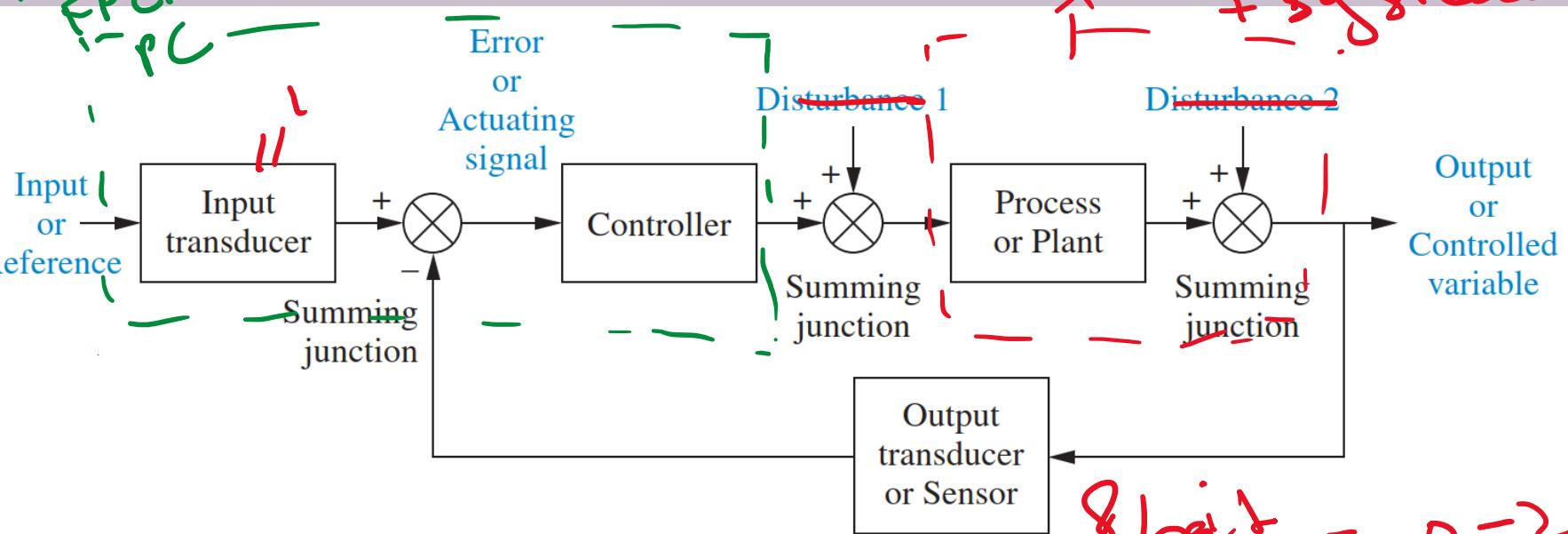


Terugkoppeling & stabiliteit

3.6.2 Stability of LTI Systems

6.4 Stability Margins

actuator Terugkoppeling & stabiliteit, principe van terugkoppeling



Gesloten systeem; systeem met terugkoppeling:

1. Meten
2. Vergelijken
3. Aansturen

Terugkoppeling & stabiliteit, principe van terugkoppeling

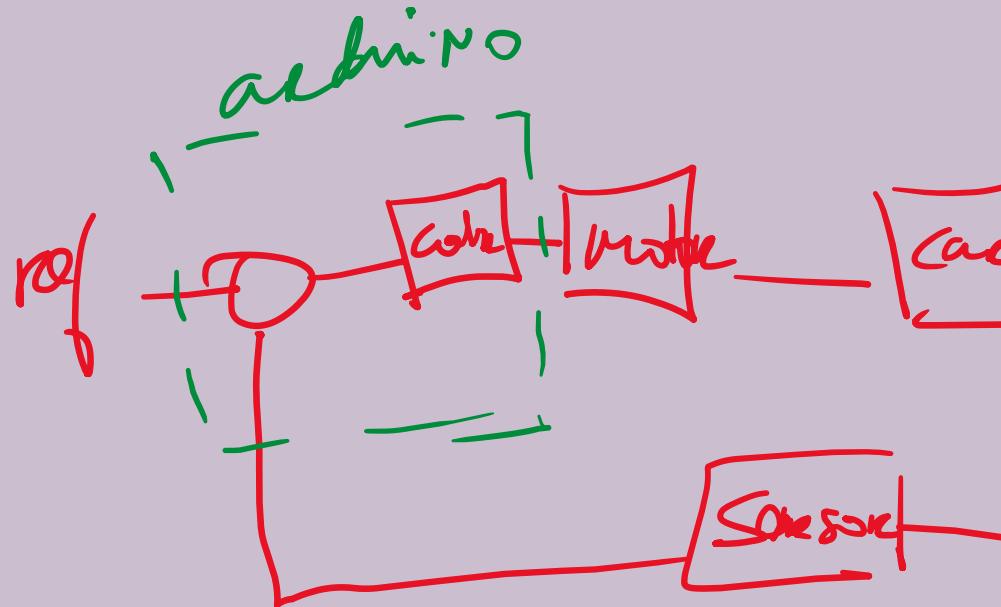
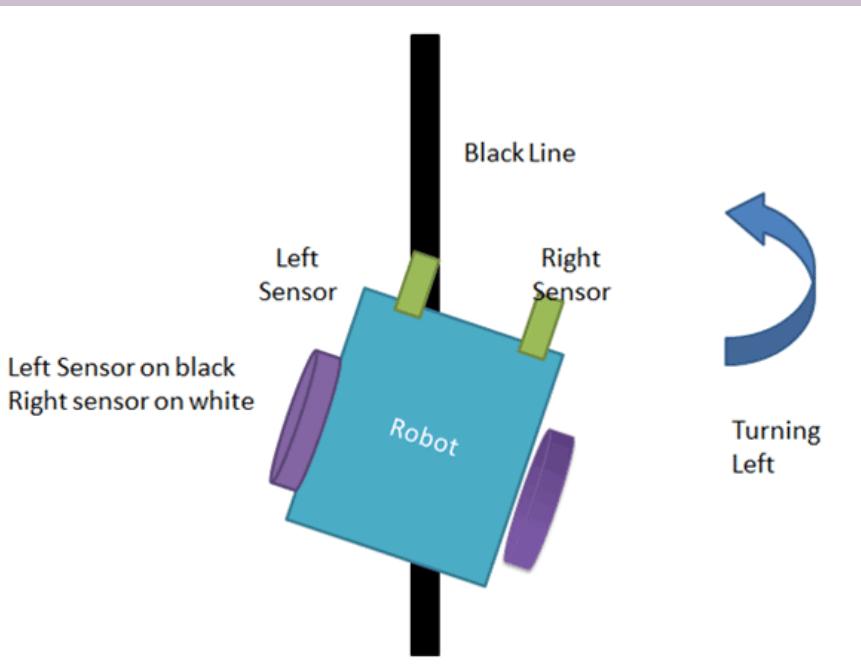
Door terugkoppeling wordt een systeem minder gevoelig voor verstoringen, maar de kans op instabiliteit wordt vergroot.

Frequentie-domein:

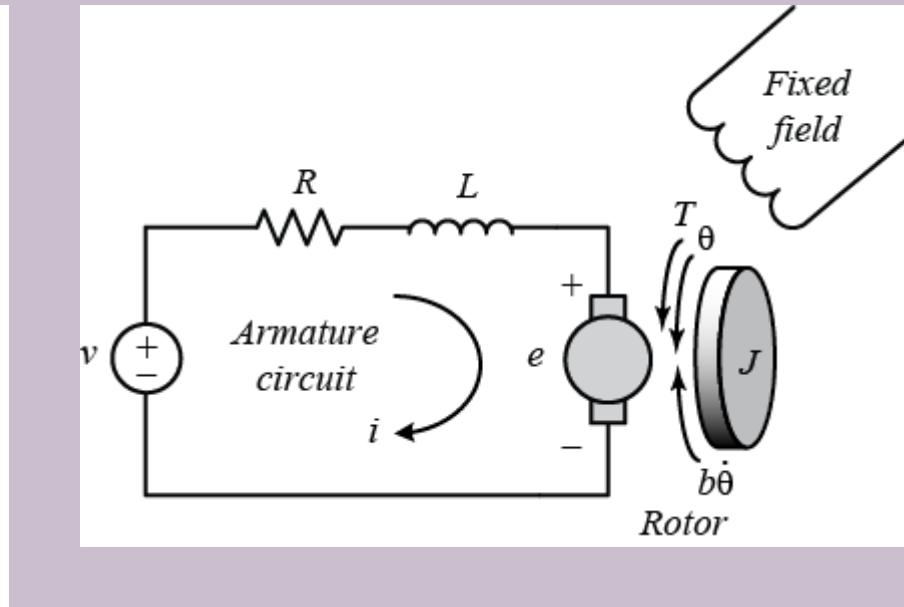
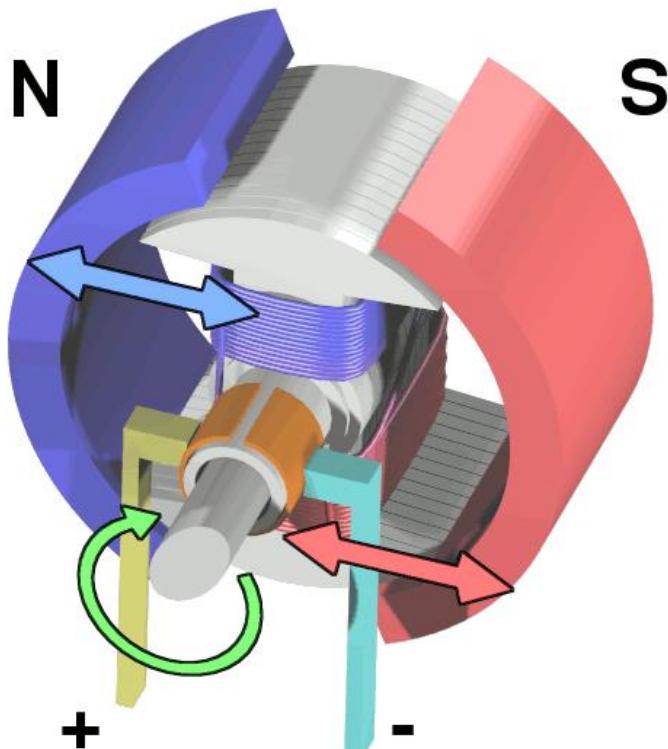
- Stabiliteitscriterium van Nyquist
- Stabiliteitsmarges van Bode

Technieken in s-domein op basis van poollocaties zijn sterk gerelateerd aan het tijddomein.

Robot auto die lijn volgt

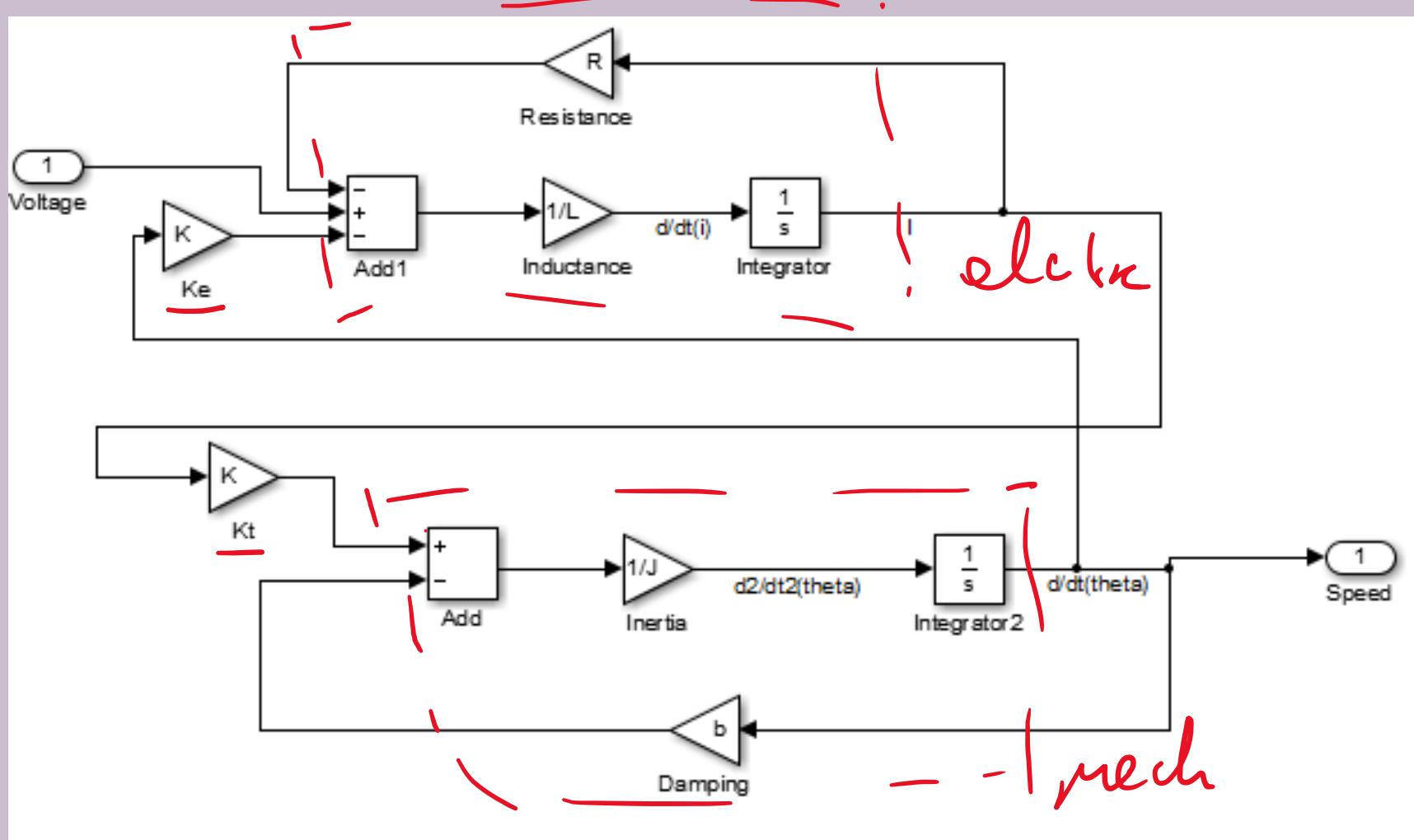


DC Motor



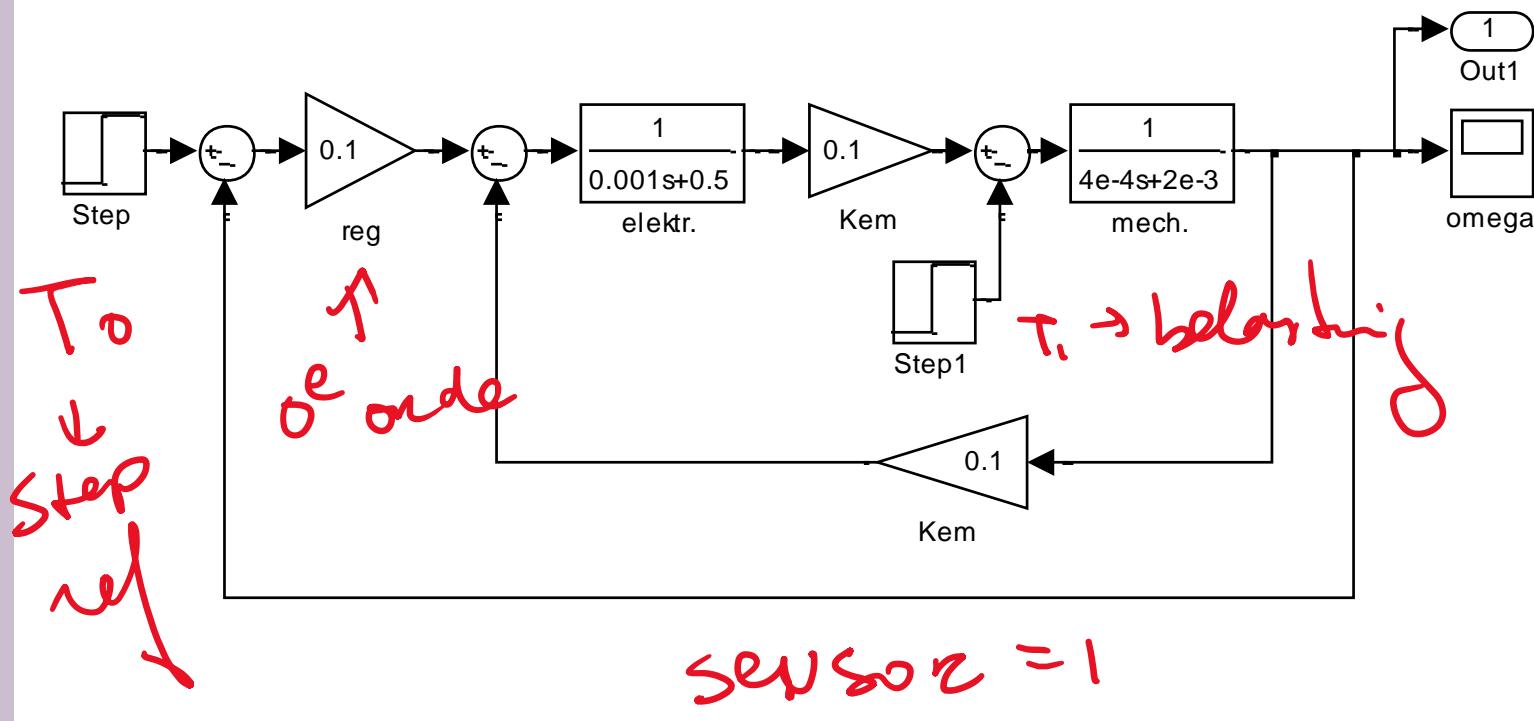
$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = T - b \frac{d\theta}{dt} \implies \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{J} (K_t i - b \frac{d\theta}{dt})$$

$$L \frac{di}{dt} = -Ri + V - e \implies \frac{di}{dt} = \frac{1}{L} (-Ri + V - K_e \frac{d\theta}{dt})$$

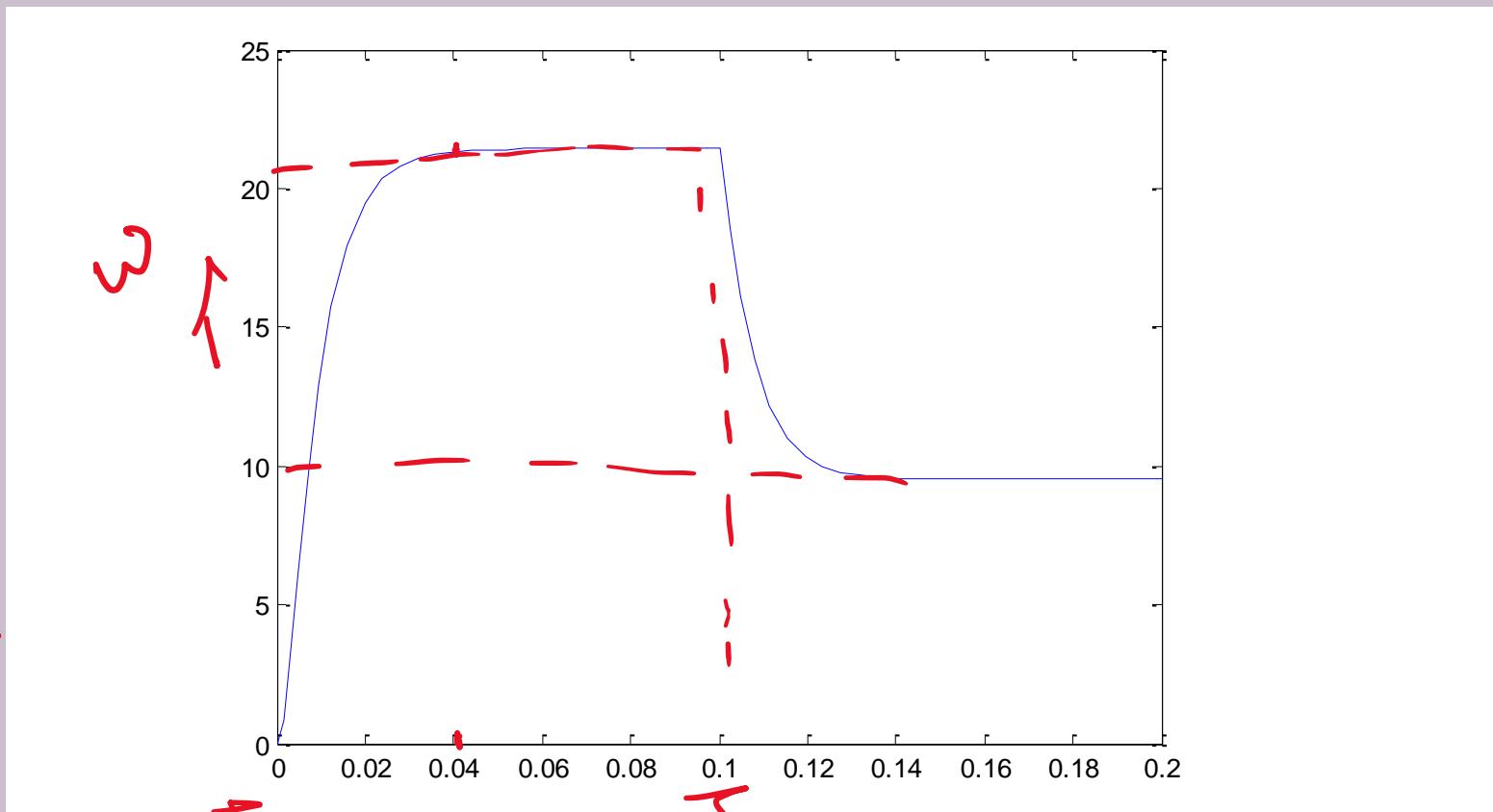


Terugkoppeling & stabiliteit: Stabiliteit & ω -domein

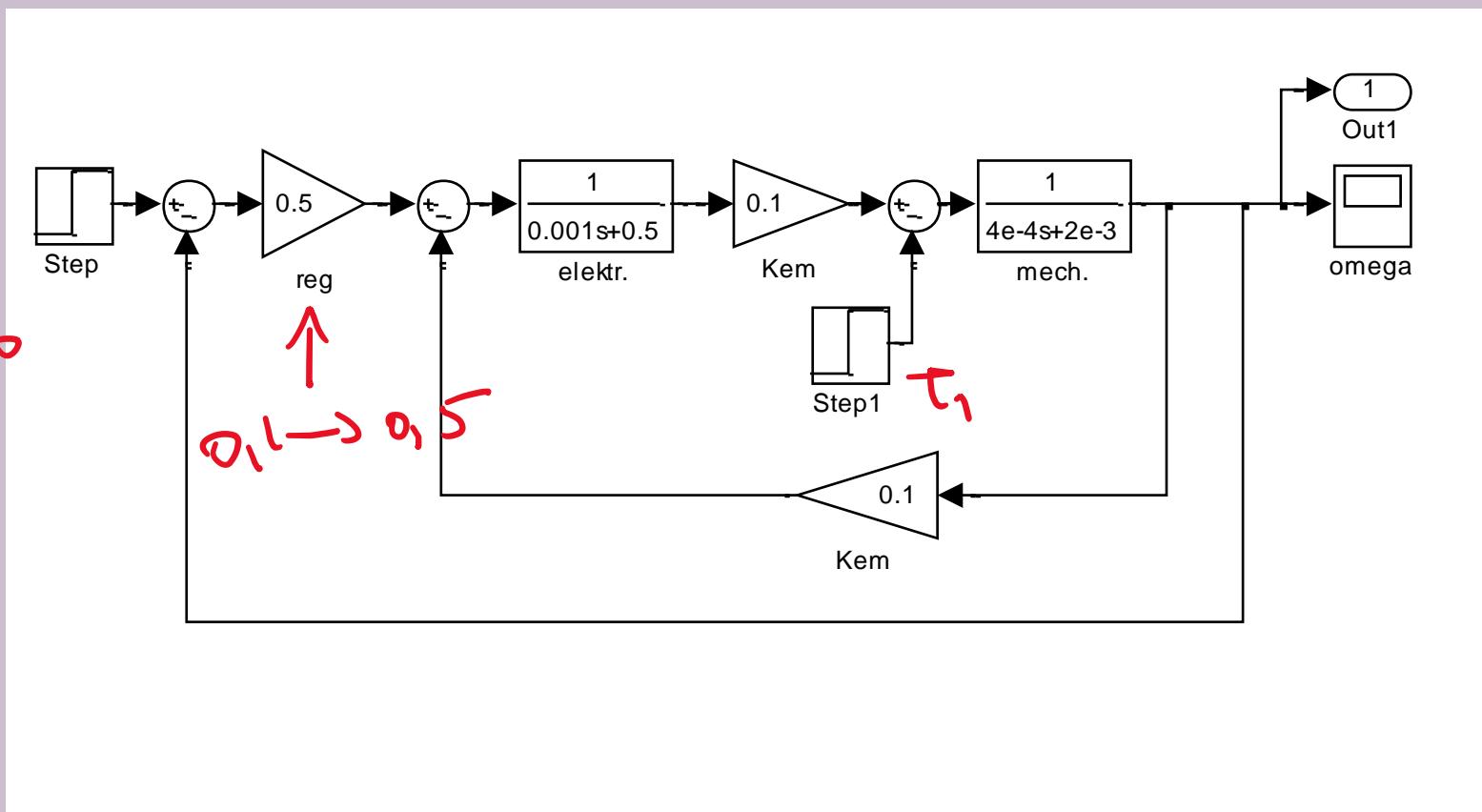
Vb: snelheidsregeling DC-motor



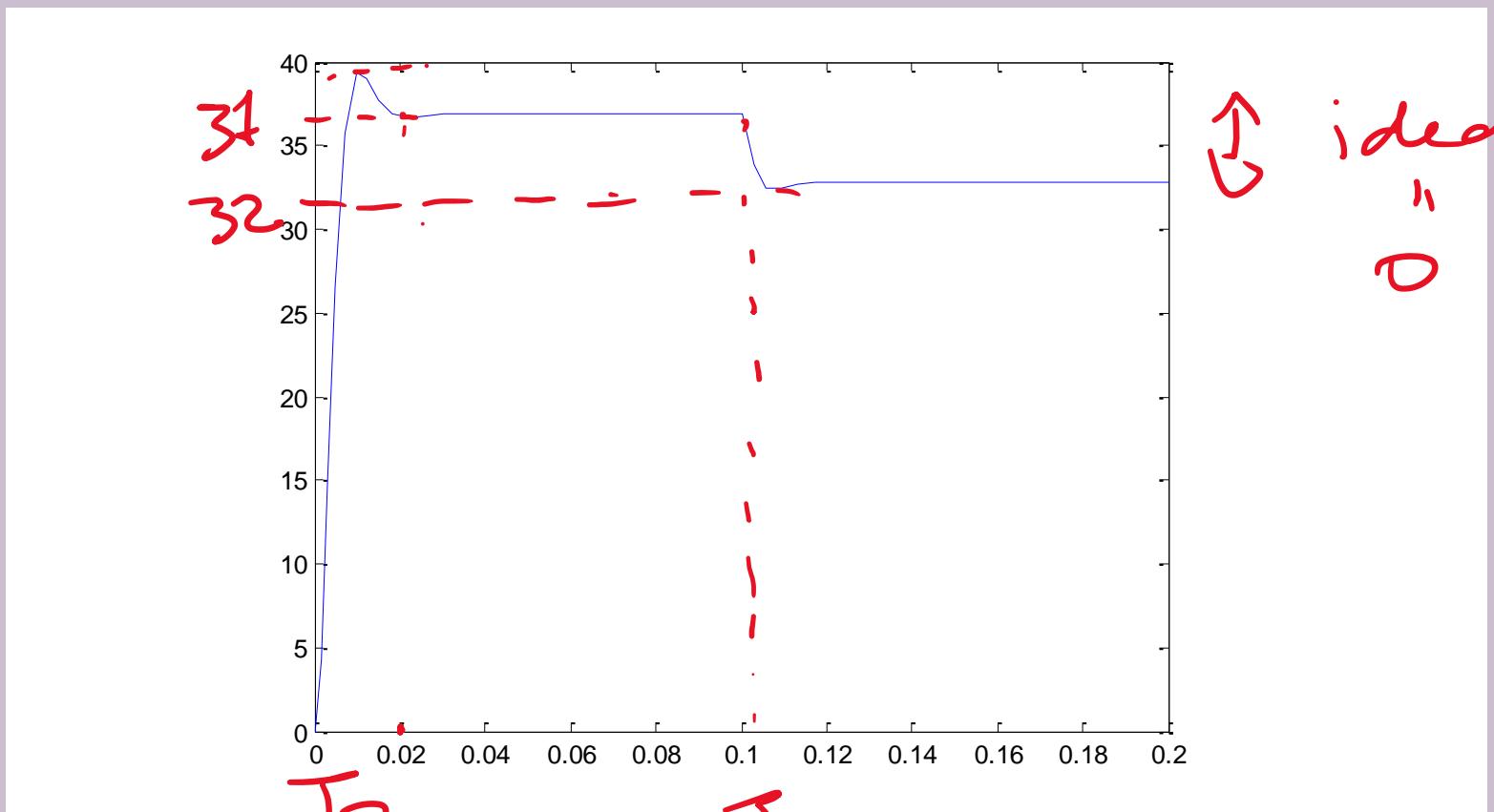
Terugkoppeling & stabiliteit: Stabiliteit & ω -domein



Terugkoppeling & stabiliteit: Stabiliteit & ω -domein



Terugkoppeling & stabiliteit: Stabiliteit & ω -domein



Terugkoppeling & stabiliteit: Stabiliteit

Enkele definities:

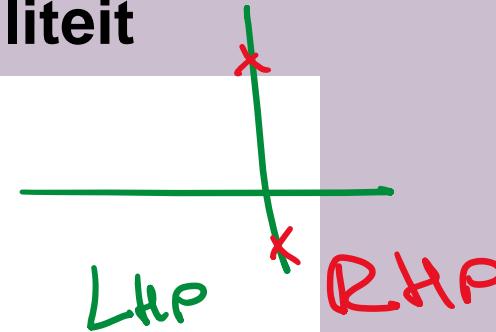
$BIBO$
Bounded input Bounded output

- stabiel systeem: responsie is begrensd op een willekeurig ingangssignaal (ook begrensd)
- betere beoordeling: responsie op een impuls gaat $\rightarrow 0$ voor $t \rightarrow \infty$, dan is het systeem stabiel
- De impulsresponsie $Y(s) = 1 \times H(s)$, dus $Y(s) = H(s)$, dus is uit het pn beeld van $H(s)$ het systeemgedrag af te leiden.

Terugkoppeling & stabiliteit: Stabiliteit

Ligging van de systeem polen:

- linker halfvlak: op reële as of toegevoegd complex: systeem stabiel, $\beta > 0$
- Op de imaginaire as, systeem is instabiel, output is constant: oscillator, $\beta = 0$
- Rechter halfvlak: systeem is instabiel, in tijd toenemende amplitude op ieder willekeurig ingangssignaal



Terugkoppeling & stabiliteit: Stabiliteit in het s-domein

Een systeem is stabiel als:

- Responsie op een willekeurig signaal is beperkt
- Polen in het linker halfvlak

Een linear systeem is stabiel indien zijn impulsresponsie naar nul gaat als de tijd naar oneindig gaat.



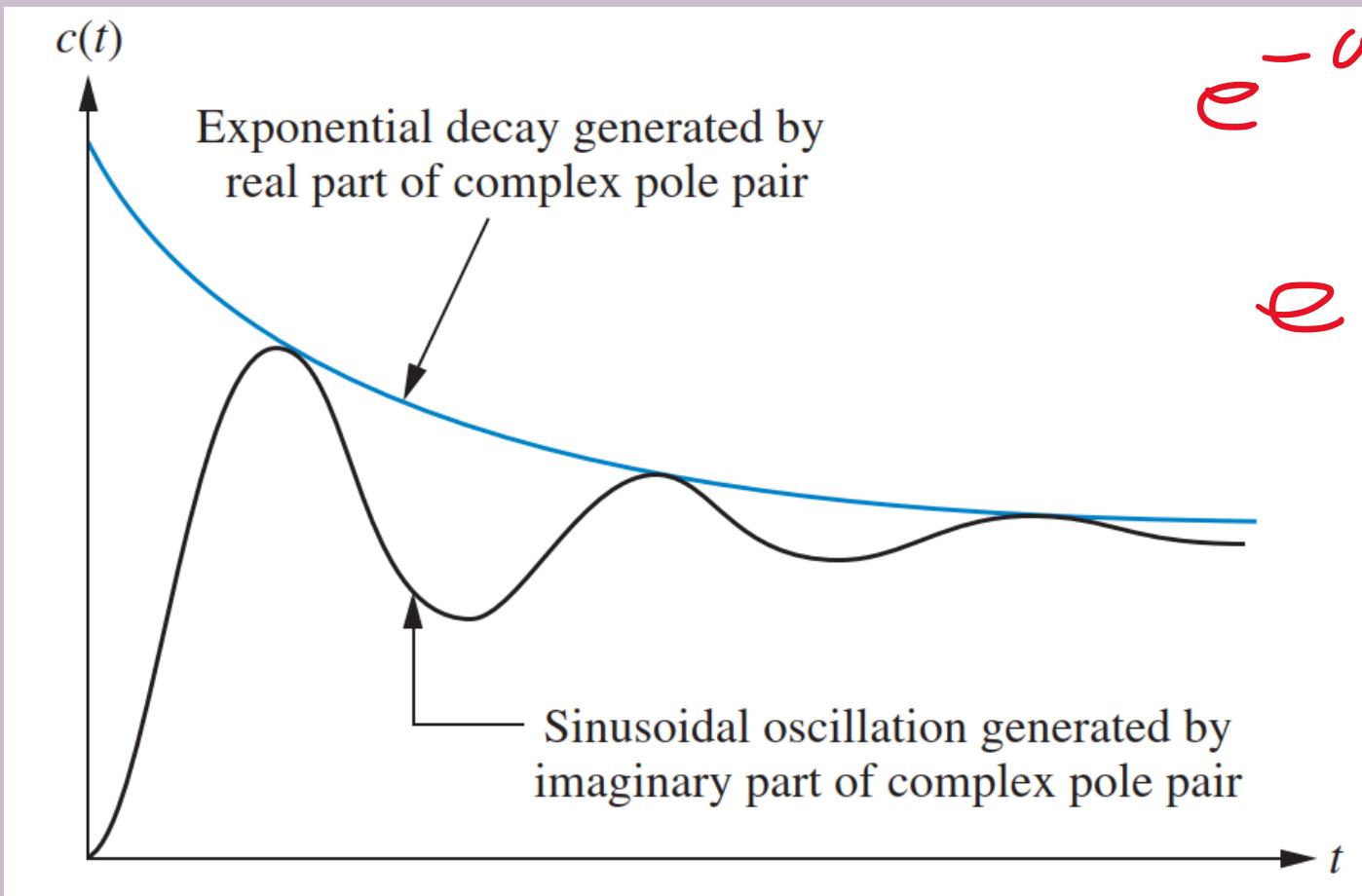
Terugkoppeling & stabiliteit: Stabiliteit in het s-domein

- een systeem is stabiel als alle polen in het linkerhalfvlak liggen (er mogen wel nulpunten in het rechterhalfvlak liggen)
- 1 of meer polen in het rechter halfvlak: systeem is instabiel
- polen op de imaginaire as: demping is nul, systeem is instabiel (eigenlijk marginaal stabiel)

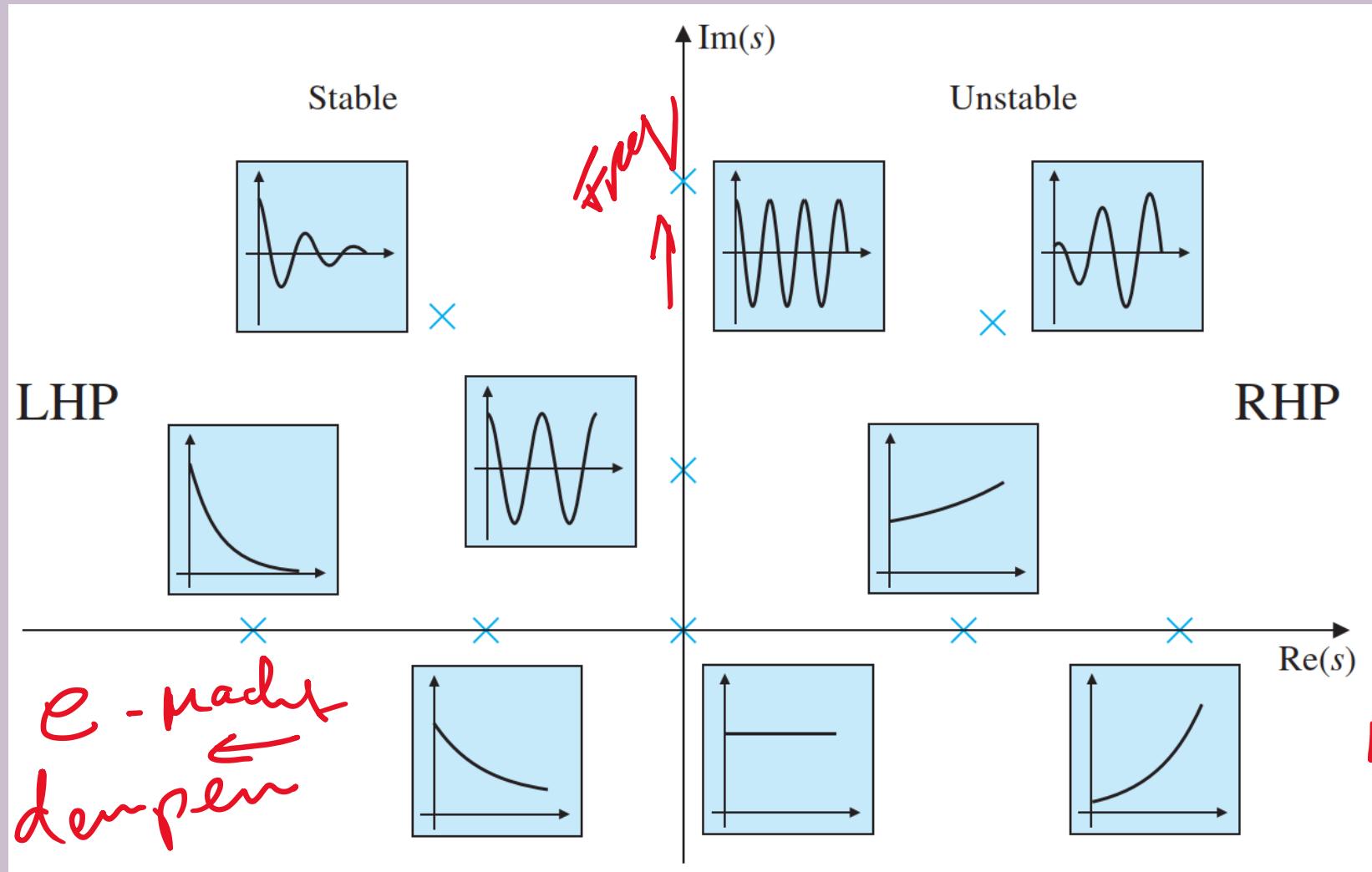
$$A_i \cdot e^{p_i t}$$

$$p_i = \lambda_i + j\omega_i$$

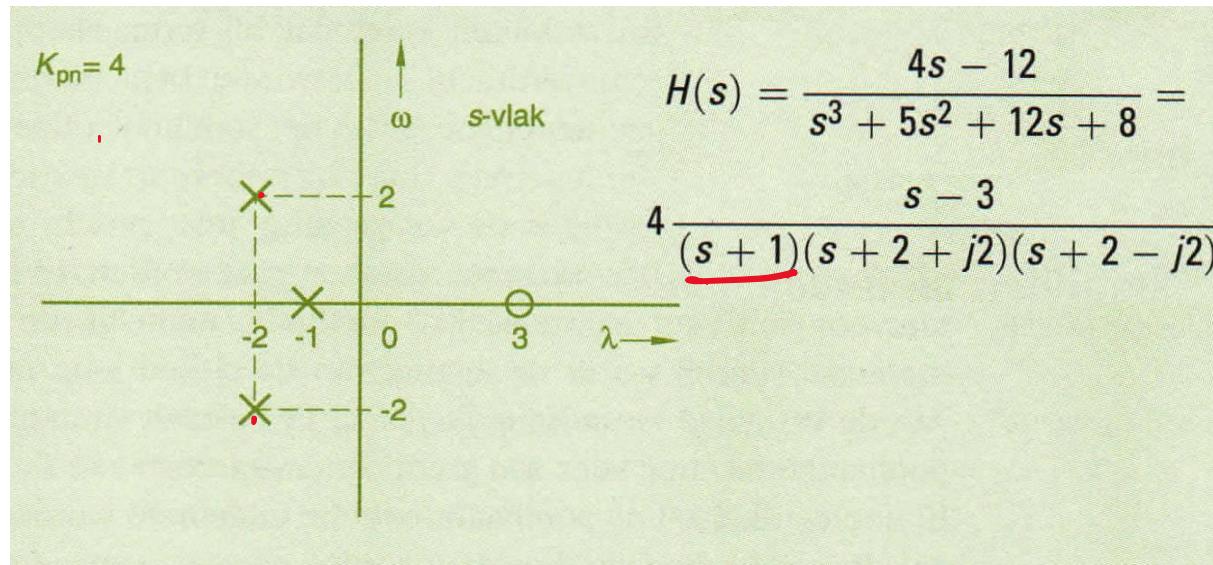
Gedempte 2de orde systeem



Stabiliteit in het s-domein

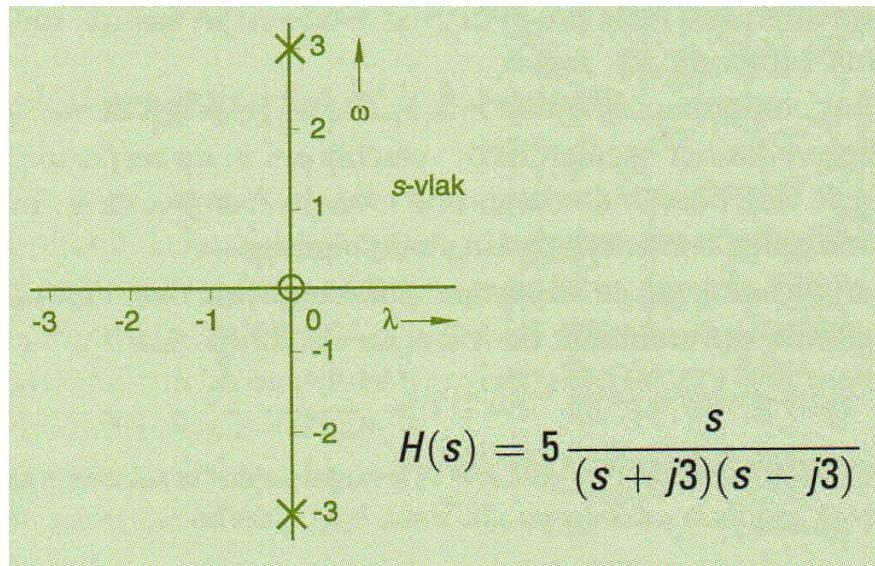


Terugkoppeling & stabiliteit: Stabiliteit



Voorbeeld van een stabiel systeem, de polen liggen in het linker halfvlak

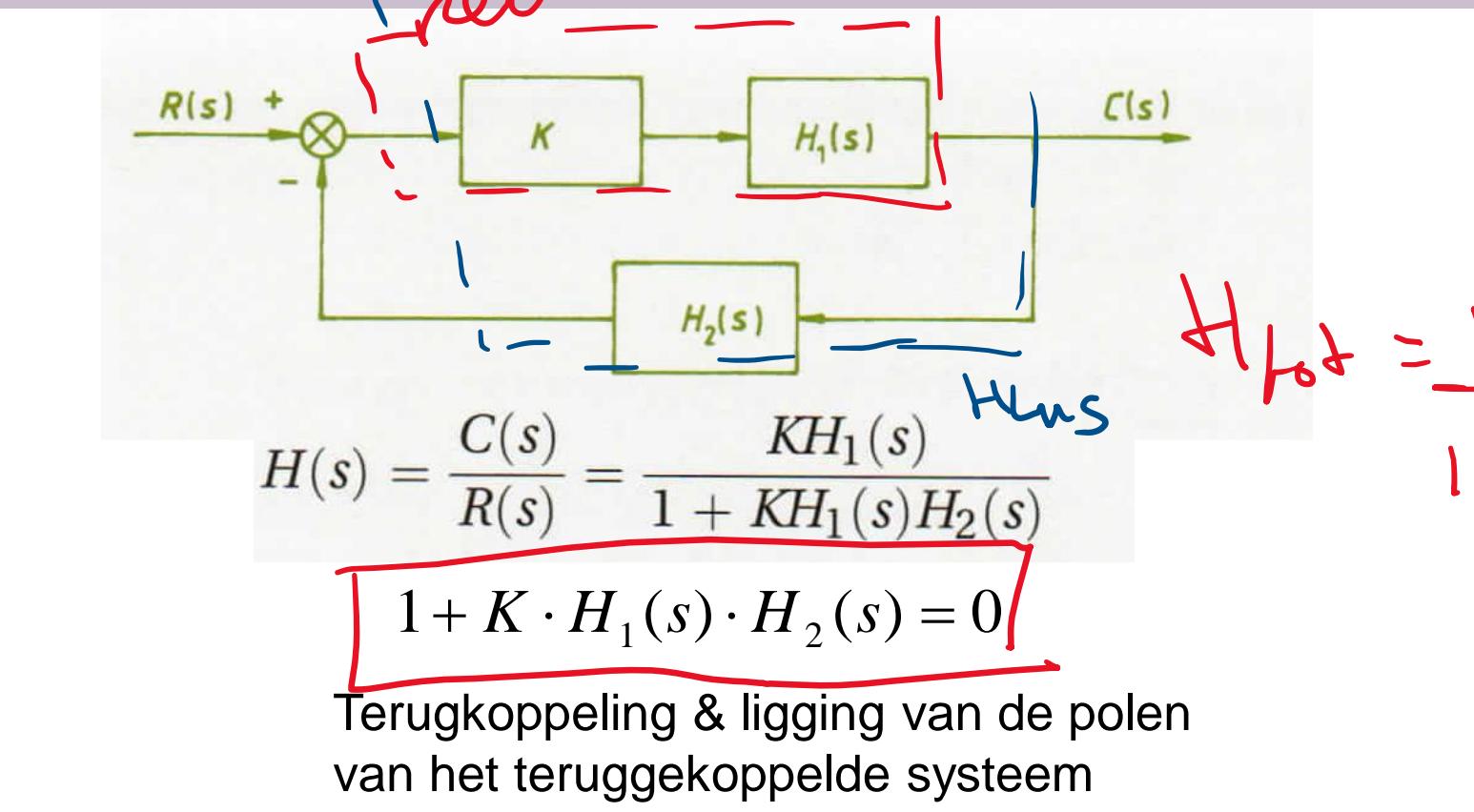
Terugkoppeling & stabiliteit: Stabiliteit & terugkoppeling



Voorbeeld van een instabiel systeem, de polen liggen op de imaginaire as!

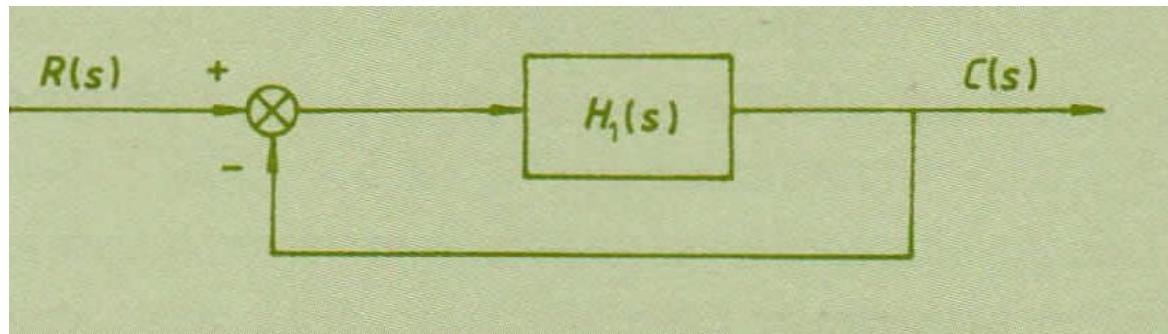
Terugkoppeling & stabiliteit: Stabiliteit bij

terugkoppeling



$$H_{tot} = \frac{H_{ree}}{1 + H}$$

Terugkoppeling & stabiliteit: Stabiliteit bij terugkoppeling



$$H_1(s) = \frac{K}{1 + \tau s} = \frac{\frac{K}{\tau}}{s + \frac{1}{\tau}}$$

$$H(s) = \frac{K}{1 + \tau s + K} = \frac{\frac{K}{\tau}}{s + \frac{1 + K}{\tau}}$$

Overdracht systeem

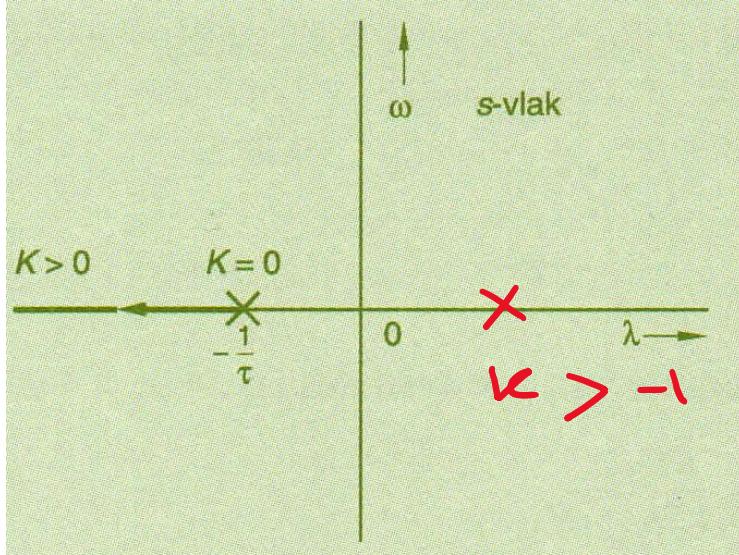
$K \in \mathbb{R} \rightarrow \text{stabiel}$

Overdracht teruggekoppeld systeem

$K > 0$ is stabiel

Terugkoppeling & stabiliteit: Stabiliteit bij terugkoppeling

$$H(s) = \frac{K}{1 + \tau s + K} = \frac{\frac{K}{\tau}}{s + \frac{1+K}{\tau}}$$



$$K = 0 \Rightarrow H_{CL} = H_{OPEN}$$

$K > 0 \Rightarrow H_{CL} = \text{stabiel}$; pool naar links

$-1 < K < 0 \Rightarrow H_{CL} = \text{stabiel}$, pool naar rechts

$K > -1 \Rightarrow H_{CL} = \text{instabiel}$

$$K=0 \quad \frac{0}{1+\tau s}$$

$$\text{Stab } \tau=2$$

$$K=3 \rightarrow \text{pool} = -2$$

$$K=0 \quad - \quad - = -1/2$$

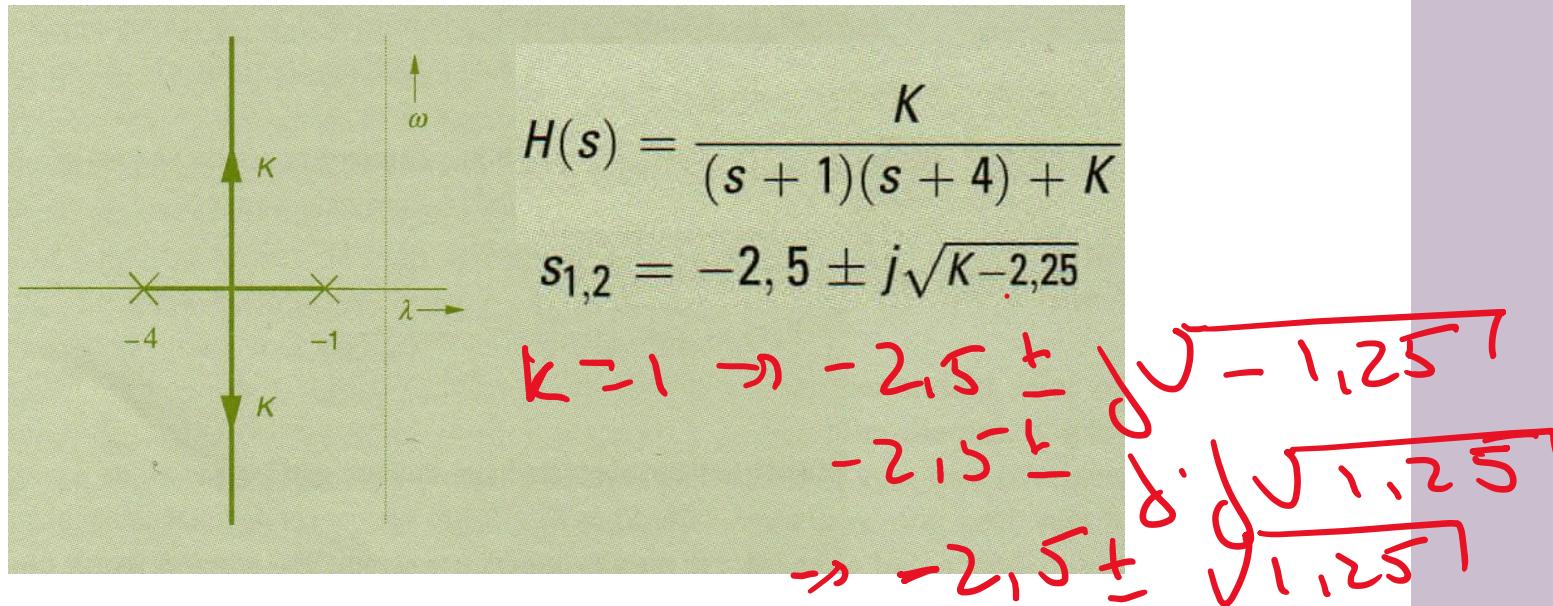
$$K = -1/2$$

$$-1/2$$

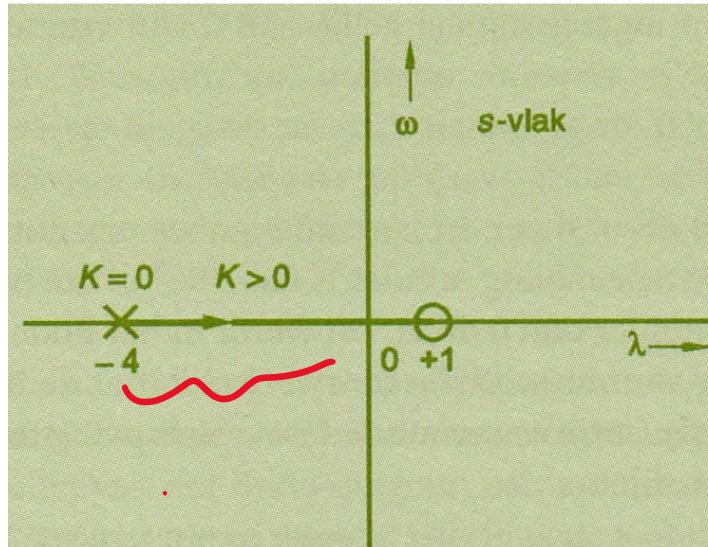
Terugkoppeling & stabiliteit: Stabiliteit bij terugkoppeling

$K \leq 2.25 \Rightarrow H_{CL} = \text{stabiel}$

$K > 2.25 \Rightarrow H_{CL} = \text{stabiel}; \text{oscillatie vanwege complexe polen}$



Terugkoppeling & stabiliteit: Stabiliteit bij terugkoppeling



$$H_1(s) = \frac{K(s - 1)}{(s + 4)} \rightarrow \text{al bij}$$

$$H(s) = \frac{K(s - 1)}{(s + 4) + \underline{K(s - 1)}}$$

$$(s + 4) + K(s - 1) = 0$$

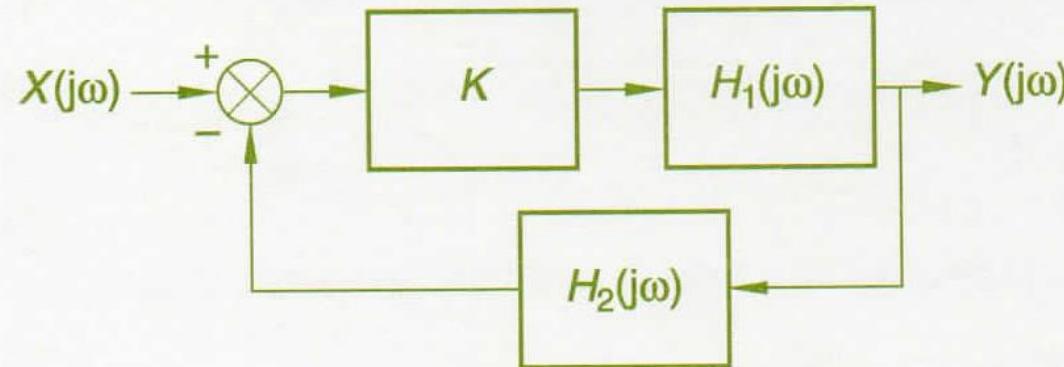
$K < 4$

$K \rightarrow \infty, s = 1 \Rightarrow H_{CL} = \text{instabiel}$

$K = 0, s = -4 \Rightarrow H_{CL} = H_{OPEN}$

$K = 4, s = 0 \Rightarrow H_{CL} \rightarrow \text{pool op oorsprong} \Rightarrow \text{instabiel.}$

Terugkoppeling & stabiliteit: Stabiliteit & ω -domein



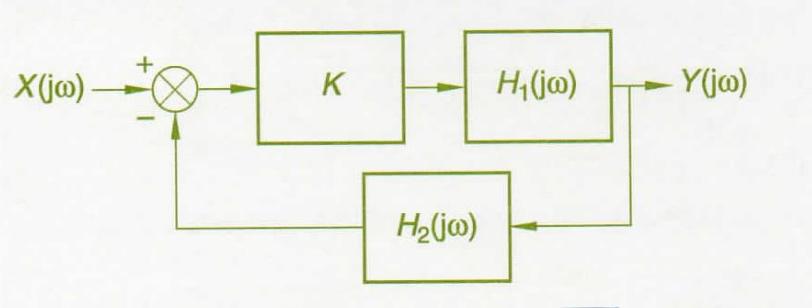
$$H_{tot}(j\omega) = \frac{H_{rechtdoorgaand}(j\omega)}{1 + H_{rondgaand}(j\omega)} = \frac{KH_1(j\omega)}{1 + KH_1(j\omega)H_2(j\omega)}$$

Als: $1 + H_{rondgaand}(j\omega) = 0$ dan: $H_{tot}(j\omega) = \infty$

Met: $H_{rondgaand}(j\omega) = K \cdot H_1(j\omega) \cdot H_2(j\omega)$

Lusversterking is: $|H_{rondgaand}(j\omega)|$

Terugkoppeling & stabiliteit: Stabiliteit & ω -domein



$$H_{ws} = -1$$

$$H_{tot} = \frac{H_{rechLd.}}{1 + H_{Lus}}$$

$$H_{rechLd.} = \frac{H_{rechLd.}}{0}$$

$$|H| = 1 \text{ dB}$$

$$\varphi(H) = -180^\circ$$

Terugkoppeling & stabiliteit: Stabiliteit & ω -domein

In het Bode-diagram van $H_{\text{rondgaand}}(j\omega)$ kan de stabiliteit van een geregeld systeem worden onderzocht door te kijken of bij een fase-naijiling van 180° de lusversterking gelijk aan of groter is dan 1, ofwel 0 dB of meer. Dit leidt tot de begrippen fasemarge en versterkingsmarge.

De stabiliteit is ook te beoordelen op basis van de polaire figuur, het Nyquistdiagram. Het stabilitetscriterium van Nyquist luidt in het kort:

Als men over de polaire figuur van $H_{\text{rondgaand}}(j\omega)$ gaat van $\omega = 0$ naar $\omega = \infty$ en het punt -1 wordt niet omsloten, dan is het systeem stabiel.

Deze methode is echter alleen geldig voor systemen en regelaars met polen in het linkerhalfvlak en/of in de oorsprong.

Terugkoppeling & stabiliteit: Stabiliteit & ω -domein

Stabiliteitscriterion:

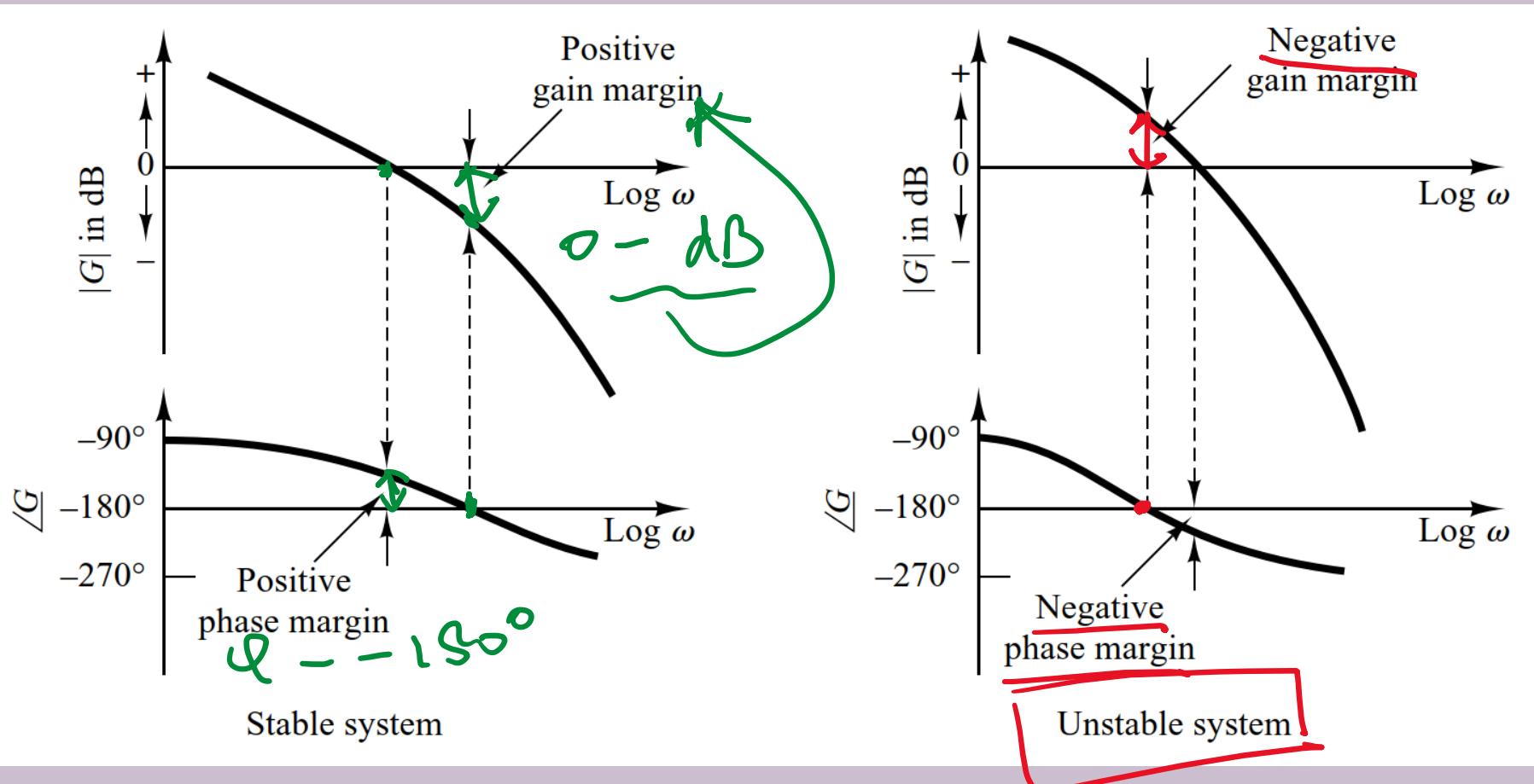
$H_L \neq -1$ dus: $|H_L| \neq 1$ en tegelijkertijd $\arg(H_L) \neq -180^\circ$

Versterkingsmarge = Het verschil tussen de amplitude van H_L en 0 dB op de frequentie waarop $\arg(H_L) = -180^\circ$

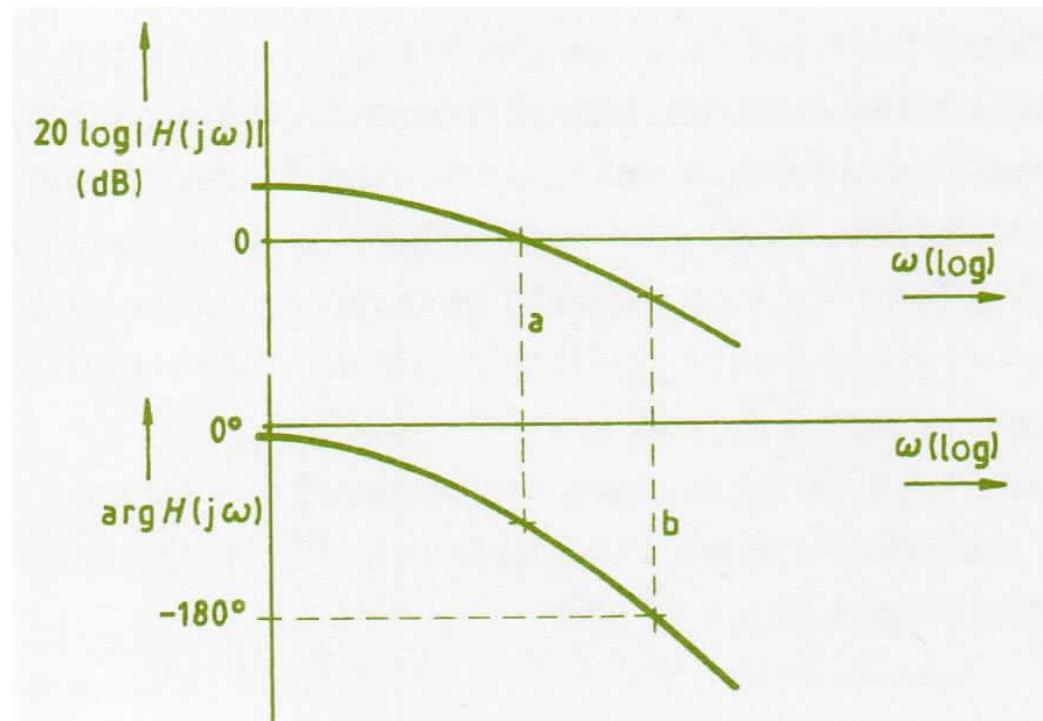
Fasemarge= Het verschil tussen de fase van H_L en -180° op de frequentie waarop $H_L = 0$ dB.

$K \pm 5\%$

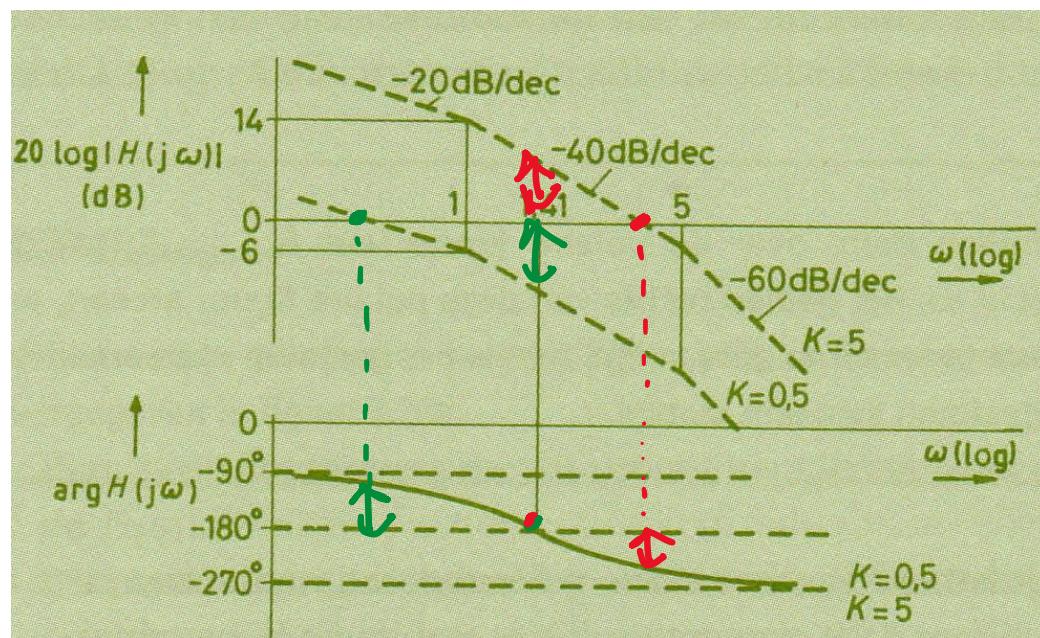
Terugkoppeling & stabiliteit: Stabiliteit & ω -domein



Terugkoppeling & stabiliteit: Stabiliteit & ω -domein



Terugkoppeling & stabiliteit: Stabiliteit & ω -domein

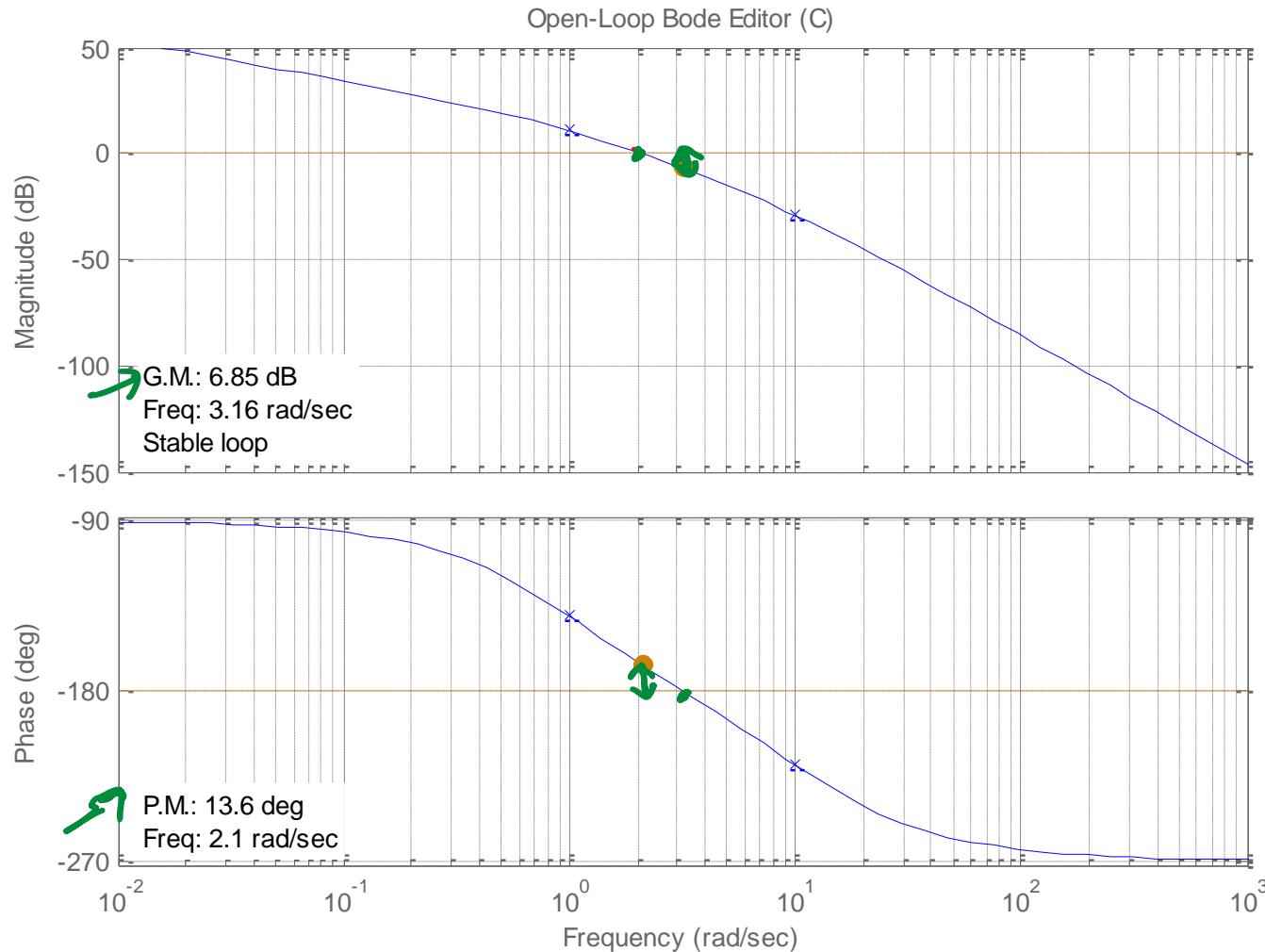


$$H_{rondgaand}(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1 + j\omega 0,2)(1 + j\omega)}$$

H_L

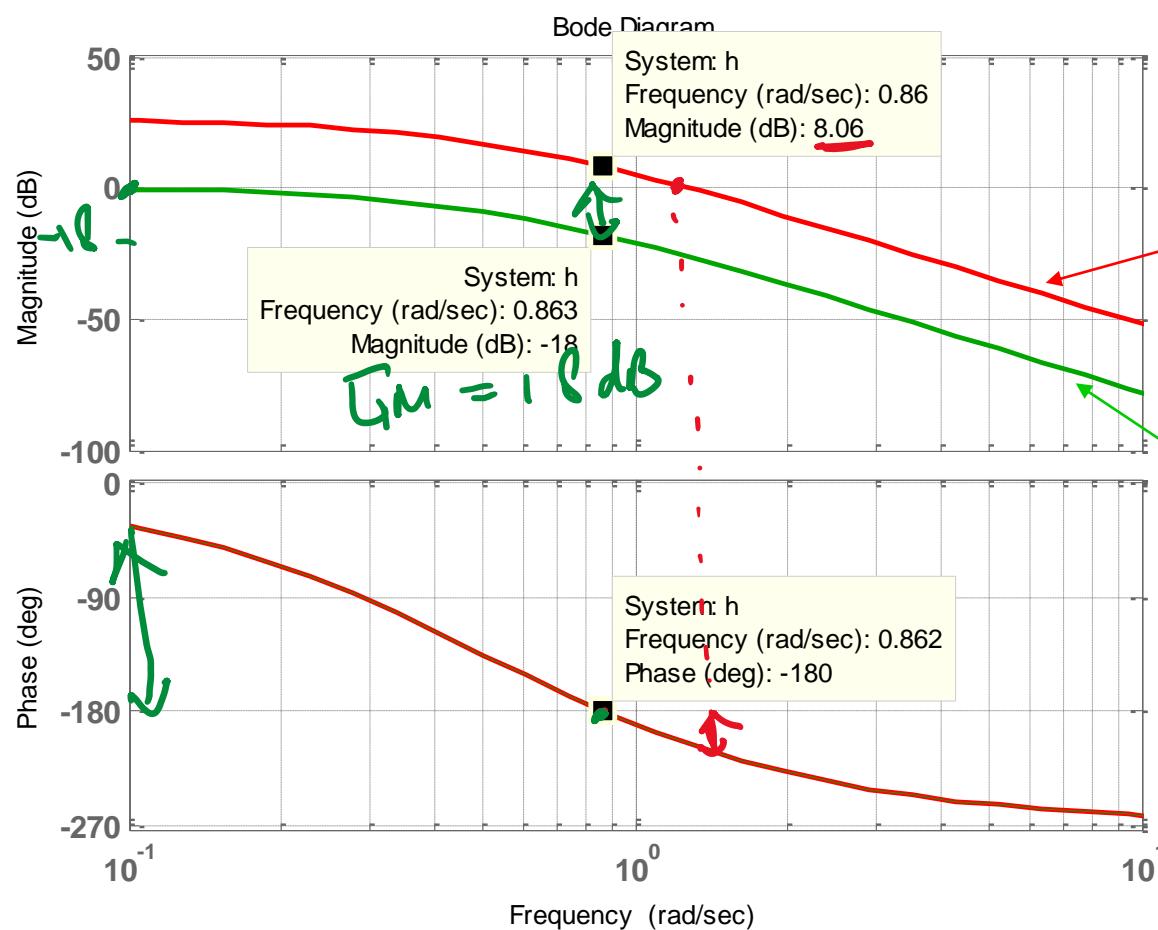
ω -domain

Bode plot 3rd order system, K = 1: $H(s) = \frac{50}{s(s+1)(s+10)}$



Terugkoppeling & stabiliteit: Stabiliteit & ω -domein

Uit het Bodediagram van de lusoverdracht volgt of het regelsysteem stabiel is of niet:



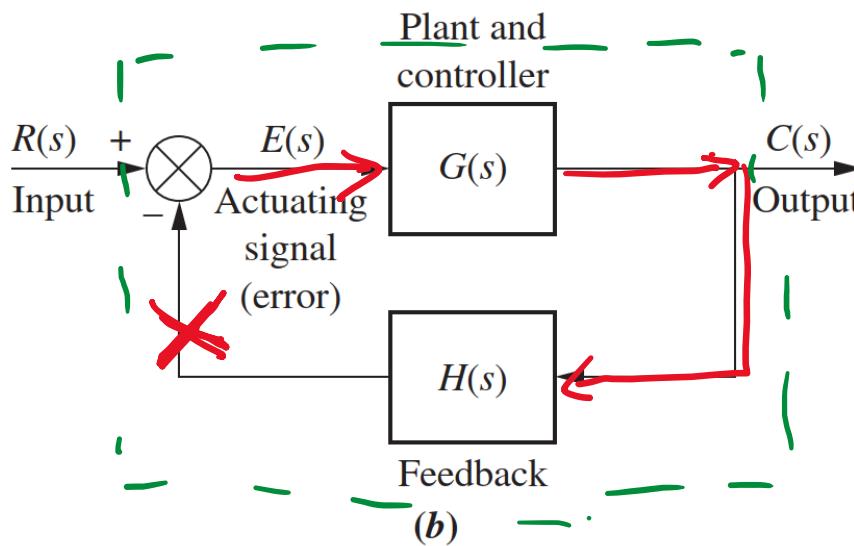
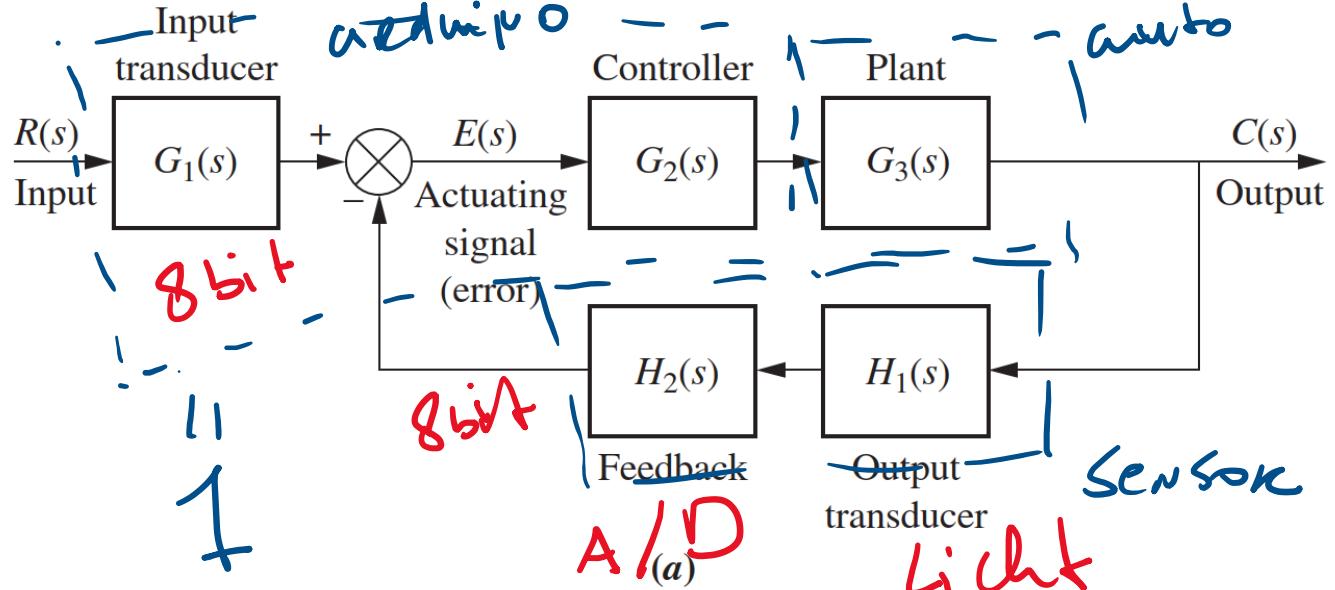
instabiel

$$H_L(s) = \frac{20}{(2s+1)^3}$$

Instabiel omdat $|HL(j\omega)| > 1$
bij $\arg\{HL(j\omega)\} = -180^\circ$

$$H_L(s) = \frac{1}{(2s+1)^3} >$$

Stabiel omdat $|HL(j\omega)| < 1$
bij $\arg\{HL(j\omega)\} = -180^\circ$



$$H_{\text{Lus}} = G(s) \cdot H(s)$$

Handwritten notes:

- Red text: "TF r → c ="
- Red text: "H_{open}"

$$\frac{R(s)}{1 + G(s)H(s)} \rightarrow \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} C(s)$$

(c)

$H_{\text{closed loop}}$

Terugkoppeling & stabiliteit: Stabiliteit & ω -domein

Opgave: gegeven het systeem: $H(s) = \frac{3162}{(s+10)^3}$

Gevraagd: GESLOTEN-LUS STABIEL?

- bereken de fasemarge-frequentie en de fasemarge
- bereken de versterkingsmarge-frequentie en de versterkingsmarge

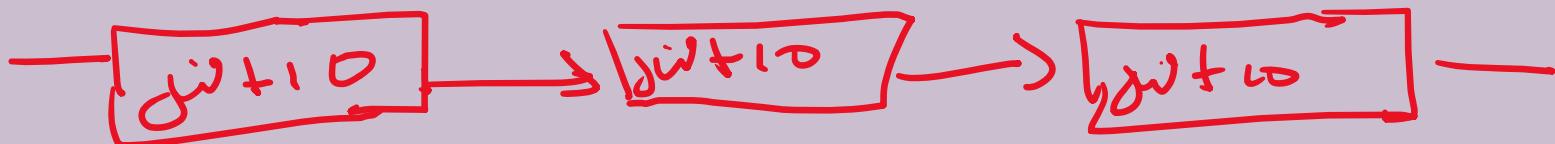
$$H(s) = \frac{3162}{(s+10)^3}$$

① w_{PM} PM

② w_{GM} GM

① $|H| = 1 = 0 \text{ dB}$

$$|H| = \left| \frac{3162}{(j\omega + 10)^3} \right| = \frac{3162}{|(j\omega + 10)^3|} = 1$$



$$\int \frac{\sigma + j\omega}{\sigma = 0} d\omega \Rightarrow |H(j\omega)|$$

$$\frac{|3162|}{|(j\omega + 10)^3|} = 1 \xrightarrow[\text{eigensch.}]{\text{cascade}} \frac{3162}{(j\omega + 10)^3} = 1$$

$$3162 = (j\omega + 10)^3$$

$$|\operatorname{Re} + j\operatorname{Im}| = \sqrt{\operatorname{Re}^2 + \operatorname{Im}^2}$$

$$3162 = (\sqrt{10^2 + \omega^2})^3$$

$$3162 = (10^2 + \omega^2)^{3/2} \Leftrightarrow 3162^{4/3} = 100$$

$$\omega = 10,1 \text{ rad/sec} \Rightarrow \omega_{PM}$$

$$\omega_{pm} = 10,7 \text{ rad/sec}$$

$\phi_{pm} ?$

$$\phi = \frac{3162}{(10,7 + \omega)^3}$$

$$\frac{a + jb}{c + jd} \rightarrow \cancel{\phi}(a + jb) - \cancel{\phi}(c + jd)$$

$$\frac{a + jb}{(c + jd)^2} \rightarrow \cancel{\phi}(a + jb) - \cancel{\phi}(c + jd)$$

$$\phi \left(\frac{31^{62}}{(\omega + 10)^3} \right) \Rightarrow \underbrace{\phi(31^{62})}_{0} - 3\phi(\omega + 10)$$

$$\Rightarrow -3\phi(\omega + 10) \quad \tan^{-1} \left(\frac{Im}{Re} \right)$$

$$-3 \tan^{-1} \left(\frac{\omega}{10} \right)$$

$$\omega = 10, 1 \rightarrow -3 \tan^{-1} \left(\frac{10,1}{10} \right) = -14^\circ$$

$$\phi_{PM} = 180^\circ - 141,2^\circ = 38,8^\circ$$

$$[-180^\circ] \Rightarrow T_M$$

$$\phi\left(\frac{3162}{(\omega+10)^3}\right) = -180^\circ$$

$$-3 \tan^{-1}\left(\frac{\omega}{10}\right) = -180^\circ$$

$$\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{10}\right) = 60^\circ$$

$$\tan(\tan^{-1}(\frac{\omega}{10})) = \tan(60^\circ) \Rightarrow \frac{\omega}{10} = 1, \quad \omega = 11,32 \text{ rad/s} =$$

$$\omega_{GM} = 17,32 \text{ rad/sec}$$

$$|H_{GM}| = \left| \frac{3162}{(j\omega + 10)^3} \right|$$

$$|H_{GM}| = \frac{3162}{[\sqrt{10^2 + \omega^2}]^3}$$

$$\frac{3162}{[\sqrt{10^2 + 17,32^2}]^3} = 0,395 -$$

$$G_M = 0 - - 8d$$

ω -domain

Rekenvoorbeeld Fasemarge.

Gegeven een 3e orde systeem: $H(s) = \frac{3162}{(s+10)^3}$ Bereken FM en ω_{FM}

$$H(j\omega) = \frac{3162}{(j\omega+10)^3}$$

ω_{FM} is de frequentie waarop $|H(j\omega)| = 0 \text{ dB} = \text{factor } 1$

$$|H(j\omega)| = \left| \frac{3162}{(j\omega+10)^3} \right| = \frac{3162}{|j\omega+10|^3} = \frac{3162}{\left\{ \sqrt{\omega^2 + 10^2} \right\}^3} = 1$$

$$\omega_{FM} = 10.7 \text{ rad/s.}$$

$$\arg(H(j\omega)) = -3 * \tan^{-1}(\omega/10) = -3 * \tan^{-1}(10.7/10) = -141.2^\circ$$

$$PM = 180^\circ - 141.2^\circ = 38.8^\circ$$

ω -domain

Rekenvoorbeeld Versterkingsmarge.

$$H(s) = \frac{3162}{(s+10)^3} \quad \text{Bereken VM and } \omega_{VM}$$

$$H(j\omega) = \frac{3162}{(j\omega+10)^3}$$

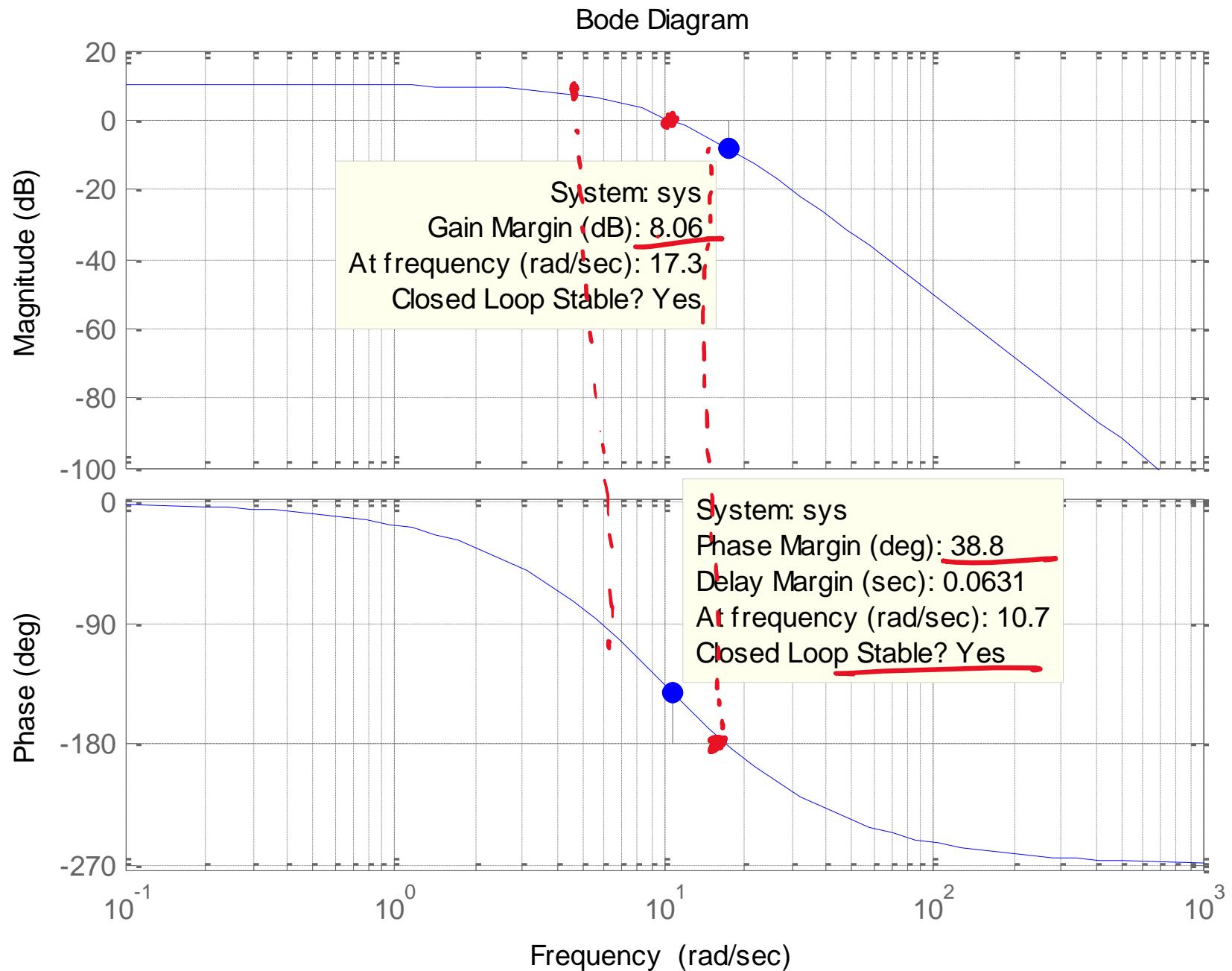
ω_{VM} is frequentie waarop $\arg(H(j\omega)) = -180^\circ$

$$\arg(H(j\omega)) = -3 * \tan^{-1}(\omega/10) = -180^\circ$$

$$\omega_{GM} = 17.3 \text{ rad/s.}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{3162}{\sqrt{\omega^2 + 10^2}^3} = \frac{3162}{\sqrt{17.3^2 + 10^2}^3} = \frac{3162}{8000} = 0.395 \times = -8.06dB$$

$$GM = 0 - (-8.06) = 8.06 \text{ dB}$$



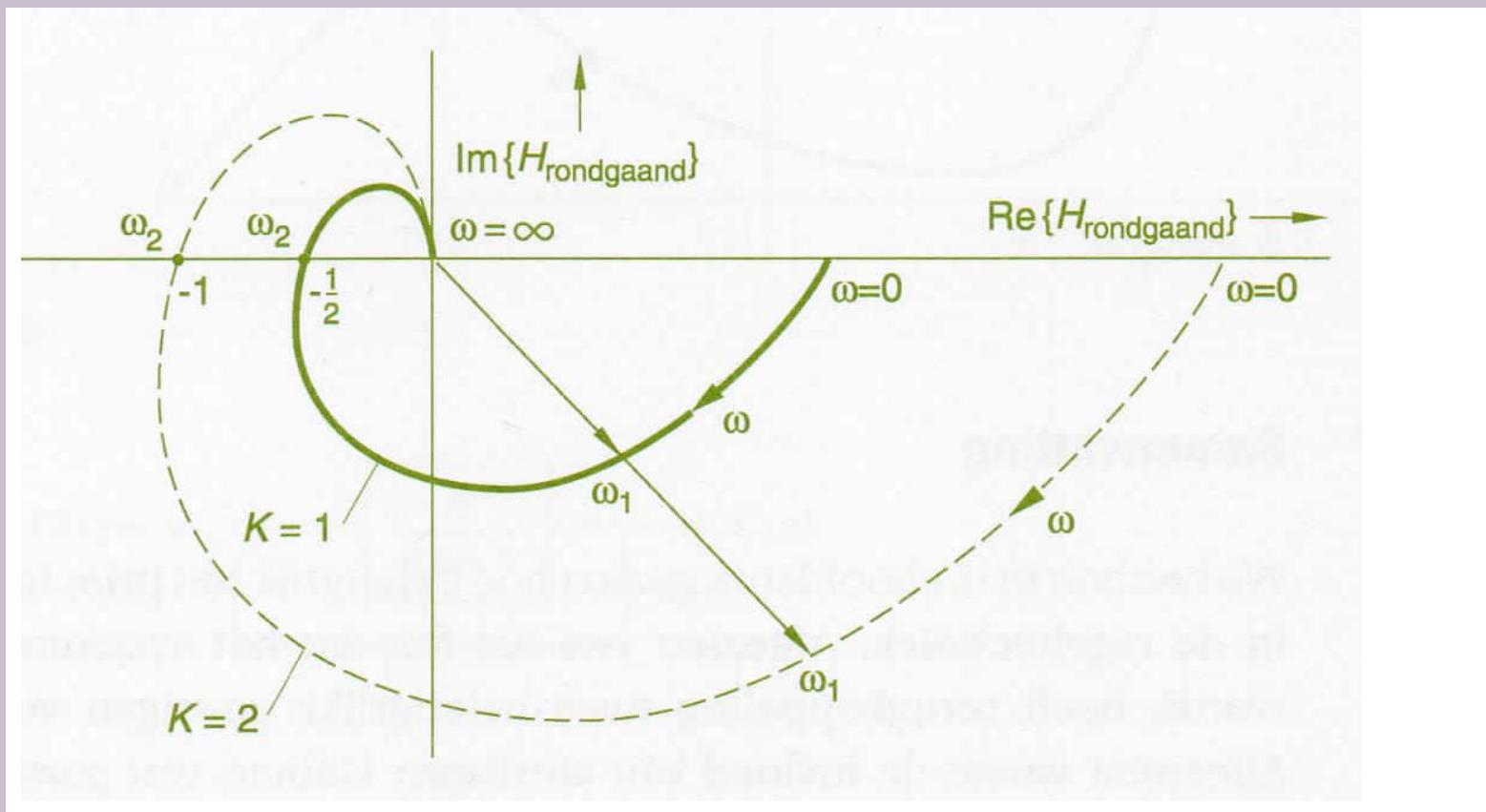
GROUP DISCUSSION:

- 1) Systeem met $FM = 45$ graden. Er komt een vertraging van 15 graden. Nieuwe FM?
- 2) Systeem met $VM = 10$ dB. Verhoog K bij 5 dB. Nieuwe VM?
- 3) Systeem met $VM = 10$ factor. Verhoog K 5 keer. Nieuwe VM?
- 4) Systeem met $VM = 10$ factor. $FM = 45$ graden. Verhoog K bij 5 keer. Nieuwe FM?
(meer/gelijk/minder)

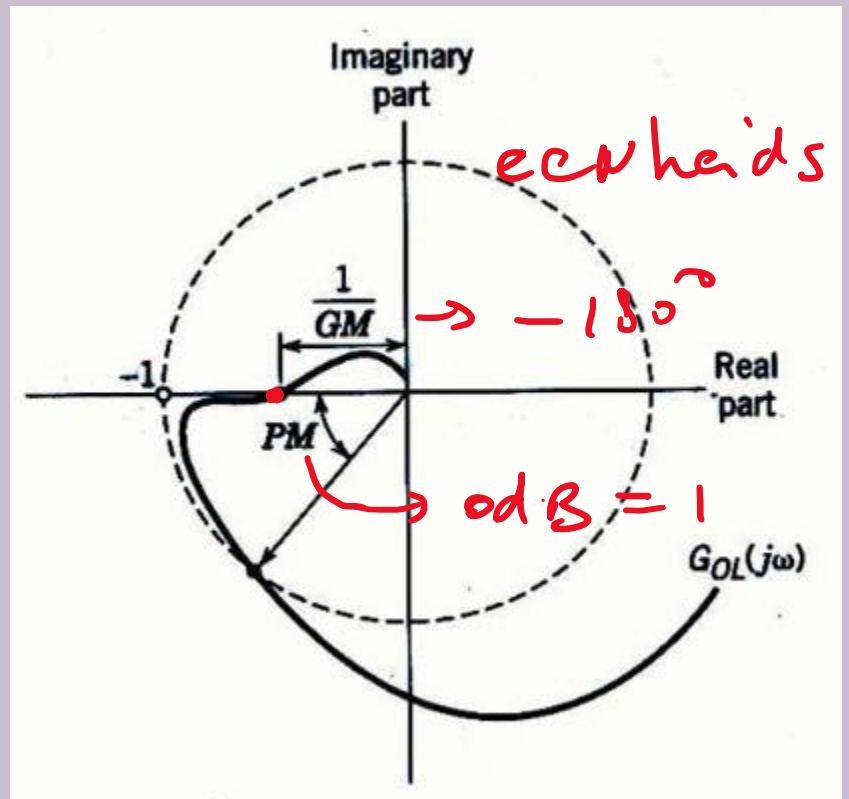
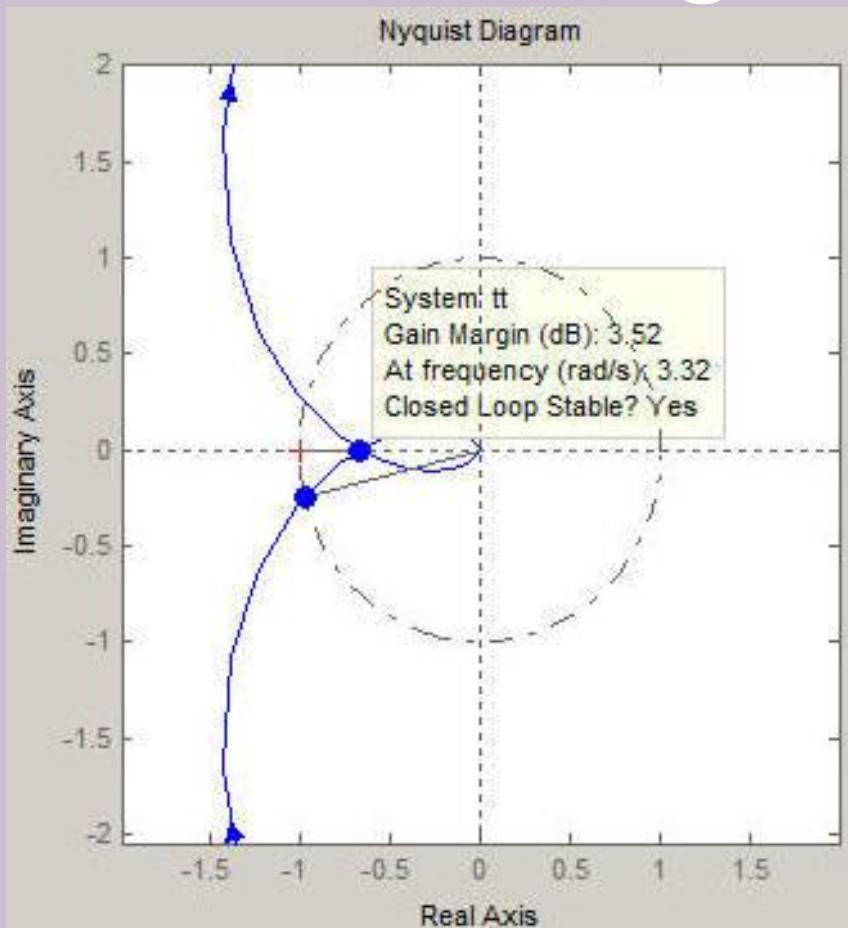
Slide

- 1) $PM = 45^\circ \rightarrow 30^\circ$ (15° Vertraging)
- 2) $VM 10\text{dB} \rightarrow 5\text{dB} \rightarrow \text{mag. omhoog}$
 $PM \uparrow$
- 3) $GM \uparrow 5 \rightarrow PM? \downarrow$
- 4) $PM \downarrow$

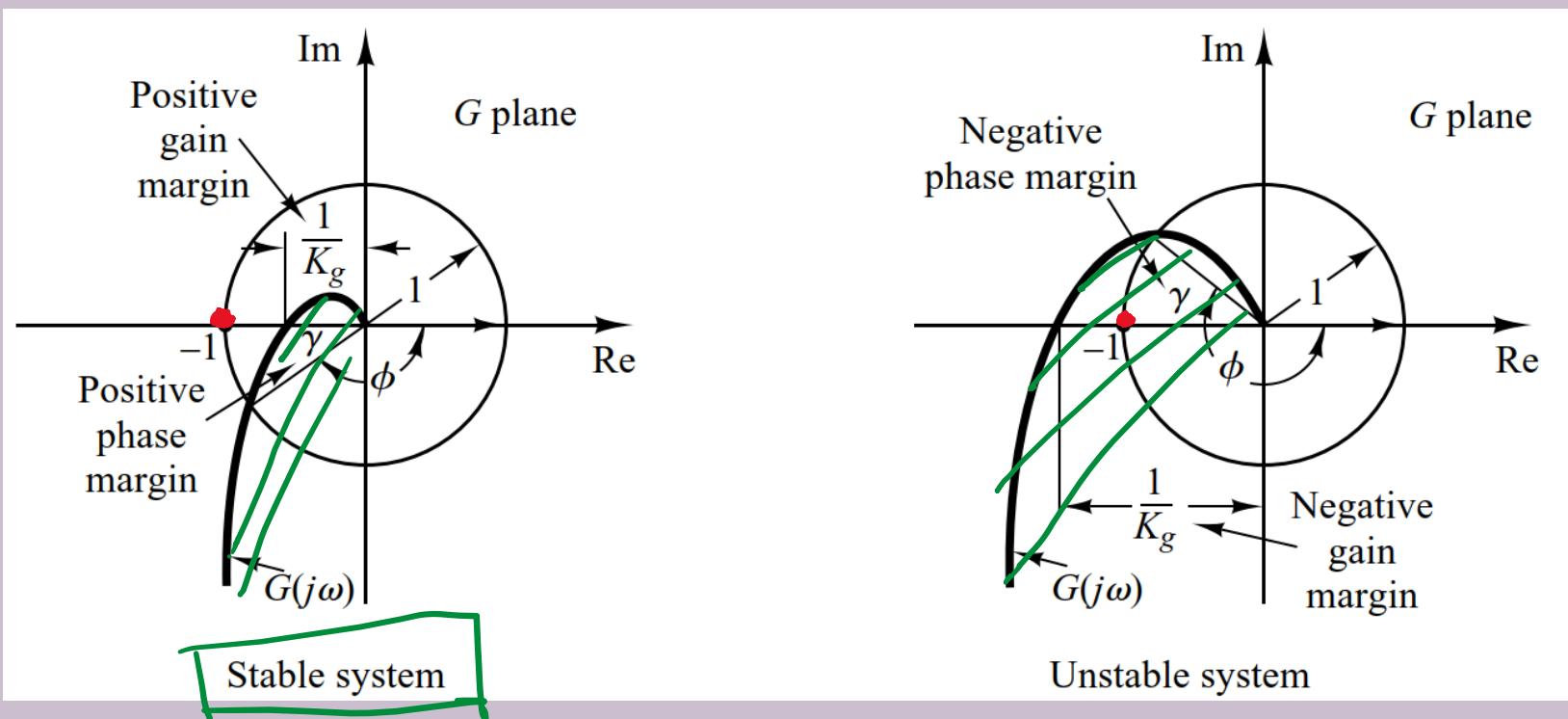
Terugkoppeling & stabiliteit: Stabiliteit & ω -domein



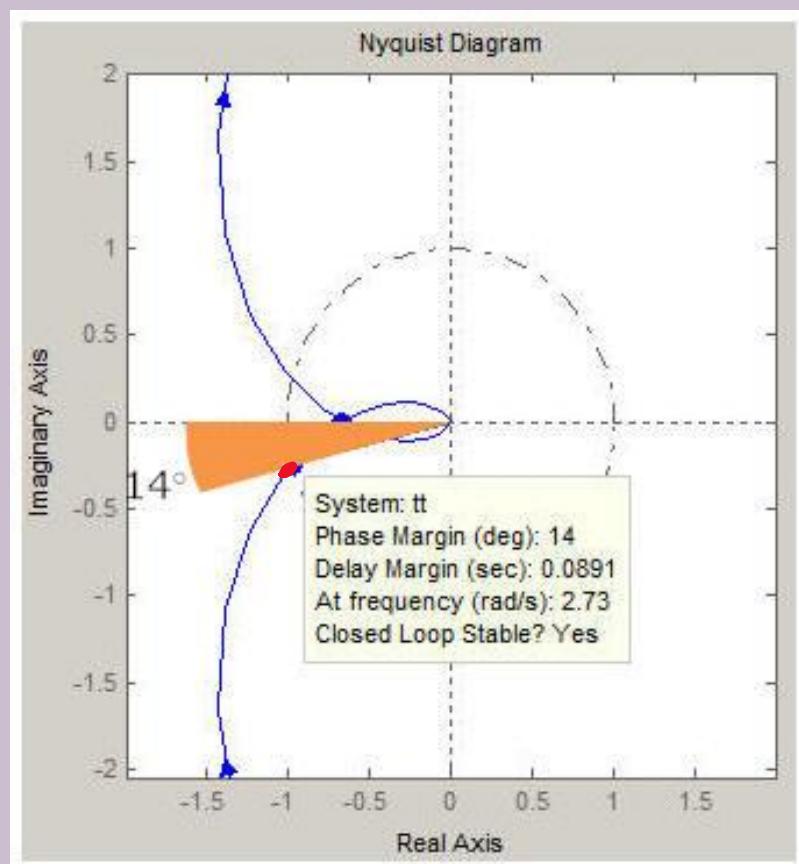
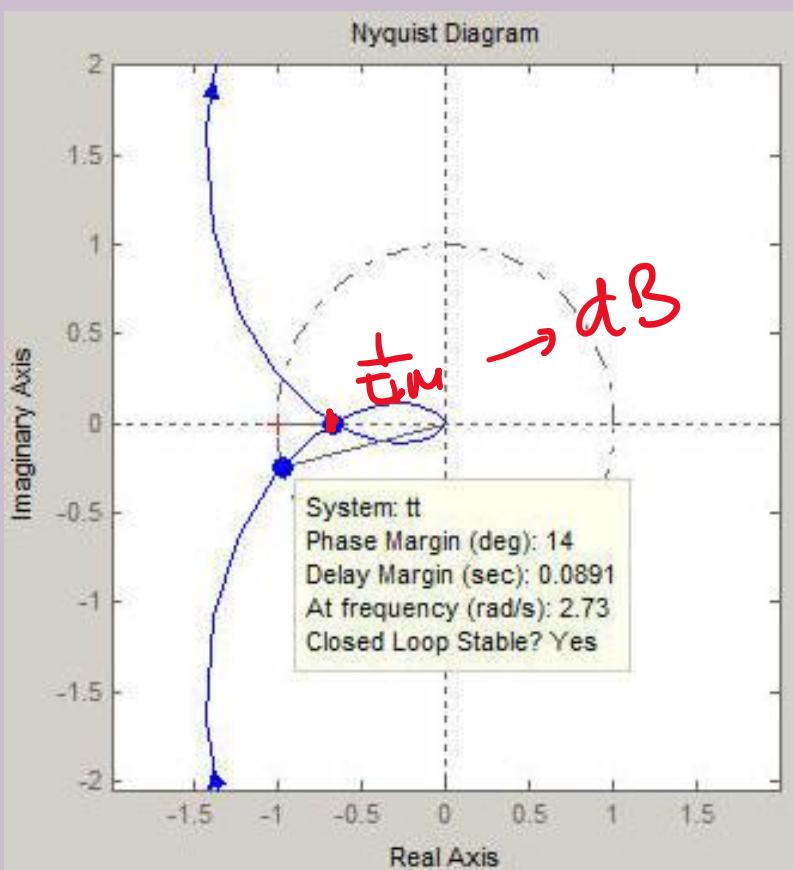
Versterkingsmarge in Nyquist



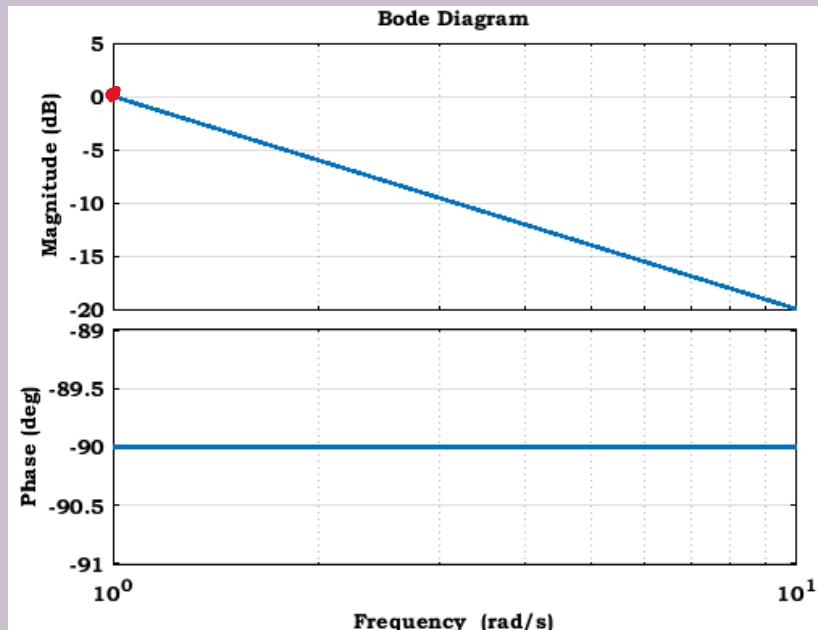
Stabiliteit in Nyquist



Fasemarge in Nyquist



Integrator, gesloten-lus stabiel?

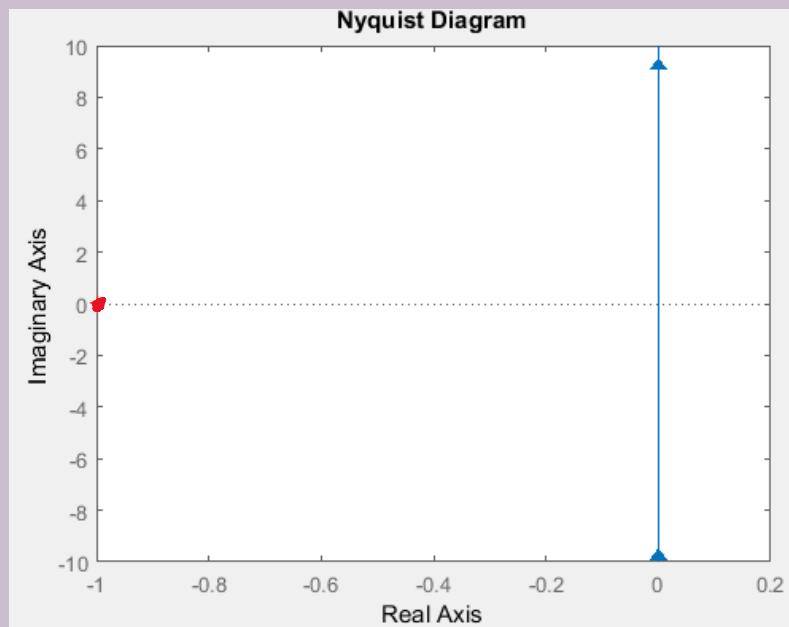
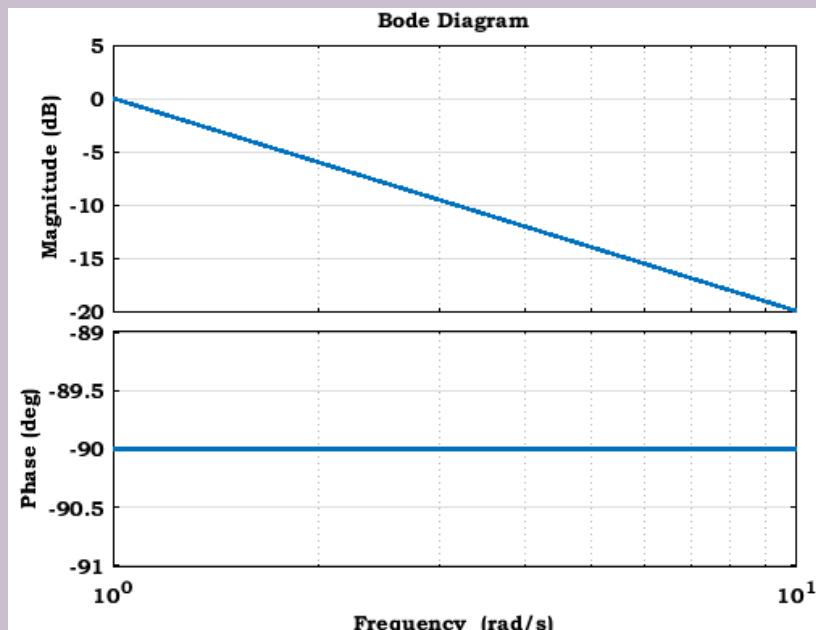


$$H_{OL}(s) = \frac{1}{s}$$

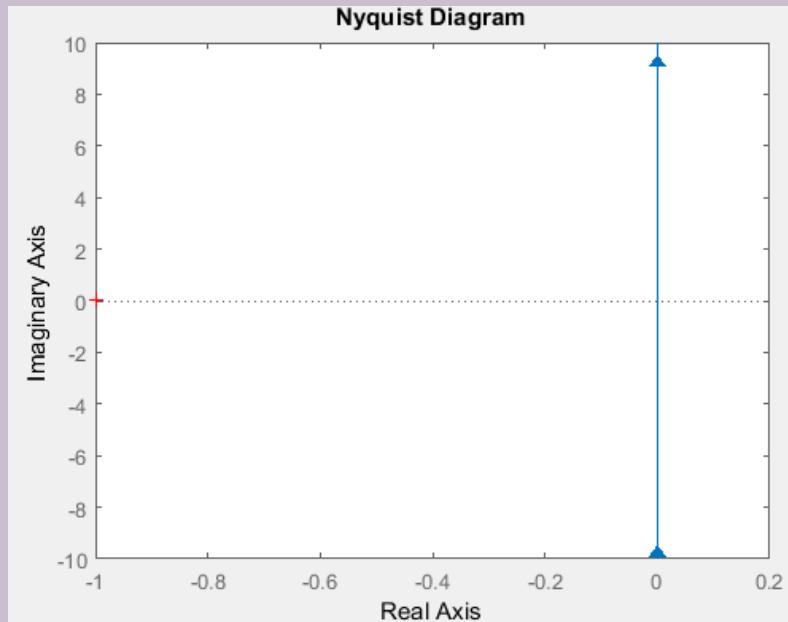
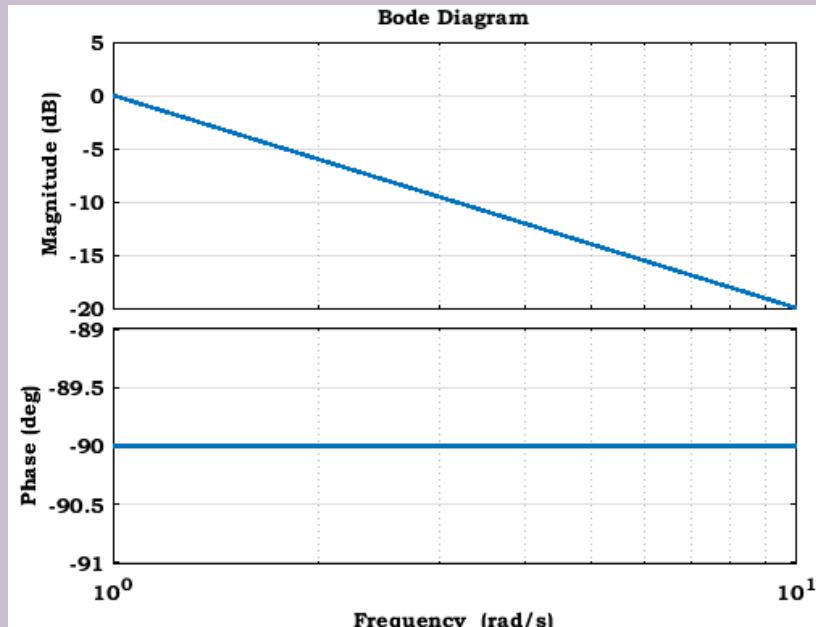
pool = oorsprong
 ↓
 Tu-as

$-180^\circ \rightarrow \text{Exm?}$

Integrator, gesloten-lus stabiel?



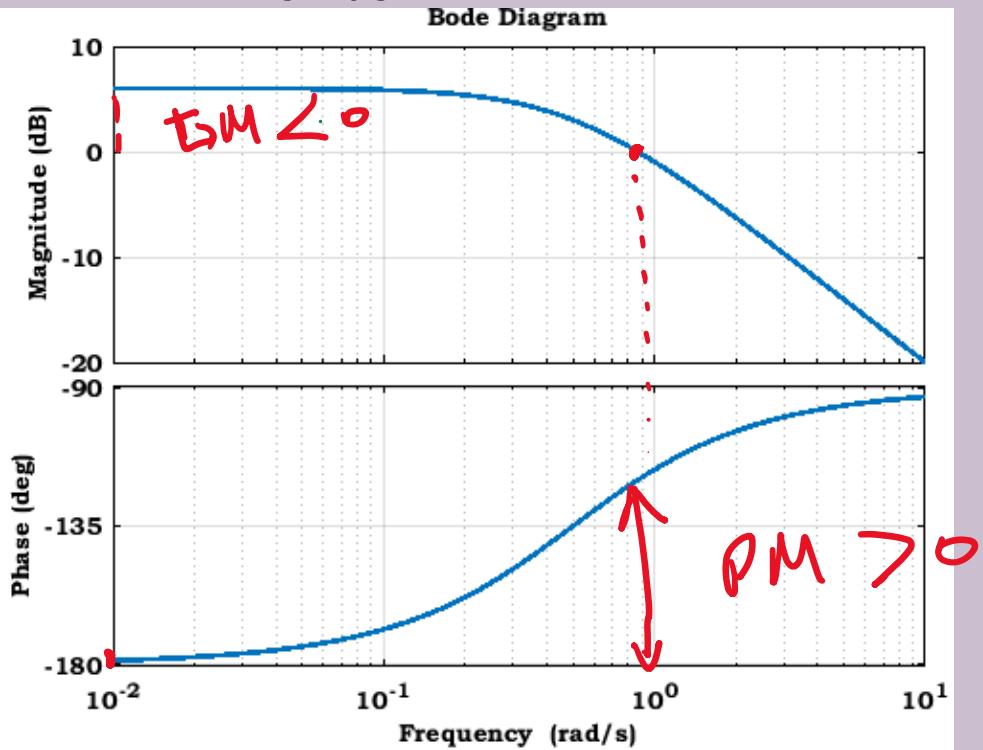
Integrator, gesloten-lus stabiel?



$$H_{CL}(s) = \frac{\frac{1}{s}}{1 + \frac{1}{s}} = \frac{1}{s+1} \quad , \text{ pool} = -1, \text{ gesloten-lus stabiel, maar open-lus instabiel}$$

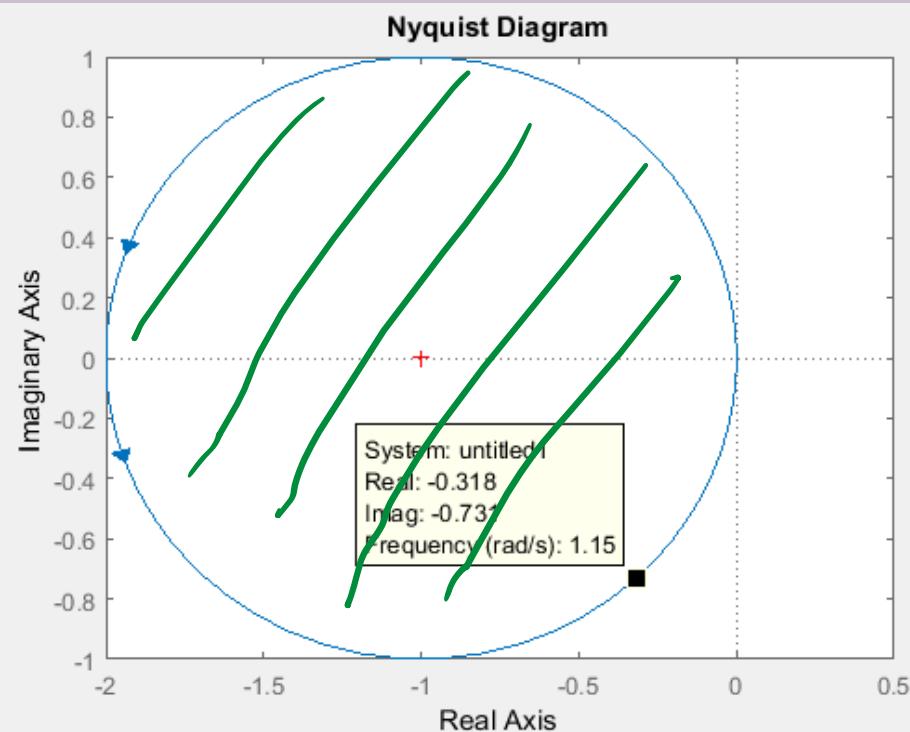
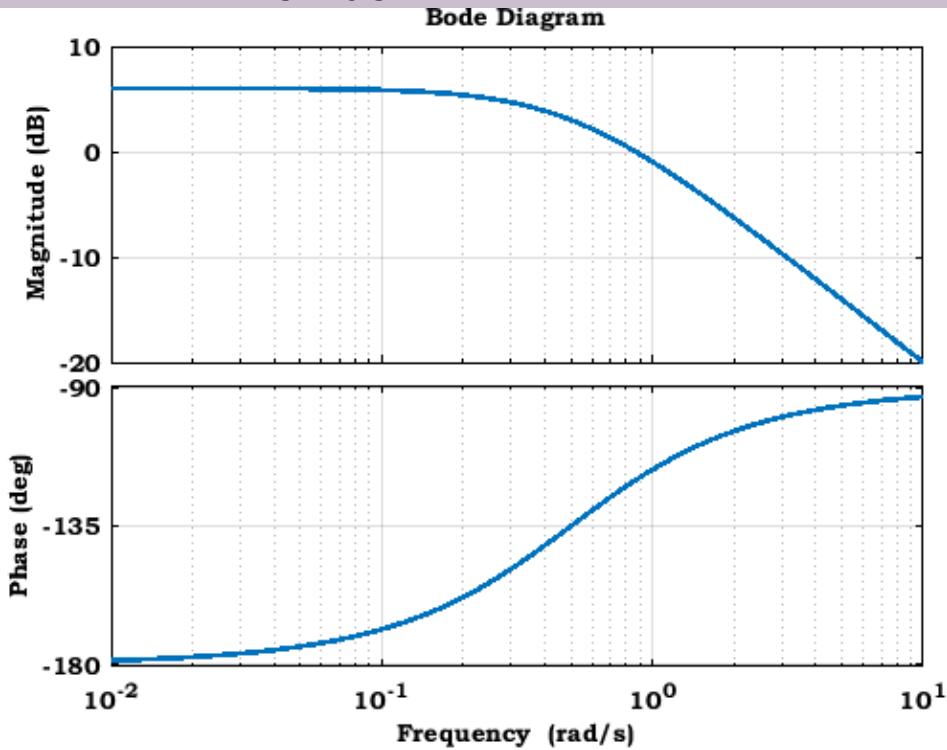
Rechterhalfvlak pool, gesloten-lus stabiel?

$$H_{OL}(s) = \frac{1}{s - 0.5}$$



Rechterhalfvlak pool, gesloten-lus stabiel?

$$H_{OL}(s) = \frac{1}{s - 0.5}$$

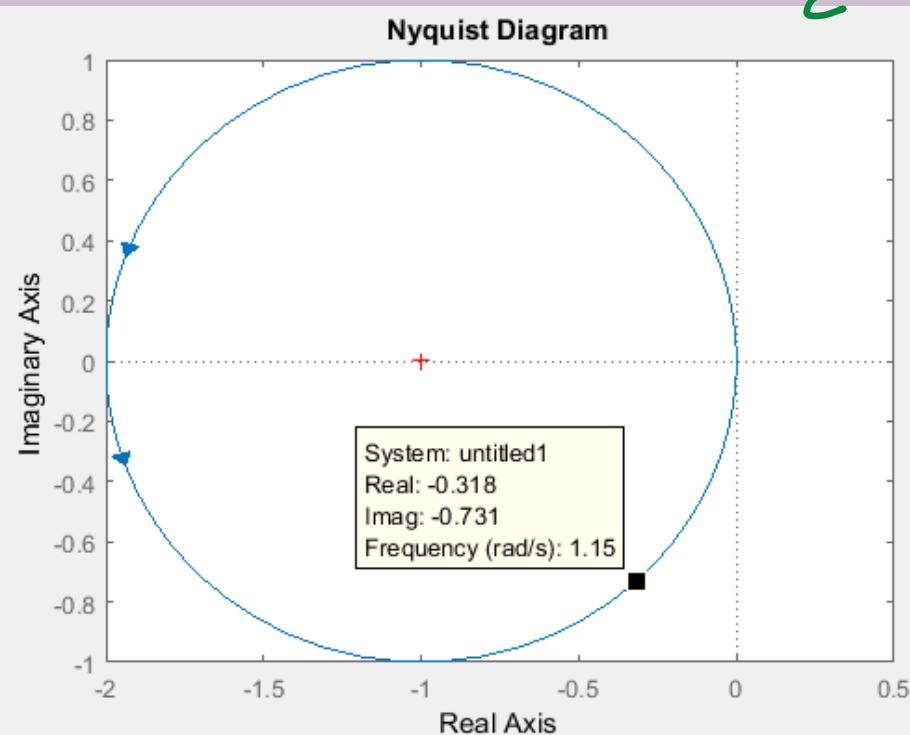
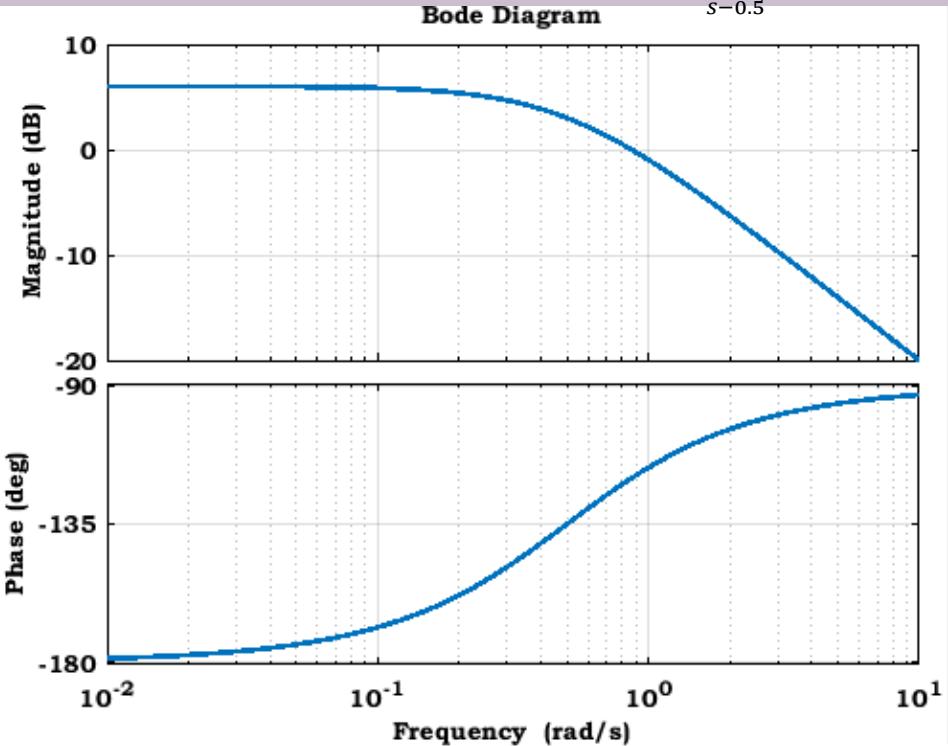


Rechterhalfvlak pool, gesloten-lus stabiel?

$$H_{OL}(s) = \frac{1}{s-0.5}$$

$$H_{CL}(s) = \frac{\frac{1}{s-0.5}}{1 + \frac{1}{s-0.5}} = \frac{1}{s+0.5} , \text{ eigenlijk is het stabiel.}$$

$$s = -\frac{1}{z}$$



Rechterhalfvlak pool, gesloten-lus stabiel?

$$H_{OL}(s) = \frac{1}{s-0.5} \quad H_{CL}(s) = \frac{\frac{1}{s-0.5}}{1+\frac{1}{s-0.5}} = \frac{1}{s+0.5} , \text{ eigenlijk is het stabiel.}$$

Conclusie: Stabiliteitsonderzoek via Versterkingsmarge en Fasemarge geldt niet voor systemen die in het rechtere half-vlak een pool of nulpunt hebben.

Conclusie2: Wij zoeken echter naar stabiliteit van stabiele systemen ☺
Dat omdat een hoge versterking K, het systeem instabiel kan maken. Daar gaat het hele onderzoek om.

K ↓ $\angle M$
PM