q$  definirán el orden del modo TE.

Conocida  $H_z$ , las componentes  $H_x$  y  $H_y$  se pueden obtener, respectivamente, de las ecs. (4-55) y (4-54):

$$H_x = - \frac{\gamma}{\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon} \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad (4-55)$$

$$H_y = - \frac{\gamma}{\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon} \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad (4-54)$$

Las condiciones de frontera exigen que el campo magnético normal a las paredes izquierda y derecha de la Fig. 4-11 sea igual a cero. Es decir,  $H_x = 0$  en  $x = 0$  y  $x = a$ , que es lo mismo que  $\partial H_z / \partial x = 0$  en  $x = 0$  y  $x = a$ . Igualmente, para las paredes inferior y superior de la misma figura debe cumplirse que  $H_y = 0$  en  $y = 0$  y  $y = b$ , que a partir de la ec. (4-54) es lo mismo que  $\partial H_z / \partial y = 0$  en  $y = 0$  y  $y = b$ . Efectuando las diferenciaciones correspondientes sobre la ec. (4-94) se tiene:

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = p[-A \sin px + B \cos px][C \cos qy + D \sin qy] e^{-\gamma z} \quad (4-96)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} = q[A \cos px + B \sin px][-C \sin qy + D \cos qy] e^{-\gamma z} \quad (4-97)$$

Las condiciones impuestas para  $x = 0$  sustituidas en las dos ecuaciones anteriores conducen a

$$\left. \frac{\partial H_z}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 = p[B][C \cos qy + D \sin qy] e^{-\gamma z}$$

$$\left. \frac{\partial H_z}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 = q[A \cos px + B \sin px][D] e^{-\gamma z}$$

de donde se concluye que  $B = D = 0$ . Entonces, las ecs. (4-96) y (4-97) se reducen a:

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = -pAC(\sin px)(\cos qy) e^{-\gamma z} \quad (4-98)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} = -qAC(\cos px)(\sin qy) e^{-\gamma z} \quad (4-99)$$

Si ahora se sustituyen las condiciones de frontera para  $x = a$  y  $y = b$  en las ecs. (4-98) y (4-99), igualándolas a cero, se observa que la única posibilidad para que existan soluciones es que:

$$\left. \frac{\partial H_z}{\partial x} \right|_{x=a} = 0 \Rightarrow \sin pa = 0$$

$$\left. \frac{\partial H_z}{\partial y} \right|_{y=b} = 0 \Rightarrow \sin qb = 0$$

Como  $a$  y  $b$  no pueden valer cero (no habría guía), se concluye que  $p$  y  $q$  sólo pueden tener valores discretos:

$$p = m \left( \frac{\pi}{a} \right) \quad m = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$$

$$q = n \left( \frac{\pi}{b} \right) \quad n = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$$

de donde, al sustituir los resultados obtenidos en la ec. (4-94), la solución final buscada es:

$$H_z = \left[ A \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \right] \left[ C \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \right] e^{-\gamma z} \quad (4-100)$$

en donde A y C son constantes, cuyo producto puede combinarse en una nueva y única constante  $A_0$ .

A partir de la ec. (4-100) se pueden encontrar las demás componentes de los campos **E** y **H** usando las ecs. (4-55), (4-54), (4-51) y (4-50). El resultado final, haciendo  $\gamma = j\beta$ , es:

$$H_{x_{mn}} = \left[ \frac{j A_0 \beta \frac{m\pi}{a}}{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \right] \left( \sin \frac{m\pi}{a} x \right) \left( \cos \frac{n\pi}{b} y \right) e^{-j\beta z}$$

$$H_{y_{mn}} = \left[ \frac{j A_0 \beta \frac{n\pi}{b}}{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \right] \left( \cos \frac{m\pi}{a} x \right) \left( \sin \frac{n\pi}{b} y \right) e^{-j\beta z} \quad (4-101)$$

$$H_{z_{mn}} = A_0 \left( \cos \frac{m\pi}{a} x \right) \left( \cos \frac{n\pi}{b} y \right) e^{-j\beta z}$$

$$E_{x_{mn}} = \frac{\omega \mu}{\beta} H_{y_{mn}}$$

$$E_{y_{mn}} = -\frac{\omega \mu}{\beta} H_{x_{mn}}$$

$$E_{z_{mn}} = 0 \quad (\text{condición para los modos } TE_{mn})$$

En teoría, dentro de la guía rectangular puede haber un número infinito de distribuciones de campo, o modos, de acuerdo con todas las combinaciones posibles para los valores discretos de  $m$  y  $n$  ( $= 0, 1, 2, 3, \dots$ ) sustituidos en el conjunto de ecuaciones (4-101). En la Fig. 4-12 se muestran las distribuciones o patrones de los campos en la sección transversal de la guía para los modos  $\text{TE}_{10}$  ( $m = 1, n = 0$ ) y  $\text{TE}_{11}$  ( $m = 1, n = 1$ ).

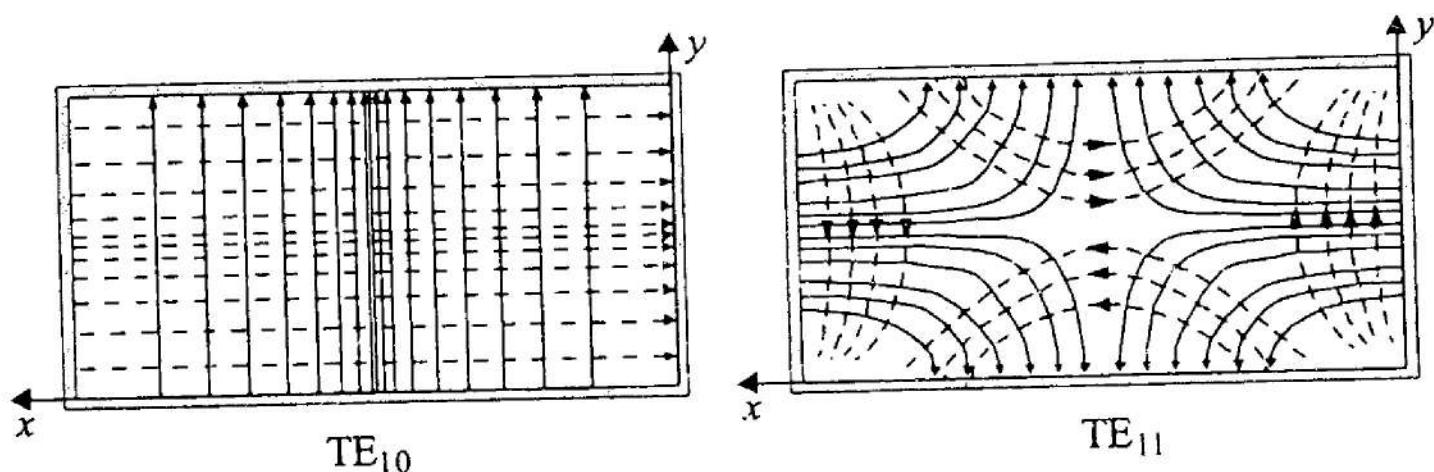


Fig. 4-12 Patrones de campo eléctrico (rayas continuas) y campo magnético (rayas punteadas) de los modos de propagación  $\text{TE}_{10}$  y  $\text{TE}_{11}$  en una guía rectangular. El patrón del modo  $\text{TE}_{01}$  se muestra en la Fig. 1-16.

Al igual que en el caso de las placas paralelas, cada modo comienza a existir a partir de su frecuencia de corte correspondiente, tiene su propia impedancia de onda, y se propaga con sus respectivas velocidades de fase y de grupo, así como su constante de fase. La condición impuesta por la ec. (4-95) y los valores discretos permitidos para  $p$  y  $q$  determinan que:

$$\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 = \gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon$$

o bien:

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2 \mu \epsilon} \quad (4-102)$$

Para que la onda TE sea progresiva,  $\gamma$  debe ser imaginaria pura. Es decir, debe cumplirse que  $\omega^2 \mu \epsilon > (m\pi/a)^2 + (n\pi/b)^2$ . Si  $\gamma$  es real, la operación de la guía se encontrará en una región evanescente y no habrá propagación. El punto de transición y la frecuencia angular  $\omega_c$  correspondiente para que se inicie la propagación se obtiene igualando la ec. (4-102) a cero:

$$\omega_{c_{mn}}^2 = (2\pi f_{c_{mn}})^2 = \frac{1}{\mu \epsilon} \left[ \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]$$

de donde la frecuencia de corte para el modo  $TE_{mn}$  está dada por

$$f_{c_{mn}} = \frac{\nu}{2} \sqrt{\left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2} \quad (4-103)$$

ya que  $\nu = 1/\sqrt{\mu \epsilon}$  (velocidad de una onda plana en un medio sin fronteras).

Sustituyendo la ec. (4-103) en la ec. (4-102) con el radicando negativo y utilizando un poco de álgebra, la constante de propagación se puede calcular en función de la frecuencia de corte, para frecuencias en las que la onda es progresiva:

$$\gamma_{mn} = j\beta_{mn} = j \left( \frac{2\pi}{\nu} \right) \sqrt{f^2 - f_{c_{mn}}^2} \quad f > f_{c_{mn}} \quad (4-104)$$

Recordando que la velocidad de fase es igual a  $\omega/\beta$ , para los modos  $TE_{mn}$  se calcula como:

$$\nu_{p_{mn}} = \frac{\omega}{\beta_{mn}} = \nu \left[ \frac{f}{\sqrt{f^2 - f_{c_{mn}}^2}} \right] \quad (4-105)$$

Para  $f > f_{c_{mn}}$ , la cantidad entre paréntesis en la ec. (4-105) siempre será mayor que la unidad. Por lo tanto,  $\nu_{p_{mn}} > \nu$ .

Por lo que se refiere a la longitud de onda en la guía,  $\lambda_g$ , ésta se calcula como:

$$\lambda_{g_{mn}} = \frac{2\pi}{\beta_{mn}} = \frac{v_{p_{mn}}}{f} \quad (4-106)$$

y como  $v_{p_{mn}} > v$ ,  $\lambda_{g_{mn}}$  siempre es mayor que la longitud de onda  $\lambda$  que tendría una onda plana (TEM) en el mismo medio.

A partir de la ec. (4-103) se puede obtener fácilmente la longitud de onda de corte:

$$\lambda_c = \frac{v}{f_c} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}} \quad (4-107)$$

que junto con  $\lambda$  y  $\lambda_g$  satisface la relación

$$\frac{1}{\lambda_{c_{mn}}^2} + \frac{1}{\lambda_{g_{mn}}^2} = \frac{1}{\lambda^2} \quad (4-108)$$

que es idéntica a la ec. (4-67) deducida para las placas paralelas, considerando un material cualquiera de propagación.

Asimismo,  $\lambda_g$  puede escribirse en términos de  $\lambda$  y  $\lambda_c$  como:

$$\lambda_{g_{mn}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_{c_{mn}}}\right)^2}} \quad (4-109)$$

Si la guía está llena de aire, la permitividad y la permeabilidad se pueden aproximar, respectivamente, por  $\epsilon_0$  y  $\mu_0$ , y entonces  $\lambda = \lambda_0$ .

Finalmente, la velocidad de grupo también puede obtenerse. Antes de hacerlo, es conveniente recordar que la velocidad de fase es un concepto que se aplica a ondas senoidales de una sola frecuencia o monocromáticas; esta velocidad depende alinealmente de la frecuencia, como lo indica la ec. (4-105), pero a una cierta frecuencia dada (por ejemplo, una frecuencia portadora), su valor es único. Sin embargo, si lo que se desea transmitir a lo

largo de la guía es una señal modulada (que es la realidad en la práctica), ésta se puede considerar como la superposición de Fourier de una gran cantidad de ondas senoidales con distintas frecuencias, que juntas constituyen a la onda modulada. Cada componente senoidal, que tiene su propia frecuencia, viajará con una velocidad de fase distinta a la de las demás componentes. Esta situación inevitable lleva a la definición del concepto de velocidad de grupo, que ya fue tratado en la sección 4.6, y tiene validez y un significado preciso sólo si la frecuencia de la portadora es muchísimo más elevada en comparación con el ancho de banda de frecuencias ocupado por la señal modulada, lo cual se cumple en las transmisiones típicas de microondas. El efecto que se tiene es que la envolvente de la onda modulada parece rezagarse o "quedarse atrás" con relación a la portadora; mientras que la portadora viaja a una velocidad aparente  $v_p$ , la envolvente lo hace a una velocidad  $v_g$ , en donde  $v_p > c > v_g$ , cumpliéndose la ec. (4-86). Para la guía rectangular, la velocidad de grupo se puede calcular, de acuerdo con lo visto en la sección 4.6, como:

$$v_g = \frac{1}{\partial \beta / \partial \omega} \quad = (4-85)$$

Sustituyendo  $\beta_{mn}$  de la ec. (4-104) con  $f = \omega/2\pi$ , en la ec. (4-85), se tiene

$$v_{g_{mn}} = v \left[ \frac{\partial}{\partial \omega} \sqrt{\omega^2 - \omega_{c_{mn}}^2} \right]^{-1}$$

$$= v \left[ \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_{c_{mn}}^2}} \right]^{-1}$$

$$= v \sqrt{1 - (\omega_{c_{mn}}/\omega)^2}$$

de donde, en términos de la frecuencia de corte:

$$v_{g_{mn}} = v \sqrt{1 - \left(f_{c_{mn}}/f\right)^2} \quad (4-110)$$

Como la frecuencia de corte siempre será menor que la frecuencia de operación, el radical de la ec. (4-110) siempre será menor que la unidad y  $v_{g_{mn}} < v$ . Si las ecs. (4-105) y (4-110) se multiplican, se comprueba que el producto de la velocidad de fase por la velocidad de grupo es igual al cuadrado de la velocidad en un medio ilimitado:

$$v_p v_g = v^2 \quad (4-111)$$

**Ejercicio 4-12** Una guía rectangular llena de aire tiene dimensiones internas de 10 x 5 cm y transporta una señal senoidal con frecuencia de 4.5 GHz. Encuentre cuántos modos TE diferentes se propagan en la guía, así como la constante de fase, la velocidad de fase, la longitud de onda en la guía y la impedancia de onda para cada modo a esa frecuencia de transmisión.

### Solución

Primero hay que encontrar las frecuencias de corte de los primeros modos, para ver cuáles están por debajo de los 4.5 GHz. Como la guía tiene aire en su interior,  $v = c = 3 \times 10^8$  m/seg. De la ec. (4-103):

$$f_{c_{10}} = \frac{3 \times 10^8}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{0.1}\right)^2} = 1.5 \text{ GHz}$$

$$f_{c_{01}} = \frac{3 \times 10^8}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{0.05}\right)^2} = 3 \text{ GHz}$$

$$f_{c_{11}} = \frac{3 \times 10^8}{2} \sqrt{10^2 + 20^2} = 3.35 \text{ GHz}$$

$$f_{c_{20}} = \frac{3 \times 10^8}{2} \sqrt{\left(\frac{2}{0.1}\right)^2} = 3 \text{ GHz}$$

$$f_{c_{02}} = \frac{3 \times 10^8}{2} \sqrt{\left(\frac{2}{0.05}\right)^2} = 6 \text{ GHz}$$

$$f_{c_{21}} = \frac{3 \times 10^8}{2} \sqrt{\left(\frac{2}{0.1}\right)^2 + \left(\frac{1}{0.05}\right)^2} = 4.24 \text{ GHz}$$

$$f_{c_{12}} = \frac{3 \times 10^8}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{0.1}\right)^2 + \left(\frac{2}{0.05}\right)^2} = 6.18 \text{ GHz}$$

$$f_{c_{22}} = \frac{3 \times 10^8}{2} \sqrt{\left(\frac{2}{0.1}\right)^2 + \left(\frac{2}{0.05}\right)^2} = 6.7 \text{ GHz}$$

Los modos TE que se propagan son entonces  $\text{TE}_{10}$ ,  $\text{TE}_{01}$ ,  $\text{TE}_{20}$ ,  $\text{TE}_{11}$  y  $\text{TE}_{21}$ .

Como paso siguiente, la constante de fase se calcula usando la ec. (4-104):

$$\beta_{10} = \frac{2\pi}{3 \times 10^8} \sqrt{4.5^2 - 1.5^2} \times 10^9 = 88.86 \text{ rad/m}$$

$$\beta_{01} = \frac{2\pi}{3 \times 10^8} \sqrt{4.5^2 - 3^2} \times 10^9 = 70.25 \text{ rad/m}$$

$$\beta_{20} = \frac{2\pi}{3 \times 10^8} \sqrt{4.5^2 - 3^2} \times 10^9 = 70.25 \text{ rad/m}$$

$$\beta_{11} = \frac{2\pi}{3 \times 10^8} \sqrt{4.5^2 - 3.35^2} \times 10^9 = 62.93 \text{ rad/m}$$

$$\beta_{21} = \frac{2\pi}{3 \times 10^8} \sqrt{4.5^2 - 4.24^2} \times 10^9 = 31.57 \text{ rad/m}$$

La velocidad de fase se obtiene ahora con la ec. (4-105):

$$v_{p_{10}} = \frac{2\pi \times 4.5 \times 10^9}{\beta_{10}} = \frac{2\pi \times 4.5 \times 10^9}{88.86} = 3.18 \times 10^8 \text{ m/seg}$$

$$v_{p_{01}} = \frac{2\pi \times 4.5 \times 10^9}{\beta_{01}} = \frac{2\pi \times 4.5 \times 10^9}{70.25} = 4.02 \times 10^8 \text{ m/seg}$$

$$v_{p_{20}} = \frac{2\pi \times 4.5 \times 10^9}{\beta_{20}} = \frac{2\pi \times 4.5 \times 10^9}{70.25} = 4.02 \times 10^8 \text{ m/seg}$$

$$v_{p_{11}} = \frac{2\pi \times 4.5 \times 10^9}{\beta_{11}} = \frac{2\pi \times 4.5 \times 10^9}{62.93} = 4.49 \times 10^8 \text{ m/seg}$$

$$v_{p_{21}} = \frac{2\pi \times 4.5 \times 10^9}{\beta_{21}} = \frac{2\pi \times 4.5 \times 10^9}{31.57} = 8.95 \times 10^8 \text{ m/seg}$$

La longitud de onda en la guía está dada por la ec. (4-106):

$$\lambda_{g_{10}} = \frac{2\pi}{\beta_{10}} = \frac{2\pi}{88.86} = 7.07 \text{ cm}$$

$$\lambda_{g_{01}} = \frac{2\pi}{\beta_{01}} = \frac{2\pi}{70.25} = 8.94 \text{ cm}$$

$$\lambda_{g_{20}} = \frac{2\pi}{\beta_{20}} = \frac{2\pi}{70.25} = 8.94 \text{ cm}$$

$$\lambda_{g_{11}} = \frac{2\pi}{\beta_{11}} = \frac{2\pi}{62.93} = 9.98 \text{ cm}$$

$$\lambda_{g_{21}} = \frac{2\pi}{\beta_{21}} = \frac{2\pi}{31.57} = 19.9 \text{ cm}$$

Finalmente, del sistema de ecs. (4-101) se observa que la relación entre las magnitudes de las componentes transversales  $E_x$  y  $H_y$  es igual a:

$$Z_{TE_{mn}} = \frac{\omega\mu}{\beta_{mn}} = \mu\nu_{p_{mn}}$$

lo cual coincide con la definición general dada por la ec. (4-90), y como  $\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$ :

$$Z_{TE_{10}} = 4\pi \times 10^{-7} \times \nu_{p_{10}} = 4\pi \times 10^{-7} \times 3.18 \times 10^8 = 399.85 \Omega$$

$$Z_{TE_{01}} = 4\pi \times 10^{-7} \times \nu_{p_{01}} = 4\pi \times 10^{-7} \times 4.02 \times 10^8 = 505.78 \Omega$$

$$Z_{TE_{20}} = 4\pi \times 10^{-7} \times \nu_{p_{20}} = 4\pi \times 10^{-7} \times 4.02 \times 10^8 = 505.78 \Omega$$

$$Z_{TE_{11}} = 4\pi \times 10^{-7} \times \nu_{p_{11}} = 4\pi \times 10^{-7} \times 4.49 \times 10^8 = 564.62 \Omega$$

$$Z_{TE_{21}} = 4\pi \times 10^{-7} \times \nu_{p_{21}} = 4\pi \times 10^{-7} \times 8.95 \times 10^8 = 1,125.38 \Omega$$

Con fines de comparación, resulta ilustrativo concentrar todos los resultados anteriores en la tabla siguiente.

modo	$f_c$ (GHz)	$\beta$ (rad/m)	$\nu_p$ ( $\times 10^8$ m/seg)	$\lambda_g$ (cm)	$Z$ ( $\Omega$ )
TE <sub>10</sub>	1.50	88.86	3.18	7.07	399.85
TE <sub>01</sub>	3.00	70.25	4.02	8.94	505.78
TE <sub>20</sub>	3.00	70.25	4.02	8.94	505.78
TE <sub>11</sub>	3.35	62.93	4.49	9.98	564.62
TE <sub>21</sub>	4.24	31.57	8.95	19.9	1,125.38
$f = 4.5 \text{ GHz}$		$\mu = \mu_0$		$\epsilon = \epsilon_0$	

**Ejercicio 4-13** Para la misma guía del Ejercicio 4-12, considere los modos de propagación TE<sub>10</sub> y TE<sub>01</sub>. Grafique el comportamiento de sus impedancias de onda en función de la frecuencia. Posteriormente, suponga que la guía transporta una señal modulada cuya banda es lo suficientemente

angosta y la frecuencia de la portadora es 4.5 GHz, y calcule la velocidad de grupo para ambos modos.

### Solución

La impedancia de onda para los modos TE, que es la función que se desea graficar, está dada por:

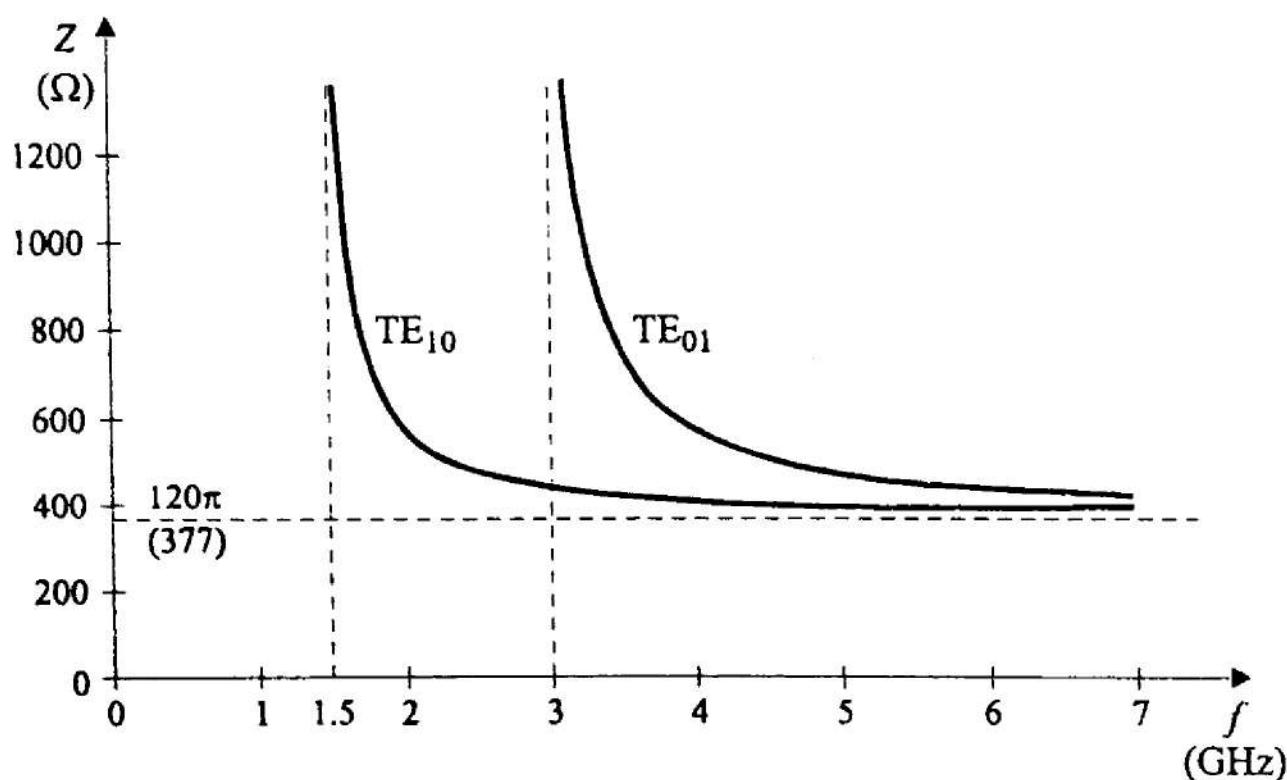
$$Z_{TE_{mn}} = \frac{2\pi f \mu \nu}{2\pi \sqrt{f^2 - f_{c_{mn}}^2}} = \frac{\mu \nu}{\sqrt{1 - (f_{c_{mn}}/f)^2}}$$

en donde  $\mu \nu = \frac{\mu}{\sqrt{\mu \epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} = \eta = 120\pi \Omega$ , y por lo tanto:

$$Z_{TE_{10}} = \eta \left[ 1 - \frac{1.5}{f} \right]^{-1/2} \quad \text{con } f \text{ en GHz}$$

$$\text{y} \quad Z_{TE_{01}} = \eta \left[ 1 - \frac{3.0}{f} \right]^{-1/2} \quad \text{con } f \text{ en GHz}$$

La gráfica de estas dos funciones se muestra a continuación:



La velocidad de grupo se calcula con la ec. (4-110):

$$v_{g_{10}} = 3 \times 10^8 \sqrt{1 - (1.5/4.5)^2} = 2.83 \times 10^8 \text{ m/seg}$$

$$v_{g_{01}} = 3 \times 10^8 \sqrt{1 - (3.0/4.5)^2} = 2.24 \times 10^8 \text{ m/seg}$$


---

#### 4.8.2 Los modos TM

Ahora la ecuación que hay que resolver, con las condiciones apropiadas de frontera, es la ec. (4-57), que es similar a la ec. (4-56) de los modos TE, sólo que en lugar de  $H_z$  se tiene a la variable desconocida  $E_z$ . Por lo tanto, la solución general para los modos TM también será de la misma forma que la ec. (4-94) de los modos TE, y también debe satisfacerse la relación dada por la ec. (4-95). Es decir:

$$E_z = \underbrace{[A \cos px + B \sin px]}_{f_1(x)} \underbrace{[C \cos qy + D \sin qy]}_{f_2(y)} e^{-\gamma z} \quad (4-112)$$

$$\text{con } (p^2 + q^2) = \gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon \quad = (4-95)$$

La aplicación de las condiciones de frontera es más sencilla que para el caso de los modos TE. Simplemente, debe garantizarse que  $E_z$  valga cero en las cuatro paredes de la guía. Si no fuese igual a cero, sería tangencial a los conductores. Por tanto:

$$\begin{aligned} E_z &= 0 \quad \text{para} & x &= 0 \\ && x &= a \\ && y &= 0 \\ && y &= b \end{aligned} \quad (4-113)$$

Al sustituir las condiciones (4-113) para  $x = y = 0$  en la ec. (4-112), ignorando el término  $e^{-\gamma z}$ , se obtiene rápidamente que

$$E_z \Big|_{x=0} = 0 = A [C \cos qy + D \sin qy] \Rightarrow A = 0$$

$$E_z \Big|_{y=0} = 0 = C[A \cos px + B \sin px] \Rightarrow C = 0$$

La solución (4-112) se reduce entonces a:

$$E_z = (B \sin px)(D \sin qy)e^{-\gamma z}$$

Rebautizando el producto de las constantes B y D por una sola constante A, la ecuación anterior queda como:

$$E_z = A(\sin px)(\sin qy)e^{-\gamma z} \quad (4-114)$$

Esta es la solución buscada para los modos TM. Las constantes  $p$  y  $q$  se obtienen aplicando, respectivamente, las condiciones de frontera restantes (es decir,  $E_z = 0$  en  $x = a$  y  $y = b$ ). Por lo tanto, ignorando otra vez y por el momento al término  $e^{-\gamma z}$ :

$$E_z \Big|_{x=a} = 0 = A(\sin pa)(\sin qb) \Rightarrow pa = m\pi$$

por lo que  $p = \frac{m\pi}{a}$   $m = 1, 2, \dots$   $(4-115)$

$$E_z \Big|_{y=b} = 0 = A(\sin px)(\sin qb) \Rightarrow qb = n\pi$$

por lo que  $q = \frac{n\pi}{b}$   $n = 1, 2, \dots$   $(4-116)$

Las relaciones (4-115) y (4-116) son idénticas a las encontradas para los valores de  $p$  y  $q$  en los modos TE de la sección anterior, y la relación (4-95) es la misma que se debe cumplir en ambos casos. Esto revela de inmediato que la frecuencia de corte de un modo  $TM_{mn}$  es exactamente igual a la del modo  $TE_{mn}$ , para valores idénticos de  $m$  y  $n$ . Por lo que se refiere a la constante de fase, cuando  $\gamma$  es puramente imaginaria y hay propagación dentro de la guía, la misma relación (4-95) indica que los modos  $TE_{mn}$  y

$\text{TM}_{mn}$  tienen el mismo valor para  $\beta$ . Si  $\beta$  es la misma, la velocidad de fase también es igual, a una frecuencia dada. La misma similitud se concluye para la longitud de onda en la guía ( $\lambda_g$ ), la longitud de onda de corte ( $\lambda_c$ ) y la velocidad de grupo ( $v_g$ ). Por lo tanto, para los modos  $\text{TM}_{mn}$  se aplican las mismas ecuaciones, que por comodidad se repiten a continuación:

$$\beta_{mn} = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad =(4-102)$$

O bien:  $\beta_{mn} = \left(\frac{2\pi}{v}\right) \sqrt{f^2 - f_{c_{mn}}^2} \quad =(4-104)$

$$U^1 = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon_0 \epsilon_r \epsilon_i}} \quad f_{c_{mn}} = \frac{v}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \quad =(4-103)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \epsilon_i}} \quad v_{p_{mn}} = v \left[ \frac{f}{\sqrt{f^2 - f_{c_{mn}}^2}} \right] \quad =(4-105)$$

$$\lambda_{g_{mn}} = \frac{2\pi}{\beta_{mn}} = \frac{v_{p_{mn}}}{f} \quad =(4-106)$$

$$\lambda_{c_{mn}} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}} \quad =(4-107)$$

$$v_{g_{mn}} = v \sqrt{1 - (f_{c_{mn}}/f)^2} \quad =(4-110)$$

Es lógico que, aun cuando los parámetros anteriores son iguales para los modos  $\text{TE}_{mn}$  y  $\text{TM}_{mn}$ , sus distribuciones de campo difieren. La ec. (4-114) da la expresión matemática para la componente  $E_z$ . Derivando ésta con relación a  $x$  y  $y$ , y sustituyendo en las ecs. (4-58) y (4-59), se obtienen las componentes  $E_x$  y  $E_y$ . Finalmente, las ecs. (4-60) y (4-61) se pueden utilizar

para encontrar las dos componentes restantes,  $H_x$  y  $H_y$ . La solución completa fasorial para los campos de los modos  $TM_{mn}$  resulta ser entonces:

$$E_{x_{mn}} = \left[ \frac{-jA\beta \frac{m\pi}{a}}{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \right] \left( \cos \frac{m\pi}{a} x \right) \left( \sin \frac{n\pi}{b} y \right) e^{-j\beta z}$$

$$E_{y_{mn}} = \left[ \frac{-jA\beta \frac{n\pi}{b}}{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \right] \left( \sin \frac{m\pi}{a} x \right) \left( \cos \frac{n\pi}{b} y \right) e^{-j\beta z} \quad (4-117)$$

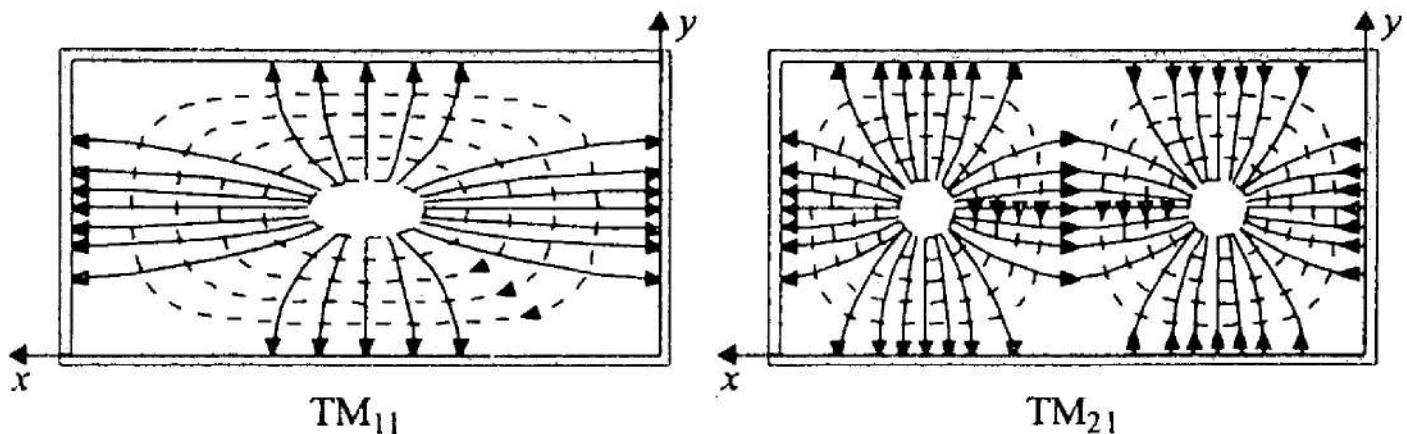
$$E_{z_{mn}} = A \left( \sin \frac{m\pi}{a} x \right) \left( \sin \frac{n\pi}{b} y \right) e^{-j\beta z}$$

$$H_{x_{mn}} = -\frac{\omega\epsilon}{\beta} E_{y_{mn}}$$

$$H_{y_{mn}} = \frac{\omega\epsilon}{\beta} E_{x_{mn}}$$

$$H_{z_{mn}} = 0 \quad (\text{condición para los modos } TM_{mn})$$

Debe notarse que si  $m$  o  $n$  valen cero, la expresión para  $E_{z_{mn}}$  en el conjunto de ecs. (4-117) se vuelve idéntica a cero. Esto haría imposible la existencia de una onda TM en la guía, y por ello se descartaron anticipadamente los valores de  $n = 0$  y  $m = 0$  en las ecs. (4-115) y (4-116). Por lo tanto, el modo TM más bajo que puede propagarse en una guía rectangular es el  $TM_{11}$ . En cambio, como ya se vió en la sección anterior para los modos TE,  $m$  o  $n$  sí pueden valer cero y los modos  $TE_{10}$ ,  $TE_{01}$ ,  $TE_{20}$ , etc., sí existen. En la Fig. 4-13 se muestran los patrones de los campos eléctrico y magnético correspondientes a los modos  $TM_{11}$  y  $TM_{21}$ .



**Fig. 4-13** Patrones de campo eléctrico (—) y campo magnético (---) de los modos de propagación  $TM_{11}$  y  $TM_{21}$  en una guía rectangular.

En cuanto a la impedancia de onda para estos modos, su variación con la frecuencia está dada por la ec. (4-91), haciendo  $\gamma = j\beta$  en el rango de propagación:

$$Z_{TM_{mn}} = \frac{\beta_{mn}}{\omega\epsilon} \quad (4-118)$$

Y en términos de la frecuencia de corte, la misma impedancia puede calcularse como

$$Z_{TM_{mn}} = \eta \sqrt{1 - \left(\frac{f_{c_{mn}}}{f}\right)^2} \quad =(4-93)$$

La forma de su gráfica correspondiente, a partir de la frecuencia de corte para cada modo, es similar a la mostrada en la Fig. 4-10.

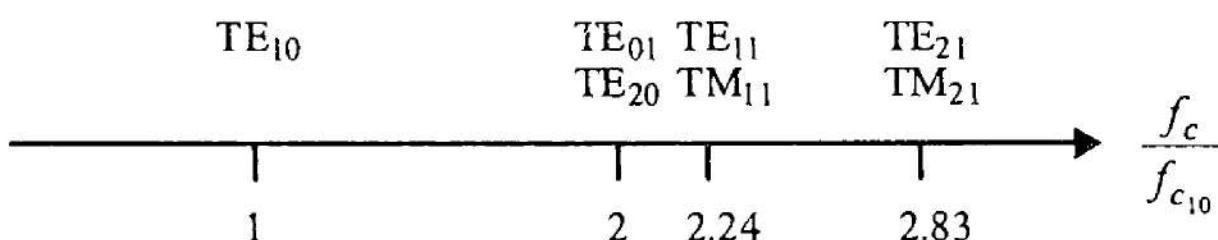
**Ejercicio 4-14** Considere una guía rectangular cualquiera cuyas dimensiones cumplen con la proporción  $a = 2b$  y está llena de aire. Encuentre la frecuencia de corte de los primeros siete modos que pueden propagarse en la guía, sean TE o TM. Normalice cada frecuencia de corte con relación a la más baja e indique cuál es la proporción del rango de frecuencias en el que únicamente se propaga el primer modo.

**Solución**

La frecuencia de corte de ambos tipos de modos se calcula empleando la ec. (4-103):

Modo	$f_c$	frecuencia de corte normalizada con relación a la del modo $\text{TE}_{10}$
$\text{TE}_{10}$	$f_c = \frac{c}{2a} = (0.5) \frac{c}{a}$	1.00
$\text{TE}_{01}$ y $\text{TE}_{20}$	$f_c = \frac{c}{a} = (1) \frac{c}{a}$	2.00
$\text{TE}_{11}$ y $\text{TM}_{11}$	$f_c = (1.118) \frac{c}{a}$	2.24
$\text{TE}_{21}$ y $\text{TM}_{21}$	$f_c = (1.414) \frac{c}{a}$	2.83

En un eje de frecuencias de corte normalizadas, los resultados anteriores pueden representarse como sigue:



El primer modo de propagación es el  $\text{TE}_{10}$ , y éste es el único que se propaga en un rango de frecuencias de 2 : 1. Por ejemplo, si la frecuencia de corte de este primer modo fuese 1.5 GHz, la de los modos  $\text{TE}_{01}$  y  $\text{TE}_{20}$  sería de 3 GHz, y el ancho de banda con un solo modo presente sería igual a 1.5 GHz ( $1.5 \text{ GHz} < f < 3 \text{ GHz}$ ). A efectos de comparación, se recomienda repasar el Ejercicio 4-12, donde  $a = 2b$ .

#### 4.8.3 El modo dominante y estándares de guías

En el ejercicio anterior se demostró que la frecuencia de corte más baja para una guía rectangular de dimensiones  $a = 2b$  corresponde al modo de propagación  $\text{TE}_{10}$ . En general, de acuerdo con la ec. (4-103), para toda guía que cumpla  $a > b$ , la frecuencia de corte más baja siempre se obtiene para  $m = 1$  con  $n = 0$  ( $\text{TE}_{10}$ ). Después sigue la de los modos para  $m = 2$  con  $n = 0$  ( $\text{TE}_{20}$ ) o  $m = 0$  con  $n = 1$  ( $\text{TE}_{01}$ ), o  $m = 1$  con  $n = 1$  ( $\text{TE}_{11}$  y  $\text{TM}_{11}$ ), dependiendo de las magnitudes relativas de  $a$  y  $b$ . O sea que siempre hay un rango de frecuencias en el que solamente se propaga un modo: el  $\text{TE}_{10}$ . Por tal razón, a este modo se le denomina *modo dominante*. La frecuencia de corte del modo dominante está dada, entonces, por la ecuación:

$$f_{c_{10}} = \frac{\nu}{2a} \quad (4-119)$$

y es independiente de la dimensión  $b$ .

En cualquier sistema de microondas, el número de modos que puede existir dentro de una guía rectangular depende de sus dimensiones  $a$  y  $b$ , del material que hay en su interior, y del dispositivo de excitación (fuente de microondas y frecuencia de operación) acoplado a la guía. Si la guía trabaja con varios modos a la vez, la potencia total se distribuye entre ellos, y al querer detectar dicha potencia al final de la línea, la operación se complica y encarece, debido a la instrumentación (sondas, detectores, etc.) que se requiere. Por ello, generalmente se prefiere trabajar una guía en un solo modo, es decir, en el modo dominante  $\text{TE}_{10}$ . Por lo que se refiere al dispositivo de excitación para iniciar la transmisión a lo largo de la guía, en general éste produce muchos modos simultáneamente, con potencias en distintas proporciones. Sin embargo, si la guía opera sólo en el modo  $\text{TE}_{10}$ , todos los demás modos superiores emitidos por la fuente de microondas son atenuados y no se propagan. Conviene entonces dedicar más atención al modo  $\text{TE}_{10}$  y examinar sus características más detalladamente.

Las guías rectangulares son muy útiles, porque tienen un ancho de banda muy grande dentro del cual sólo se propaga el modo dominante. Esto permite transmitir enormes cantidades de información a lo largo de la guía. Hay en el mercado un rango muy amplio de estándares, que tienen las dimensiones

adecuadas para trabajar en frecuencias desde los 300 MHz hasta los 300 GHz. En la Tabla 4-2 se muestran algunos de estos estándares.

**Tabla 4-2** Lista de algunos estándares para guías rectangulares y frecuencias de operación recomendadas en el modo dominante.

Designación	Dimensiones internas		Frecuencia de corte para el modo TE <sub>10</sub>	Rango recomendado de frecuencias
EIA*	U.K. **	(a × b, cm)	(GHz)	(GHz)
WR 284	WG 10	7.214 × 3.404	2.080	2.60 a 3.95
WR 187	WG 12	4.755 × 2.215	3.155	3.95 a 5.85
WR 137	WG 14	3.485 × 1.580	4.285	5.85 a 8.20
WR 112	WG 15	2.850 × 1.262	5.26	7.05 a 10.0
WR 90	WG 16	2.286 × 1.016	6.56	8.2 a 12.4
WR 62	WG 18	1.580 × 0.7899	9.49	12.4 a 18.0
WR 42	WG 20	1.067 × 0.4318	14.08	18.0 a 26.5
WR 28	WG 22	0.7112 × 0.3556	21.1	26.5 a 40.0
WR 22	WG 23	0.569 × 0.2845	26.35	33.0 a 50.0

\* EIA = Electronic Industry Association, Estados Unidos.

\*\* U.K. = United Kingdom (Reino Unido).

Como puede apreciarse en la tabla, no se recomienda trabajar demasiado cerca de la frecuencia de corte del modo TE<sub>10</sub>. Esto se debe a que la velocidad de fase cambia muy rápido cerca de dicha frecuencia. Además, es necesario mantener la operación de la guía por debajo de la frecuencia de corte del modo siguiente. En general, el rango de operación en la práctica comienza desde la frecuencia de corte del modo dominante más un 25%, aproximadamente, hasta la frecuencia de corte del modo siguiente menos un 25% (o sea, un 75% de la frecuencia de corte de ese modo).

**Ejercicio 4-15** Considere la guía estándar WG12 de la Tabla 4-2, llena de aire. Debajo de la frecuencia de corte, por ejemplo a 2.5 GHz, la propagación no es posible. ¿Cuánto vale la constante de atenuación  $\alpha$  a esta frecuencia, para el modo dominante?

*Solución*

La constante  $\alpha$  puede obtenerse de la ec. (4-102) para cuando  $\gamma$  es puramente real:

$$\alpha = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2 \mu \epsilon}$$

Para el modo  $TE_{10}$ , la ecuación anterior se reduce a:

$$\alpha = \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 - (2\pi)^2 \mu \epsilon f^2}$$

Ahora bien, de acuerdo con la ec. (4-119):

$$f_{c_{10}} = \frac{\nu}{2a}$$

Por lo que

$$\alpha = \sqrt{\frac{4\pi^2}{\nu^2} f_{c_{10}}^2 - 4\pi^2 \mu \epsilon f^2}$$

y como  $\mu \epsilon = 1/\nu^2$ :

$$\alpha = \frac{2\pi}{\nu} \sqrt{f_{c_{10}}^2 - f^2}$$

La frecuencia de corte de la guía para el modo dominante es 3.155 GHz y  $\nu = c$ . Entonces:

$$\alpha = \frac{2\pi}{3 \times 10^8} \sqrt{(3.155 \times 10^9)^2 - (2.5 \times 10^9)^2}$$

$$= \frac{2\pi}{3} \sqrt{370.4} = 40.3 \text{ Np/m}$$

y empleando la ec. (2-18):

$$\alpha = 350 \text{ dB/m}$$

Esta atenuación es tan grande, que se demuestra que una onda a una frecuencia inferior a la de corte no puede llegar a ninguna parte en una línea práctica.

---

**Ejercicio 4-16** Para la misma guía del ejercicio anterior, grafique la velocidad de fase y la velocidad de grupo del modo dominante, en función de la frecuencia.

### Solución

La velocidad de fase se calcula empleando la ec. (4-105):

$$v_{p_{mn}} = v \left[ \frac{f}{\sqrt{f^2 - f_{c_{mn}}^2}} \right]$$

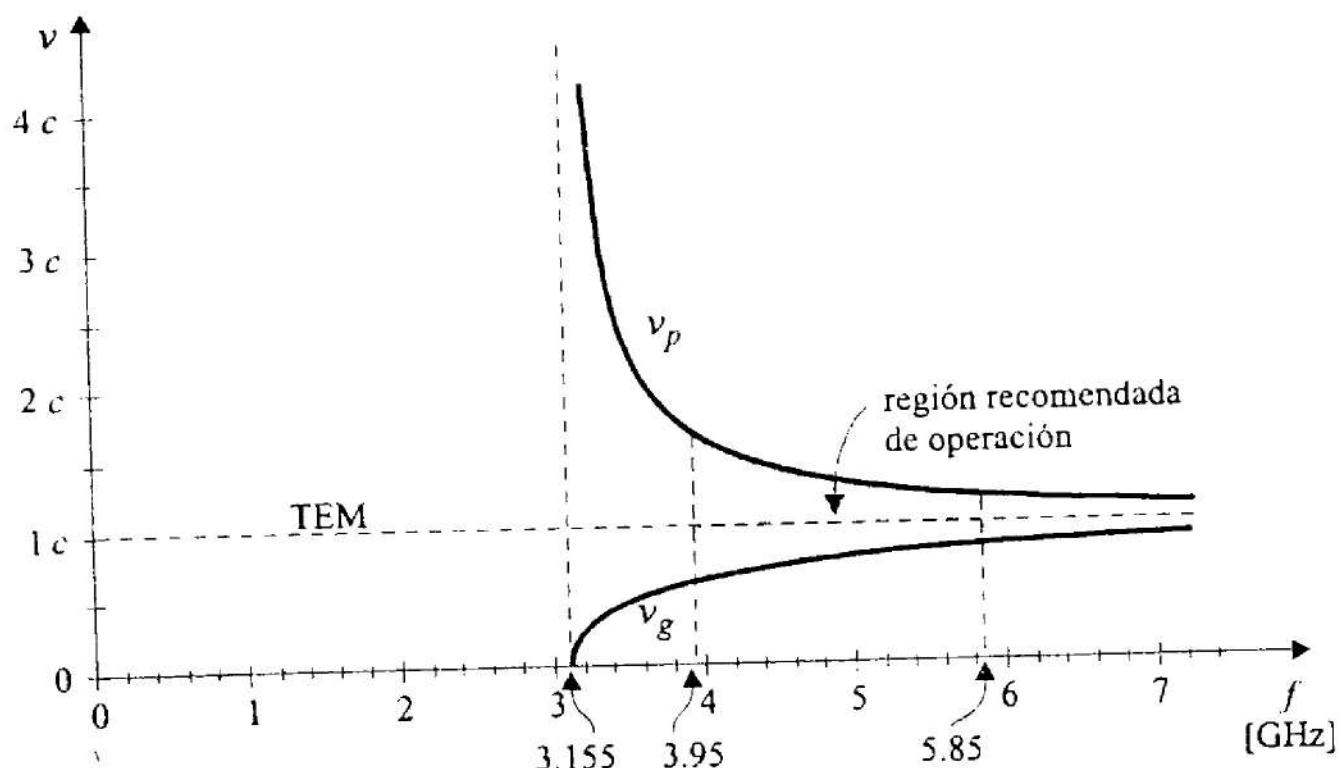
Para el modo dominante de la guía WG12, la frecuencia de corte es 3.155 GHz. Para la gráfica pedida, conviene comparar la velocidad de fase con relación a la velocidad  $v$ , que en este caso es igual a la de la luz. La ecuación anterior queda entonces como:

$$v_{p_{10}} = c \left[ \frac{f}{\sqrt{f^2 - (3.155 \times 10^9)^2}} \right]$$

Para calcular la velocidad de grupo, se emplea la ec. (4-110), con  $v = c$ :

$$v_{g_{10}} = c \sqrt{1 - (f_{c_{10}}/f)^2}$$

A partir de las dos ecuaciones anteriores se obtienen las gráficas siguientes para el modo dominante  $\text{TE}_{10}$ :



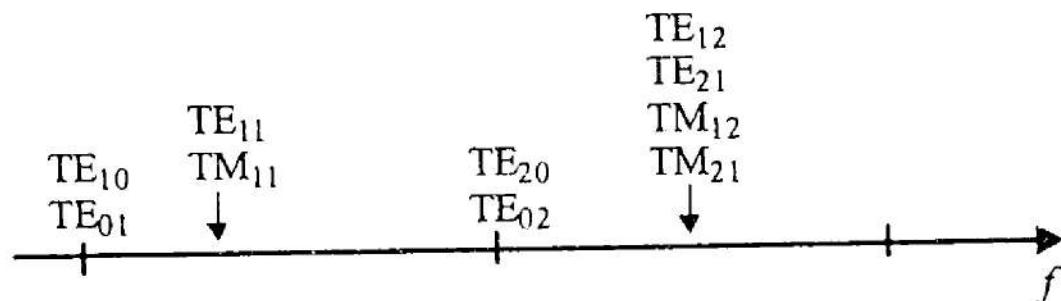
#### 4.8.4 Modos degenerados

A reserva de continuar estudiando las características del modo dominante  $\text{TE}_{10}$  en una guía rectangular, conviene efectuar un paréntesis para hacer mención en esta sección de la existencia de modos degenerados y la imposibilidad de que haya un modo dominante en determinados tipos de guías.

Considérese una guía cuadrada, en la que  $a = b$ . Una inspección rápida de la ec. (4-103) revela que la frecuencia de corte de los modos  $\text{TE}_{mn}$  siempre es la misma que la de los modos  $\text{TE}_{nm}$ . Esto impide que haya un modo dominante. De hecho, la distribución de los campos del modo  $\text{TE}_{mn}$  sólo difiere de la distribución de los campos del modo  $\text{TE}_{nm}$  por una simple rotación de  $90^\circ$  de la guía sobre su eje longitudinal, pues  $a$  toma el lugar de

*b*, y viceversa. A los modos que tienen la misma frecuencia de corte se les llama *degenerados*, y no son deseables porque son susceptibles al acoplamiento de modos e interferencias.

El orden de aparición de los modos degenerados TE y TM de una guía cuadrada se muestra a continuación, para los primeros modos.



#### 4.8.5 Corrientes en las paredes

La distribución de las corrientes en las paredes interiores de una guía se puede obtener a partir del campo magnético en cada pared, utilizando sucesivamente la expresión

$$\mathbf{J}_s = -\mathbf{a}_n \times \mathbf{H} \quad (4-120)$$

en donde  $\mathbf{J}_s$  es la densidad pelicular de corriente en la superficie considerada de la guía,  $\mathbf{a}_n$  es un vector normal unitario que sale de esa superficie\*, y  $\mathbf{H}$  es el vector de campo magnético evaluado en la misma pared. Este método es el mismo para cada modo de propagación, pero como la expresión matemática de  $\mathbf{H}$  difiere en cada caso, obviamente la distribución de las corrientes en las paredes también es diferente para cada modo.

Es cierto que los conductores empleados para fabricar las paredes de una guía no son perfectos. Sin embargo, si se recuerda el concepto de la profundidad de penetración (ec. 2-2), es claro que a frecuencias mayores que 1 GHz, la penetración en una pared de cobre, por ejemplo, es del orden de micras y muchísimo menos que el valor de la longitud de onda. Bajo esta

---

\* En algunos textos, la ecuación se define como  $\mathbf{J}_s = \mathbf{a}_n \times \mathbf{H}$ , pero el vector normal unitario cambia de dirección, hacia el interior de la guía. Obviamente, los resultados son los mismos.

consideración, es permisible aproximar la corriente en cada pared de la guía como una película ideal, cuya magnitud y dirección están dadas precisamente por la ec. (4-120).

El procedimiento a seguir se ilustrará a continuación, obteniendo la distribución de corrientes para el modo dominante  $TE_{10}$  de la guía rectangular. Considérese para ello la numeración de las paredes interiores mostrada en la Fig. 4-14.

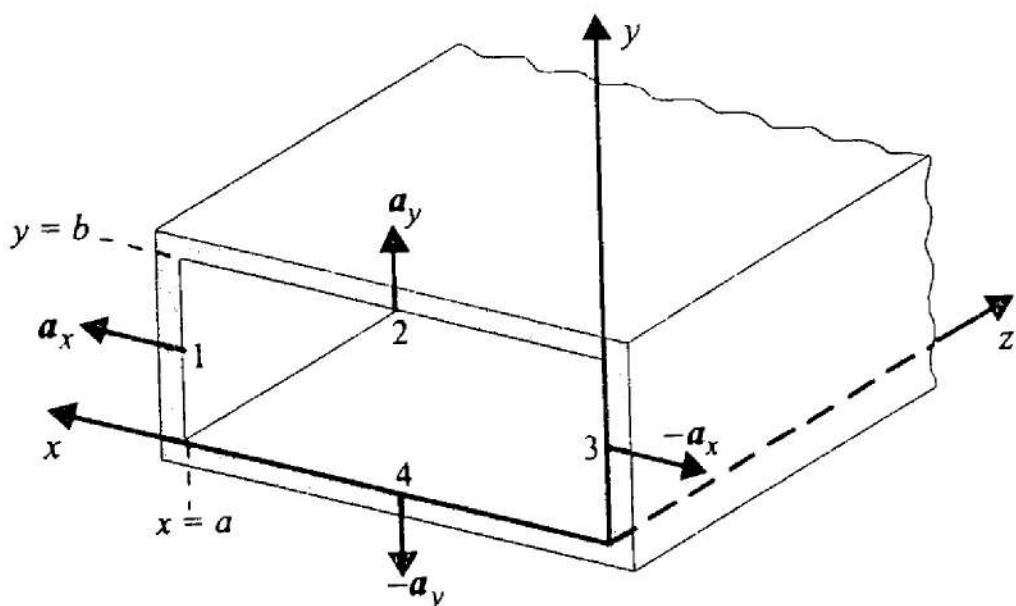


Fig. 4-14 Vectores normales unitarios en las cuatro paredes interiores de la guía.

El vector  $\mathbf{H}$  de los modos TE está dado por las ecs. (4-101). Para el modo dominante,  $m = 1$  y  $n = 0$ . Por lo tanto, suprimiendo la variación  $e^{-j\beta z}$ :

$$\mathbf{H} = \left[ \frac{jA_0\beta a}{\pi} \right] \left( \sin \frac{\pi}{a} x \right) \mathbf{a}_x + A_0 \left( \cos \frac{\pi}{a} x \right) \mathbf{a}_z \quad (4-121)$$

Sustituyendo la ec. (4-121) y el vector normal unitario correspondiente a cada pared en la ec. (4-120), se obtiene:

Pared

 $\mathbf{a}_n$ 

$$\mathbf{J}_s = -\mathbf{a}_n \times \mathbf{H}$$

$$1 \quad (x = a) \quad \mathbf{a}_x$$

$$-\mathbf{A}_0 \mathbf{a}_y$$

$$2 \quad (y = b) \quad \mathbf{a}_y$$

$$-\mathbf{A}_0 \left( \cos \frac{\pi}{a} x \right) \mathbf{a}_x + \left[ \frac{j \mathbf{A}_0 \beta a}{\pi} \right] \left( \sin \frac{\pi}{a} x \right) \mathbf{a}_z$$

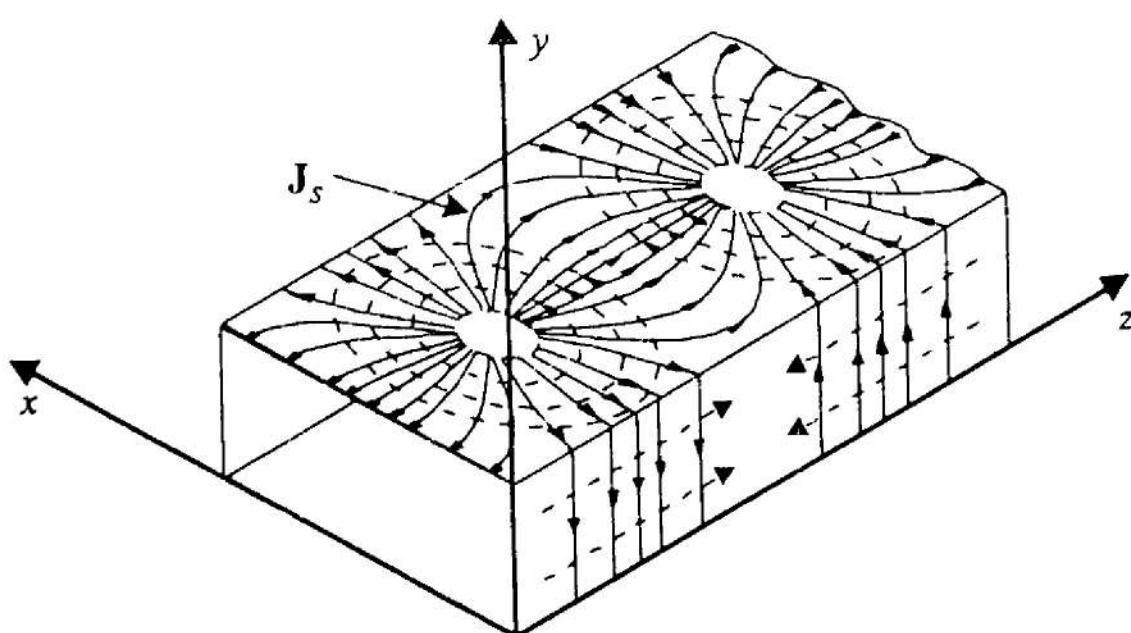
$$3 \quad (x = 0) \quad -\mathbf{a}_x$$

$$-\mathbf{A}_0 \mathbf{a}_y$$

$$4 \quad (y = 0) \quad -\mathbf{a}_y$$

$$\mathbf{A}_0 \left( \cos \frac{\pi}{a} x \right) \mathbf{a}_x - \left[ \frac{j \mathbf{A}_0 \beta a}{\pi} \right] \left( \sin \frac{\pi}{a} x \right) \mathbf{a}_z$$

Esta distribución o patrón de corrientes se puede dibujar para un instante determinado, tal como se muestra en la Fig. 4-15. Sin embargo, no debe perderse de vista el hecho de que este patrón se desplaza o propaga como una onda en la dirección  $z$ . La dirección del flujo de corriente sobre cada pared siempre forma ángulos rectos con la dirección del campo magnético. Así, en las paredes laterales, la corriente es vertical; y en las paredes horizontales, tiene una orientación diagonal o recta, según la posición. Como el material conductor de la guía no es perfecto y presenta cierta resistencia,



**Fig. 4-15** Patrón de corrientes en las paredes *interiores* de una guía rectangular, para el modo dominante  $TE_{10}$ . (--- líneas de campo magnético en las paredes).

el flujo de la corriente superficial se traduce en potencia disipada, es decir, en atenuación. La trayectoria de la corriente parece estar interrumpida de la pared superior a la inferior, pero se complementa con una corriente de desplazamiento que va de arriba hacia abajo en las regiones centrales de la ilustración (véase la siguiente sección).

En algunos casos, puede ser necesario hacer pequeñas ranuras en la guía, con el fin de introducir una sonda y muestrear los campos en su interior. Estas ranuras deben ser angostas y paralelas a la dirección de la corriente, para que la distribución de los campos no se vea afectada dentro de la guía. Por tal razón, es importante conocer la distribución de las corrientes en las paredes.

En la Fig. 4-16 a) se ilustran dos ranuras posibles para detectar ondas estacionarias en la guía, produciendo una perturbación mínima de los campos del modo  $TE_{10}$ . En cambio, las ranuras mostradas en la Fig. 4-16 b) si producirían perturbaciones significativas en el patrón de corrientes, provocando además radiación de potencia hacia el exterior\*.

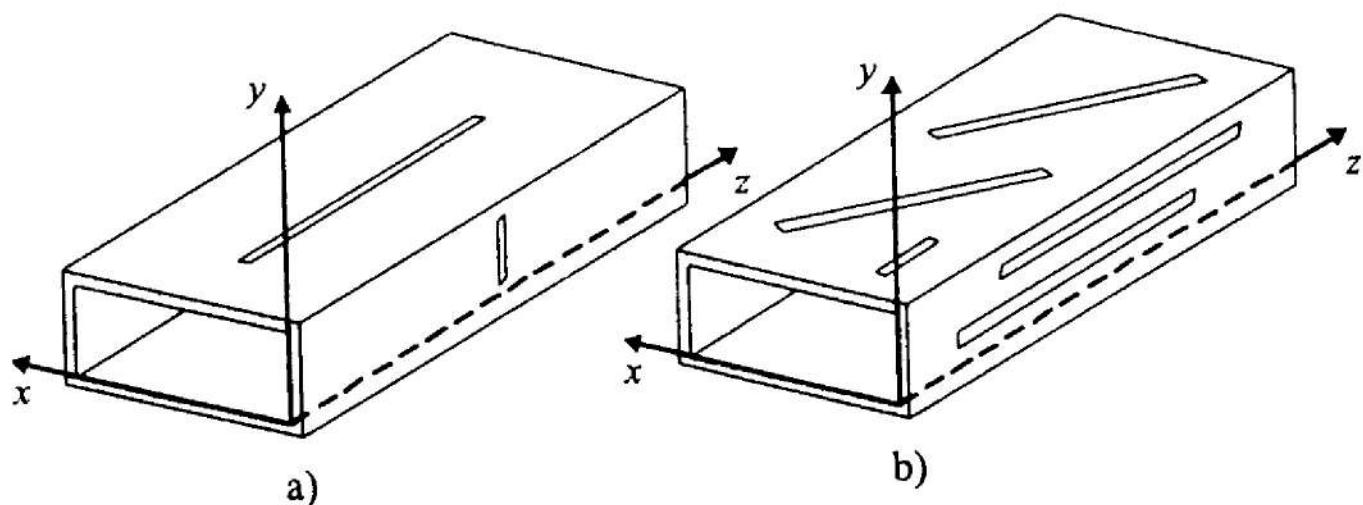


Fig. 4-16 a) Ranuras que producen perturbación mínima de los campos.  
b) Ranuras que producen perturbaciones significativas. Compárese cada ranura con la orientación de las corrientes de la Fig. 4-15.

\* Estas ranuras perturbadoras son la base para el diseño de antenas de ranura, también llamadas antenas ranuradas.

#### 4.8.6 Potencia transmitida

La potencia que fluye a lo largo de la guía se puede calcular a partir del vector complejo de Poynting:

$$\mathbf{P}_d = \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \quad (4-122)$$

en donde  $\mathbf{P}_d$  es el vector de Poynting y equivale a una densidad local de flujo de potencia en  $\text{W/m}^2$ ,  $\mathbf{E}$  es el fasor del campo eléctrico y  $\mathbf{H}^*$  es el conjugado del fasor del campo magnético. Al integrar esta densidad de flujo de potencia en toda la sección transversal de la guía, la potencia promedio que fluye por ella, en la dirección  $z$ , está dada por:

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ \int_s \mathbf{P}_d \cdot d\mathbf{s} \right] , \quad [\text{W}] \quad (4-123)$$

en donde  $d\mathbf{s}$  es el vector de la diferencial de superficie en la sección transversal y dirigido hacia afuera de dicha superficie (es decir, en la dirección de  $z$ ).

Para el caso del modo dominante, a partir de las ecs. (4-101), se tienen las únicas componentes de campo siguientes:

$$E_y = - \frac{\omega \mu}{\beta} H_x \quad (4-124)$$

$$H_x = \frac{j A_0 \beta a}{\pi} \sin \frac{\pi}{a} x \quad (4-125)$$

$$H_z = A_0 \cos \frac{\pi}{a} x \quad (4-126)$$

Estas tres ecuaciones demuestran que la distribución de los campos del modo dominante es muy sencilla, pues todo el campo eléctrico está orientado en la dirección  $y$ , no depende de la variable  $y$ , y su intensidad varía senoidalmente a lo largo del ancho de la guía (variable  $x$ ), de acuerdo con la ilustración de la Fig. 4-12. Por su parte, el campo magnético forma líneas cerradas en el plano  $x-z$  y su intensidad tampoco depende de la variable  $y$ .

En la Fig. 4-17 se muestra un bosquejo de cómo estarían distribuidos los campos en el interior de la guía en un instante determinado. Desde luego, esta distribución se mueve o propaga a lo largo de la guía, en la dirección z, al igual que la distribución de corrientes de la Fig. 4-15 también se desplaza.

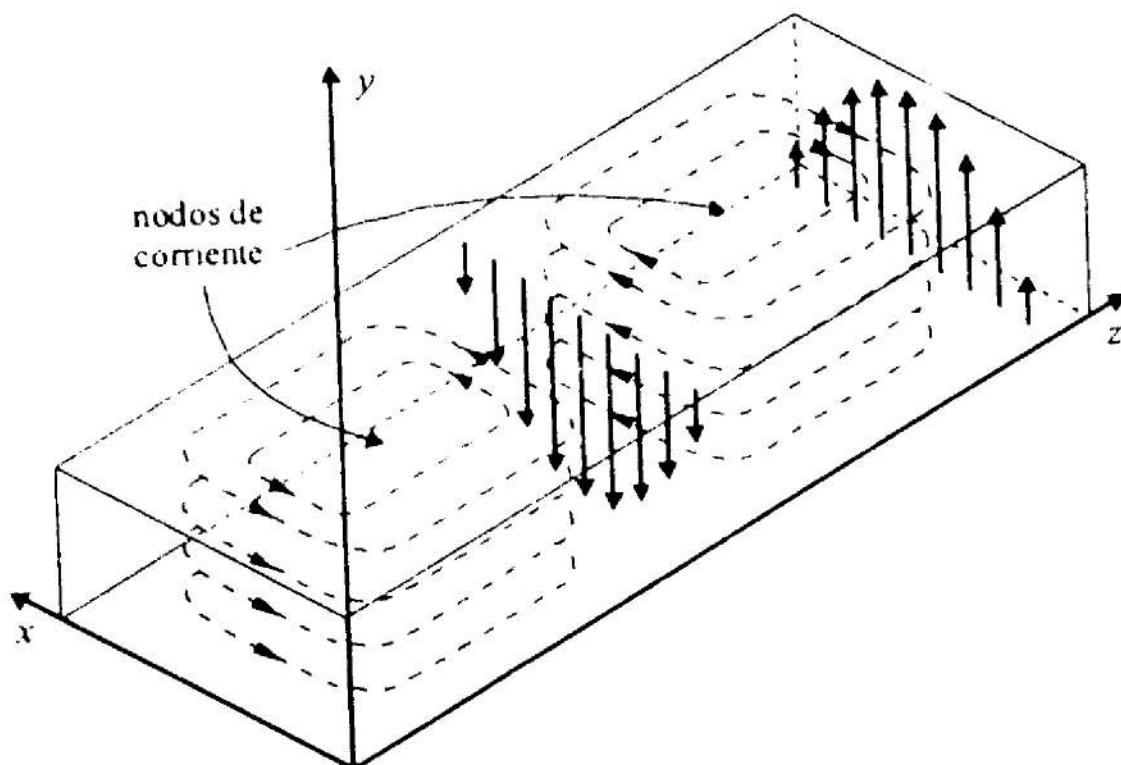


Fig. 4-17. Distribución de los campos del modo dominante en el interior de una guía rectangular. (— E, - - H).

Comparando ambas figuras 4-15 y 4-17, un nodo de corriente coincide con la posición de un mínimo de la intensidad del campo eléctrico. Es precisamente en un punto mínimo en donde el campo eléctrico adquiere su máxima razón de cambio (proporcional a  $\partial D / \partial t$ ), y si se recuerdan las ecs. (1-4) y (2-3), se concluye que en ese punto mínimo (coincidente con el nodo de corriente) hay una corriente de desplazamiento que completa el circuito de la corriente de conducción en las paredes de la guía, situación que ya había sido mencionada en la sección anterior.

Si ahora deseamos calcular la potencia transmitida por el modo dominante, a partir de las ecs. (4-124), (4-125), (4-126) y (4-122), se observa que el vector de Poynting tiene dos componentes:

$$P_{d_x} = E_y H_z^* \quad (4-127)$$

$$P_{d_z} = -E_y H_x^* \quad (4-128)$$

La ec. (4-128) representa la componente de interés, es decir, la densidad del flujo axial de potencia; y por lo tanto, la potencia promedio transmitida en la dirección  $z$  se obtiene, a partir de la ec. (4-123) e integrando en toda la sección transversal de la guía, como:

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ \int_0^b \int_0^a (-E_y H_x^*) dx dy \right]$$

Sustituyendo las ecs. (4-124) y (4-125) en esta última ecuación, se tiene que:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ \int_0^b \int_0^a \left( \frac{j\omega\mu A_0 a}{\pi} \sin \frac{\pi}{a} x \right) \left( -\frac{jA_0 \beta a}{\pi} \sin \frac{\pi}{a} x \right) dx dy \right] \\ &= \left( \frac{1}{2} \right) \left( \frac{\omega\mu\beta A_0^2 a^2}{\pi^2} \right) \int_0^b \int_0^a \left( \sin^2 \frac{\pi}{a} x \right) dx dy \\ &= \left( \frac{\omega\mu\beta A_0^2 a^2}{2\pi^2} \right) \left( \frac{ab}{2} \right) \end{aligned} \quad (4-129)$$

Esta última ecuación también se puede escribir en términos de la frecuencia de corte y la frecuencia de trabajo, sustituyendo la ec. (4-104) en el lugar de  $\beta$ :

$$\beta = \left( \frac{2\pi}{v} \right) \sqrt{f^2 - f_{c_{10}}^2} \quad =(4-104)$$

$$\begin{aligned}
 P &= \left( \frac{\omega \mu A_0^2 a^2}{\pi v} \right) \left( \frac{ab}{2} \right) \sqrt{f^2 - f_{c_{10}}^2} \\
 &= \frac{2\pi f A_0^2 a^3 b \mu}{2\pi v} \left( \frac{\sqrt{\mu\epsilon}}{\sqrt{\mu\epsilon}} \right) \sqrt{f^2 - f_{c_{10}}^2} \\
 &= \frac{A_0^2 a^3 b \eta}{v^2} f \sqrt{f^2 - f_{c_{10}}^2} \tag{4-130}
 \end{aligned}$$

Nótese, a partir de la ec. (4-126), que  $A_0$  es la magnitud máxima del campo magnético  $H_z$  en la pared lateral de la guía (ya que  $x = 0$  y el coseno es igual a 1).

**Ejercicio 4-17** Considérese la guía rectangular estándar WG 14, cuyo rango de frecuencias de operación recomendado para el modo dominante es  $5.85 \text{ GHz} \leq f \leq 8.20 \text{ GHz}$ , y sus dimensiones internas son  $a = 3.485 \text{ cm}$  y  $b = 1.580 \text{ cm}$ . El dieléctrico dentro de la guía es aire y se desea transmitir el máximo de potencia posible a una frecuencia de 6 GHz. Si el aislamiento del aire, de acuerdo con sus condiciones, se rompe cuando la intensidad del campo eléctrico rebasa los  $1.5 \text{ MV/m}$ , ¿cuánto vale esa potencia máxima permisible a lo largo de la guía?

### Solución

De la ec. (4-124) se tiene que:

$$\begin{aligned}
 |E_y|_{\substack{\text{máximo} \\ \text{permisible}}} &= \frac{A_0 a \omega \mu}{\pi} \left( \operatorname{sen} \frac{\pi}{a} x \right)_{\text{máx.}} = 1.5 \times 10^6 \text{ V/m} \\
 \Rightarrow A_0 &= \frac{1.5 \times 10^6 \pi}{a \omega \mu}
 \end{aligned}$$

Sustituyendo el valor de  $A_0$  en la ec. (4-129), se obtiene la máxima potencia permisible:

$$P_{\max.} = \left( \frac{\omega \mu \beta a^2}{2\pi^2} \right) \left( \frac{3 \times 10^6 \pi}{a \omega \mu} \right)^2 \left( \frac{ab}{2} \right) = \left( \frac{\beta a b}{4 \omega \mu} \right) \underbrace{\left( 1.5 \times 10^6 \right)^2}_{|E|_{\max.}^2}$$

De acuerdo con la Tabla 4-2, la frecuencia de corte del modo dominante para la guía WG 14 es 4.285 GHz. La frecuencia de operación especificada es de 6 GHz, por lo que la constante de fase se calcula a partir de la ec. (4-104) como:

$$\begin{aligned} \beta_{10} &= \frac{2\pi}{c} \sqrt{f^2 - f_{c_{10}}^2} \\ &= \frac{2\pi}{3 \times 10^8} \sqrt{6^2 - 4.285^2} \times 10^9 = 87.96 \text{ rad/m} \end{aligned}$$

Finalmente:

$$P_{\max.} = \left( \frac{87.96 \times 3.485 \times 10^{-2} \times 1.580 \times 10^{-2}}{4 \times 2\pi \times 6 \times 10^9 \times 4\pi \times 10^{-7}} \right) (2.25 \times 10^{12}) = 575 \text{ kW}$$

En la práctica, la guía se operaría por debajo de este valor teórico. En el caso de que se desease transmitir más potencia, habría que utilizar una guía de mayores dimensiones transversales y una frecuencia más baja. La altura de la guía (dimensión  $b$ ) determina el valor exacto de  $|E|_{\max.}$  permisible antes de que se rompa el aislante del aire; y desde luego, este valor cambiaría si el dieléctrico fuese diferente al aire. Otra forma de aumentar la potencia es presurizando la guía, ya sea con aire o con algún gas como el freón, o incluso creando un vacío. Las características empleadas dependerán finalmente de la aplicación de la guía.

En la Tabla 4-3 se proporcionan los rangos recomendados para la potencia transmitida en los estándares descritos anteriormente en la Tabla 4-2, así como los niveles de atenuación en cada guía. A continuación se estudiará precisamente cómo calcular la atenuación en una guía rectangular.

**Tabla 4-3** Potencia máxima de transmisión recomendada y niveles de atenuación en guías rectangulares.

Designación EU	Potencia máxima recomendada (kW)	Atenuación* a las frecuencias inferior y superior del rango recomendado en la Tabla 4-2 (dB/100 m)
Reino Unido		
WR 284	WG 10	2,400
WR 187	WG 12	1,000
WR 137	WG 14	540
WR 112	WG 15	350
WR 90	WG 16	230
WR 62	WG 18	120
WR 42	WG 20	48
WR 28	WG 22	25
WR 22	WG 23	15

\* Suponiendo paredes de aluminio (Al) o de plata (Ag) y aire como dieléctrico en el interior de la guía. Con paredes de cobre, la atenuación es diferente.

#### 4.8.7 Atenuación

En la Tabla 4-3 se observa algo muy interesante: a mayor frecuencia, menor atenuación, dentro del rango de operación de cada guía rectangular. Esto contrasta con las líneas bifilares y coaxiales, en las que la atenuación aumenta progresivamente con la frecuencia (por ejemplo, véanse los resultados del Ejercicio 2-4). En esta sección se verá el procedimiento para obtener las curvas de atenuación de las guías rectangulares, y se demostrará que, en efecto, la atenuación disminuye conforme la frecuencia aumenta, hasta cierto valor de frecuencia de trabajo, a partir del cual la atenuación comienza a ascender otra vez. De esta forma, se tiene una región de frecuencias donde la atenuación es mínima. En la misma Tabla 4-3, se nota que las guías que trabajan a frecuencias sumamente altas se fabrican con

paredes interiores de plata, a fin de reducir un poco las altas atenuaciones que se producen a estas frecuencias tan elevadas (compárese la conductividad del aluminio con la del cobre y la plata en la Tabla 2-1). Como la atenuación de estas últimas guías es excesiva, sólo se utilizan en tramos muy cortos. Asimismo, es de esperarse que las guías con paredes de cobre tengan atenuaciones menores que las hechas de aluminio, cuyos valores típicos (según la calidad del acabado en su fabricación) están en la Tabla 4-3.

Evidentemente, en el análisis para calcular la atenuación  $\alpha$  en la guía se debe considerar que los campos progresan atenuándose de acuerdo con un factor  $e^{-\alpha z}$ , además de que también están afectados por  $e^{-j\beta z}$ . Dicho de otra forma, ahora  $\gamma = \alpha + j\beta$ , puesto que los conductores de las paredes ya no se consideran perfectos ( $\alpha \neq 0$ ). Como la potencia transmitida,  $P$ , varía proporcionalmente al cuadrado de los campos, se tiene, ignorando la variación en fase:

$$P = P_0 e^{-2\alpha z} \quad (4-131)$$

en donde  $P_0$  es la potencia inicial.

Si se deriva la ec. (4-131) para despejar  $\alpha$ , se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dz} &= P_0 (-2\alpha) e^{-2\alpha z} = (-2\alpha) P \\ \Rightarrow \alpha &= \left( -\frac{1}{2P} \right) \left( \frac{dP}{dz} \right) \end{aligned} \quad (4-132)$$

En la ec. (4-132),  $P$  es nuevamente la potencia transmitida a lo largo de la guía, a través del dieléctrico interior (generalmente aire), y la disminución  $-(dP/dz)$  es la potencia perdida o disipada en las paredes metálicas de la guía.

La potencia transmitida ya se obtuvo integrando el vector de Poynting en la sección 4.8.6, y resultó ser igual a:

$$P = \left( \frac{\omega \mu \beta A_0^2 a^2}{2\pi^2} \right) \left( \frac{ab}{2} \right) \quad =(4-129)$$

Por otra parte, la potencia perdida por efecto Joule en el interior de un conductor se calcula por medio de la expresión  $(R_s / 2) J^2$ . Esta relación es similar a la que se emplea en teoría general de circuitos concentrados, donde la potencia disipada es  $(R / 2) I^2$ . Como la guía tiene cuatro paredes, la potencia total perdida se obtiene haciendo una integral de contorno en la sección transversal:

$$-\frac{dP}{dz} = \left( \frac{R_s}{2} \right) \int_c J_s^2 dc \quad (4-133)$$

en donde  $R_s$  es la resistencia pelicular en cada superficie interior de la guía, dada por:

$$R_s = \frac{1}{\sigma_c l} \quad (4-134)$$

En esta última ecuación,  $\sigma_c$  es la conductividad del material conductor y  $l$  es la profundidad de penetración dada por la ec. (2-2), a una determinada frecuencia. Sustituyendo la ec. (2-2) en la ec. (4-134), se tiene:

$$R_s = \frac{1}{\sigma_c \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma_c}}} = \sqrt{\frac{\omega \mu}{2 \sigma_c}} = \sqrt{\frac{\pi \mu}{\sigma_c}} \sqrt{f} \quad = (4-134)$$

Ahora bien,  $J_s$  es la densidad de corriente en la superficie de cada pared, con su dirección respectiva. Esta corriente ya se calculó en la sección 4.8.5 para el modo dominante (véase la Fig. 4-15). El procedimiento completo a seguir es muy laborioso, pero el lector interesado puede demostrar (véase el Problema 4.11.7) que al efectuar la integral de contorno de la ec. (4-133) con las densidades de corriente correspondientes a cada pared, combinar las ecs. (4-132), (4-129), (4-133) y (4-104), y después de largos y tediosos desarrollos algebraicos, se obtiene que, cuando el dieléctrico es aire:

$$\alpha_{10} = \frac{R_s}{\eta_0 b} \frac{\left[ 1 + \frac{2b}{a} \left( \frac{f_{c_{10}}}{f} \right)^2 \right]}{\sqrt{1 - \left( \frac{f_{c_{10}}}{f} \right)^2}} \quad [\text{Np/m}] \quad (4-135)$$

con  $\eta_0 = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}$  y  $f_{c_{10}} = c/2a$ , de acuerdo con la ec. (4-119).

En la práctica y en los catálogos de los fabricantes de guías de ondas es más común expresar la atenuación en dB/m. Por lo tanto, usando la relación (2-20), y para una guía rectangular con paredes de cobre, la ec. (4-135) se reduce a:

$$\alpha_{10} = \sqrt{\frac{\pi \mu_0 \epsilon_0}{\sigma_c \mu_0}} \left( \frac{1}{b} \right) \frac{f^{1/2} \left[ 1 + \frac{2b}{a} \left( \frac{f_{c_{10}}}{f} \right)^2 \right]}{\sqrt{1 - \left( \frac{f_{c_{10}}}{f} \right)^2}} \quad (8.686)$$

$$= \sqrt{\frac{\pi \times 8.854 \times 10^{-12}}{5.8 \times 10^7}} \left( \frac{2b}{ab} \right) \left[ \frac{\frac{a}{2b} f^{1/2} + \left( \frac{f_{c_{10}}}{f} \right)^2 f^{1/2}}{\sqrt{1 - \left( \frac{f_{c_{10}}}{f} \right)^2}} \right] \quad (8.686)$$

$$= 6.015 \times 10^{-9} \left( \frac{2}{a} \right) \left( f_{c_{10}}^{1/2} \right) \left[ \frac{\frac{a}{2b} \left( \frac{f}{f_{c_{10}}} \right)^{1/2} + \left( \frac{f_{c_{10}}}{f} \right)^{3/2}}{\sqrt{1 - \left( \frac{f_{c_{10}}}{f} \right)^2}} \right]$$

Y como  $f_{c_{10}}^{1/2} = \sqrt{c/2a}$ , finalmente se tiene que:

$$\alpha = \frac{1.47 \times 10^{-4}}{\sqrt{a^3}} \left[ \frac{\frac{a}{2b} \sqrt{\frac{f}{f_{c_{10}}}} + \sqrt{\left(\frac{f_{c_{10}}}{f}\right)^3}}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{c_{10}}}{f}\right)^2}} \right] \quad [\text{dB/m}] \quad (4-136)$$

**Ejercicio 4-18** Obtenga la gráfica de atenuación  $\alpha$ , en dB/m, en función de la frecuencia, para el modo dominante en las guías rectangulares WG12, WG16 y WG20. Considere que las paredes interiores son de cobre y que el dieléctrico es aire.

### Solución

Las dimensiones de las guías estipuladas y sus frecuencias de corte para el modo dominante  $TE_{10}$ , de acuerdo con la Tabla 4-2, son:

Guía	$a$ [cm]	$b$ [cm]	$f_{c_{10}}$ [GHz]
WG12	4.755	2.215	3.155
WG16	2.286	1.016	6.56
WG20	1.067	0.4318	14.08

Al sustituir estos valores en la ec. (4-136), obtenida para paredes de cobre y dieléctrico aire, se tiene:

$$\alpha_{\text{WG12}} = \frac{1.47 \times 10^{-4}}{0.0103687} \left[ \frac{1.073363 \sqrt{\frac{f}{3.155}} + \sqrt{\left(\frac{3.155}{f}\right)^3}}{\sqrt{1 - \left(\frac{3.155}{f}\right)^2}} \right] \quad \text{dB/m}$$

$$\alpha_{WG16} = \frac{1.47 \times 10^{-4}}{0.0034563} \left[ \frac{1.125 \sqrt{\frac{f}{6.56}} + \sqrt{\left(\frac{6.56}{f}\right)^3}}{\sqrt{1 - \left(\frac{6.56}{f}\right)^2}} \right] \text{ dB/m}$$

$$\alpha_{WG20} = \frac{1.47 \times 10^{-4}}{0.0011018} \left[ \frac{1.235526 \sqrt{\frac{f}{14.08}} + \sqrt{\left(\frac{14.08}{f}\right)^3}}{\sqrt{1 - \left(\frac{14.08}{f}\right)^2}} \right] \text{ dB/m}$$

Sustituyendo  $f$  en GHz en las tres ecuaciones anteriores, se obtienen las gráficas mostradas en la Fig. 4-18. Con el fin de compararlas, las tres curvas de atenuación están graficadas en el mismo par de ejes. Nótese que la escala de  $\alpha$  es logarítmica.

Se observa, en efecto, que cada guía tiene una región de frecuencias donde la atenuación es mínima. El rango recomendado de operación se muestra acotado, en concordancia con la Tabla 4-2. Nótese que los niveles de atenuación son ligeramente inferiores a los de la Tabla 4-3, ya que en ésta se consideran paredes de aluminio, cuya conductividad es menor que la del cobre.

#### 4.8.8 Excitación y extracción de los modos TE y TM

Como ya se ha expuesto en secciones anteriores, la potencia de una señal a lo largo de una guía rectangular se envía comúnmente empleando el modo dominante  $TE_{10}$ . Sin embargo, existen algunos sistemas en los que resulta útil excitar o extraer modos superiores de propagación. Por ejemplo, en ciertas estaciones terrenas para comunicaciones por satélite se usan antenas de corneta con aperturas múltiples\* en las que se combinan los modos  $TE_{10}$  y  $TM_{12}$ . Asimismo, hay estaciones de seguimiento o rastreo que utilizan el método de *monoimpulso multimodo*; éstas tienen un acoplador especial de

\* También se les llama radiadores de bocina de aperturas múltiples.