Ontwerpcriteria in het tijddomein

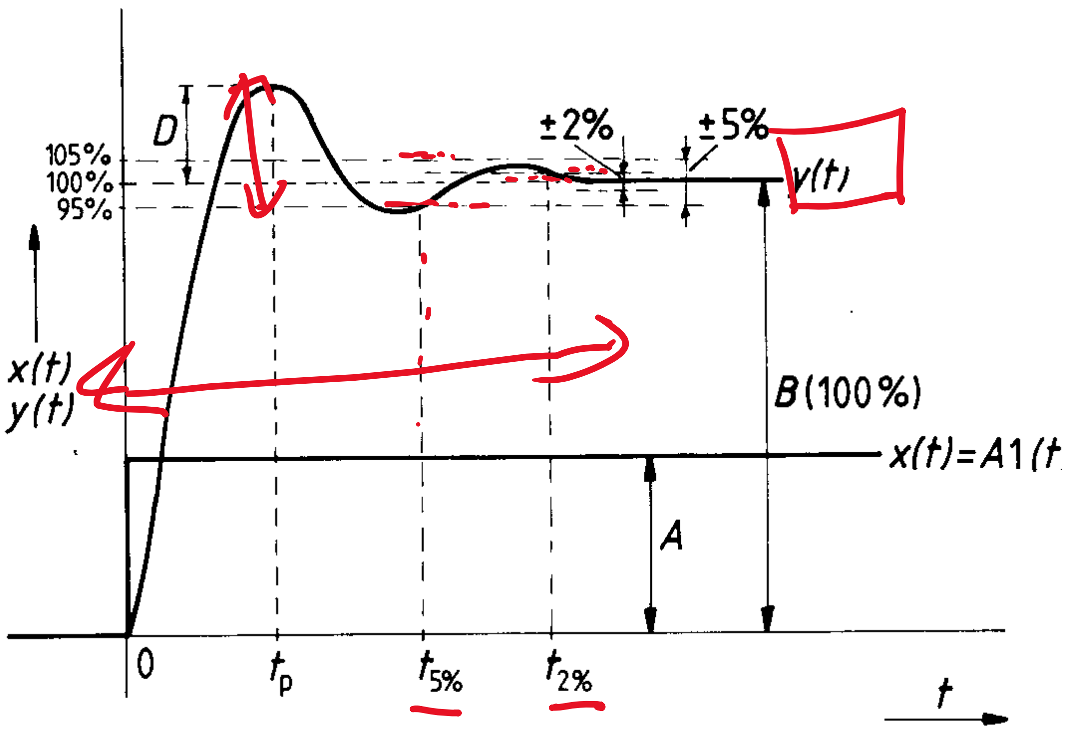
s-do
Fre

De ontwerpcriteria zijn in het tijddomein gerelateerd aan de stapresponsie van het systeem

.

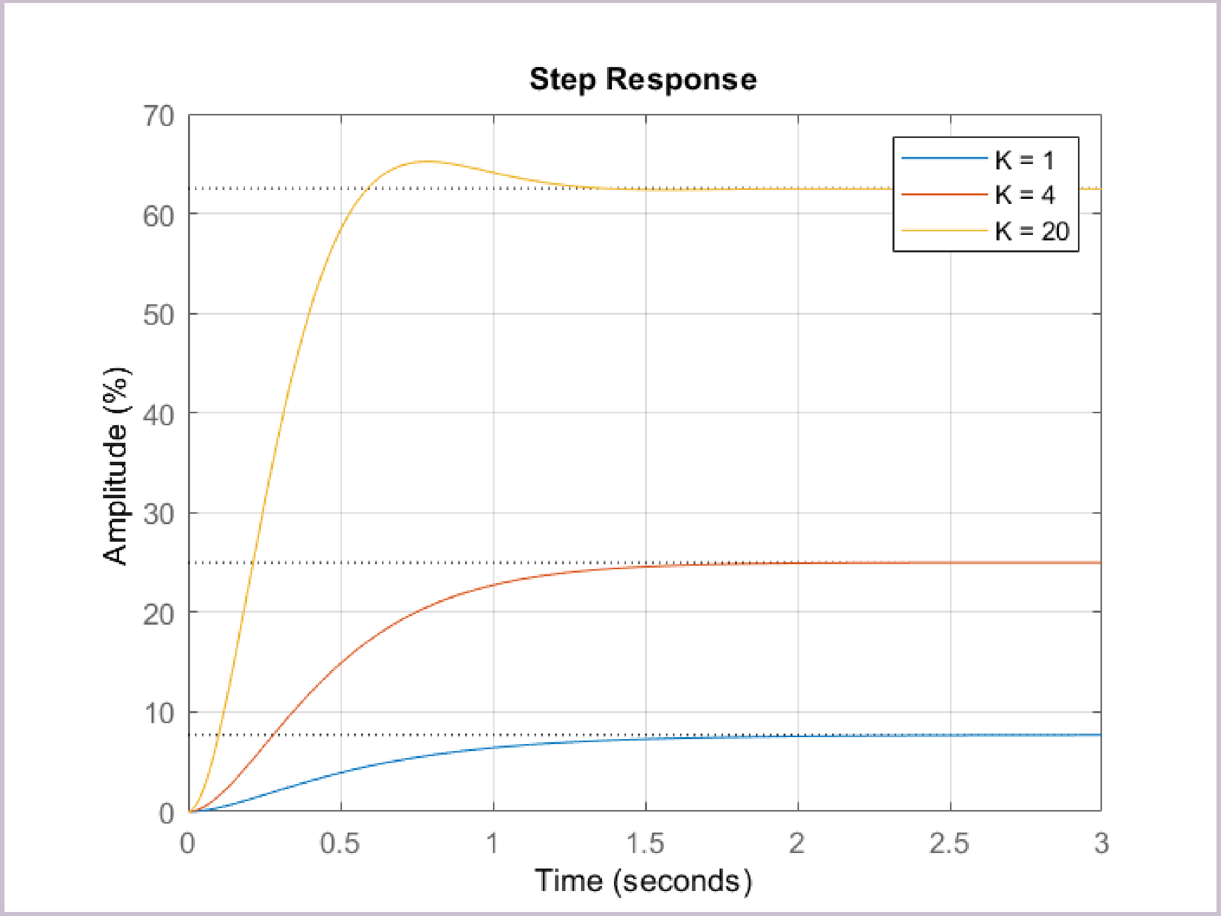
De criteria voor het dynamisch gedrag zijn de settling time t_s (2% of 5%) en de overshoot D. Het criterium voor het statisch gedrag is de statische fout E_{stat}.

Ontwerpcriteria in het tijddomein



Beoordelingscriteria m.b.v. de stapresponsie

Ontwerpcriteria in het tijddomein



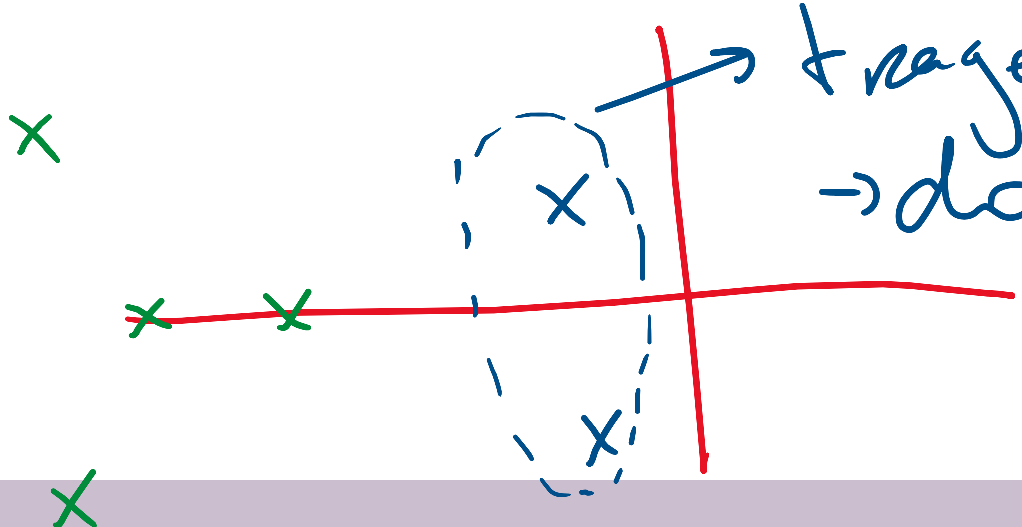
Ontwerpcriteria in het tijddomein

We gaan uit van een 2e orde systeem, omdat het gedrag van geregelde systemen meestal gekarakteriseerd wordt door dat van een 1e of 2e orde systeem zonder nulpunten.

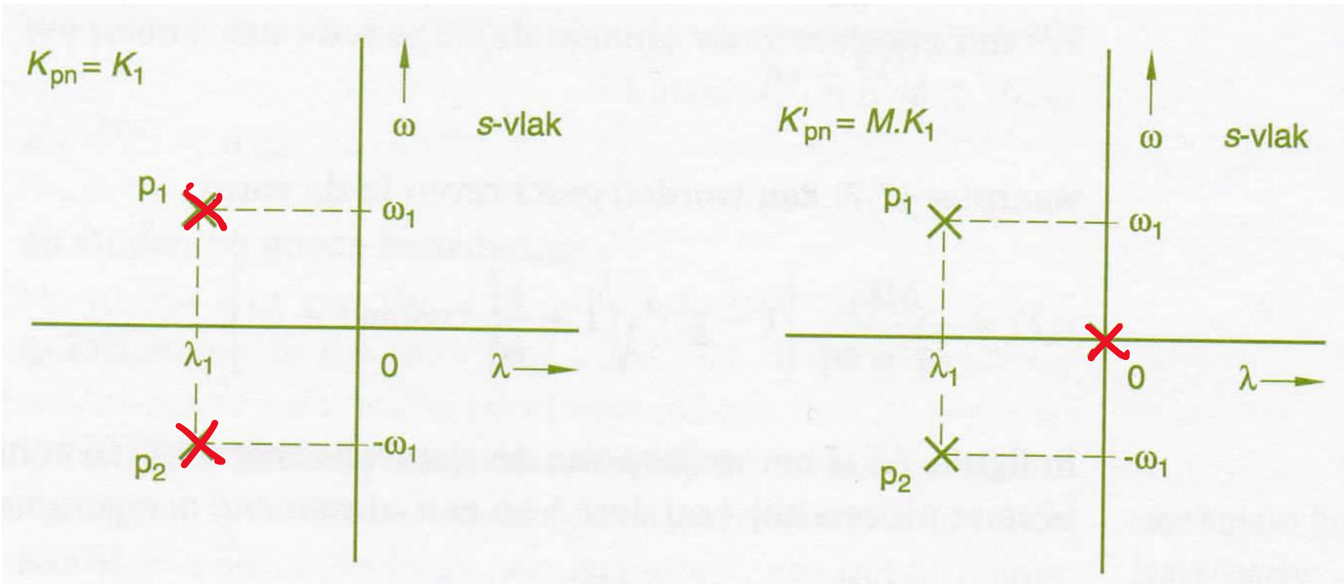
We beschouwen de responsie op een ingangsstap met grootte M met $K_{pn} = K_1$.

→ trage polen

→ dominante polen



Ontwerpcriteria in het s-domein



a. pn-beeld

b. pn-beeld stapresponsie

Stapresponsie: $y(t) = MK_1\left\{A_1 e^{0t} + A_2 e^{(\lambda_1 + j\omega_1)t} + A_3 e^{(\lambda_1 - j\omega_1)t}\right\}$

Ontwerpcriteria in het s-domein

$$y(t) = MK_1\left\{A_1 e^{0t} + A_2 e^{(\lambda_1 + j\omega_1)t} + A_3 e^{(\lambda_1 - j\omega_1)t}\right\}$$

$$y(t) = \frac{MK_1}{\lambda_1^2 + \omega_1^2}\left[1 - \frac{e^{\lambda_1 t}}{2\omega_1}\left\{\omega_1\left(e^{j\omega_1 t} + e^{-j\omega_1 t}\right) + j\lambda_1\left(e^{j\omega_1 t} - e^{-j\omega_1 t}\right)\right\}\right]$$

$$= \frac{MK_1}{\lambda_1^2 + \omega_1^2}\left[1 - e^{\lambda_1 t}\left\{\cos\omega_1 t - \frac{\lambda_1}{\omega_1}\sin\omega_1 t\right\}\right]$$

Maak gebruik van: $\tan\varphi = \dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \dfrac{\lambda_1}{\omega_1}$

Oplossing y(t)

Ontwerpcriteria in het s-domein

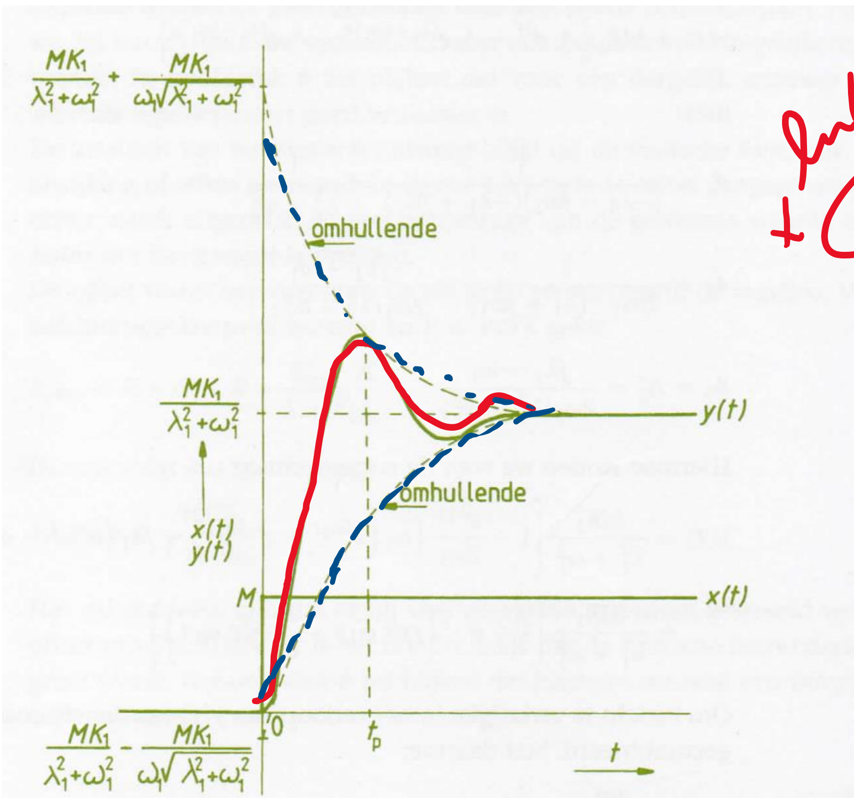
eindw. demp osc

$$y(t) = \frac{MK_1}{\lambda_1^2 + \omega_1^2} - \frac{MK_1}{\omega_1 \sqrt{\lambda_1^2 + \omega_1^2}} e^{\lambda_1 t} \cos(\omega_1 t + \varphi)$$

< blijvend deel A > < uitstervend overgangsverschijnsel B >

Oplossing y(t)

Ontwerpcriteria in het s-domein



$\ln(\cdot)$

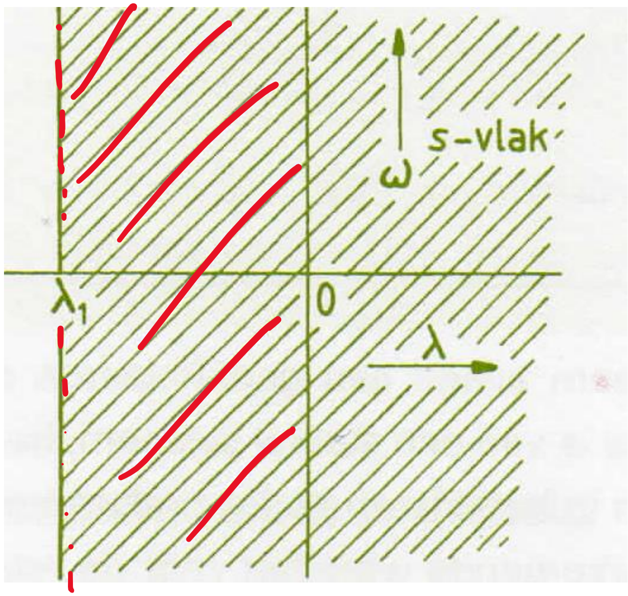
$$e^{\lambda_1 t_s(2\%)} \leq 0{,}02$$

$$t_s(2\%) = \frac{-4}{\lambda_1}$$

$$t_s(5\%) = \frac{-3}{\lambda_1}$$

Stapresonsie &
Settling time

Ontwerpcriteria in het s-domein



Constante absolute demping

$$t_s(2\%) = \frac{-4}{\lambda_1}$$

Stel t_s = 2 sec.
dan is λ = -2

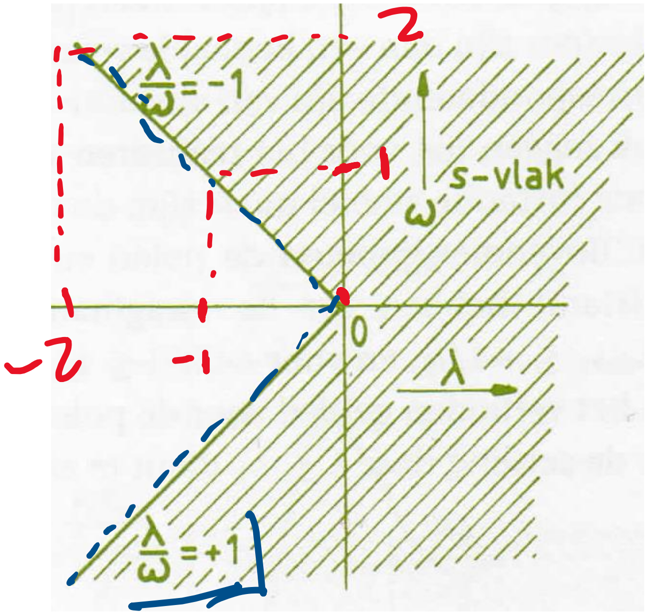
$$t_s(5\%) = \frac{-3}{\lambda_1}$$

Stel t_s = 3 sec.
dan is λ = -1

$t_s \leq x$ se

$\lambda \leq$ - -

Ontwerpcriteria in het s-domein



Relatieve demping

(Ook met β: 0,7; 0,57; 0,45)

Maximum doorschot op

$$t = t_p = \frac{\pi}{\omega_1} \qquad D = e_1^{-\left|\frac{\lambda_1 \pi}{\omega_1}\right|} .100\%$$

Waarde van y(t) op t = t_p:

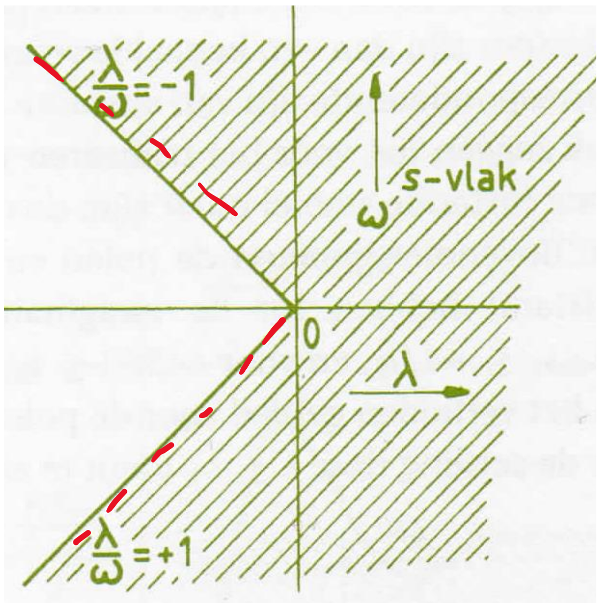
$$\frac{MK_1}{\lambda_1^2 + \omega_1^2}\left[1 + e^{\lambda_1 \frac{\pi}{\omega_1}}\right]$$

$$\boxed{|\lambda_1/\omega_1| = 1} \quad : \quad D \approx 4\%;$$

$$|\lambda_1/\omega_1| = 0{,}7 \quad : \quad D \approx 11\%;$$

$$|\lambda_1/\omega_1| = 0{,}5 \quad : \quad D \approx 20\%.$$

Ontwerpcriteria in het s-domein



Relatieve demping

Waarde van y(t) op t = t_p:

$$\frac{MK_1}{\lambda_1^2 + \omega_1^2}\left[1 + e^{\lambda_1 \frac{\pi}{\omega_1}}\right]$$

De overshoot is nu op t = t_p

$$D = \frac{MK_1}{\lambda_1^2 + \omega_1^2}\, e^{\lambda_1 \frac{\pi}{\omega_1}}$$

De overshoot procentueel op t = t_p

$$D = e_1^{-\left|\frac{\lambda_1 \pi}{\omega_1}\right|} . 100\%$$

$\left|\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\pi\right|$

e

Opgave

Een systeem met input x en output y wordt gegeven door de volgende differentiaalvergelijking:

$$2\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 12\frac{dy(t)}{dt} + 54y(t) = 4x(t)$$

Gevraagd wordt de settling time, de piektijd, en ook de procentuele overshoot in de stapresponsie te berekenen.

1) *Find H(s)*
2) $\lambda =?$
3) $\omega =?$
4) $t_s(2\%) = -\frac{4}{\lambda_1}$
5) $t_s(5\%) = -\frac{3}{\lambda_1}$
6) $t_p = \frac{\pi}{\omega_1}$
7) $D = e_1^{-\left|\frac{\lambda_1 \pi}{\omega_1}\right|} . 100\%$

$$2\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 12\frac{dy(t)}{dt} + 54y(t) = 4x(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} 2s^2 Y(s) + 12\, s\, Y(s) + 54\, Y$$

$$\frac{d}{dt} = s$$

$$Y(s)\left[2s^2 + 12s + 54\right] = 4\, X(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{4}{2s^2 + 12s + 54}$$

polen: $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \dfrac{-12 \sqrt{12^2 - 4 \cdot 2 \cdot 54}}{2 \cdot 2}$

$$= -3 \pm j\,4{,}24$$

polen: $-3 \pm j4{,}24$

$\sigma_1 = -3$

$\omega_1 = 4{,}24$

$t_s(2\%) = -4/\sigma_1 = 1{,}3$ sec

$t_s(5\%) = -3/\sigma_1 = 1$ sec

$t_p = \pi/\omega_1 = 0{,}74$ sec

$D = e^{-\left|\frac{\sigma_1 \pi}{\omega_1}\right|} \cdot 100\% = 10{,}8\%$

Eindwaarde:

$$x \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow y$$

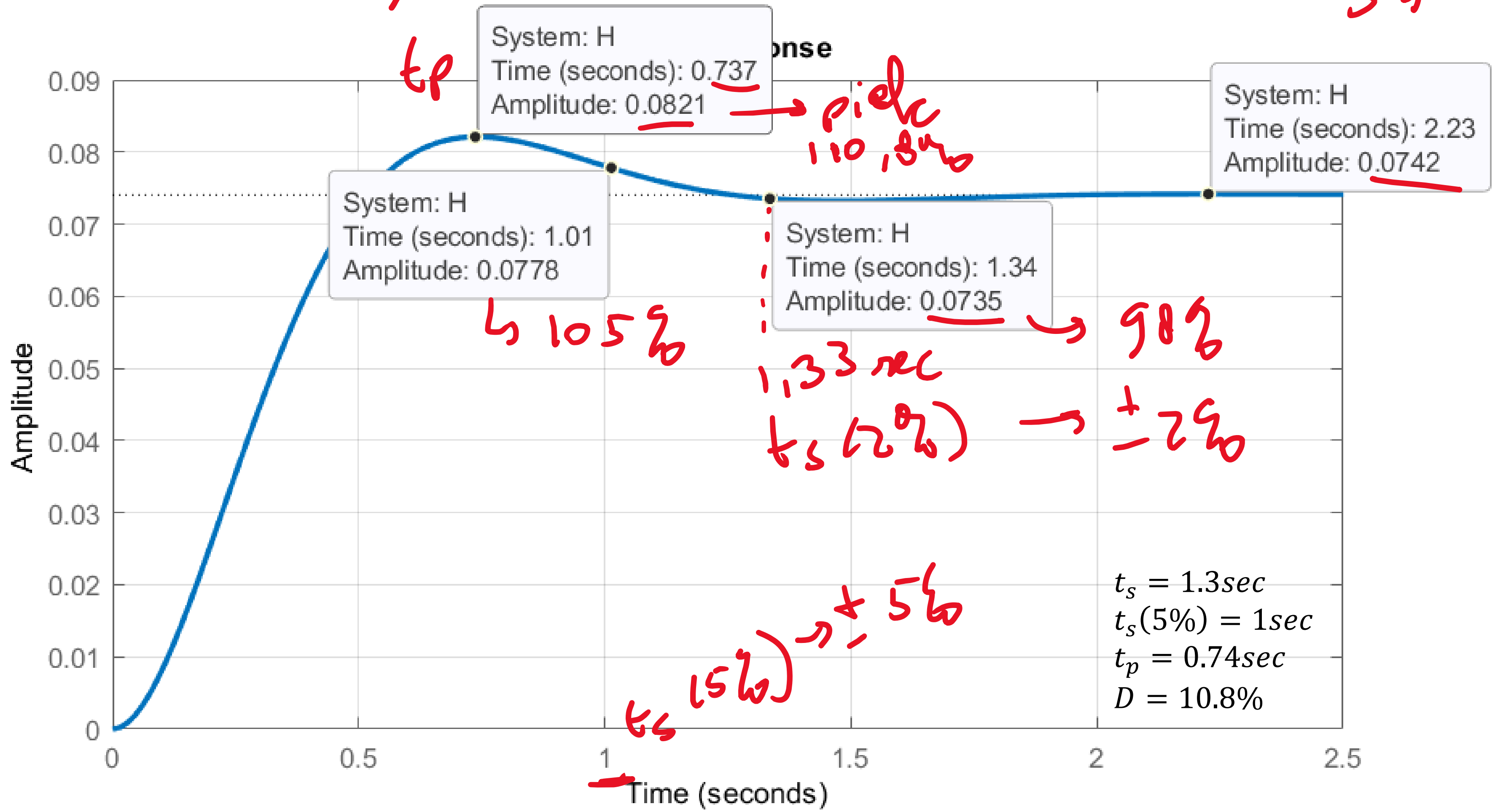
$$H = \frac{y}{x}$$

$$x \cdot \frac{y}{x} = y$$

Opgave

$H(s) = 4/(2s^2 + 12s + 54)$

Eindw: $\frac{4}{54} =$



Properties in the s-domain

$$t_s(2\%) = -\frac{4}{\lambda_1}$$

$$t_s(5\%) = -\frac{3}{\lambda_1}$$

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_1}$$

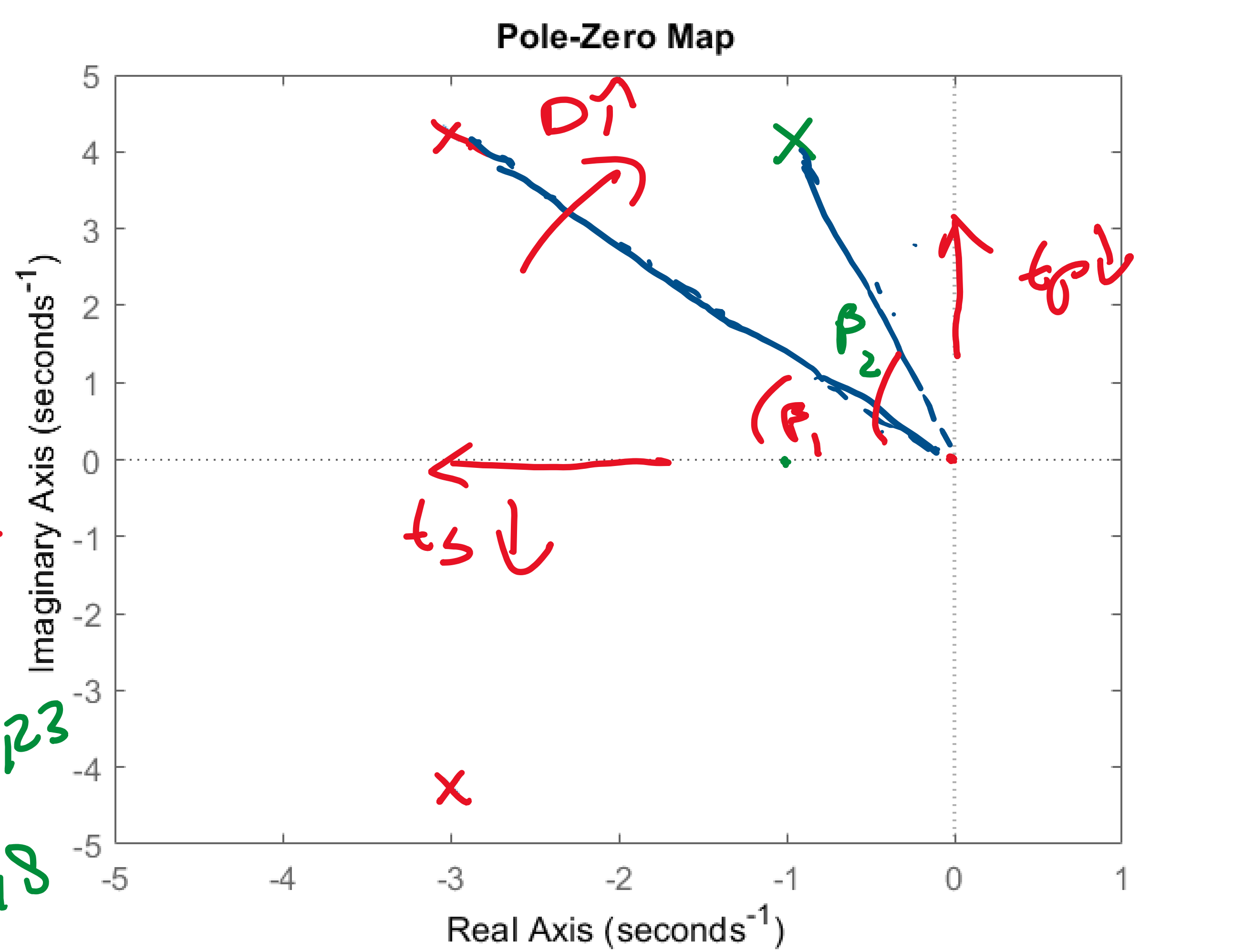
$$D = e_1^{-\left|\frac{\lambda_1 \pi}{\omega_1}\right|}.100\%$$

$\beta_1 = \frac{\lambda_1}{\omega_1} \approx 0,7$

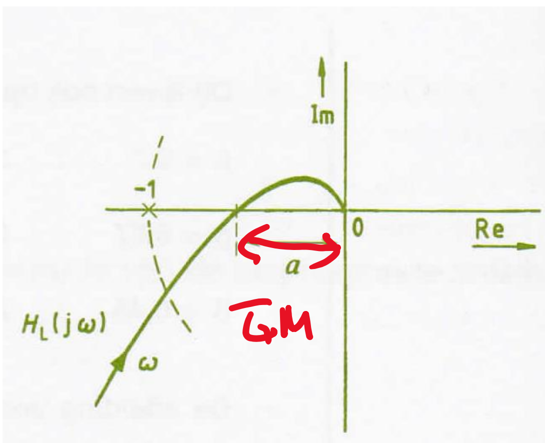
$D_1 \triangleq e^{-\beta_1} \approx 0,5$

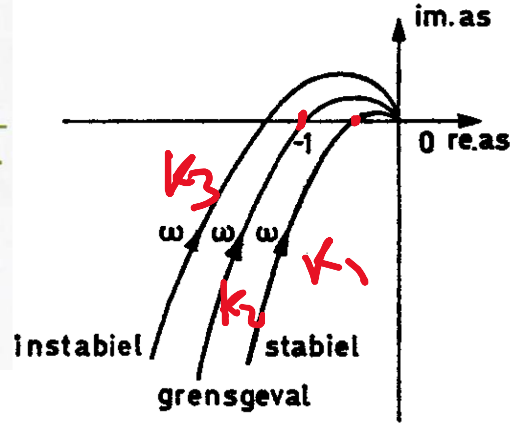
$\beta_2 = \left|\frac{-1}{4,24}\right| \approx 0,23$

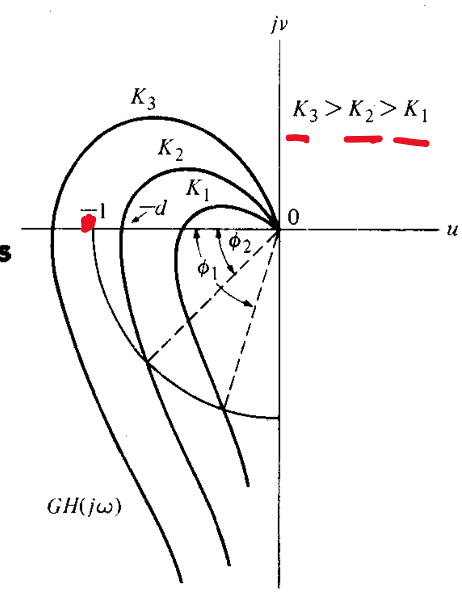
$D_2 \triangleq e^{-\beta_2} \approx 0,8$



Ontwerpcriteria in het ω-domein, fase- en versterkingsmarge

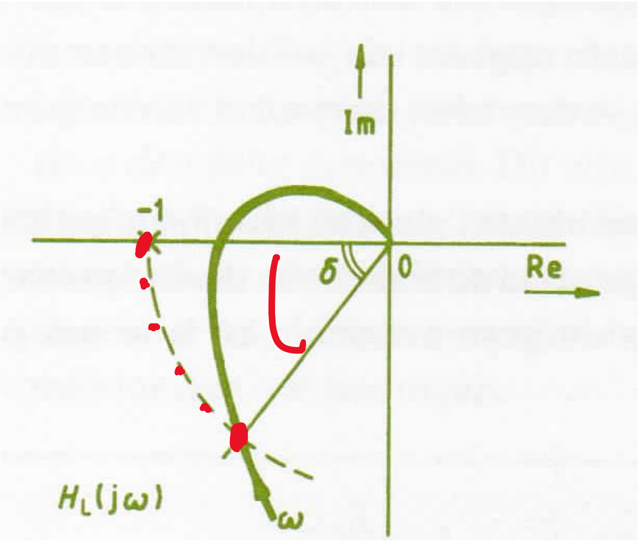


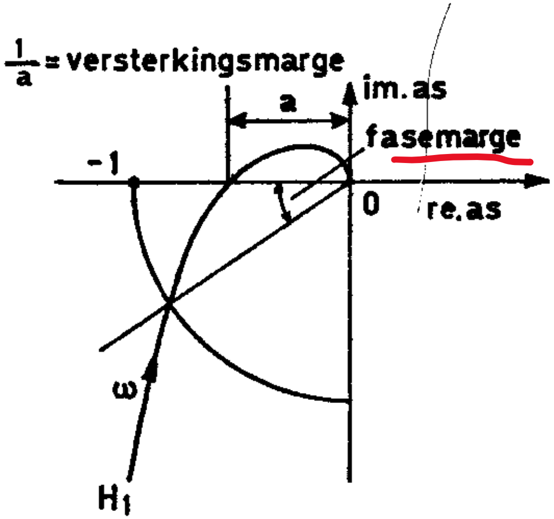




Versterkingsmarge

Ontwerpcriteria in het ω-domein, fase- en versterkingsmarge

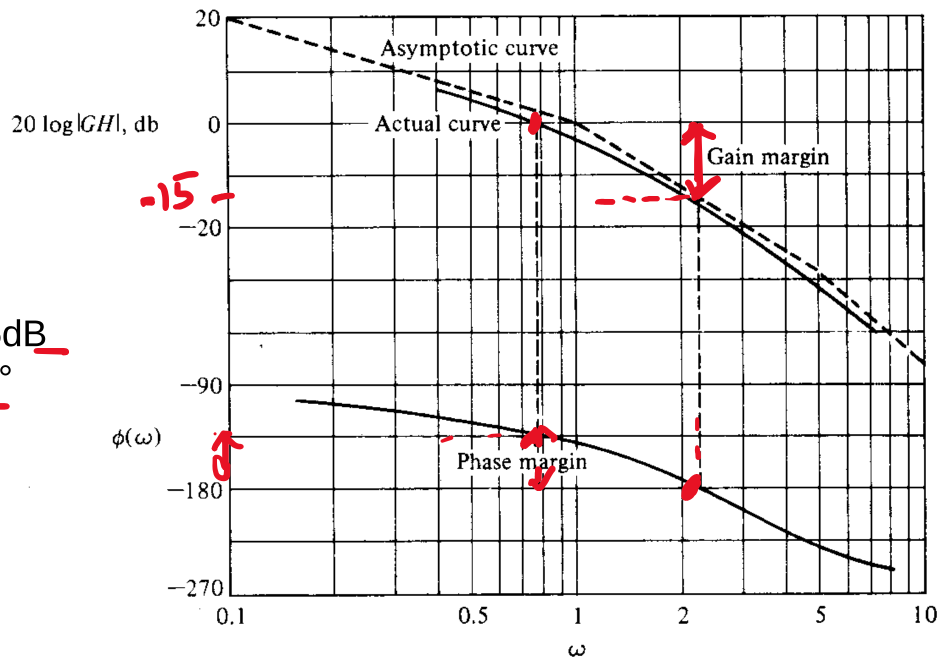




Fasemarge

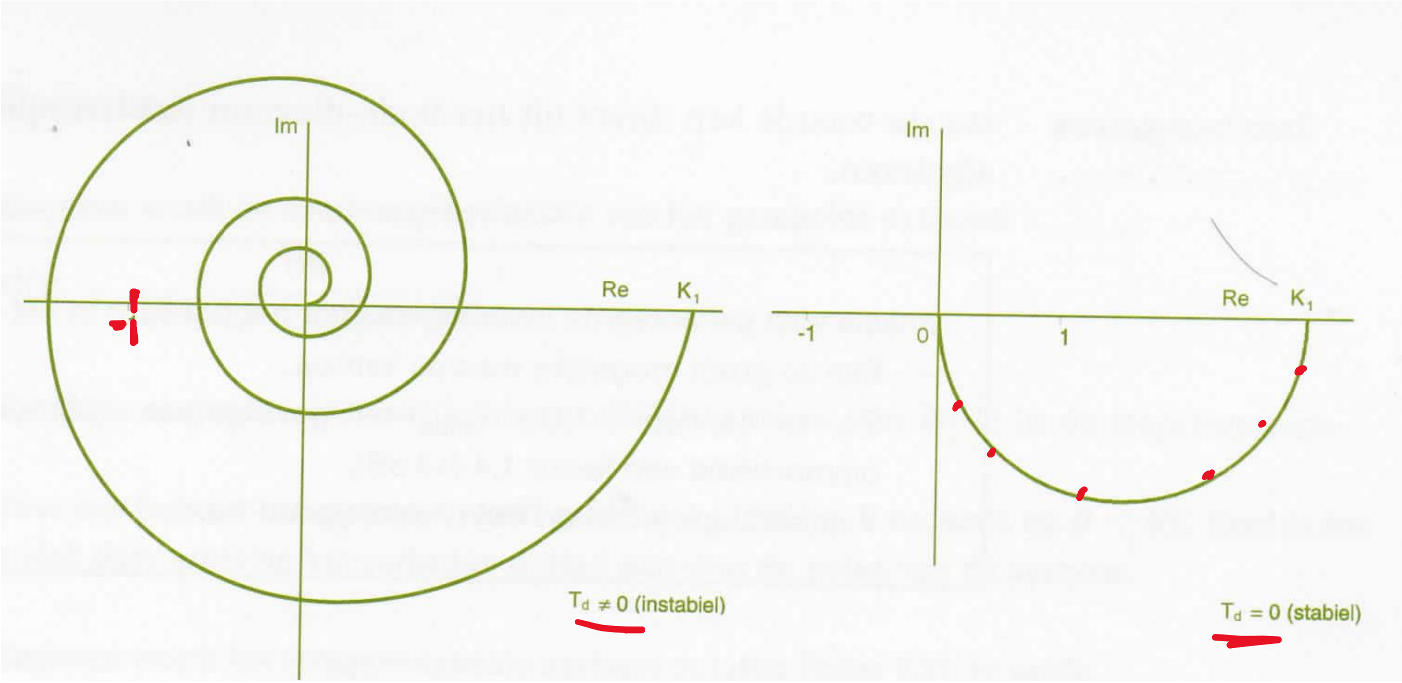
Ontwerpcriteria in het ω-domein, fase- en versterkingsmarge

Vb:
- GM = 15dB
- PM = 45°



Fase- en versterkingsmarge in een Bode plot weergegeven.
Vuistregel: $PM \geq 45^o$ en $GM \geq 6dB$

Ontwerpcriteria in het ω-domein, fase- en versterkingsmarge



Effect van looptijd & 1-ste orde systeem in een polaire figuur

Ontwerpcriteria in het ω-domein, fase- en versterkingsmarge

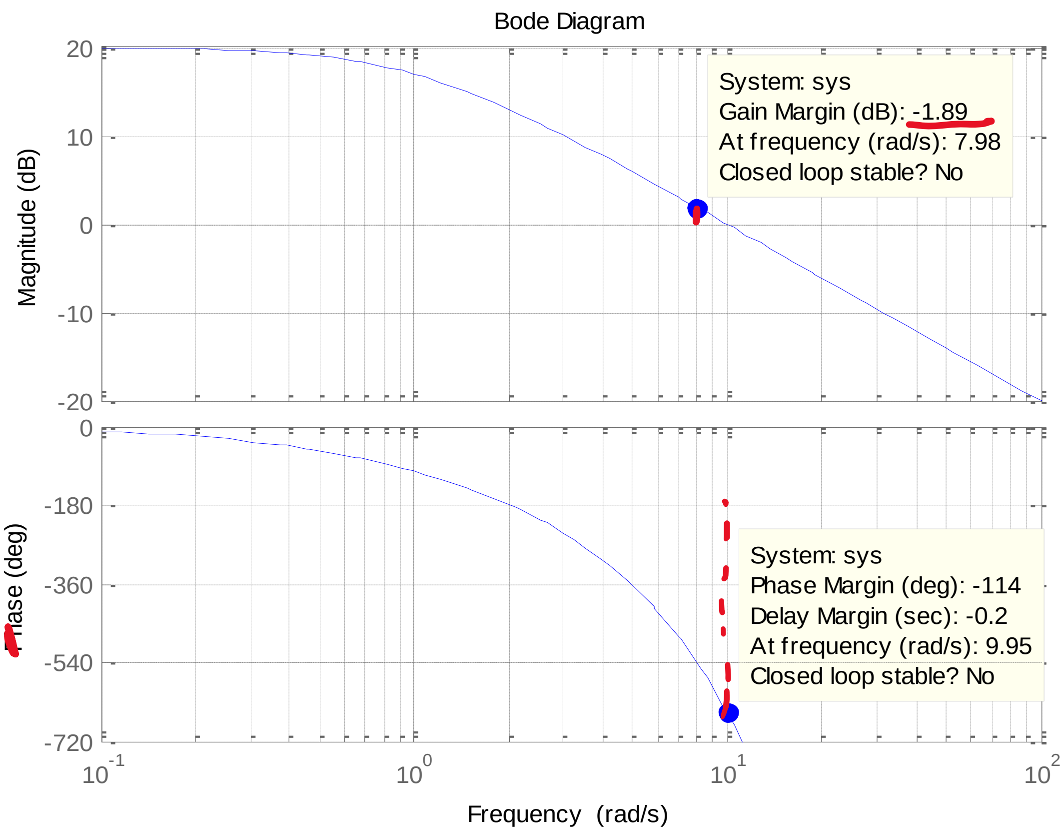
Transfer function:

$$\exp(-1*s) * \frac{10}{s+1}$$

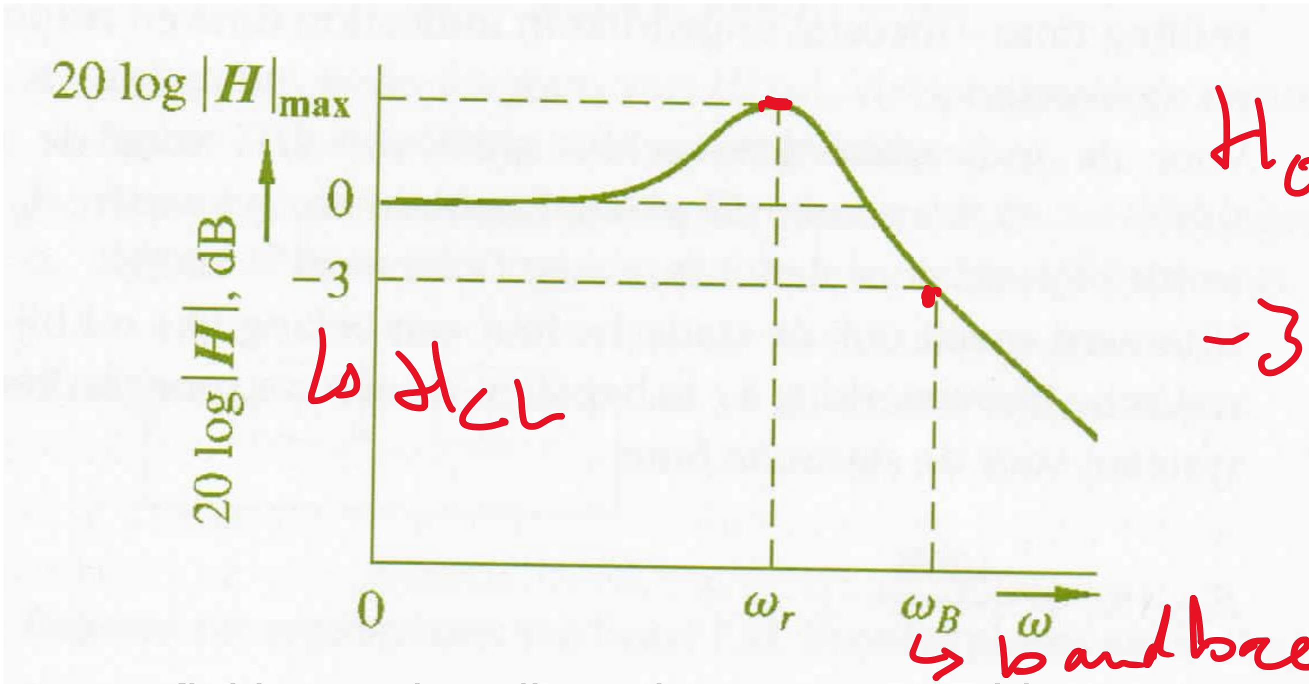
$$H_1 = \frac{10}{s+1}$$

$$H_{OL_1} = \frac{K \cdot 10}{s+1}$$

$$H_{OL_2} = e^{-T_d s} \cdot H_{OL_1}$$



Ontwerpcriteria in het ω-domein, bandbreedte



↳ H_{CL}

$H_{OL} \Rightarrow$ od

−3 dB →

↳ bandbreedte

Definitie van bandbreedte van geregeld systeem met closed loop bode plot.

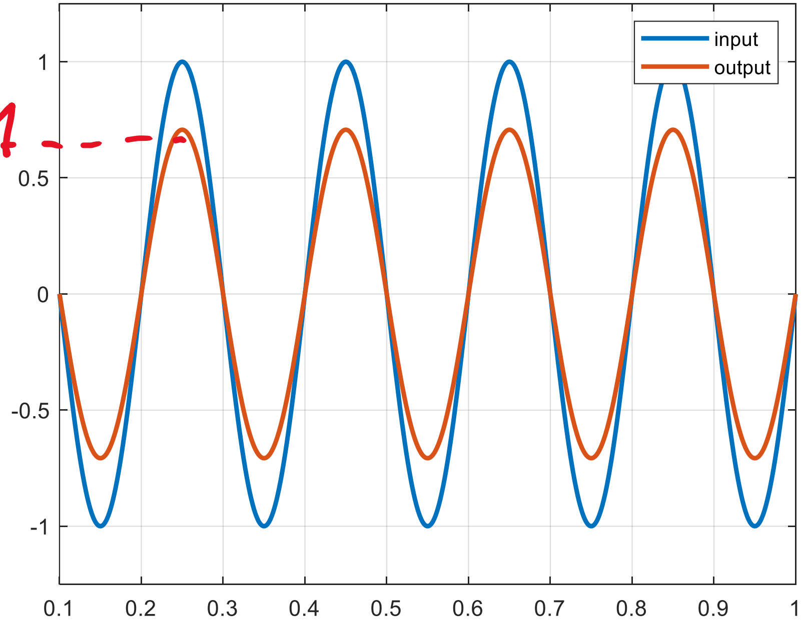
Ontwerpcriteria in het ω-domein, bandbreedte

Definitie van bandbreedte van geregeld system:

$$output = \frac{1}{2}\sqrt{2} * input$$

Voor $\omega_{in} = \omega_b$

0,7



Ontwerpcriteria in het ω-domein, bandbreedte

1) In de regeltechniek geeft de bandbreedte aan tot welke frequentie de uitgang een sinusvormig testsignaal nog kan ‘volgen’, zonder te veel verzwakt te worden.

2) Een goede maat voor de snelheid waarmee een system kan reageren op een verandering aan de ingang (hogere bandbreedte = kortere rise-time)

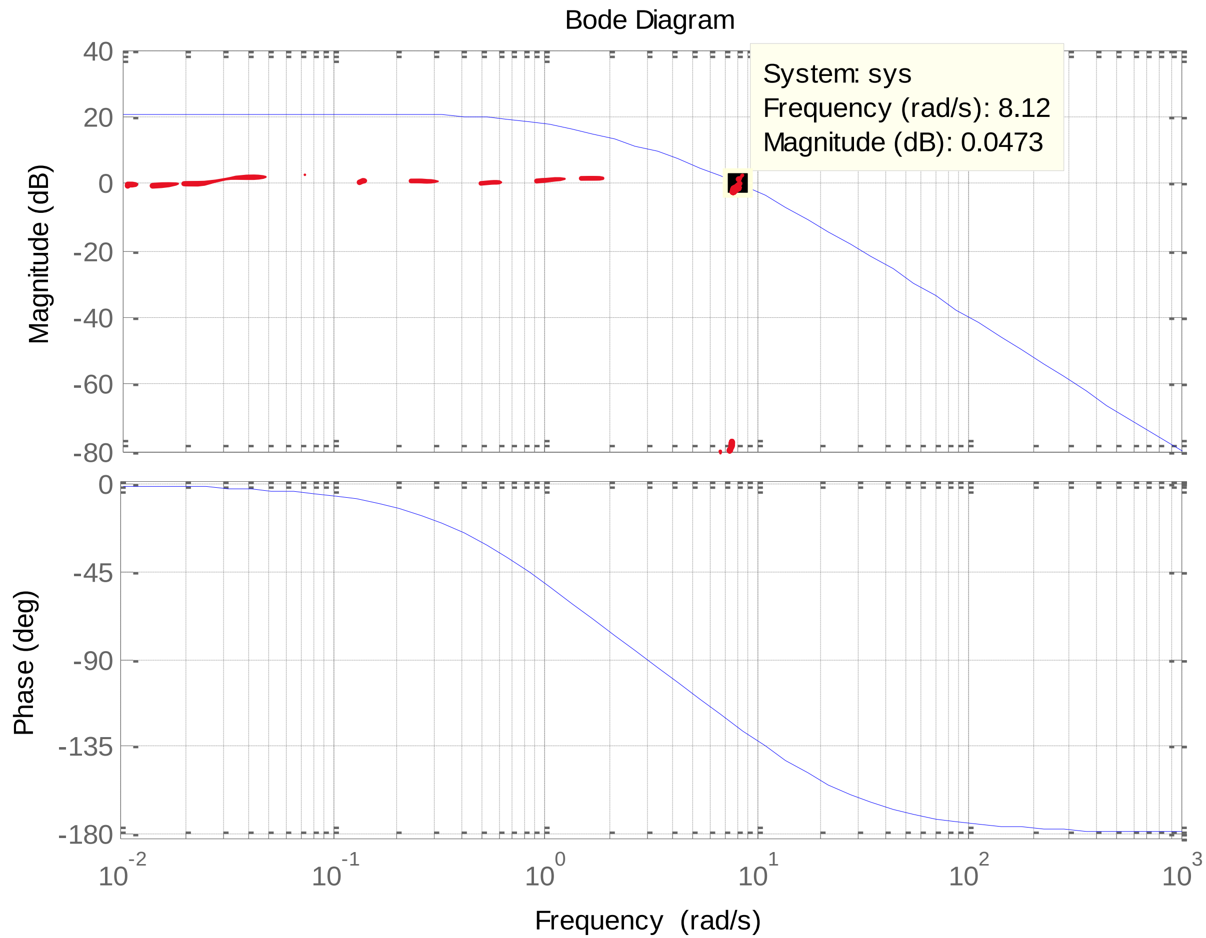
3) Closed loop -3dB, open loop 0dB snijpunt

Transfer function open loop:

$$\frac{100}{s^2 + 10\,s + 9}$$

cross over frequency
= 8,12 r/s

↳ 0dB



Enkele veel gehanteerde instelregels voor het ontwerp in het ω-domein:

- Een zo groot mogelijke waarde van ω_B.
- De resonantiepiek $(|H(j\omega)|_{max})$ ten gevolge van opslingering niet al te groot, bijvoorbeeld een factor 1,4 (+3 dB)
- Voldoend grote FM en VM

PM GM → 6dB

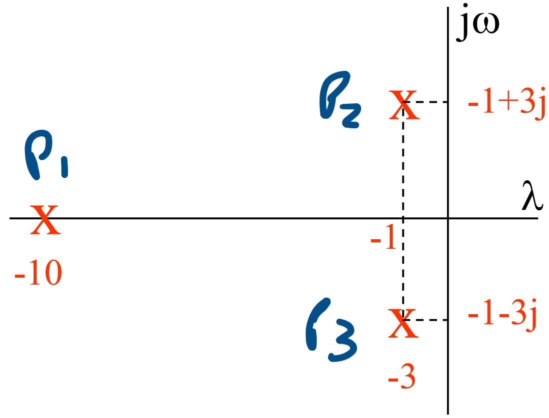
→ 45°

Opgave

Een geregeld systeem heeft de volgende overdrachtsfunctie (3e-orde):

$$H(s) = \frac{100}{\underbrace{(s^2 + 2s + 10)}_{p_{2,3}}\underbrace{(s + 10)}_{p_1}}$$

Bereken de waarden van de settlingtime $t_s(2\%)$, ts(5%), piektijd t_p en de doorschot D(%) in de stapresponsie.



Oplossing: H(s) heeft de volgende polen: -10, en

$$\rightarrow \quad s_{2,3} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 40}}{2} = -1 \pm 3j$$

De dominante polen zijn: $s_{2,3}$=-1 ± 3j=λ ± jω

ts(2%) = -4/λ = -4/-1 = 4 s

ts(5%) = -3/λ = -3/-1 = 3 s

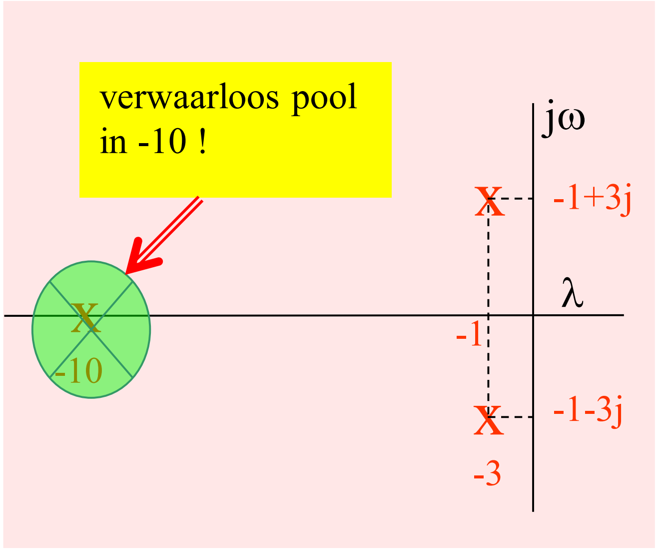
piektijd tp = π/ω = π/3 = 1,05 s

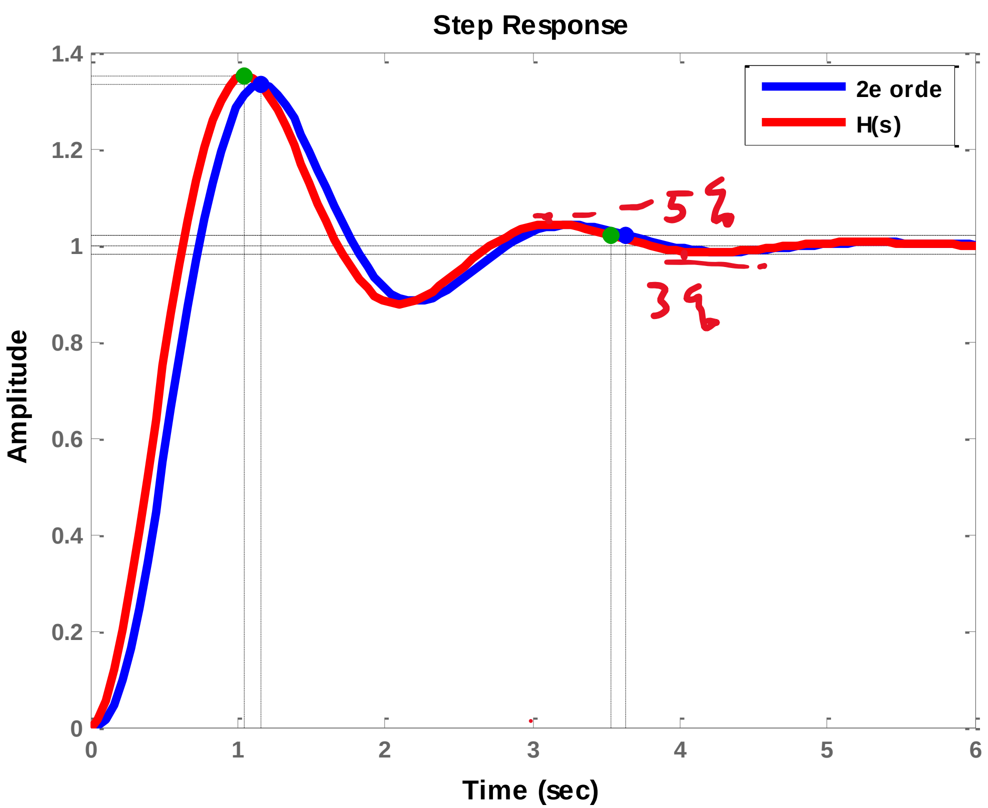
doorschot $D(\%) = e^{-\left|\frac{\lambda}{\omega}\right|\pi} \cdot 100\% = e^{-\left|\frac{-1}{3}\right|\pi} \cdot 100\,\% = 35\ \%$

Opgave

Het systeem kan worden benaderd door een 2e-orde systeem (hou wel rekening met de statische versterking (=1), die moet gelijk blijven):

$$H(s) = \frac{100}{(s^2+2s+10)(s+10)} \approx \frac{10}{(s^2+2s+10)}$$





De stapresponsies van systeem en 2e-orde benadering zijn ongeveer identiek, dus benadering is geoorloofd!

$$\frac{100}{10} = 10$$

Opgave

Van een 2e orde regelsysteem wordt geëist dat $t_s(5\%) \leq 3$ s en $D \leq 20$ %.

Geef het verboden gebied voor de polen en maak een schets hiervan in het complexe vlak.

$$D(\%) = e^{-\left|\frac{\lambda}{\omega}\right|\pi} \cdot 100\% \leq 20\%$$

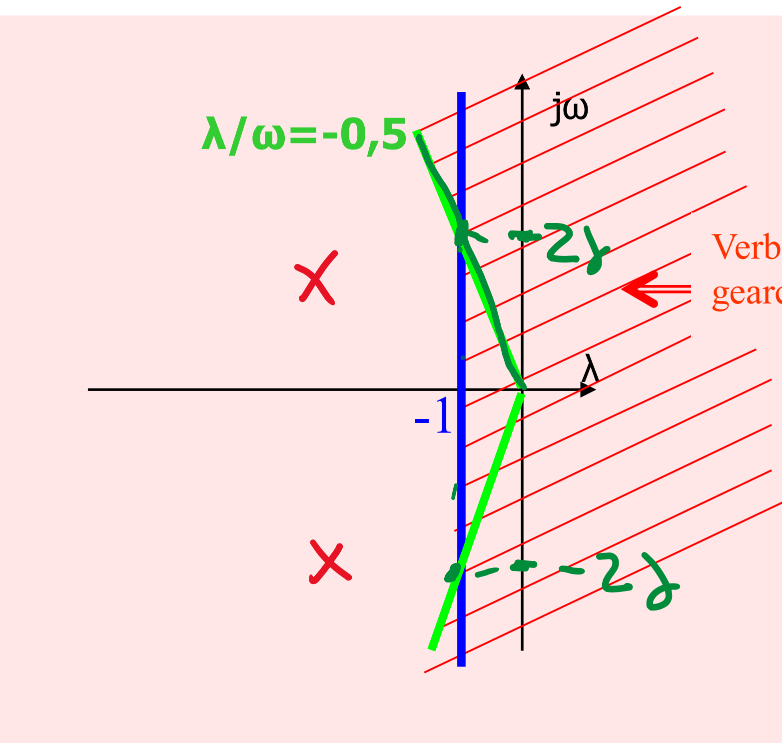
$$-\left|\frac{\lambda}{\omega}\right|\pi \leq \ln(0{,}2)$$

$$\left|\frac{\lambda}{\omega}\right| \geq \frac{-\ln(0{,}2)}{\pi} = 0{,}5$$

$$t_s(5\%) = \frac{-3}{\lambda} \leq 3 \text{ s}$$

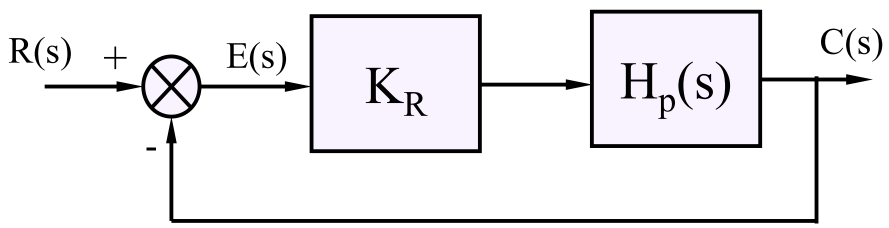
$$\lambda \leq -1$$

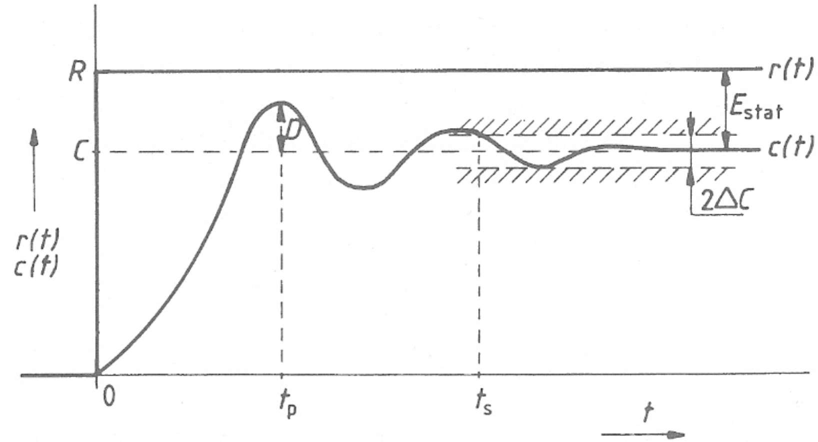
λ, ω



Verboden gebied is gearceerd

STATISCHE FOUT (OFFSET)





Als r(t)=1(t) (eenheidsstap), dan is de offset (statische fout):

E_{stat} = 100%/(1 + K_L)

Uitleg: K_L is de statische lusversterking: $K_L = K_R H_p(0)$

$C = R * K_R H_p/(1 + K_R H_p)$ en $E = C/(K_R H_p)$ (van de figuur linksboven)

dus $E = R * 1/(1 + K_R H_p)$

Voor de eenheidsstap wordt dit dan: $E_{stat} = 1/(1 + K_L)$

In procenten: E_{stat} = 100%/(1 + K_L)