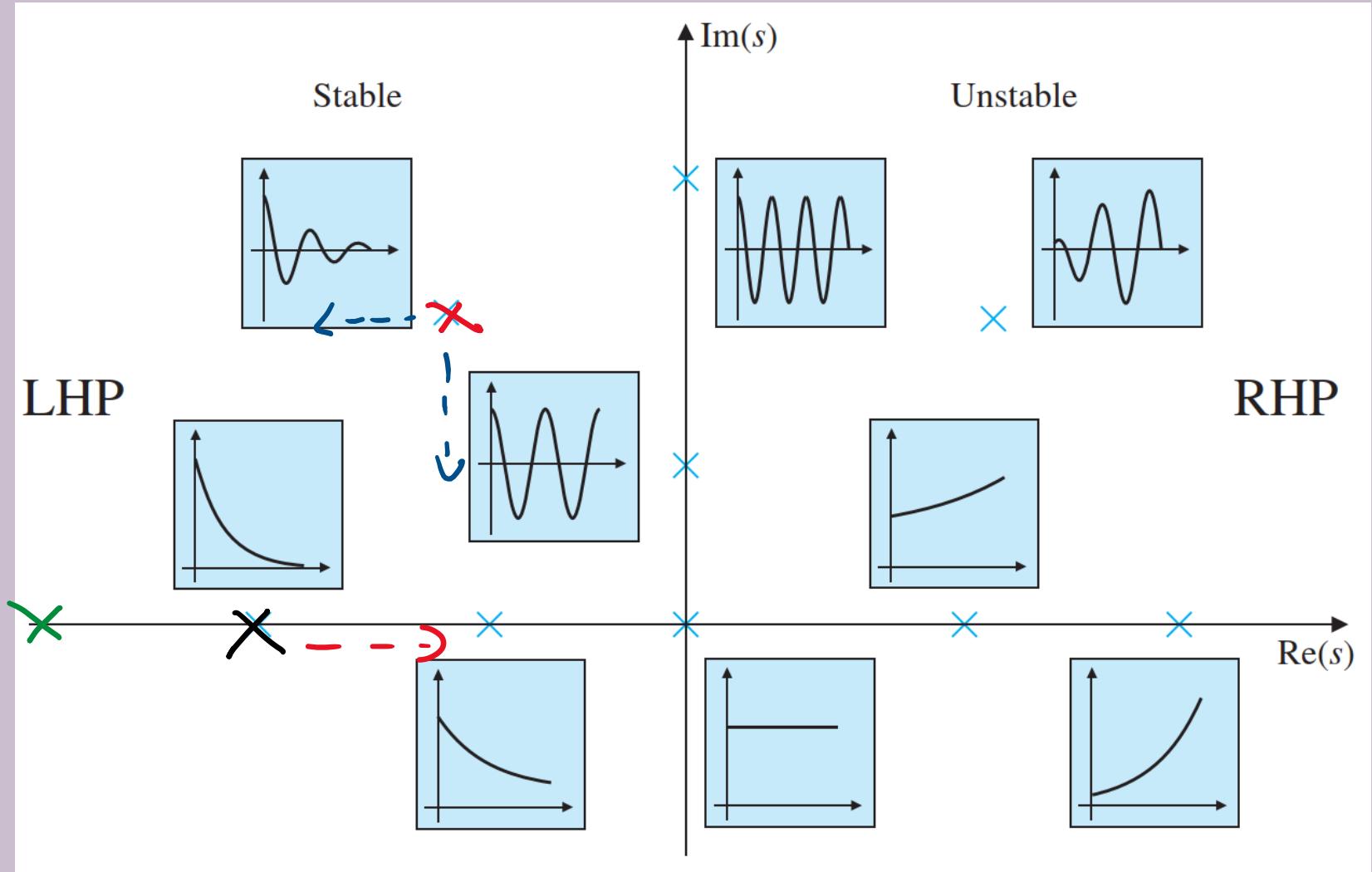


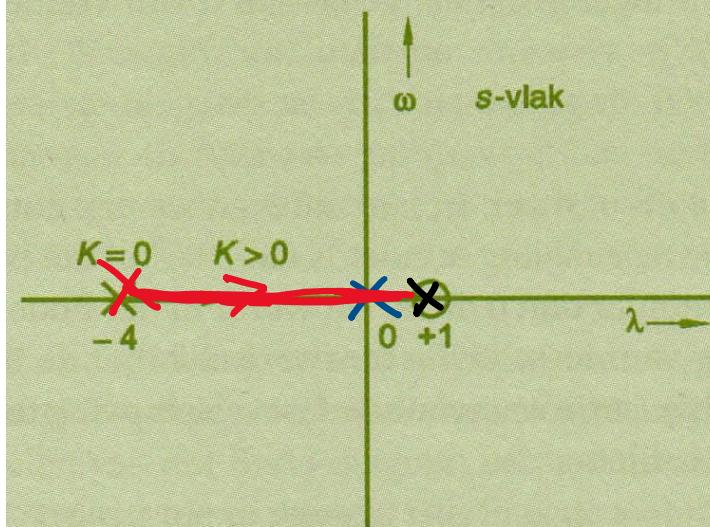
# Poolbanen

Root locus

# Stabiliteisonderzoek in s-domein



## Voorbeeld s-domein



$$H_1(s) = \frac{K(s - 1)}{(s + 4)}$$

$$H(s) = \frac{K(s - 1)}{(s + 4) + K(s - 1)}$$

$$(s + 4) + K(s - 1) = 0$$

$\Rightarrow$  pole

$$K = 0$$

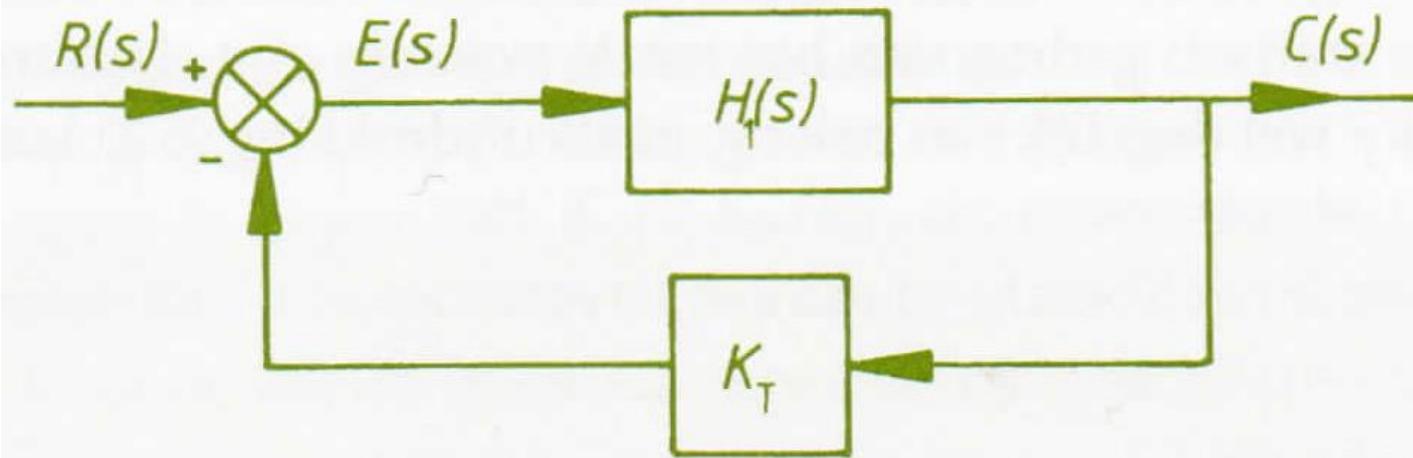
$$K = 4$$

$$s+4 + 4s - 4 \rightarrow s = \infty$$

$$K \rightarrow \infty$$

$$s - 1 \Rightarrow s = 1$$

## Poolbanen, invloed van terugkoppeling op het pn-beeld



$$H_1(s) = K_{pn} \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} \Rightarrow H_1(s) = K_{pn} \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = K_{pn} \frac{T(s)}{N(s)}$$




## Poolbanen, invloed van terugkoppeling op het pn-beeld

Overdracht  $R(s) \rightarrow C(s)$ :

$$H_1(s) = K_{pn} \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = K_{pn} \frac{T(s)}{N(s)}$$

Overdracht closed loop systeem:

$$H_{c.l.} = \frac{H_{rechtdoorgaand}}{1 + H_{rondgaand}}$$

$$H_{c.l.} = \frac{K_{pn} \frac{T(s)}{N(s)}}{1 + K_{pn} K_T \frac{T(s)}{N(s)}} = \boxed{K_{pn} \frac{T(s)}{N(s) + K_{pn} K_T T(s)}}$$

## Poolbanen, invloed van terugkoppeling op het pn-beeld

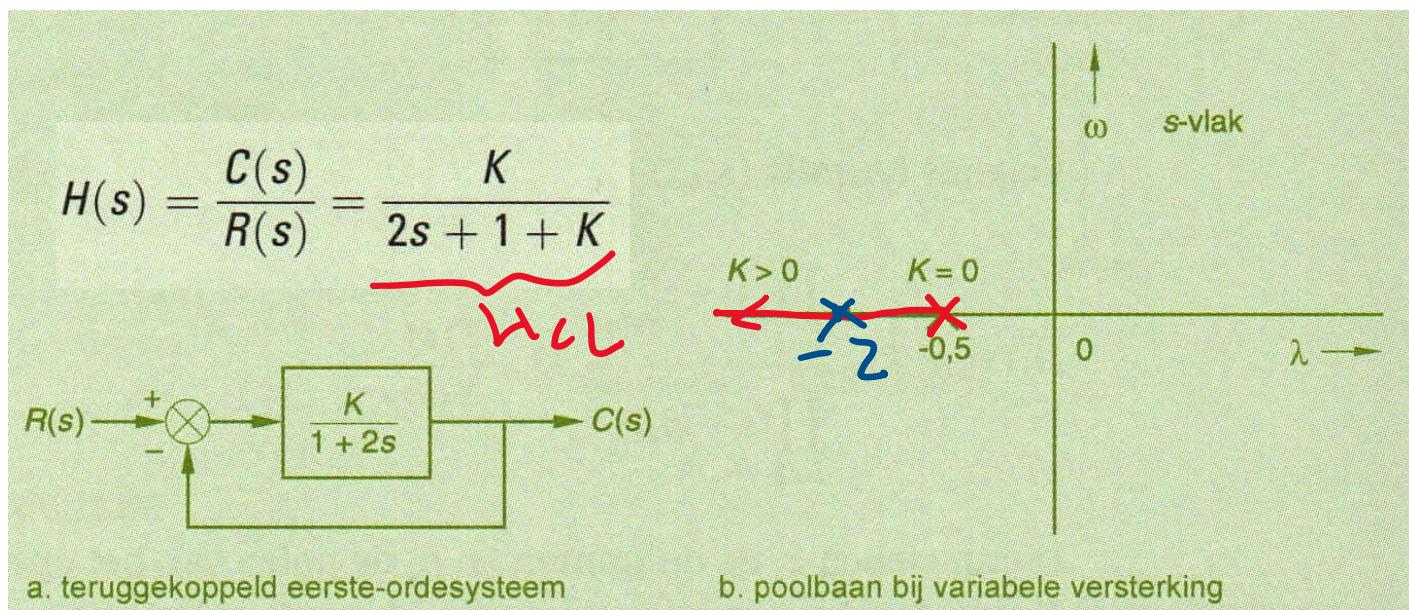
Closed loop systeem:

$$H_{c.l.} = \frac{H_{rechtdoorgaand}}{1 + H_{rondgaand}} = \frac{K_{pn} \frac{T(s)}{N(s)}}{1 + K_{pn}K_T \frac{T(s)}{N(s)}} = K_{pn} \frac{T(s)}{N(s) + K_{pn}K_T T(s)}$$

Belangrijkste conclusies:

- Variatie van  $K_{pn}$  en  $K_T$  bij een teruggekoppeld systeem heeft geen invloed op de waarde van de nulpunten
- Positie van de polen is afhankelijk van  $K_{pn} \cdot K_T$
- Voor  $0 \leq K_{pn} \cdot K_T \leq \infty$  wordt de poolbaan gevonden

## Poolbanen, invloed van terugkoppeling op het pn-beeld



Voorbeeld 6.1: de poolbaan van een teruggekoppeld eerste orde systeem

$$H_{CL} = K_{pn} \frac{T(s)}{N(s) + K_{pn}K_T T(s)} \Rightarrow \text{Polen: } N(s) + K_{pn}K_T T(s) = 0$$

## Poolbanen, constructie- en rekenregels

$$\text{Poolbaanvergelijking: } N(s) + K_{pn}K_T T(s) = 0$$

De volgende eigenschappen en regels zijn van belang:

- • Begin- en eindpunt van de poolbaan
- • Asymptoten van de poolbaan
- • Symmetrie van de poolbaan
  - Delen van de poolbaan op de reele as
  - Aankomst- en vertrekpunt op de reele as
  - De somregel
  - De productregel
  - Bepaling van de poolbaan- en de gelijkspanningsversterking

# Poolbanen, constructie- en rekenregels

$$\underline{N(s) + K_{pn}K_T T(s) = 0}$$

$$\Rightarrow \frac{T(s)}{N(s)} = -\frac{1}{K'}, \text{ met } K' = K_{pn}K_T$$

$$\left| \frac{T(s)}{N(s)} \right| = \left| -\frac{1}{K'} \right| = \frac{1}{K'} .$$

$$\arg \left\{ \frac{T(s)}{N(s)} \right\} = \arg \{T(s)\} - \arg \{N(s)\} = \arg \left\{ -\frac{1}{K'} \right\} = \underline{\pi \pm k2\pi},$$

met  $k = 0, 1, 2, \dots$

## Poolbaanvergelijking

Normaalvorm: dit is een complexe vergelijking.  
Hieruit volgen twee voorwaarden:

## Modulus voorwaarde

## Fase voorwaarde

Voor complexere systemen is er geen makkelijke formule waarmee de polen kunnen worden uitgerekend!

Om poolbanen toch te kunnen construeren maken we gebruik van **constructie- en rekenregels**

Zie blz. 131/132 oud boek, 248/249 Franklin

# Poolbanen, constructie- en rekenregels

Zie blz. 131/132 of blz. 133/134 oude boek. Blz. 268/269 nieuwe boek

1. De plaats van de nulpunten is onafhankelijk van  $K'$ .
2. De plaats van de polen volgt uit de poolbaanvergelijking:  $N(s) + K'T(s) = 0$ .
3. De poolbaan is symmetrisch ten opzichte van de reële as.
4. Punten op de reële as behoren tot de poolbaan indien geldt dat het totale aantal polen en nulpunten rechts van zo'n punt oneven is.
5. Er zijn  $n-m$  asymptoten waarlangs  $n-m$  poolbaantakken naar oneindig gaan. De asymptoten snijden de reële as in het zwaartepunt  $q$  van het pn-beeld onder de hoeken  $\alpha_k$ :  
$$q = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m}, \quad \alpha_k = \frac{\pi + k2\pi}{n-m} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-m-1)$$

$n$ =aantal polen  
 $m$ =aantal nulpunten
6. De poolbaan bestaat uit  $n$  poolbaantakken.
7. In elke pool van het open systeem (lus) start een poolbaantak.
8. Er eindigen  $m$  poolbaantakken in de (zichtbare) nulpunten, terwijl er  $n-m$  takken eindigen in oneindig.

# Poolbanen, constructie- en rekenregels

9. Eventuele aankomst- en vertrekpunten op de reële as kunnen worden bepaald uit:

$$\frac{dK'}{ds} = 0, \text{ of uit : } \sum_{i=1}^n \frac{1}{s - p_i} - \sum_{i=1}^m \frac{1}{s - z_i} = 0$$

10. Voor de hoeken waaronder de poolbaantakken in één punt aankomen of vertrekken op de reële as geldt:

$$\varphi_k = \frac{\pi + k2\pi}{\ell} \quad (\ell = \text{aantal aankomende of vertrekkende takken}, k = 0, 1, \dots, \ell - 1)$$

11. Indien er minstens twee polen meer dan nulpunten zijn, dan is de som van de polen onafhankelijk van  $K'$ .
12. Indien er één nulpunt in de oorsprong ligt, dan is het product van de polen onafhankelijk van  $K'$ . (het cirkelgeval)
13. Voor de poolbaanversterking in een bepaald punt  $p_k^\Delta$  van de poolbaan geldt:

$$K' = \frac{\prod_{i=1}^n |p_k^\Delta - p_i|}{\prod_{i=1}^m |p_k^\Delta - z_i|} \quad \text{met : } k = 1, 2, 3, \dots, n$$

# Poolbanen, constructie- en rekenregels

14. Voor de lus-gelijkspanningsversterking in een bepaald punt van de poolbaan geldt:

$$K_L = K' \frac{\prod_{i=1}^m |z_i|}{\prod_{i=1}^n |p_i|}$$

15. De snijpunten van de poolbaantakken met de imaginaire as vinden we door substitutie van  $s=j\omega$  in de poolbaanvergelijking. Dit levert de oscillatiefrequentie en de poolbaanversterking bij oscilleren op.

## Poolbanen, beginpunten van de poolbaan

De beginpunten van de poolbaan vinden we door in de poolbaanvergelijking voor  $K' = K_{pn} \cdot K_T$  nul in te vullen.

$$N(s) + K_{pn} K_T T(s) = 0$$

\* Normaal vorm:  $\frac{T(s)}{N(s)} = \frac{-1}{K'}$

$$N(s) = \prod_{i=1}^n (s - p_i) = 0$$

$$s = p_i (i = 1, 2, 3, \dots, n)$$

De beginpunten van de poolbaan zijn  
de polen van het open systeem

## Poolbanen, eindpunten van de poolbaan

Eindpunt van de poolbaan:  $K' = K_{pn} \cdot K_T \Rightarrow \infty$

$$N(s) + \boxed{K_{pn} K_T T(s)} = 0$$

maar nu voor  $K' = K_{pn} \cdot K_T \Rightarrow \infty !$

$$\rightarrow T(s) = \prod_{i=1}^m (s - z_i) = 0$$

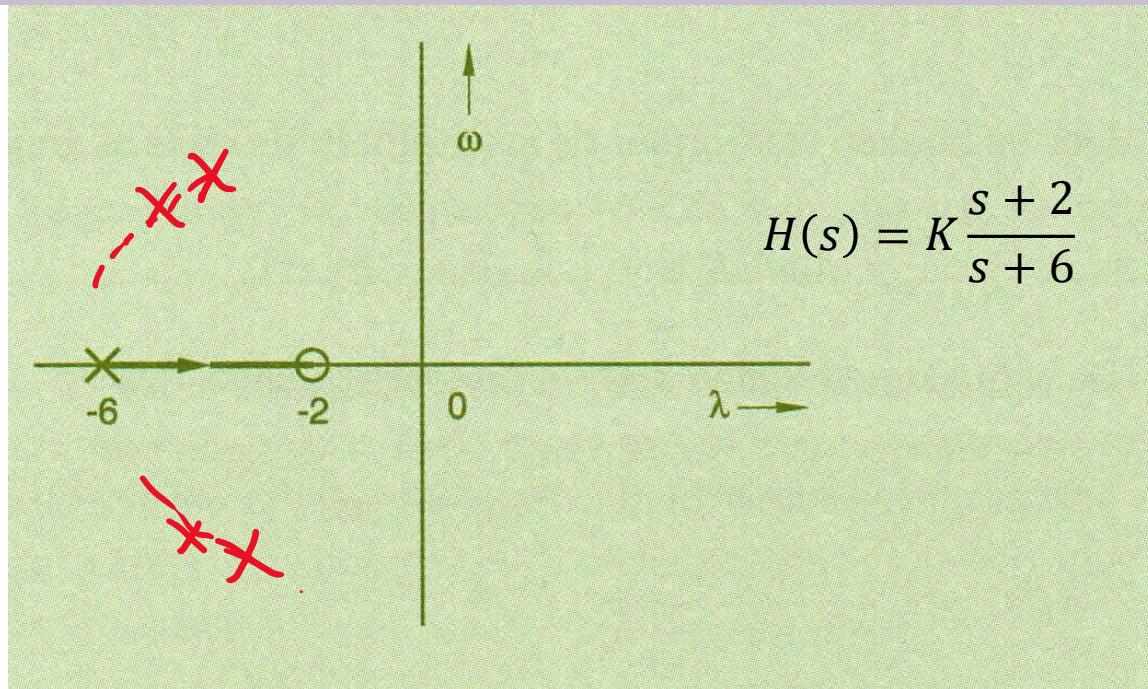
$$s = z_i (i = 1, 2, 3, \dots, m)$$

\* Normaal vorm:  $\frac{T(s)}{N(s)} = \frac{-1}{K'}$

De eindpunten van de poolbaan zijn  
 de nulpunten van het open systeem;  
 $n - m$  poolbaantakken gaan naar  $\infty$

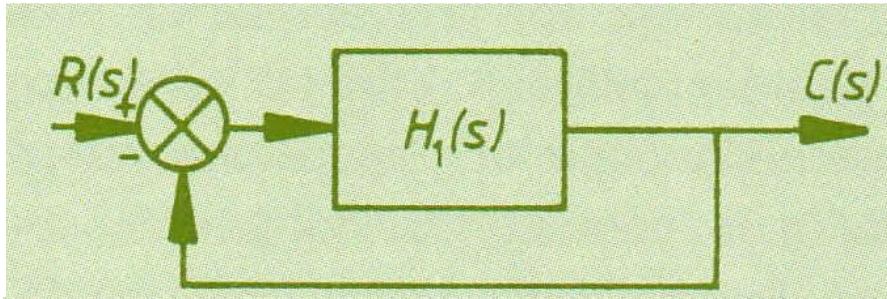
$(n-m) P_0$

## Poolbanen, symmetrie van de poolbaan



Vb: Vanwege de symmetrie-eis kan de poolbaantak alleen over de reële as lopen.

## Poolbanen, begin- en eindpunten van de poolbaan

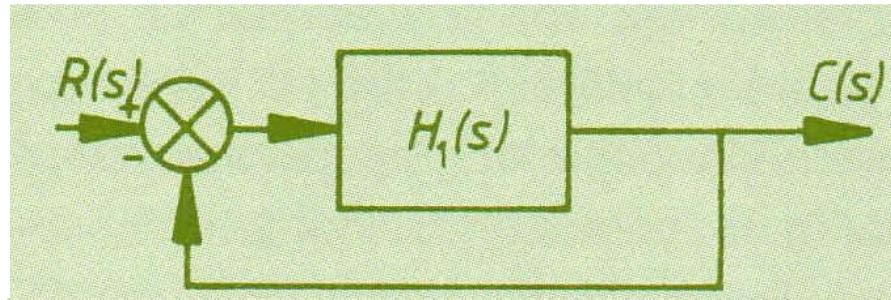


$$H_1(s) = K \frac{(s + 5)}{(s + 2)(s + 9)}$$

$$\frac{(s + 5)}{(s + 2)(s + 9)} = -\frac{1}{K}$$

Vb: berekening begin- en eindpunten van de poolbaan

## Poolbanen, begin- en eindpunten van de poolbaan

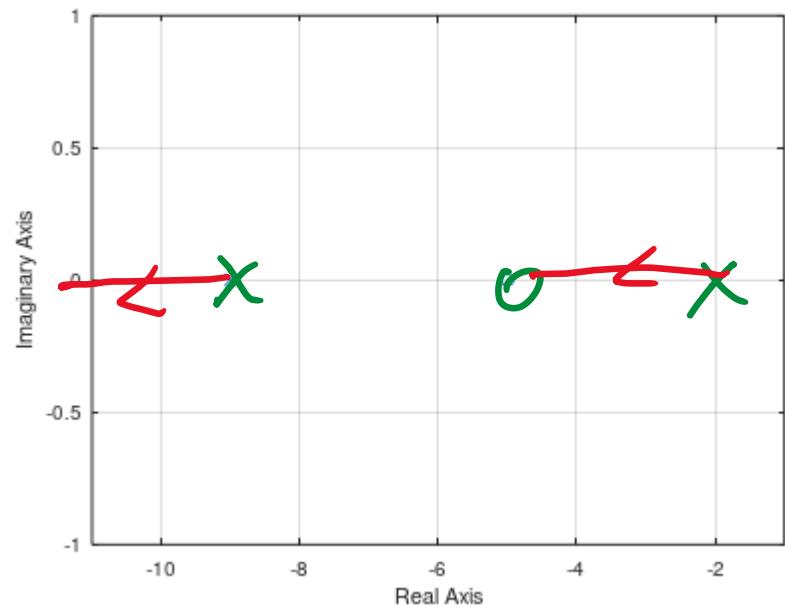
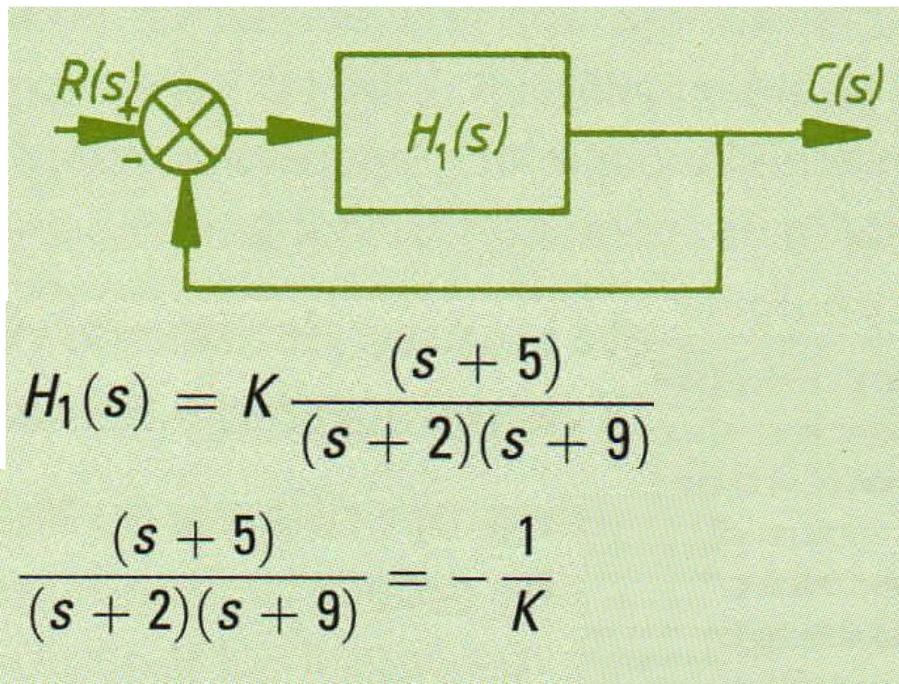


$$H_1(s) = K \frac{(s + 5)}{(s + 2)(s + 9)}$$

$$\frac{(s + 5)}{(s + 2)(s + 9)} = -\frac{1}{K}$$

Note: voor praktische systemen geldt:  $n_p \geq m_z$   
 => Er zijn dus ( $n_p - m_z$ ) poolbanen die gaan naar  $\infty$

## Poolbanen, begin- en eindpunten van de poolbaan

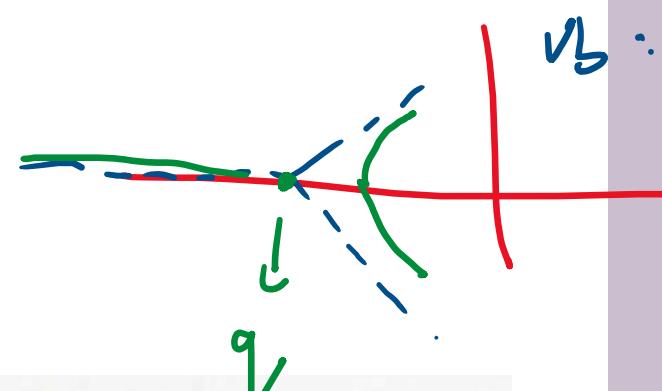


Note: voor praktische systemen geldt:  $n_p \geq m_z$   
 $\Rightarrow$  Er zijn dus  $(n_p - m_z)$  poolbanen die gaan naar  $\infty$

## Poolbanen, asymptoten van de poolbaan

$$\rightarrow q = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m}$$

$$\rightarrow \alpha_k = \frac{\pi + k2\pi}{n - m}, \text{ met } k = 0, 1, 2, \dots (n - m - 1)$$



$q$  = zwaartepunt van het pn-beeld van het open systeem  
 $\alpha_k$  = hoeken waaronder de asymptoten de reele as snijden

## Poolbanen, asymptoten van de poolbaan

Vb.

$$H(s) = K \frac{s + 2}{s(s + 3)(s + 5)}$$

$$q = \frac{\{0 + (-3) + (-5)\} - (-2)}{3 - 1} = -3$$

$$\alpha_0 = \frac{\pi + 0}{2} = \frac{\pi}{2} \quad (+90^\circ)$$

$$\alpha_1 = \frac{\pi + 2\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} \quad (270^\circ \text{ of ook } -90^\circ)$$

$$y = \frac{\sum_{i=1}^N p_i - \sum_{i=1}^M z_i}{N - M}$$

Polen:  $\left. \begin{matrix} 0 \\ -3 \\ -5 \end{matrix} \right\}$

Zeros:  $\left. \begin{matrix} -2 \\ 0 \\ 5 \end{matrix} \right\}$

## Poolbanen, asymptoten van de poolbaan

Vb.

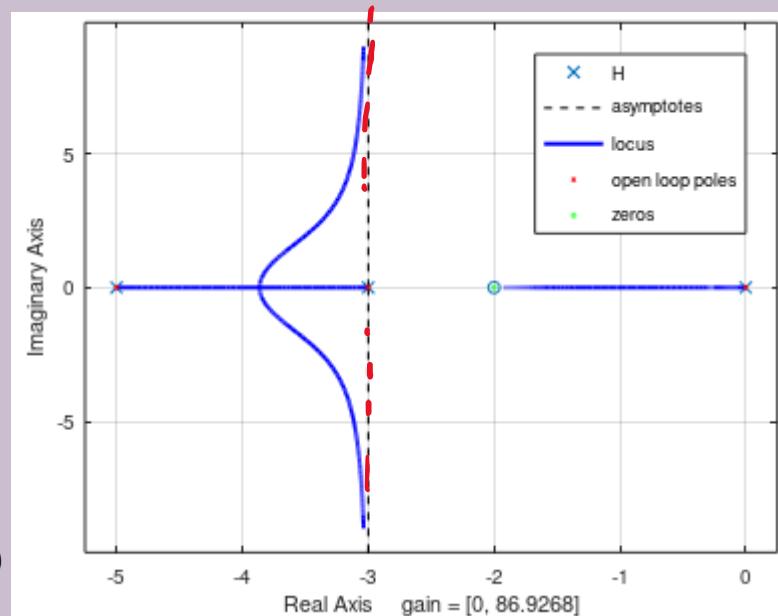
$$H(s) = K \frac{s + 2}{s(s + 3)(s + 5)}$$

$$q = \frac{\{0 + (-3) + (-5)\} - (-2)}{3 - 1} = -3$$

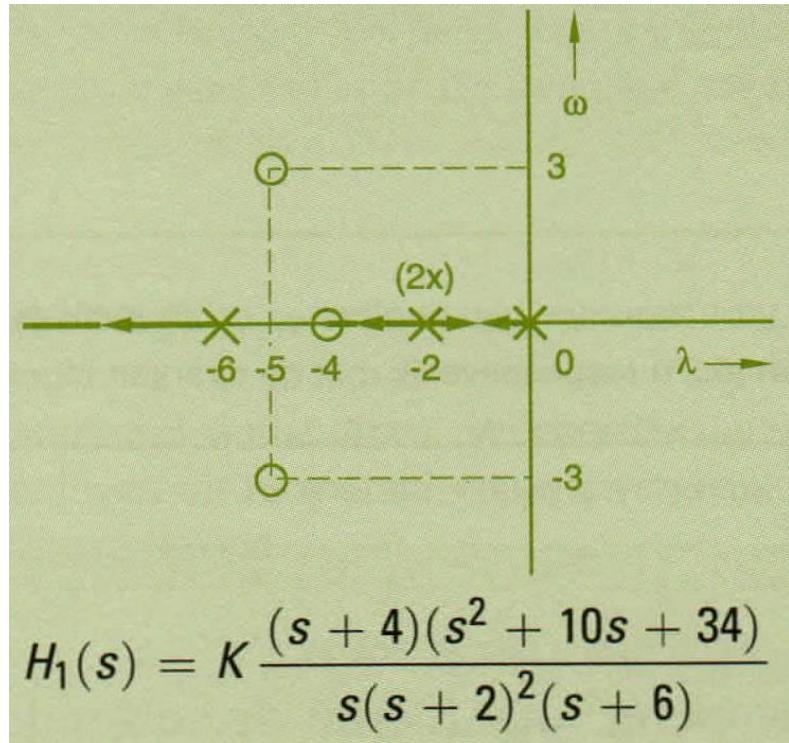
$$\alpha_0 = \frac{\pi + 0}{2} = \frac{\pi}{2} \quad (+90^\circ)$$

$$\alpha_1 = \frac{\pi + 2\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} \quad (270^\circ \text{ of ook } -90^\circ)$$

$N - M = 2$



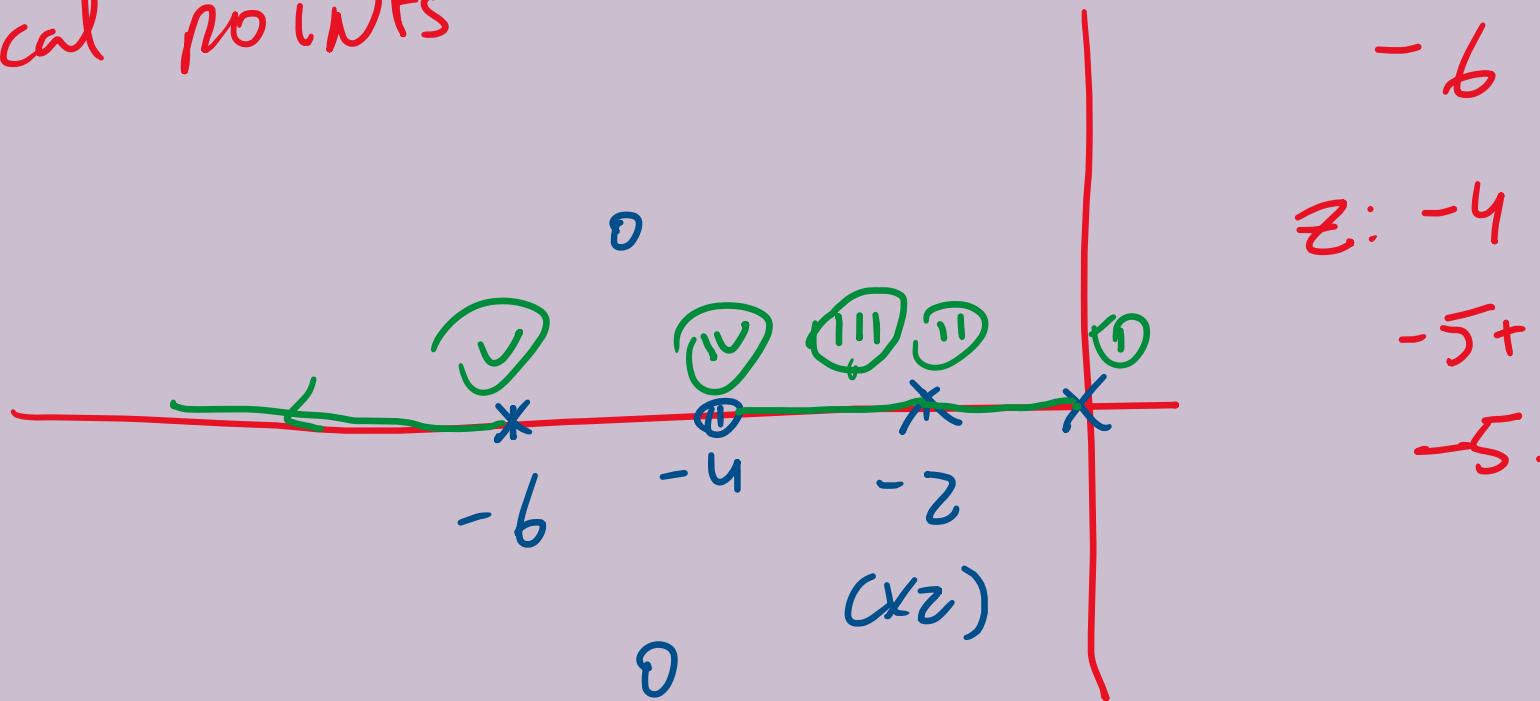
## Poolbanen, gedeelte van de poolbaan op de reele as



Vb. 6.5: Ga van rechts naar links over de reele as: in de oorsprong passeren we de eerste pool. Vanaf dat moment begint de poolbaan. In “-2” zijn er weer twee polen, dus 3 polen gepasseerd, in ‘-4’ passeren we pool nr. 4, daarna houdt de poolbaan even op. Vanaf ‘-6’ is er weer sprake van een poolbaan.

$$H_1(s) = K \frac{(s+4)(s^2 + 10s + 34)}{s(s+2)^2(s+6)}$$

polar & zero s =  
critical points



## Poolbanen, aankomst- en vertrekpunten op de reele as

$$\frac{dK'}{ds} = 0$$

$$\frac{d}{ds} \left\{ \frac{N(s)}{T(s)} \right\} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{s - P_i} - \sum_{i=1}^{i=m} \frac{1}{s - z_i} = 0$$



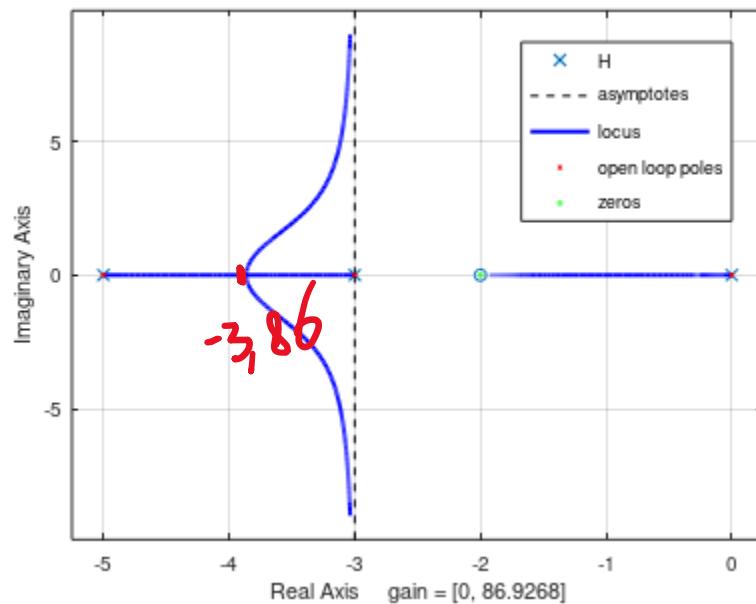
## Poolbanen, aankomst- en vertrekpunten op de reele as

$$\sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{s - P_i} - \sum_{i=1}^{i=m} \frac{1}{s - z_i} = 0$$

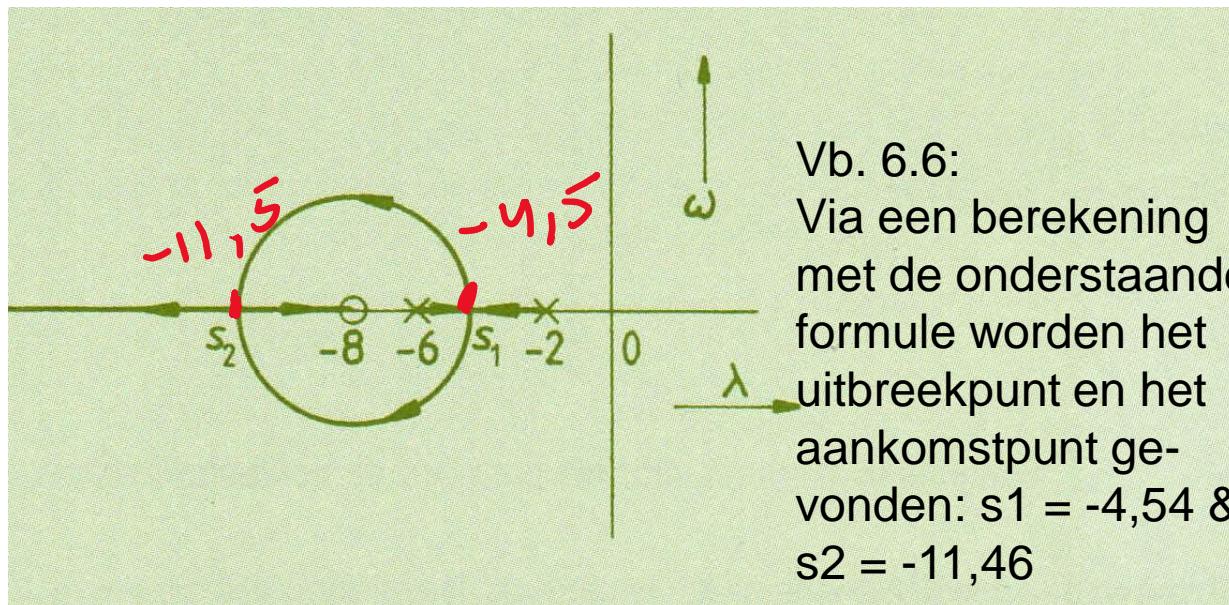
$$H(s) = K \frac{s + 2}{s(s + 3)(s + 5)}$$

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s + 3} + \frac{1}{s + 5} - \frac{1}{s + 2} = 0$$

$$vertrekpunt = -3.86$$



## Poolbanen, aankomst- en vertrekpunten op de reele as



$$\rightarrow \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{s - P_i} - \sum_{i=1}^{i=m} \frac{1}{s - z_i} = 0$$

$$\rho : -2 \\ -6$$

$$z : -8 \quad \frac{1}{s+2} + \frac{1}{s+6} - \frac{1}{s+8} = 0$$

$$\frac{(s+2)(s+6)(s+8)}{(s+2)(s+6)(s+8)} + \frac{(s+2)(s+6)(s+8)}{(s+2)(s+6)(s+8)} - \frac{(s+2)(s+6)(s+8)}{(s+2)(s+6)(s+8)}$$

$$\cancel{s+2} \quad \cancel{s+6} \quad \cancel{s+8}$$

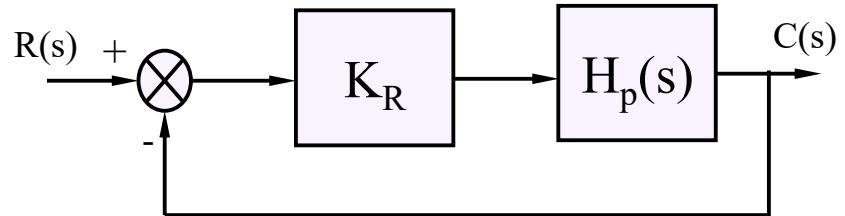
$$(s+6)(s+8) + (s+2)(s+8) - (s+2)(s+6)$$

$$6^2 + 14s + 48 + s^2 + 10s + 16 - s^2 - 8s - 12 = 0$$

$$s^2 [1 + 1 - 1] + s [14 + 10 - 8] + [48 + 16 - 12] = 0$$

$$s^2 + 16s + 52 = 0 \rightarrow \begin{matrix} -11,4 \\ -4,53 \end{matrix}$$

# VOORBEELD



$$H_p(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$H_L(s) = K_R H_p(s) = K_R \frac{T(s)}{N(s)} = \frac{K_R}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$m = 0$  nulpunten  
 $n = 3$  polen

De poolaanvergelijking is :  $N(s) + K_R T(s) = 0$

$$\frac{T(s)}{N(s)} = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} = -\frac{1}{K_R}$$

of :

$$K_R = -(s+1)(s+2)(s+3) = -(s^3 + 6s^2 + 11s + 6)$$

# VOORBEELD

$$H_p(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

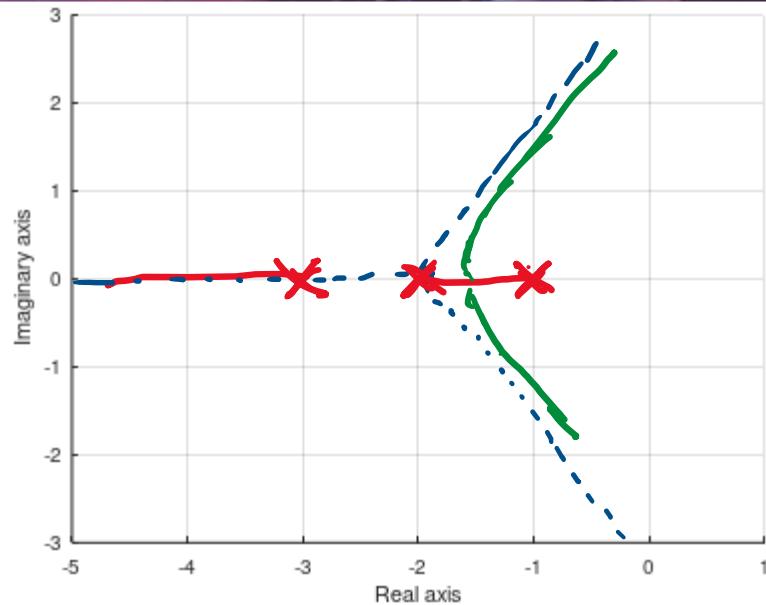
$P : -1$   
 $-2$   
 $-3$        $\downarrow N=3$

$Z : \text{geen} \rightarrow M=0$

$N-M=3 \Rightarrow \text{roots.} \rightarrow \infty$

Asym P:  $\frac{-1-2-3}{3} = -2$

$\alpha = \frac{\pi + ik\pi}{N-M}$        $k = 0, 1, \dots, \underbrace{(N-M-1)}_2 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} \rightarrow$   
 $3\pi/3 \rightarrow$   
 $5\pi/3 \rightarrow$



## VOORBEELD

$$H_p(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

verantw.  $\sum_{i=1}^N \frac{1}{s-p_i} - \sum_{i=1}^M \frac{1}{s-z_i}$

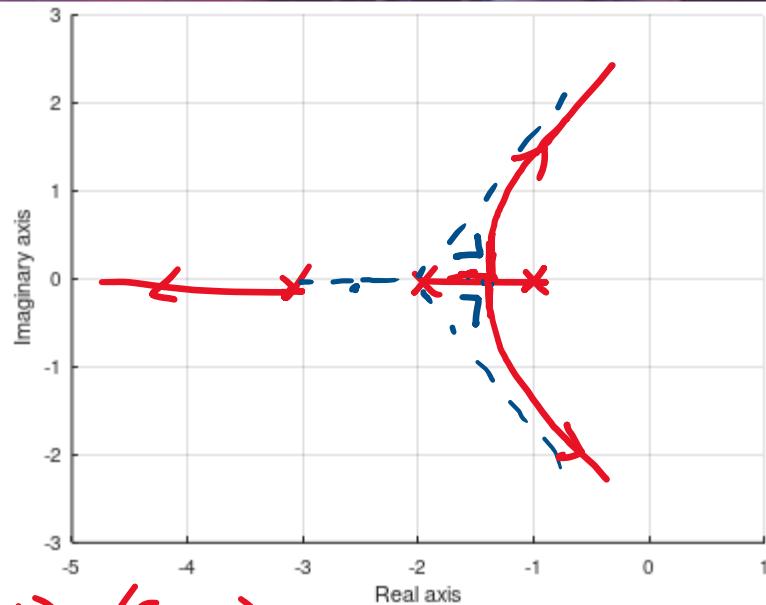
$$\frac{1}{(s+1)} + \frac{1}{(s+2)} + \frac{1}{(s+3)} = 0$$

$$(s+2)(s+3) + (s+1)(s+3) + (s+1)(s+2) = 0$$

$$s^2 + 5s + 6 + s^2 + 4s + 3 + s^2 + 3s + 2 = 0$$

$$s[1+1+1] + s[5+4+3] + [6+3+2] = 0$$

$$3s^2 + 12s + 11 = 0 \quad \frac{-12 \pm 3,46}{6} = -2 \pm 0,58 \rightarrow -2,58 \quad -1,42$$



## VOORBEELD

$$H_p(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$\frac{T(s)}{N(s)} = \frac{-1}{Kr}$$

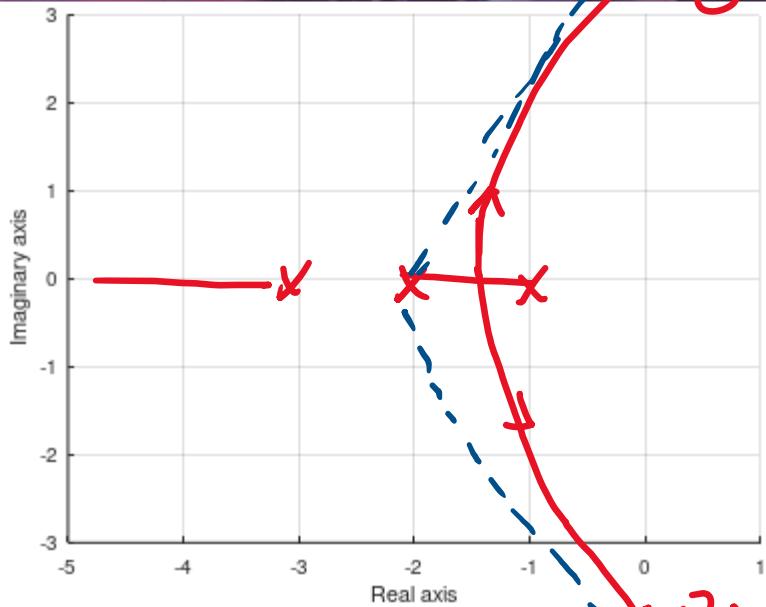
$$\frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{-1}{Kr}$$

$$\Rightarrow -Kr = (s+1)(s+2)(s+3)$$

$$-Kr = s^3 + 6s^2 + 11s + 6$$

$$s = j\omega \rightarrow -Ke = -\omega^3 - 6\omega^2 + 11j\omega + 6 = 0$$

$$0 \leq Kr < \infty \Rightarrow \begin{cases} \text{Im: } \omega^3 + 11\omega = 0 \Rightarrow \omega(\omega^2 + 11) = 0 \\ \text{Re: } -6\omega^2 + 6 = -Ke \end{cases}$$



# VOORBEELD

r3) Er zijn n=3 poolbaantakken

r4) Beginpunten (luspolen) zijn :  $s_1 = -1; s_2 = -2; s_3 = -3$

r5) Eindige eindpunten (lusnulpunten): geen

r6) Aantal asymptoten:  $n - m = 3 - 0 = 3$

$$\text{Richting asymptoten: } \alpha_k = \frac{\pi + k2\pi}{n - m} = \frac{\pi + k2\pi}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3} \quad (60^\circ, 180^\circ, 300^\circ)$$

$$\text{Snijpunt asymptoten met de reële as: } q = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m} = \frac{(-1) + (-2) + (-3) - (0)}{3} = -2$$

r7) Poolbaan symmetrisch boven en onder de reële as

r8) Takken op de reële as: tussen -1 en -2 en links van -3

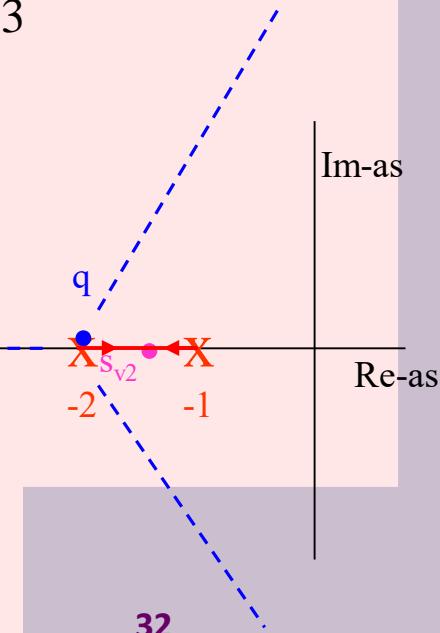
r9) Vertrekpunten:  $K_R = -(s^3 + 6s^2 + 11s + 6)$

$$\frac{dk}{ds} = -\frac{d}{ds}(s^3 + 6s^2 + 11s + 6) = -(3s^2 + 12s + 11) = 0$$

$$s_{v1} = -2,58 \text{ (v.n.)} \quad \text{en} \quad s_{v2} = -1,42$$

Door het uitbrekpunt  $s_{v2} = -1,42$  in de poolbaanvergelijking in te vullen vindt met de waarde van  $K_R$  in dat punt:

$$K_R = -(s^3 + 6s^2 + 11s + 6) = -((-1,42)^3 + 6(-1,42)^2 + 11(-1,42) + 6) = 0,38$$



# VOORBEELD

r10) Er vertrekken 2 takken met hoeken:

$$\varphi_k = \frac{\pi + k2\pi}{\ell} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

r11,12,13) Zijn niet nodig voor de constructie

r15) Snijpunten met Imaginaire as (vul in  $s=j\omega$ ):

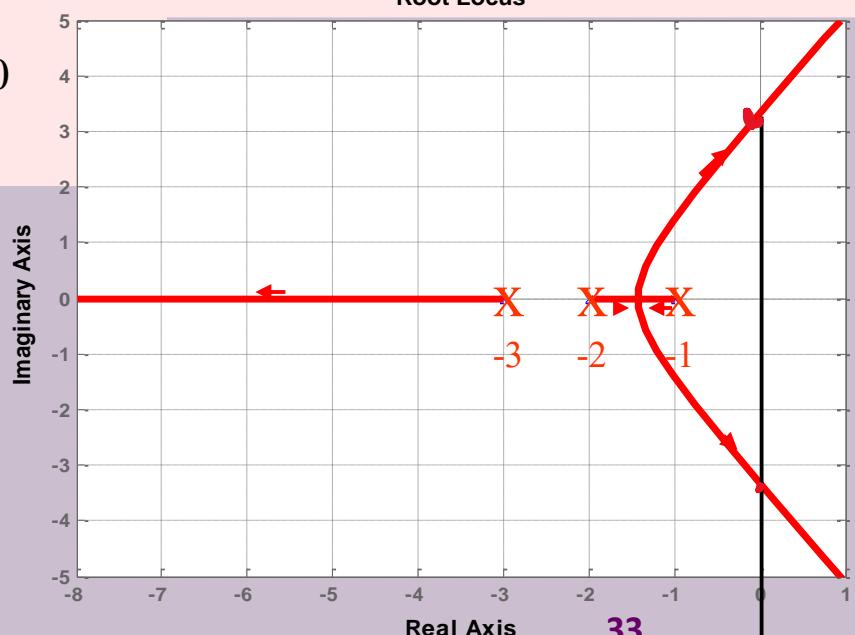
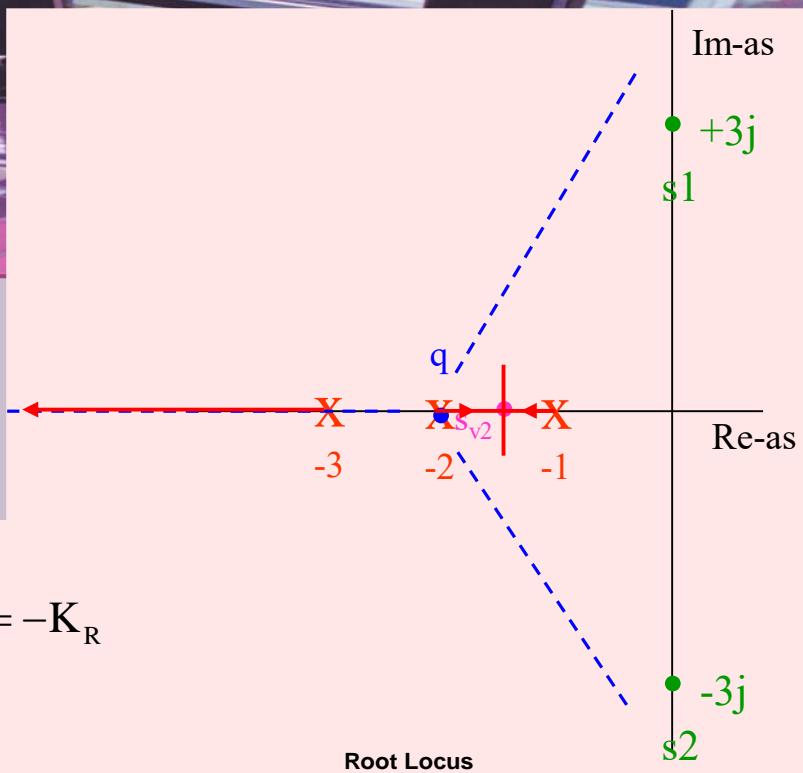
$$s^3 + 6s^2 + 11s + 6 = -K_R \rightarrow -j\omega^3 - 6\omega^2 + 11j\omega + 6 = -K_R$$

$$\begin{cases} \text{Im; } -\omega^3 + 11\omega = 0 \\ \text{Re; } -6\omega^2 + 6 = -K_R \end{cases} \quad \omega_1 = 0 \quad (K_R = -6 \text{ v.n.})$$

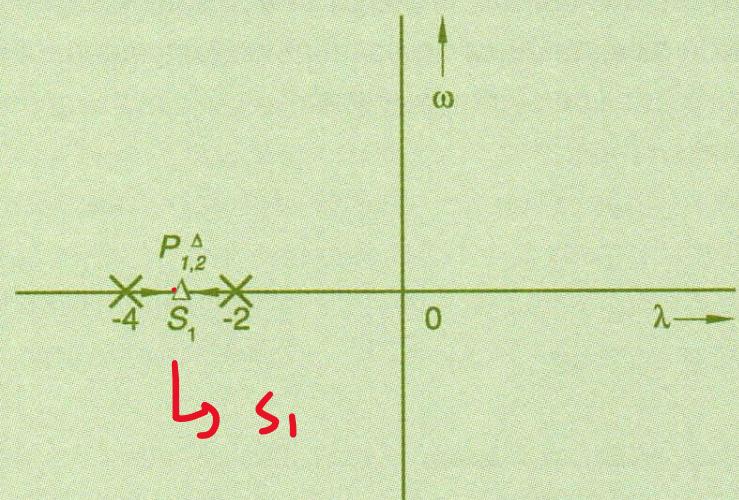
$$\omega_{2,3} = \pm 3,3 \text{ en } K_R = 60$$

Snijpunten zijn:  $s_{1,2} = \pm 3,3j$

De poolbaan ziet er als volgt uit:



## Poolbanen, de somregel



$$(s + 2)(s + 4) + K' = (s - p_1^\Delta)(s - p_2^\Delta)$$

$$s^2 + (2 + 4)s + 2 \cdot 4 + K' = s^2 - (p_1^\Delta + p_2^\Delta)s + p_1^\Delta \cdot p_2^\Delta$$

$$p_1^\Delta + p_2^\Delta = -2 - 4 = -6$$

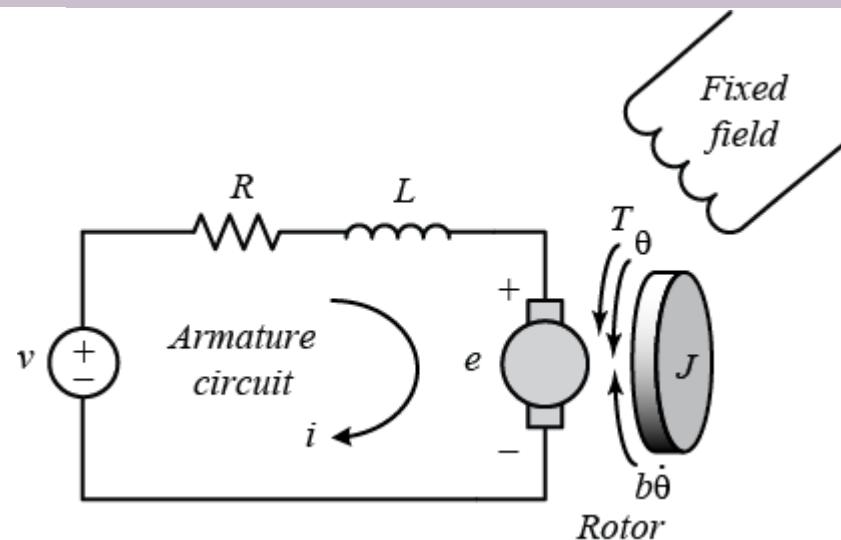
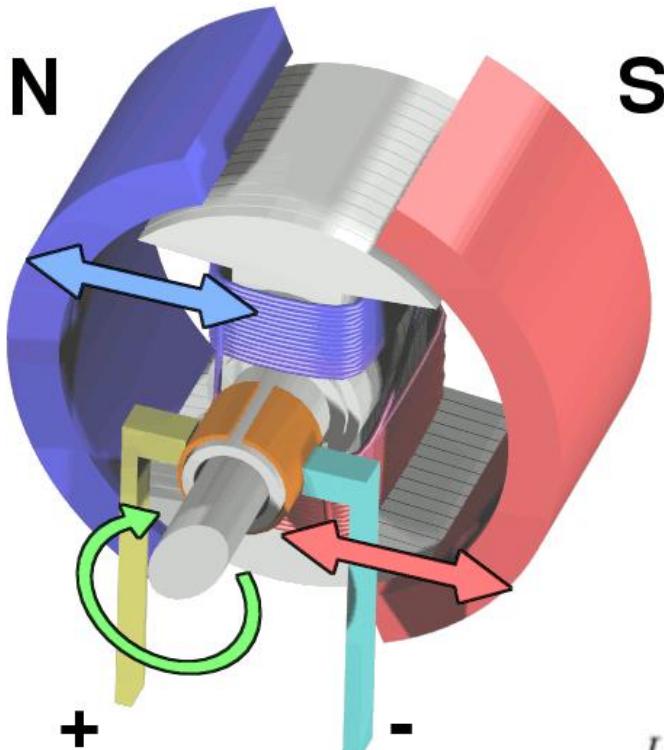
Vb.

$$\sum_{i=1}^n p_i = \sum_{i=1}^n p_i^\Delta$$

Som van de closed loop polen = som van de open loop polen  
 In het vertrekpunt geldt dat de polen van het closed loop systeem aan elkaar gelijk zijn, dus het vertrekpunt is (som open loop polen)/2

Voorwaarde: 2 polen meer dan nulpunten

## Poolbanen, de DC Motor



$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = T - b \frac{d\theta}{dt} \implies \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{J} (K_t i - b \frac{d\theta}{dt})$$

$$L \frac{di}{dt} = -Ri + V - e \implies \frac{di}{dt} = \frac{1}{L} (-Ri + V - K_e \frac{d\theta}{dt})$$

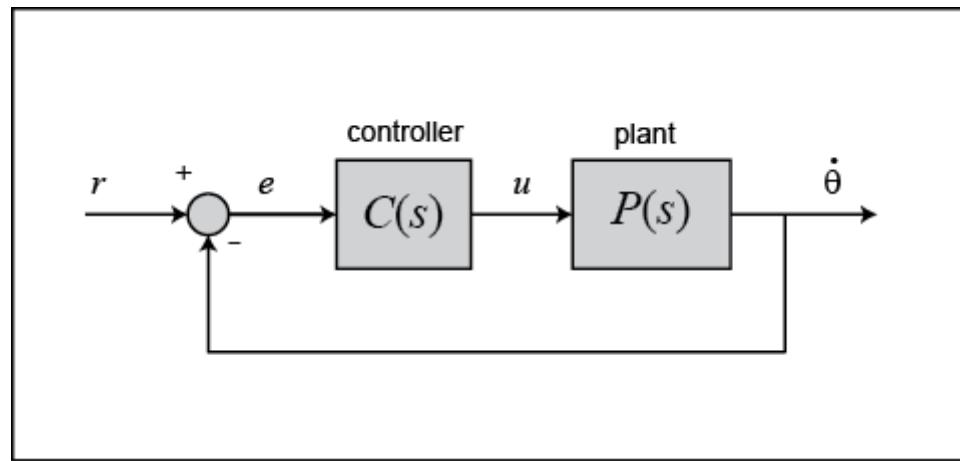
## Poolbanen, de DC Motor

$$P(s) = \frac{\dot{\theta}(s)}{V(s)} = \frac{K_{em}}{(Js + b)(Ls + R) + K_{em}}$$

mech. loss.  
 mech. elec.

$$C(s) = K$$

red underline

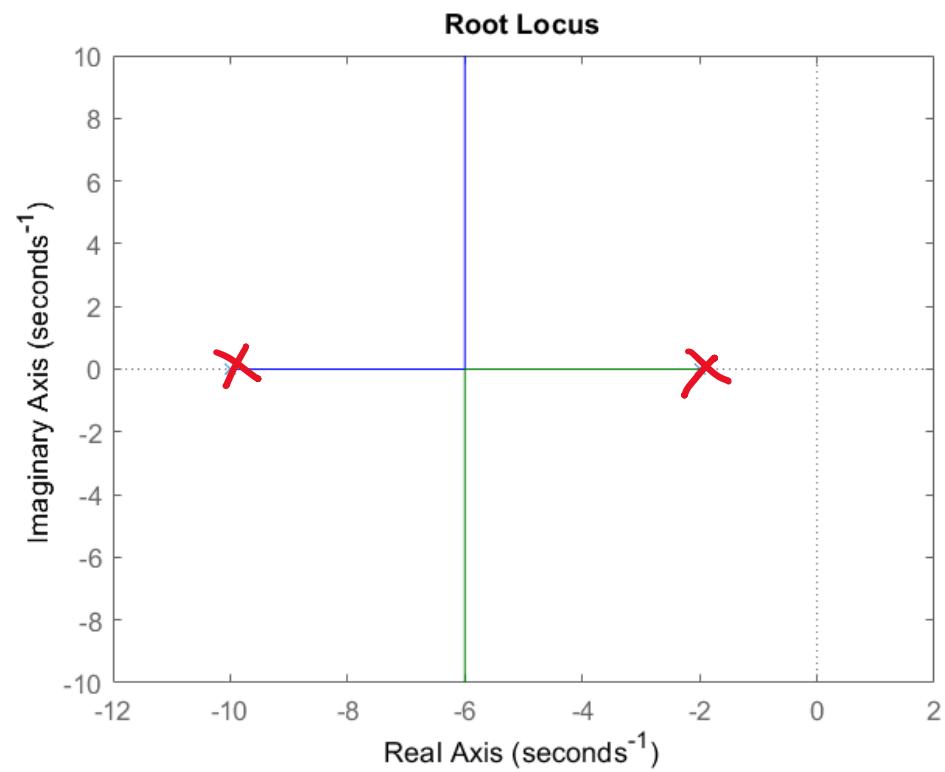


## Poolbanen, de DC Motor

$$\cancel{P(s)} = \frac{\dot{\theta}(s)}{V(s)} = \frac{K_{em}}{(Js + b)(Ls + R) + K_{em}}$$

$$\cancel{C(s)} = K$$

$$P(s) = \frac{\dot{\theta}(s)}{V(s)} = \frac{K_{em}}{(Js + b)(Ls + R) + K_{em}}$$

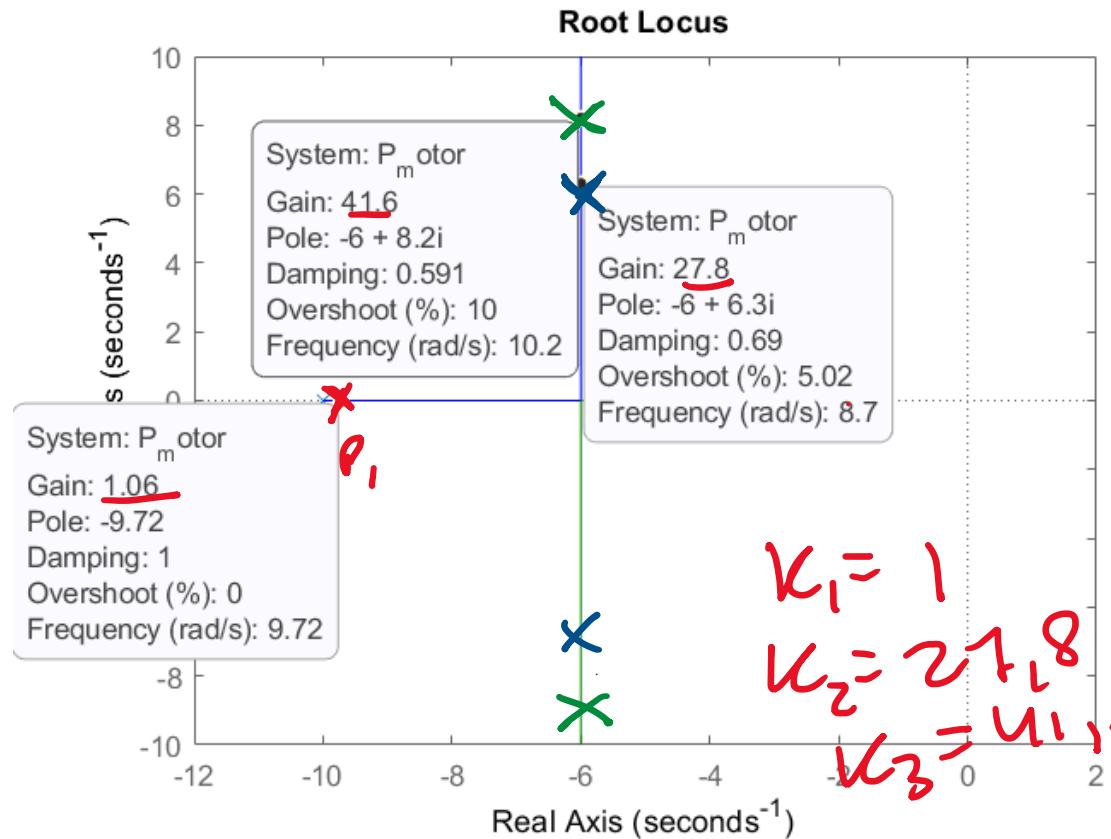


# Poolbanen, de DC Motor

$$P(s) = \frac{\dot{\theta}(s)}{V(s)} = \frac{K_{em}}{(Js + b)(Ls + R) + K_{em}}$$

$$C(s) = K$$

$$P(s) = \frac{\dot{\theta}(s)}{V(s)} = \frac{K_{em}}{(Js + b)(Ls + R) + K_{em}}$$



## Poolbanen, de productregel

$$\prod_{i=1}^n (-p_i) = \prod_{i=1}^n (-p_i^\Delta)$$

$$\prod_{i=1}^n p_i = \prod_{i=1}^n p_i^\Delta$$

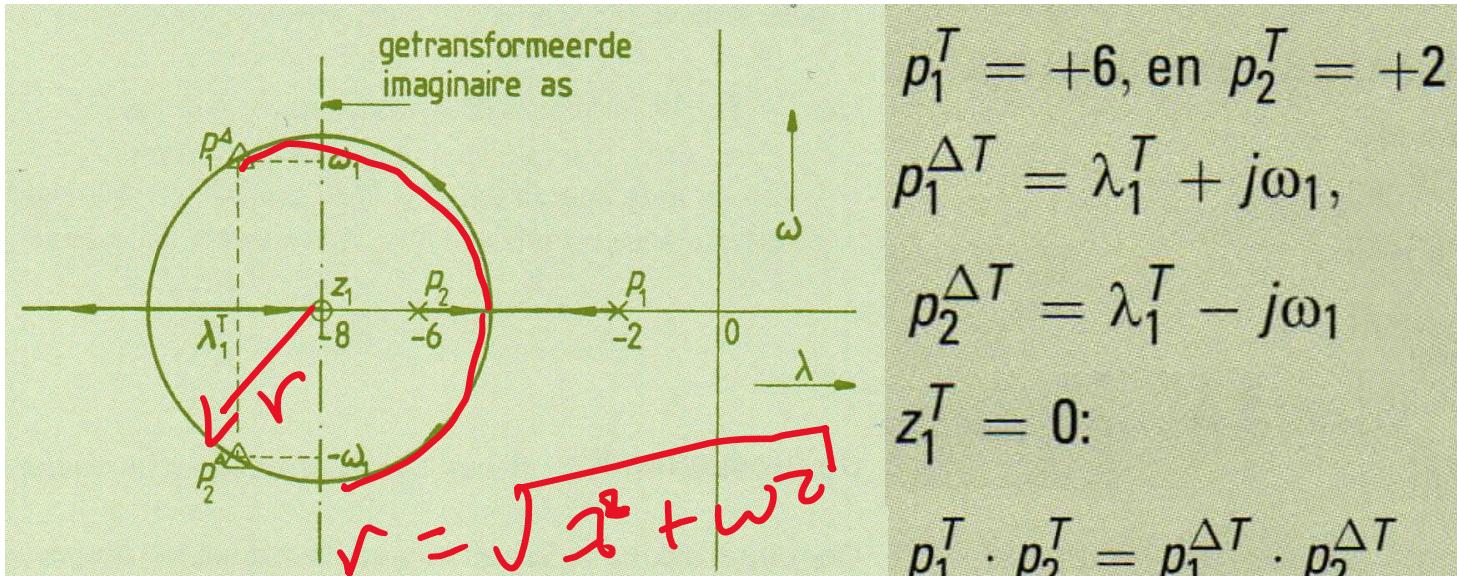
Voorwaarde: precies 1 nulpunt in de oorsprong.

Dan geldt de productregel:

Het product van de polen van het closed loop systeem =

Het product van de polen van het open loop systeem

## Poolbanen, de productregel



$$p_1^T = +6, \text{ en } p_2^T = +2$$

$$p_1^{\Delta T} = \lambda_1^T + j\omega_1,$$

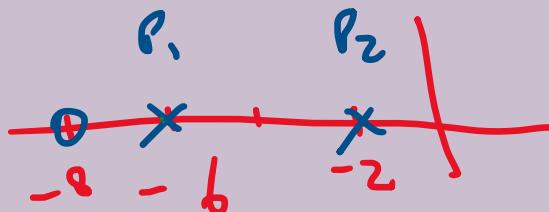
$$p_2^{\Delta T} = \lambda_1^T - j\omega_1$$

$$z_1^T = 0:$$

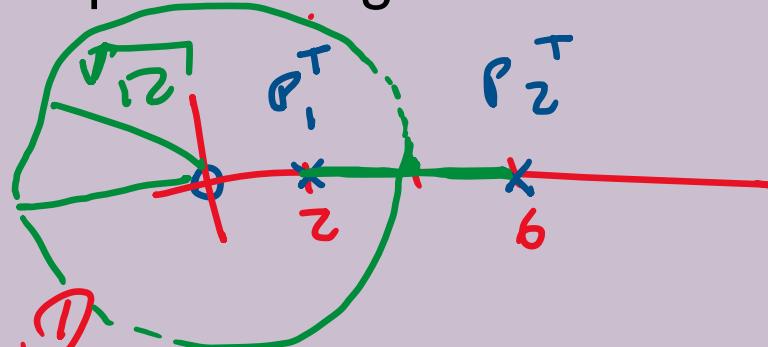
$$p_1^T \cdot p_2^T = p_1^{\Delta T} \cdot p_2^{\Delta T}$$

$$6 \cdot 2 = (\lambda_1^T + j\omega_1)(\lambda_1^T - j\omega_1) = (\lambda_1^T)^2 + \omega_1^2$$

## Poolbanen, de productregel



$\Rightarrow$



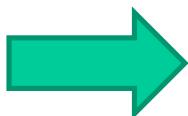
$$P_1^T \cdot P_2^T = z \cdot b = 12 \quad \text{D}$$

$$\begin{aligned} P_1^{\Delta T} &= z + jw \\ P_2^{\Delta T} &= z - jw \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} (z+jw)(z-jw) = z^2 + w^2 \quad \text{(1)} \\ \text{D} + \text{D} \Rightarrow \\ z^2 + w^2 = 12 \quad \left\{ \text{st raal} \right. \\ x^2 + y^2 = r^2 \end{array} \right.$$

## Poolbanen, bepaling van de poolbaanversterking

Poolbaanvergelijking

$$\prod_{i=1}^n (s - p_i) + K' \prod_{i=1}^m (s - z_i) = 0$$



$$P^\Delta \rightarrow K'?$$

$$K' = - \frac{\prod_{i=1}^n (p_1^\Delta - p_i)}{\prod_{i=1}^m (p_1^\Delta - z_i)}$$

$$K' = \frac{\prod_{i=1}^n |(p_1^\Delta - p_i)|}{\prod_{i=1}^m |(p_1^\Delta - z_i)|}$$

De poolbaanversterking in een bepaald punt van de poolbaan wordt gevonden door het product van de lengten van de vectoren van de polen van het open systeem naar dat bepaalde punt, te delen door het product van de lengten van de vectoren van de nulpunten naar dat bepaalde punt.

$$V_b \rightarrow P^\Delta \text{ op } \zeta_M - \alpha s \Rightarrow \lambda + j\omega \Rightarrow \angle = 0$$

## Poolbanen, bepaling van de gelijkspanningsversterking

*lin  $\zeta \rightarrow 0$   $\Rightarrow$  final value theorem*

$$\underline{K_L} = H(s=0)_{\text{rondgaand}} = K' \frac{\prod_{i=1}^m (-z_i)}{\prod_{i=1}^n (-p_i)}$$

$$K_L = K' \frac{\prod_{i=1}^m |z_i|}{\prod_{i=1}^n |p_i|}$$

De lus-gelijkspanningsversterking  $K_L$  wordt gevonden door de poolbaanversterking  $K'$  bij een bepaalde instelling te vermenigvuldigen met het product van de moduli van de nulpunten en te delen door het product van de moduli van de polen.

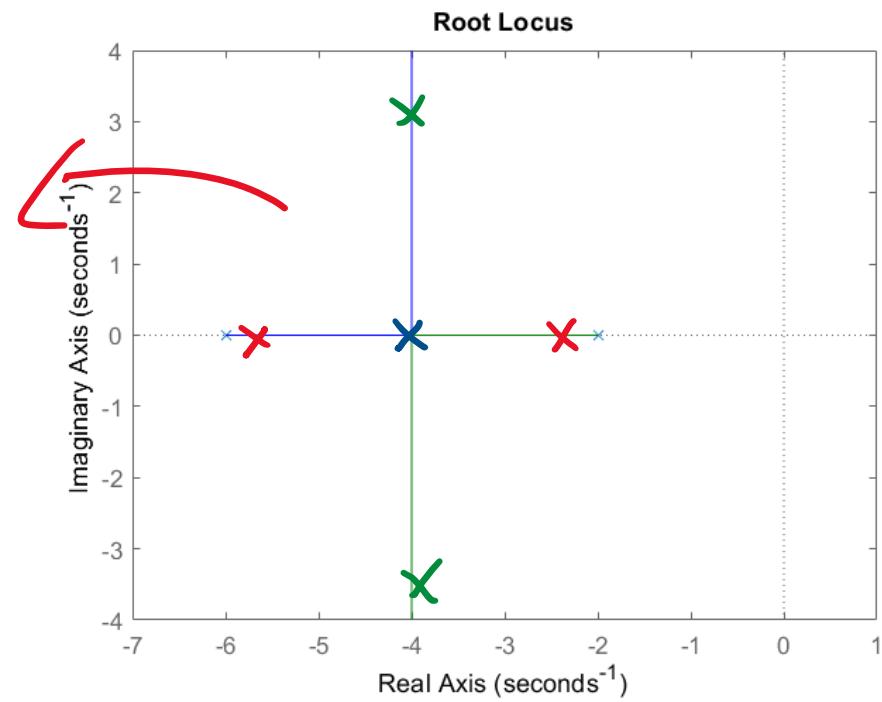
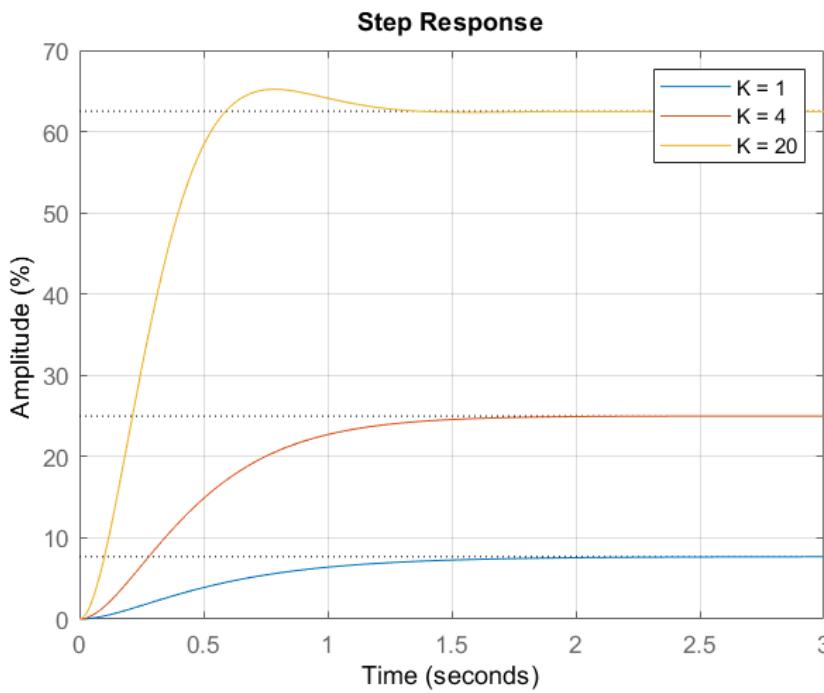
# K<sub>L</sub> - Gelijkspanningsversterking

Stel:

$$H = \frac{K}{(s + 2)(s + 6)}$$

*HOL*

P:  $\begin{matrix} -2 \\ -6 \end{matrix}$



# K<sub>L</sub> - Gelijkspanningsversterking

Stel:

$$H = \frac{K}{(s + 2)(s + 6)}$$

$$K_L = K * \frac{1}{-2 * -6}$$

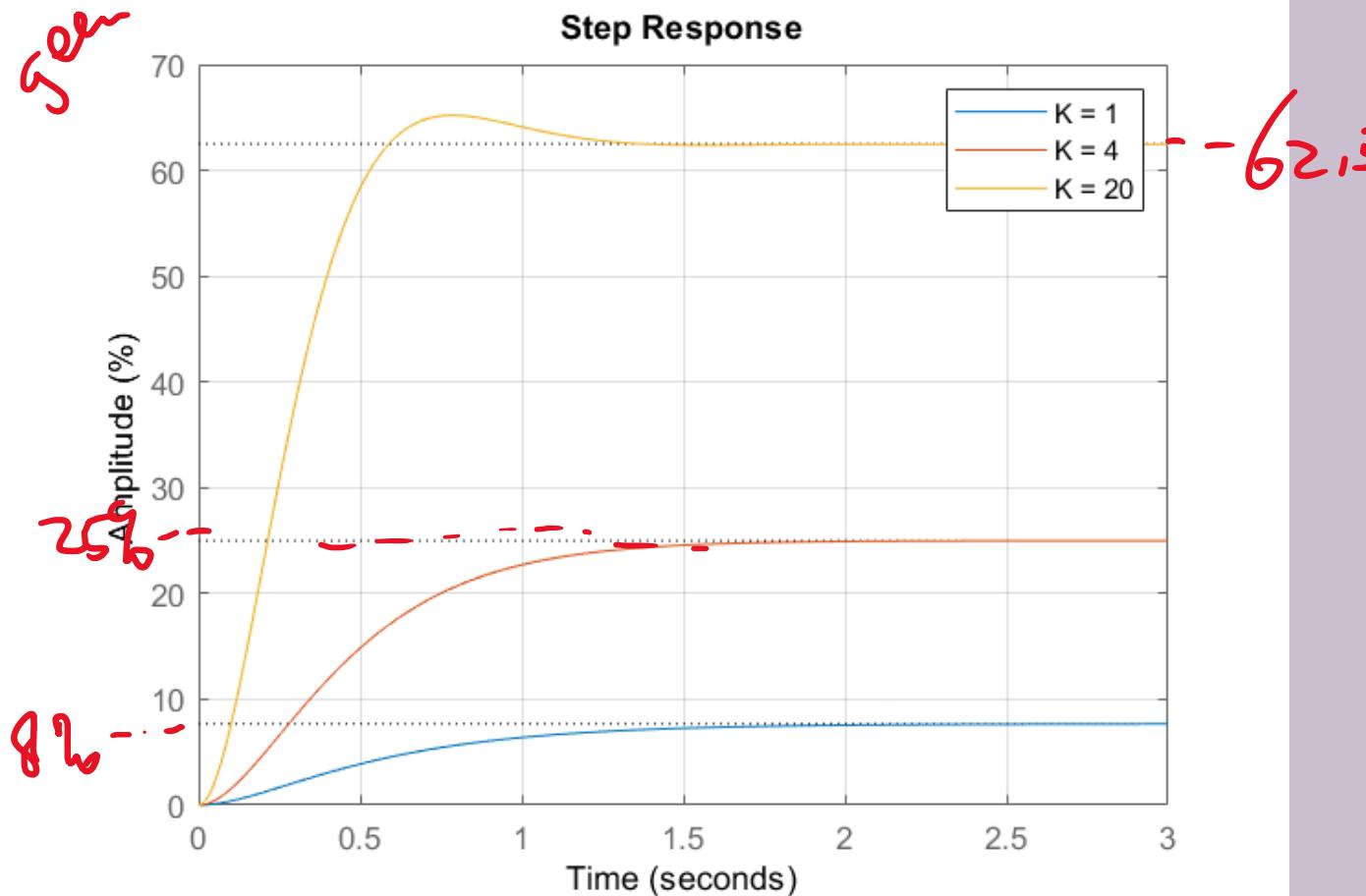
$$E_{stat} = \frac{100\%}{1 + K_L}$$

$$K = 1 \Rightarrow E_{stat} = 92.3\%$$

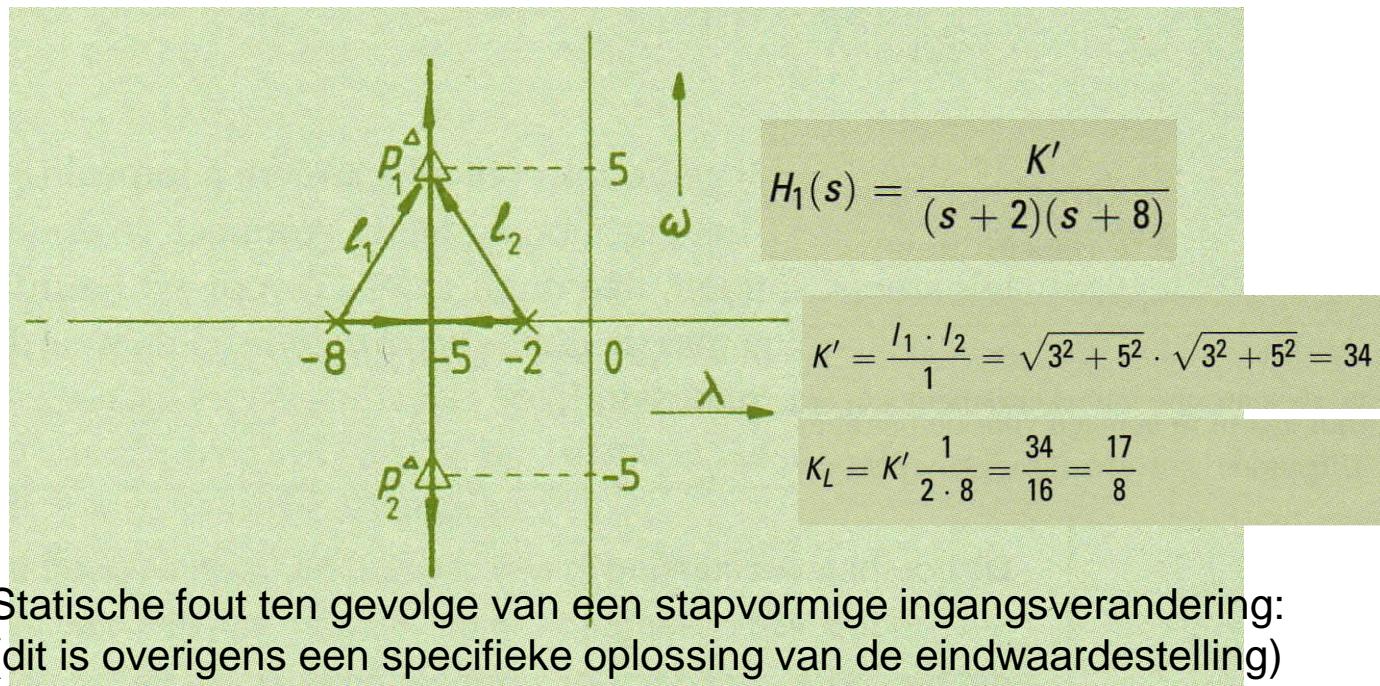
$$K = 4 \Rightarrow E_{stat} = 75\%$$

$$K = 20 \Rightarrow E_{stat} = 37.5\%$$

Geen  $\infty$   $\rightarrow$  Tellex



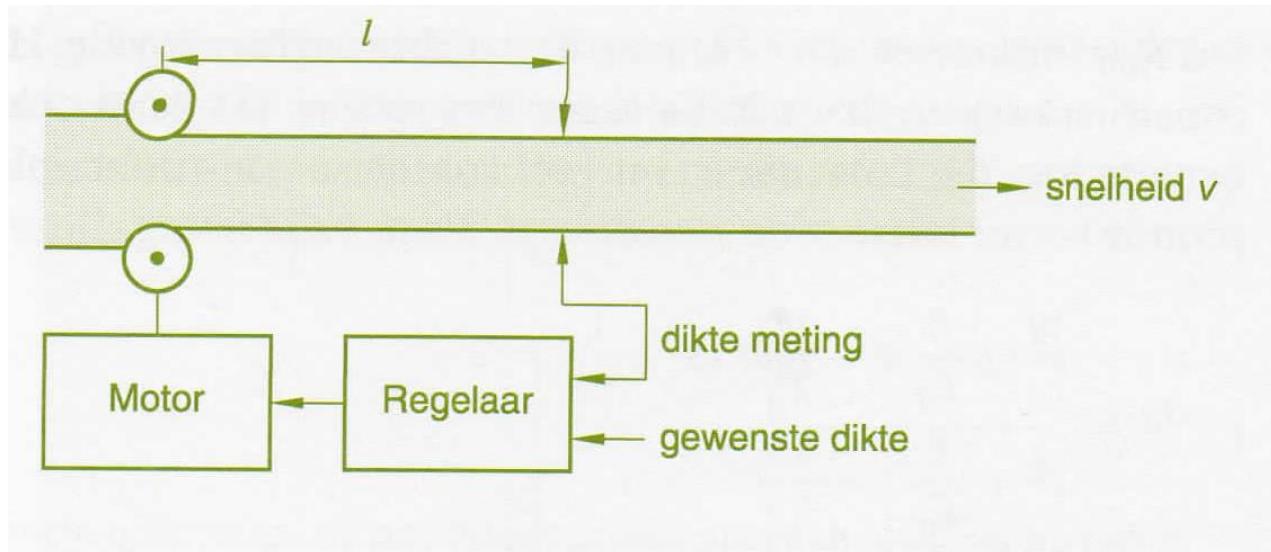
## Poolbanen, bepaling van de poolbaan- en de gelijkspanningsversterking



→  $E = \frac{100\%}{1 + K_L} = \frac{100\%}{1 + \frac{17}{8}} \approx 32\%$

## Poolbanen, processen met looptijd

Walsen van staalplaten:



Dode tijd of looptijd bij dit proces is:  $T_d = l/v$

## Poolbanen, processen met looptijd

Overbrengingsfunctie van een looptijd:

$$H_d(s) = e^{-sT_d}$$

Kan worden geschreven als:

$$H_d(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{T_d}{n}s\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{n}{T_d}\right)^n}{\left(s + \frac{n}{T_d}\right)^n}$$

Hiermee wordt de looptijd benaderd door oneindig veel 1e orde systemen in cascade met zeer kleine tijdconstanten.

Een meer praktische benadering is n beperken, bijvoorbeeld tot n = 3:

$$H_d(s) \approx \frac{1}{\left(1 + \frac{T_d}{3}s\right)^3}$$

## Poolbanen, processen met looptijd

Voor computersimulatie wordt vaak de Padé-benadering gebruikt:

$$e^{-sT_d} = \frac{P(sT_d)}{Q(sT_d)} = \frac{a_0 + a_1(sT_d) + a_2(sT_d)^2 + \dots}{b_0 + b_1(sT_d) + b_2(sT_d)^2 + \dots}$$

De coëfficiënten  $a_i$  en  $b_i$  kunnen met de volgende formule worden berekend

$$e^{-sT_d} = 1 - sT_d + \frac{(sT_d)^2}{2!} - \frac{(sT_d)^3}{3!} + \dots$$

De 1e orde benadering is dan:

$$e^{-sT_d} \approx \frac{1 - \frac{1}{2}sT_d}{1 + \frac{1}{2}sT_d}$$

Deze blijkt nogal onhandig te zijn.

## Poolbanen, processen met looptijd

Een goed compromis is de 2e orde Padé-benadering:

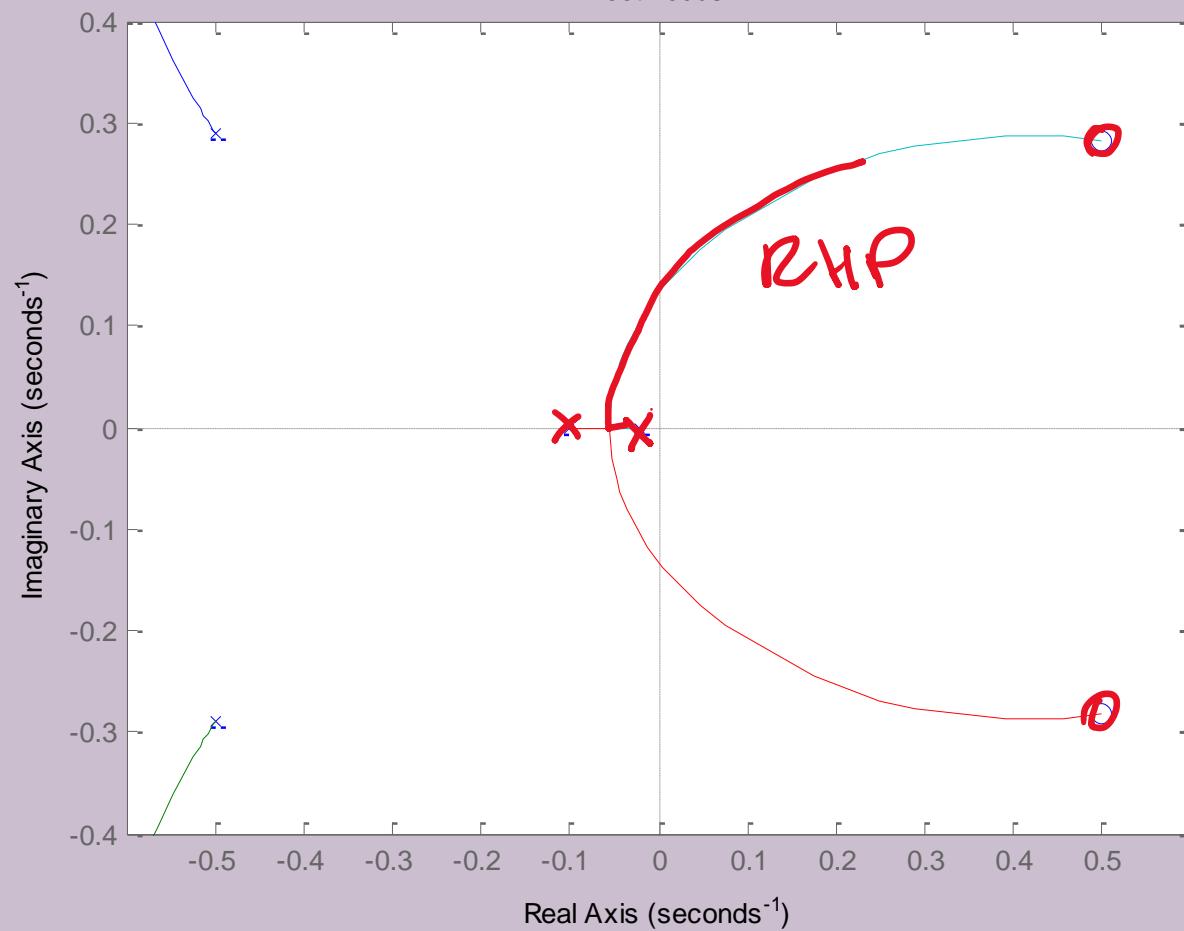
$$e^{-sT_d} \approx \frac{s^2 - \frac{6}{T_d}s + \frac{12}{T_d^2}}{s^2 + \frac{6}{T_d}s + \frac{12}{T_d^2}}$$

→ 2x Z → RHP  
 2xP → LHP

Deze benadering levert 2 complexe polen op in het linkerhalfvlak (LHV) en 2 complexe nulpunten in het rechterhalfvlak (RHV). Door deze nulpunten zullen er altijd poolbaantakken naar het RHV worden getrokken. Dit betekent dat door looptijd regelsystemen, voor grotere waarden van de versterking, altijd instabiel zullen worden. Door looptijd wordt ook de haalbare bandbreedte beperkt.

## Poolbanen, processen met looptijd

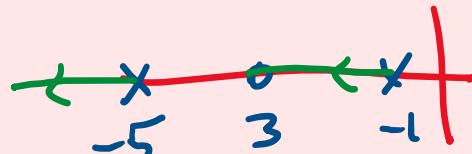
Root Locus



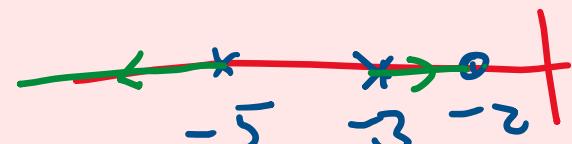
# OEFENOPDRACHTEN

Construeer de poolbaan v.d. volgende systemen:

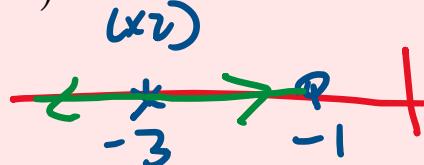
$$1) \ H_L(s) = K' \frac{(s+3)}{(s+1)(s+5)}$$



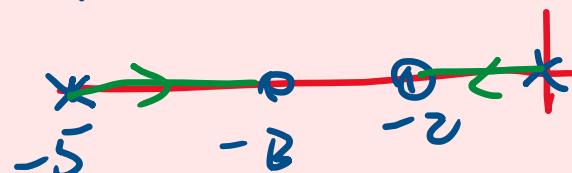
$$2) \ H_L(s) = K' \frac{(s+2)}{(s+3)(s+5)}$$



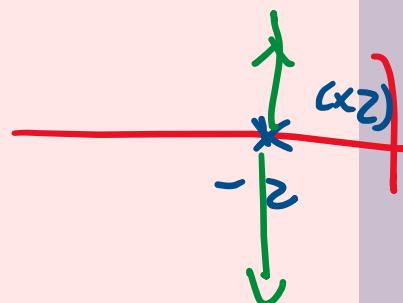
$$3) \ H_L(s) = K' \frac{(s+1)}{(s+3)^2}$$



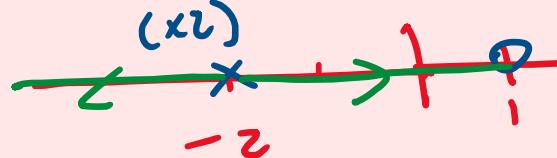
$$4) \ H_L(s) = K' \frac{(s+2)(s+3)}{s(s+5)}$$



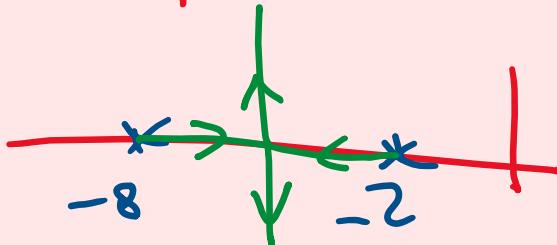
$$5) \ H_L(s) = K' \frac{1}{(s+2)^2}$$



$$6) \ H_L(s) = K' \frac{(s-1)}{(s+2)^2}$$



$$7) \ H_L(s) = K' \frac{16}{(s+2)(s+8)}$$



# OEFENOPDRACHTEN

Construeer de poolbaan v.d. volgende systemen:

$$1) \ H_L(s) = K' \frac{(s+3)}{(s+1)(s+5)}$$

$$2) \ H_L(s) = K' \frac{(s+2)}{(s+3)(s+5)}$$

$$3) \ H_L(s) = K' \frac{(s+1)}{(s+3)^2}$$

$$4) \ H_L(s) = K' \frac{(s+2)(s+3)}{s(s+5)}$$

$$5) \ H_L(s) = K' \frac{1}{(s+2)^2}$$

$$6) \ H_L(s) = K' \frac{(s-1)}{(s+2)^2}$$

$$7) \ H_L(s) = K' \frac{16}{(s+2)(s+8)}$$

