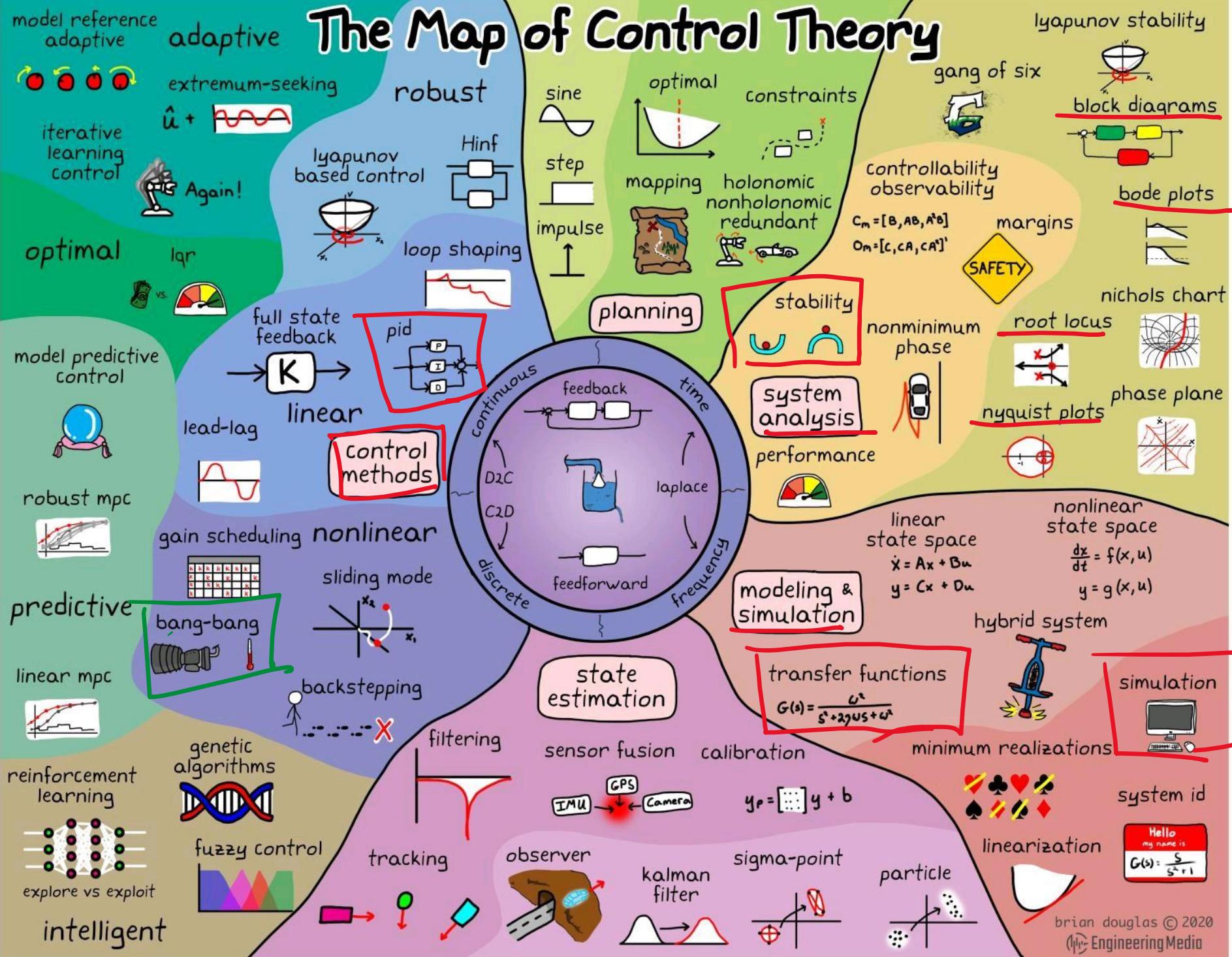
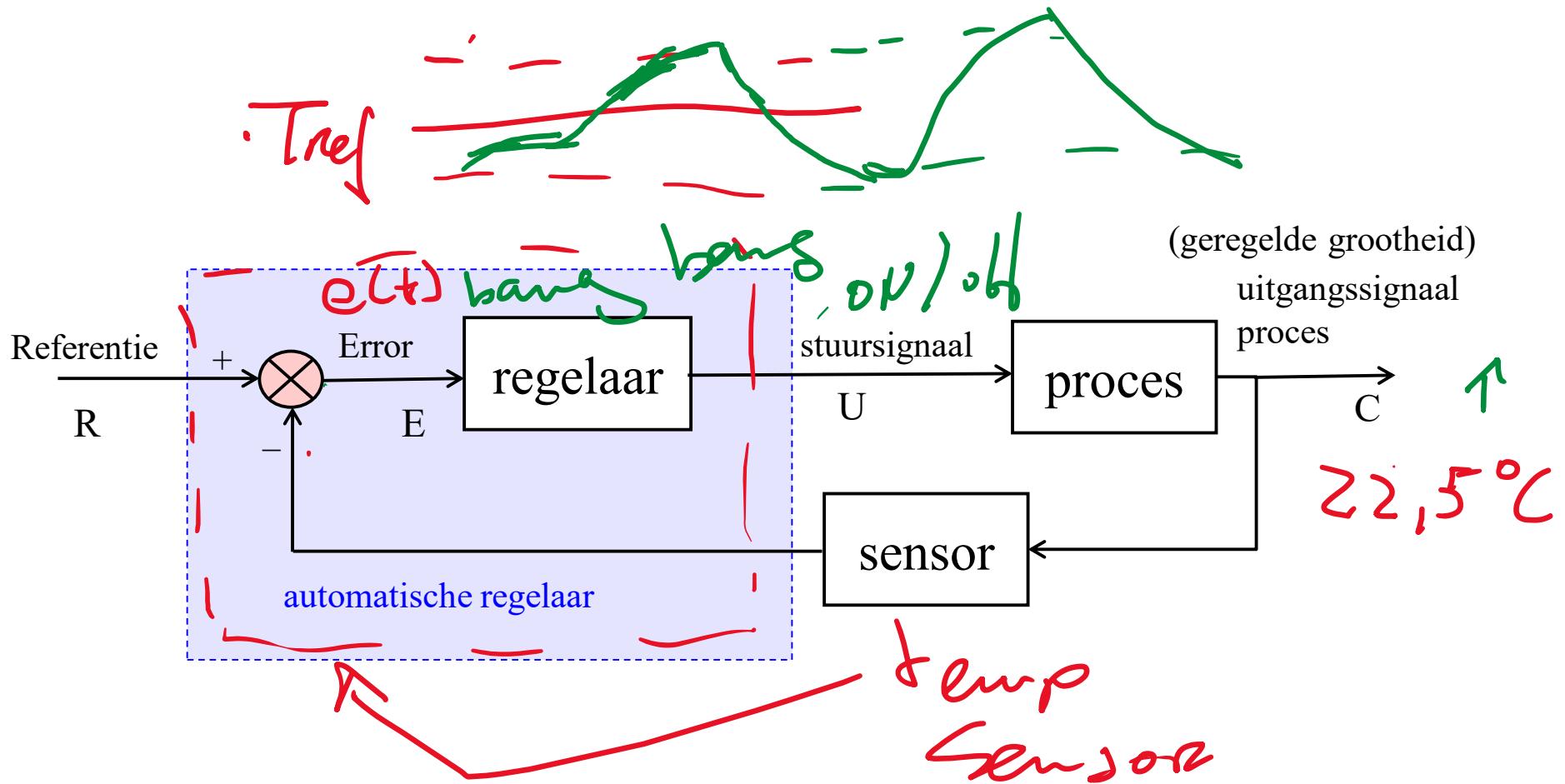


# The Map of Control Theory



# Ontwerpen van Geregelde Systemen



# Ontwerpen van geregelde systemen

## Inleiding

Regelaarinput: E → Error

Regelaaroutput: U

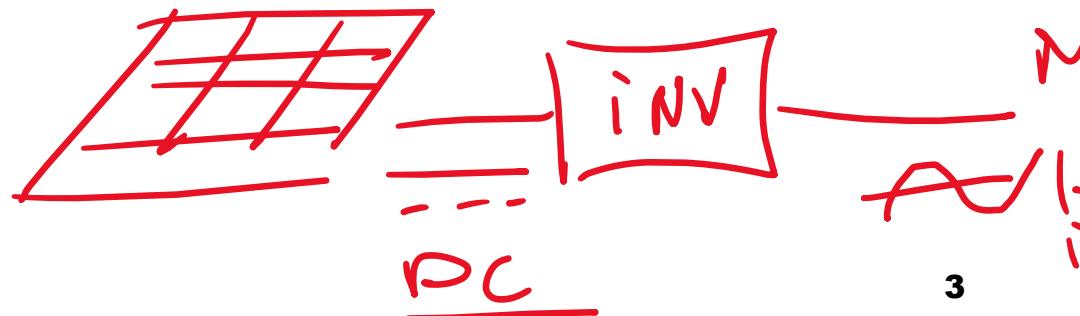
$$U = E * H_r$$

$$H_r = U / E$$

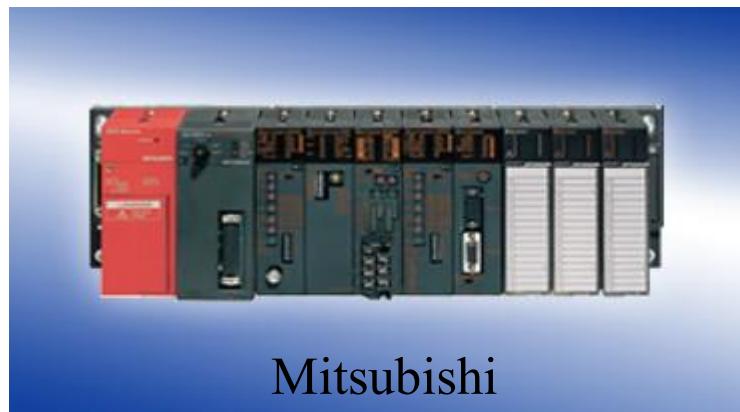
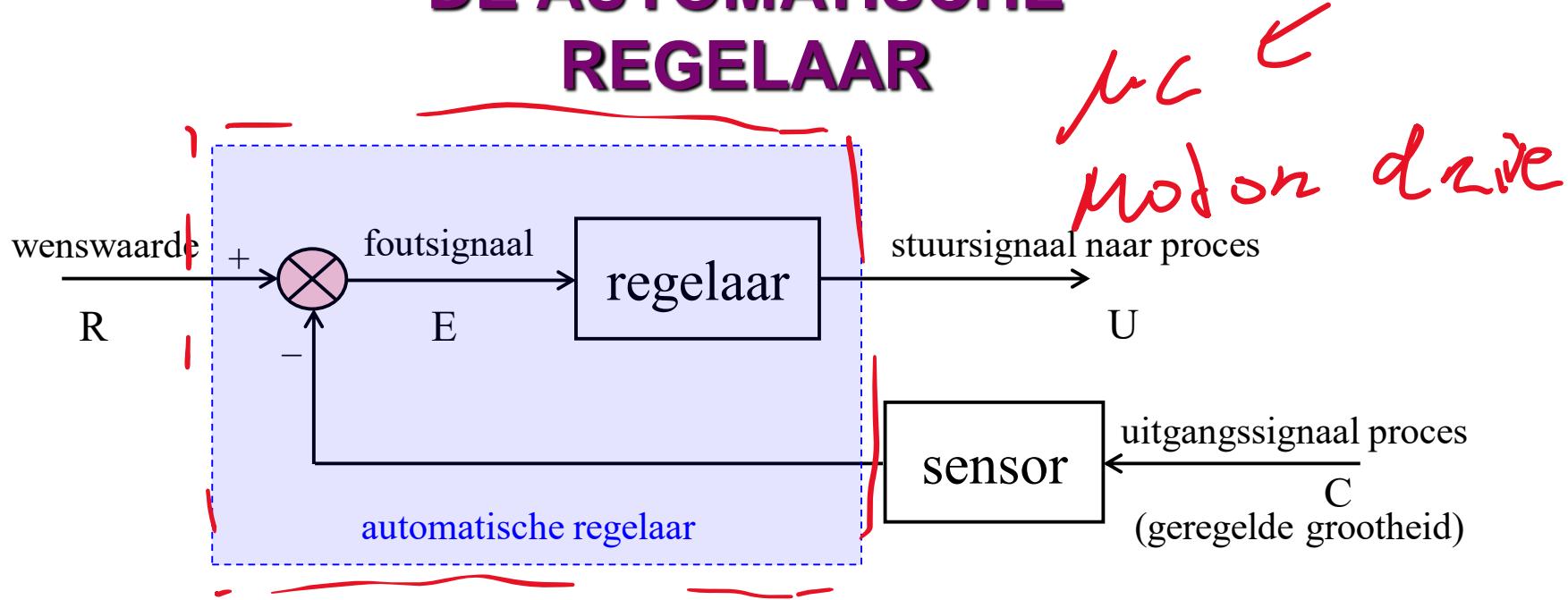
$$H_r(s) = \frac{U(s)}{E(s)}$$

De regelaar moet de geregelde waarde constant houden of moet de referentiewaarde volgen.

↳ CV → 22,5 °C



# DE AUTOMATISCHE REGELAAR



Mitsubishi

↗PLC ↗ P,I,O

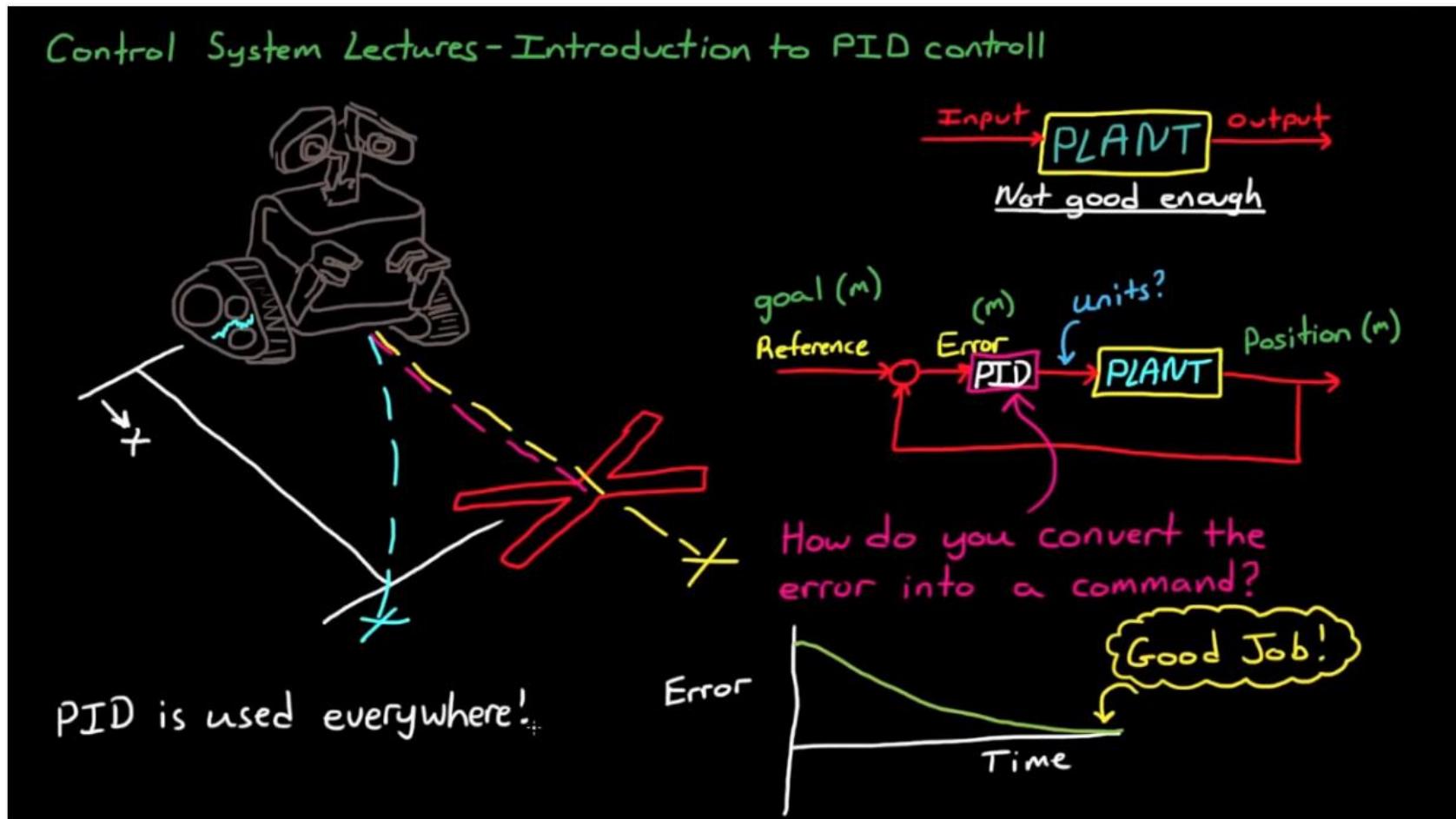


B&R automation



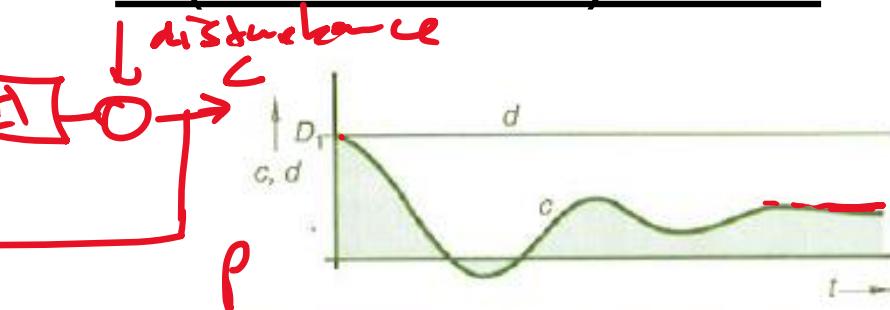
# Filmpje over PID (intro)

- <https://www.youtube.com/watch?v=UR0hOmjaHp0>

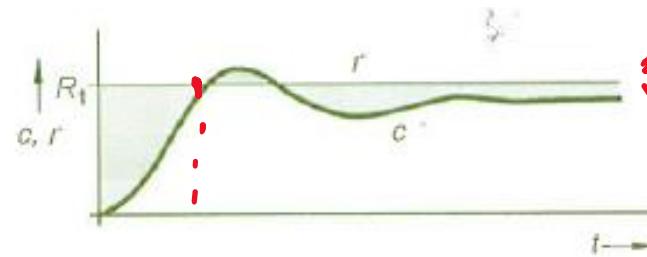


# P(Proportional)-, I(Integral)- en D(Derivative)-actie

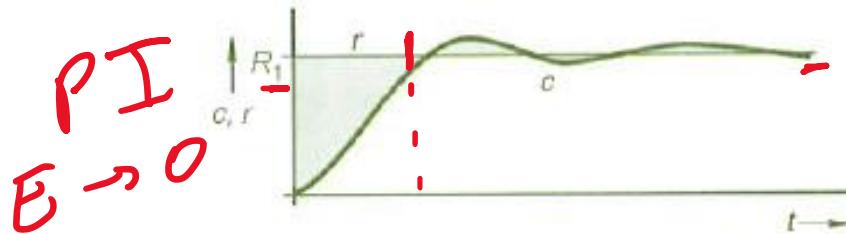
S-domein  
Freq domein



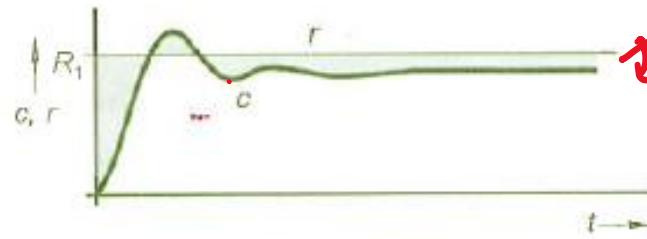
a. stapresponsie  $c$  als  $d$  verandert van 0 naar  $D_t$



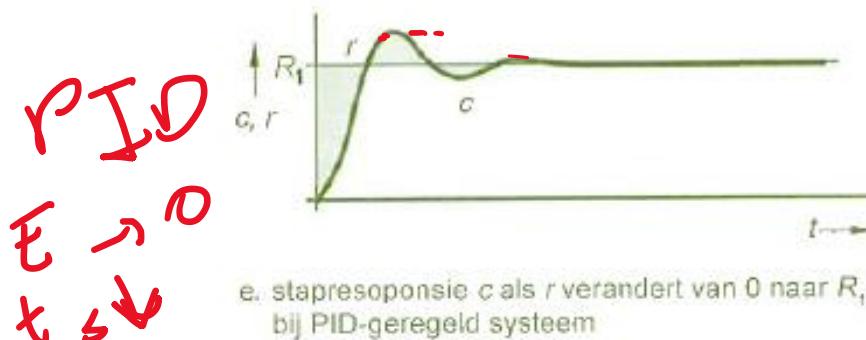
b. stapresponsie  $c$  als  $r$  verandert van 0 naar  $R_1$  bij P-geregelde systeem



c. stapresponsie  $c$  als  $r$  verandert van 0 naar  $R_1$  bij PI-geregelde systeem



d. stapresponsie  $c$  als  $r$  verandert van 0 naar  $R_1$  bij PD-geregelde systeem



e. stapresponsie  $c$  als  $r$  verandert van 0 naar  $R_1$  bij PID-geregelde systeem

$$P: u(t) = K_p * e(t)$$

$$I: u(t) = \underline{K_i * \int e(t) dt}$$

$$D: u(t) = \underline{K_d * \frac{d}{dt} e(t)}$$

↑ Estat  
P ↓  
 $P \Rightarrow K_L$

PD

# P-, I- en D-actie

- P:  $u(t) = K_p * e(t)$
- I:  $u(t) = K_i * \int e(t)dt$
- D:  $u(t) = K_d * \frac{d}{dt}e(t)$

Invloeden: zie voorgaand figuur

- P: D(% overshoot) groter;  $t_s$  kleiner; E kleiner
- I :  $t_s$  groter; E kleiner
- D:  $t_s$  kleiner; D(% overshoot) kleiner

Bij alle regelaars bestaat de kans dat het geregelde systeem instabiel wordt!

Zie: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:PID\\_Compensation\\_Animated.gif](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:PID_Compensation_Animated.gif)

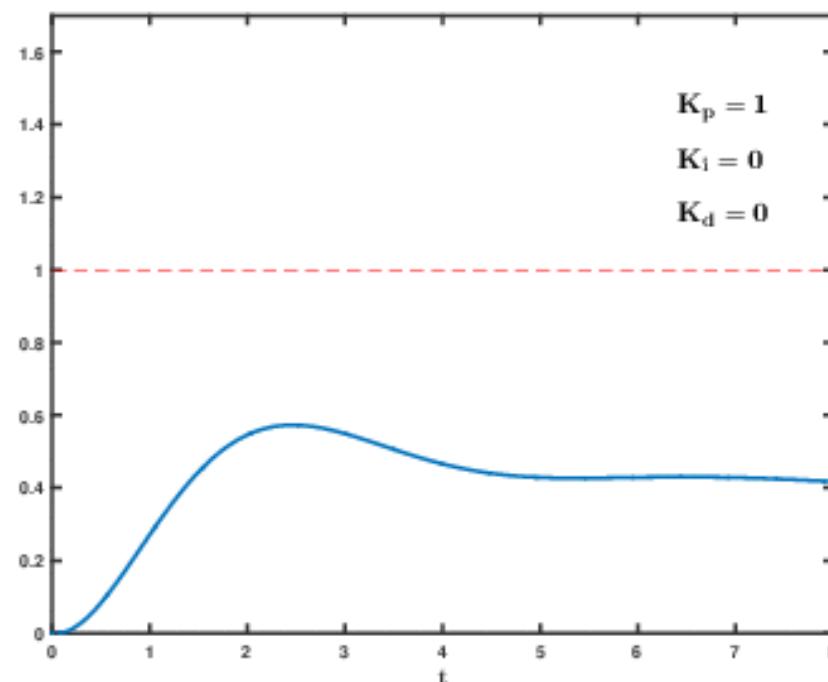
# P-, I- en D-actie

$$P: u(t) = K_p * e(t) \quad I: u(t) = K_i * \int e(t)dt \quad D: u(t) = K_d * \frac{d}{dt} e(t)$$

P: D(% overshoot) groter;  $t_s$  kleiner; E kleiner

I :  $t_s$  groter; E kleiner

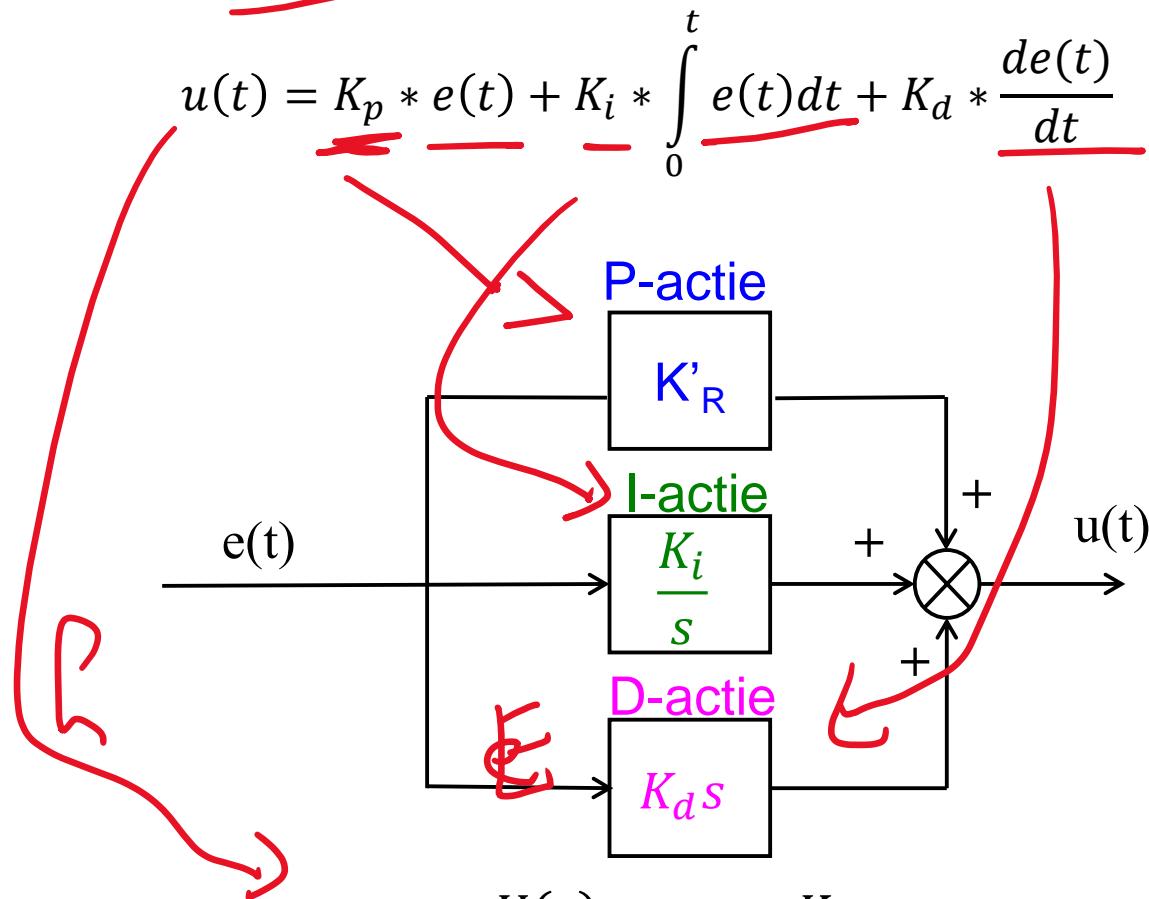
D:  $t_s$  kleiner; D(% overshoot) kleiner



# DE PID-REGELAAR

De parallel PID-regelaar (toegepast in praktijk):

K<sub>p</sub> wordt soms K<sub>r</sub> genoemd



P = Proportioneel

I = Integrerend

D = Differentiërend

$$H_R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s$$

$$H_{PID} = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D \cdot s \quad \leftarrow$$

$$= K_P s + K_I + K_D \cdot s^2$$

s

$$\Rightarrow = K_r \left( 1 + \frac{1}{\tau_i s} + \frac{1}{\tau_d s} \right)$$

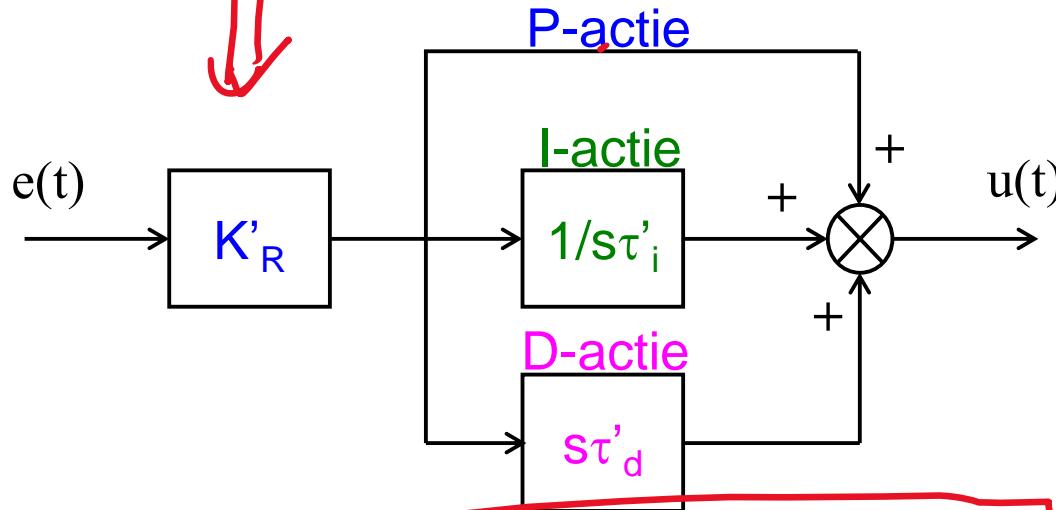
$\tau_i$

$$K_P \quad \frac{1}{\tau_i} = \frac{K_I}{K_P} \quad \tau_d = \frac{K_D}{K_P}$$

# DE PID-REGELAAR

De parallel PID-regelaar (toegepast in praktijk):

$$\rightarrow u(t) = K_R \cdot \left( e(t) + \frac{1}{\tau_i} \int_0^t e(t).dt + \tau_d \frac{de(t)}{dt} \right)$$



$K_p$  wordt soms  $K_r$  genoemd

P = Proportioneel

I = Integrerend

D = Differentiërend

$$H_R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_R \cdot \left( 1 + \frac{1}{s\tau_i} + s\tau_d \right)$$

# DE REGELAARS

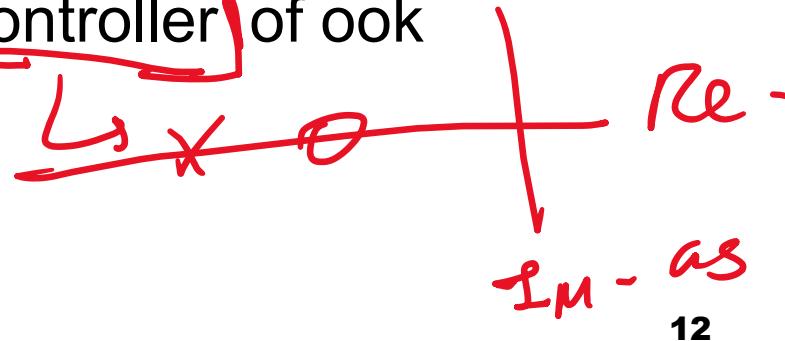
→ P regelaar:  $H_r = K_r$

→ ideale PI regelaar:  $H_r = K_r \left(1 + \frac{1}{\tau_i s}\right)$  E → D

→ ideale PD regelaar:  $H_r = K_r (1 + \tau_d s)$

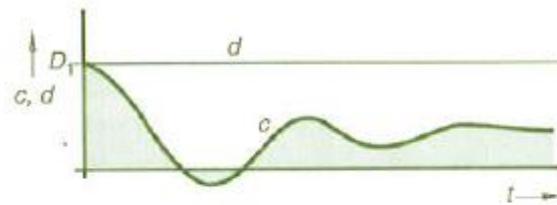
ideale PID regelaar:  $H_r = K_r \left(1 + \frac{1}{\tau_i s} + \tau_d s\right)$

In de praktijk worden meestal niet-ideale regelaars gebruikt.  
Niet-ideale PI wordt vaak 'lag-controller' genoemd.  
Niet-ideale PD wordt vaak 'lead-controller' of ook  
'tamme D-regelaar' genoemd.

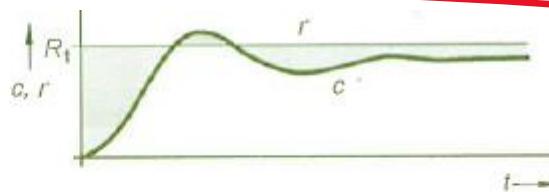


# Ontwerp van een P-regelaar

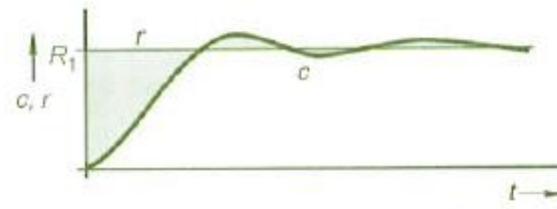
$\rightarrow K_r \uparrow$



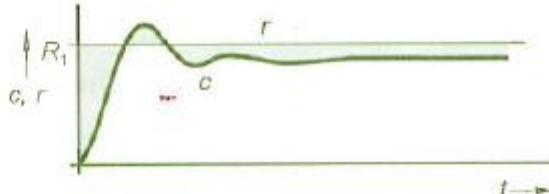
a. stapresponsie  $c$  als  $d$  verandert van 0 naar  $D_1$



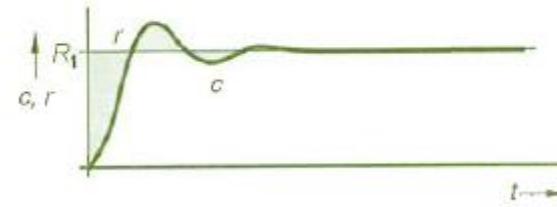
b. stapresponsie  $c$  als  $r$  verandert van 0 naar  $R_1$ , bij P-geregelde systeem



c. stapresponsie  $c$  als  $r$  verandert van 0 naar  $R_1$ , bij PI-geregelde systeem



d. stapresponsie  $c$  als  $r$  verandert van 0 naar  $R_1$ , bij PD-geregelde systeem



e. stapresponsie  $c$  als  $r$  verandert van 0 naar  $R_1$ , bij PID-geregelde systeem

- Settling time wordt kleiner
- Overshoot wordt groter
- Statische fout wordt kleiner

$ts \downarrow$

$D \uparrow$

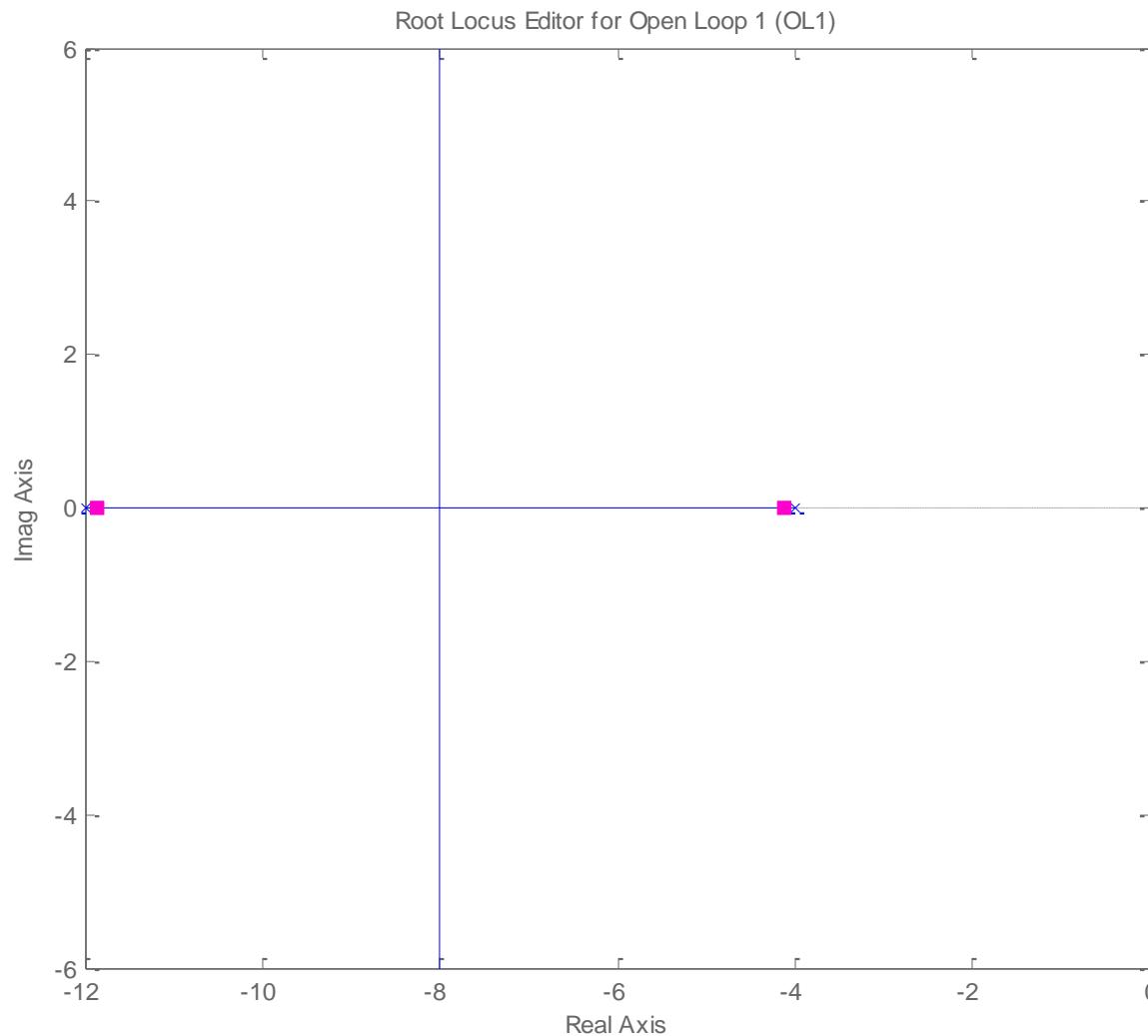
$E_{\text{stat}} \downarrow$

Proportionaliteitsfactor:  $K_r = U(s)/E(s)$



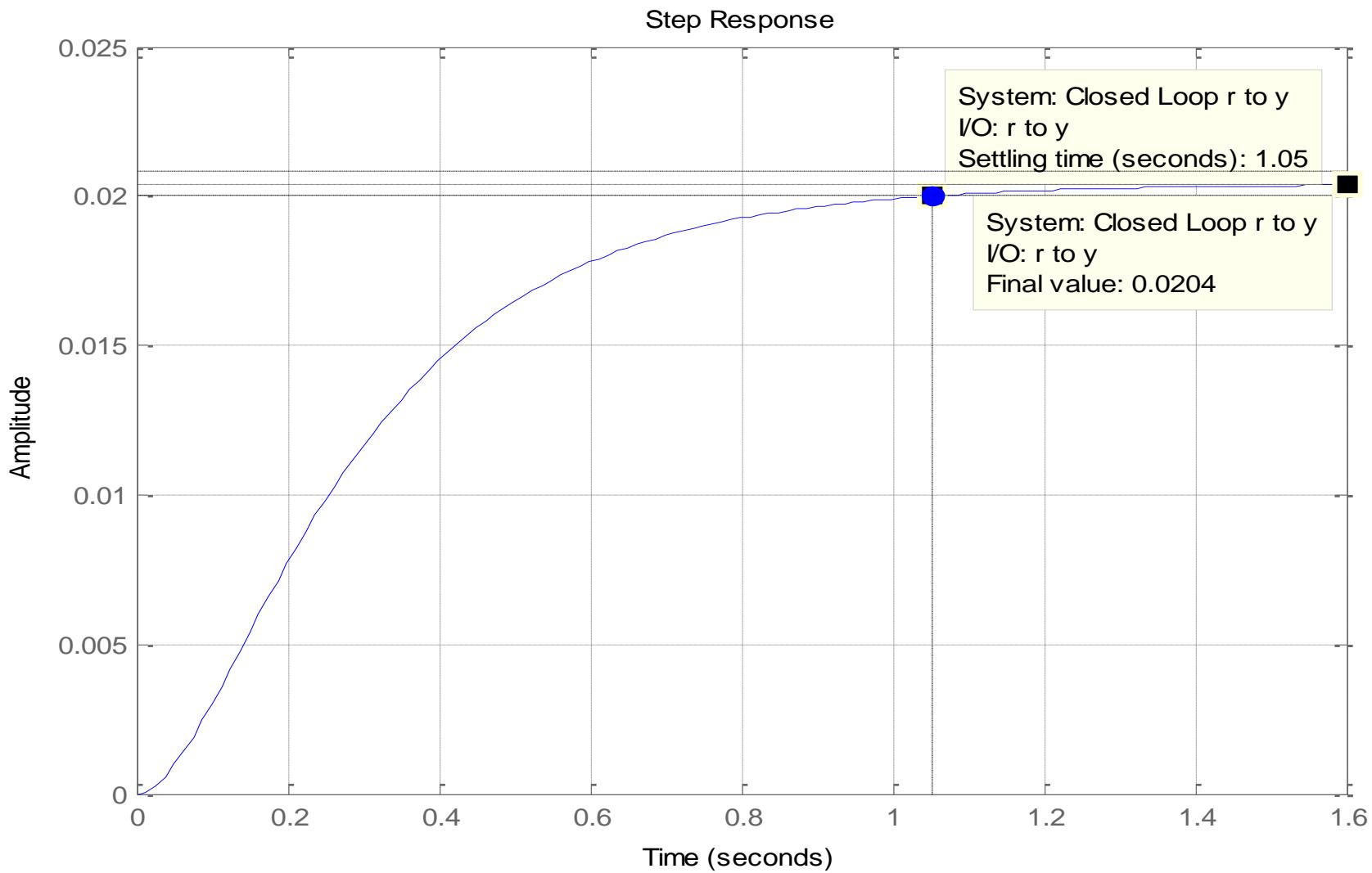
# Instellen P-actie

$H(s) = 1/(s^2 + 16s + 48)$ . Doel:  $E_{\text{stat}} = 0$ ,  $t_s = \text{minimaal}$ ,  $D \leq 10\%$   
Eerst alleen P-regelaar; poolbaan met  $K = 1$ :



# Instellen P-actie

Eerst alleen P-regelaar; stapresponsie closed loop,  $K = 1$

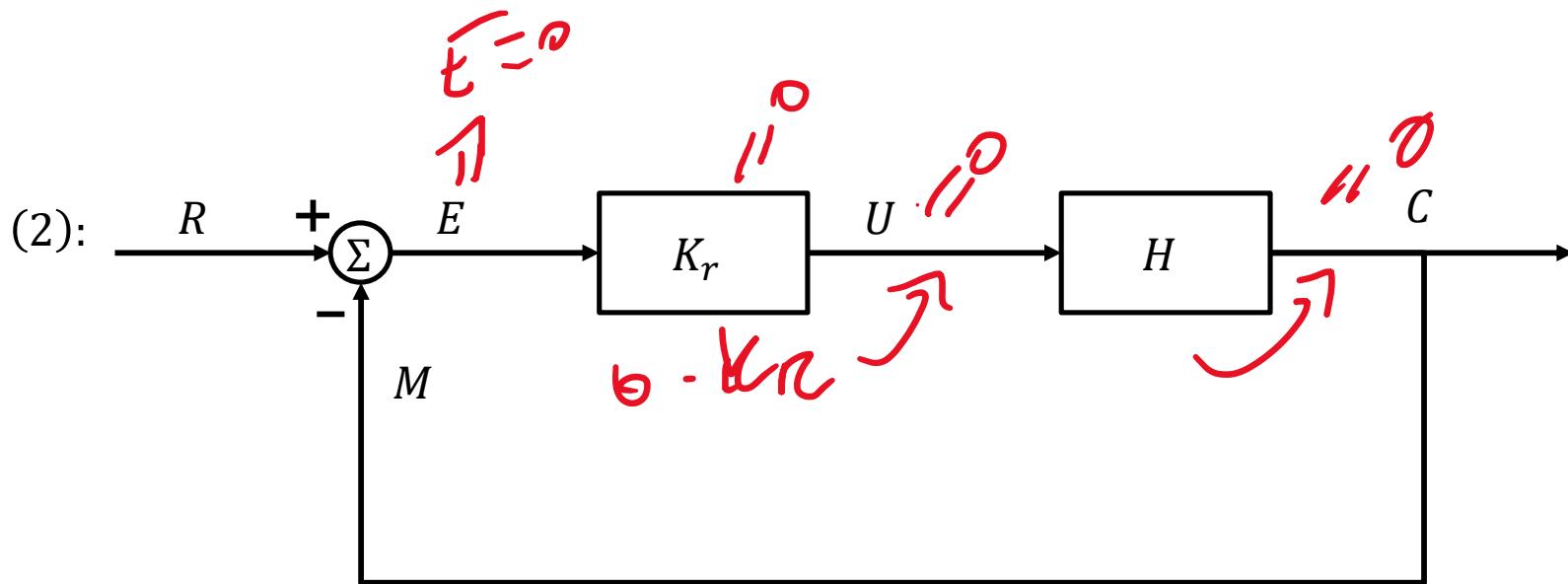


$$t_S \approx 0,44 \text{ sec}$$

$E_{stat} \approx 25^\circ \text{ so } X$

(1):  $E_{stat} = \frac{100\%}{1 + K_L}$

$E_{stat} K_L = K_R \frac{\pi / \beta}{\pi / P} \neq 0$



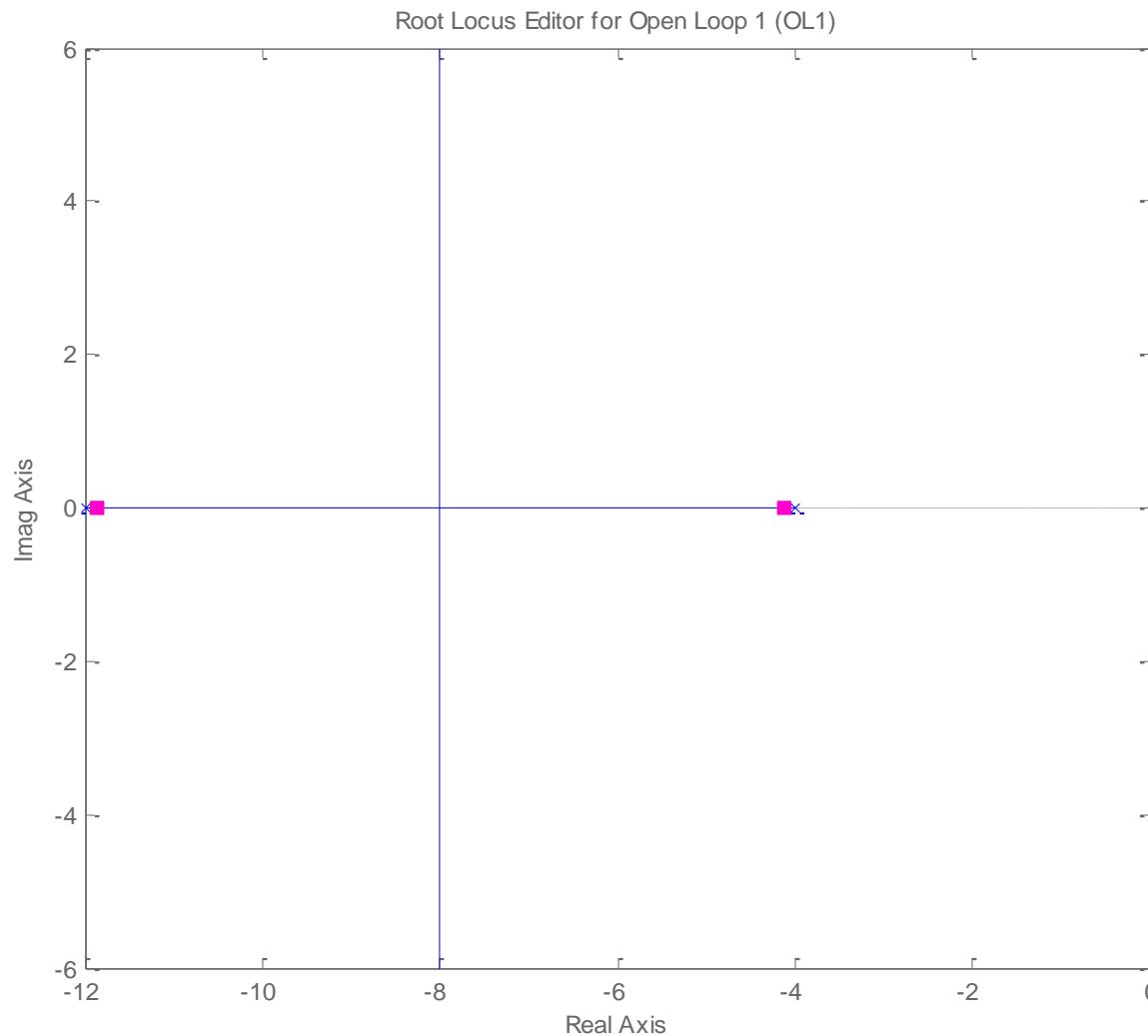
P-regelung  $E \neq 0$   
 Ref - Measured  $\neq 0$



## Toevoegen I-actie (ideale PI-regelaar)

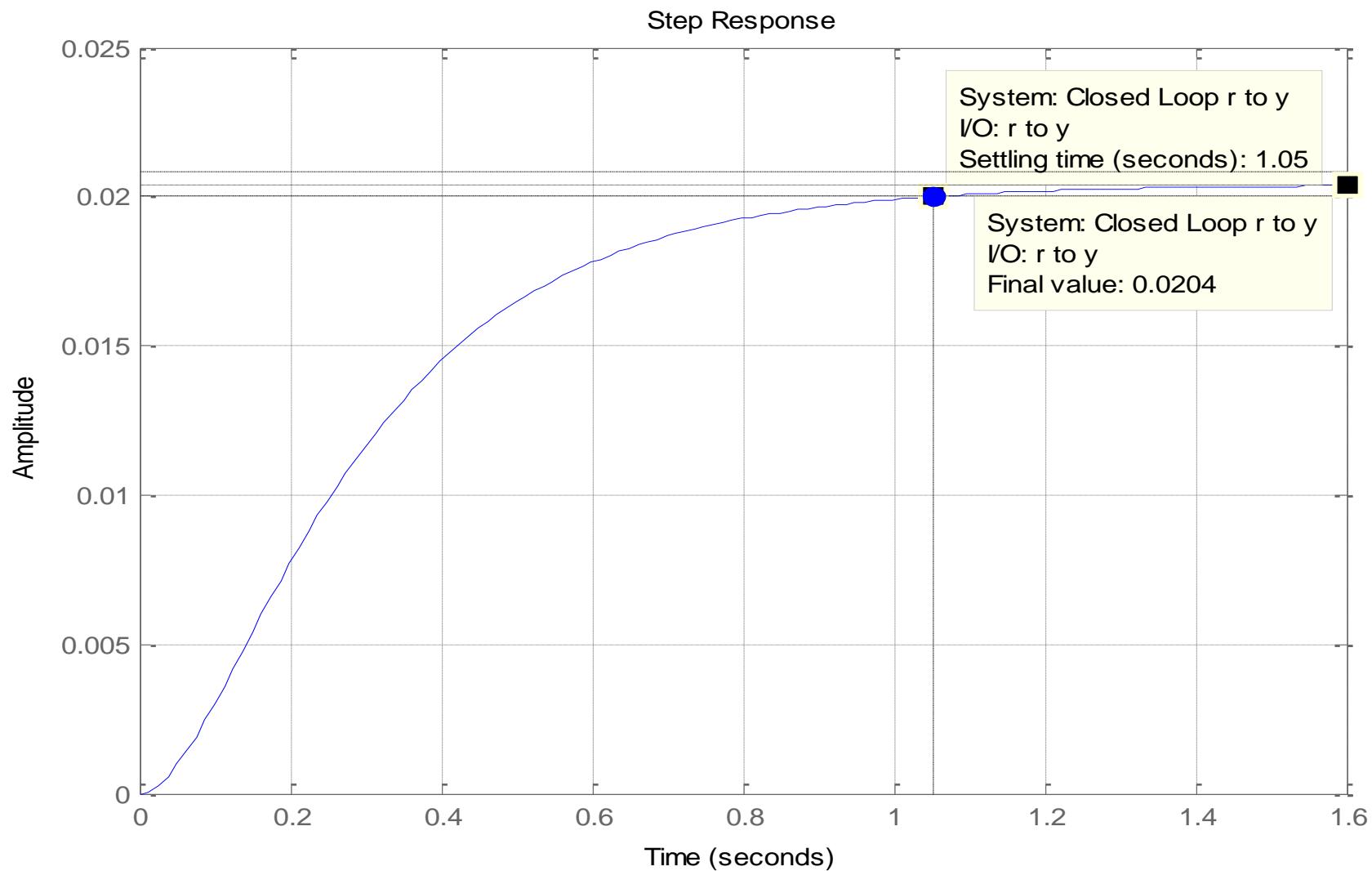
$H(s) = 1/(s^2 + 16s + 48)$ . Doel:  $E_{\text{stat}} = 0$ ,  $t_s = \text{minimaal}$ ,  $D \leq 10\%$

Eerst alleen P-regelaar; poolbaan met  $K = 1$ :



# Toevoegen I-actie

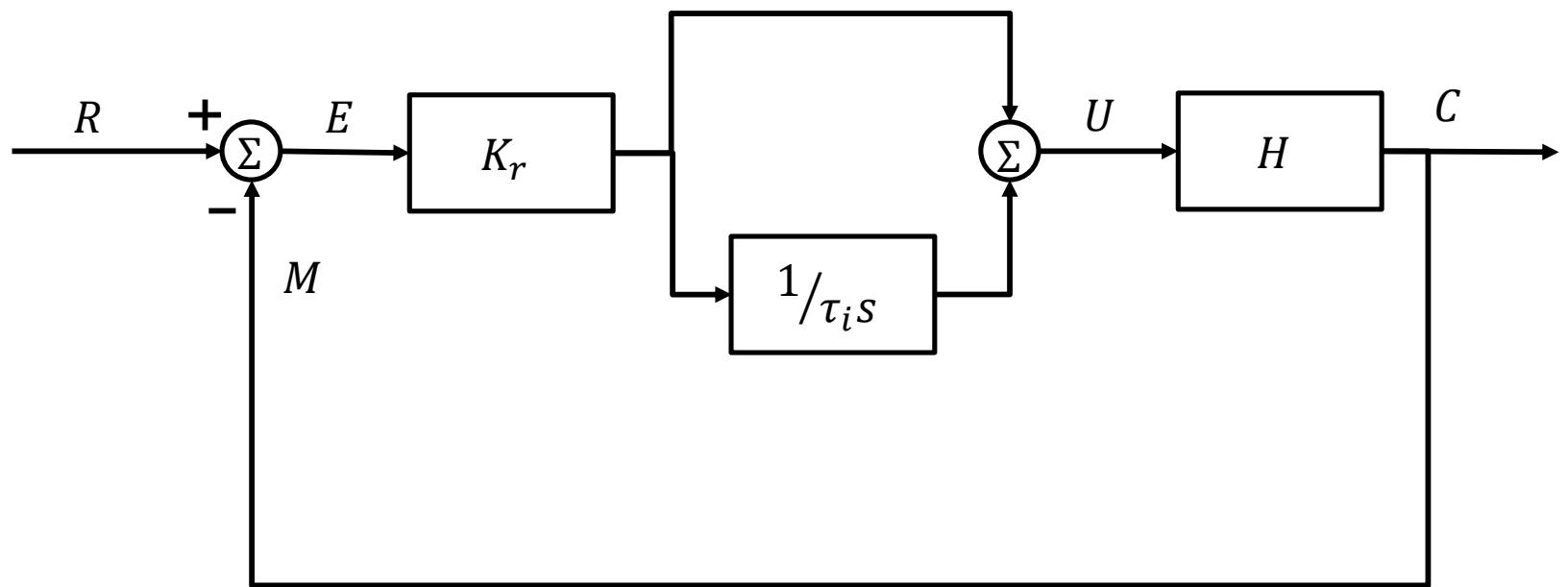
Eerst alleen P-regelaar; stapresponsie closed loop,  $K = 1$



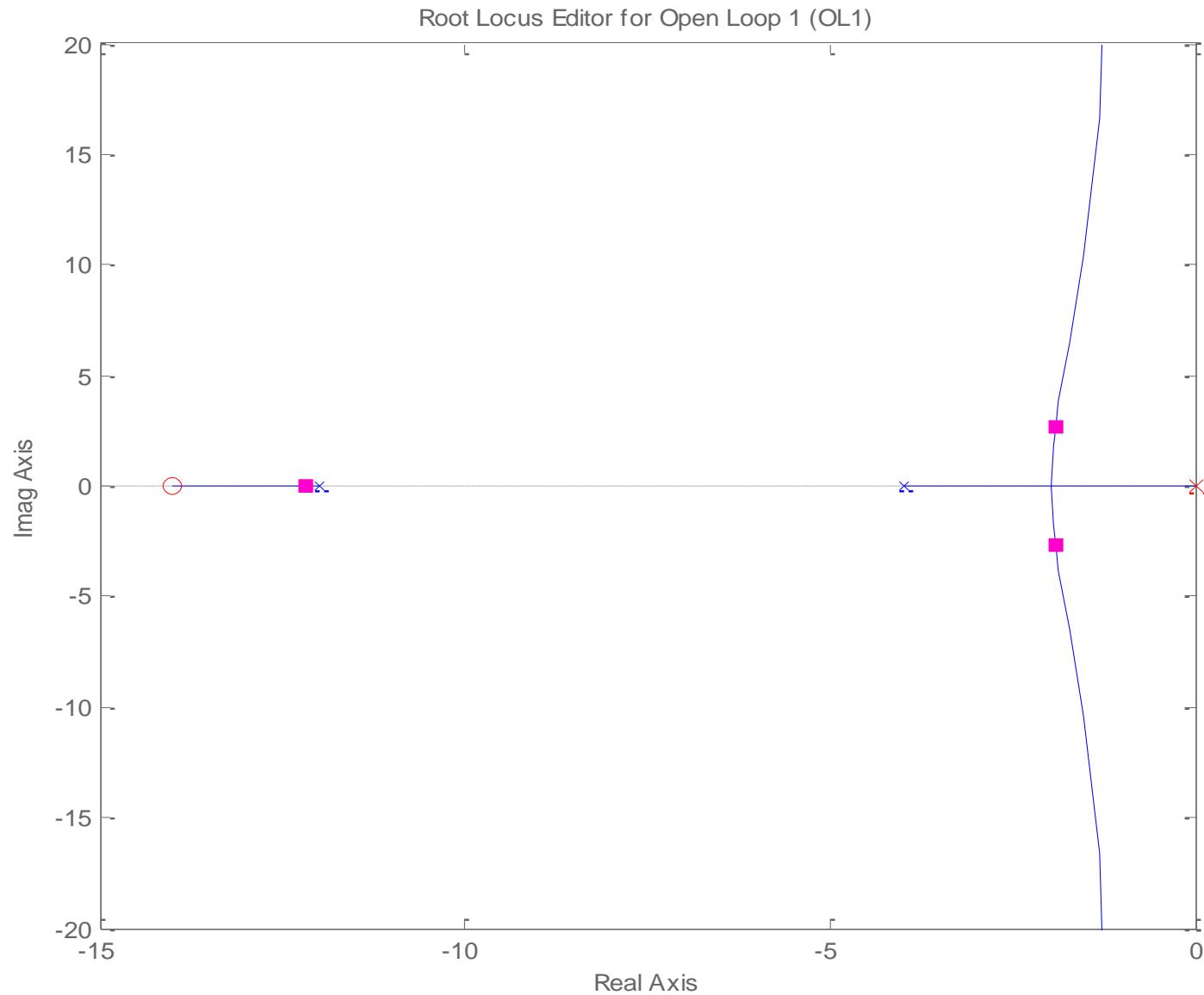
# PI-regelaar

$$H_r = K_r \left( 1 + \frac{1}{\tau_i s} \right) \rightarrow Kr + \frac{Kr}{\tau_i s}$$

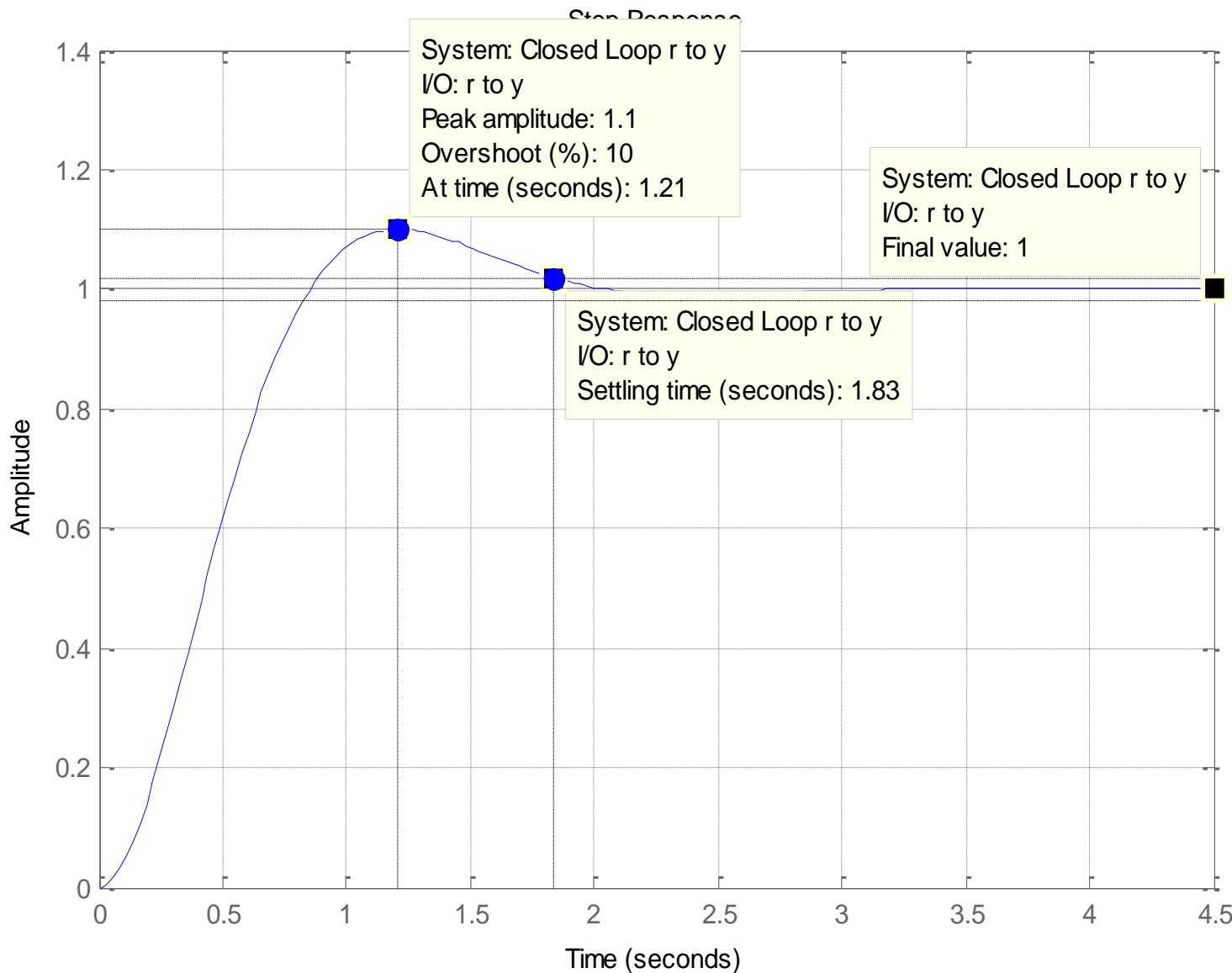
$$\rightarrow \frac{Kr \tau_i s + Kr}{\tau_i s} \rightarrow Kr \left( 1 + \frac{1}{\tau_i s} \right)$$



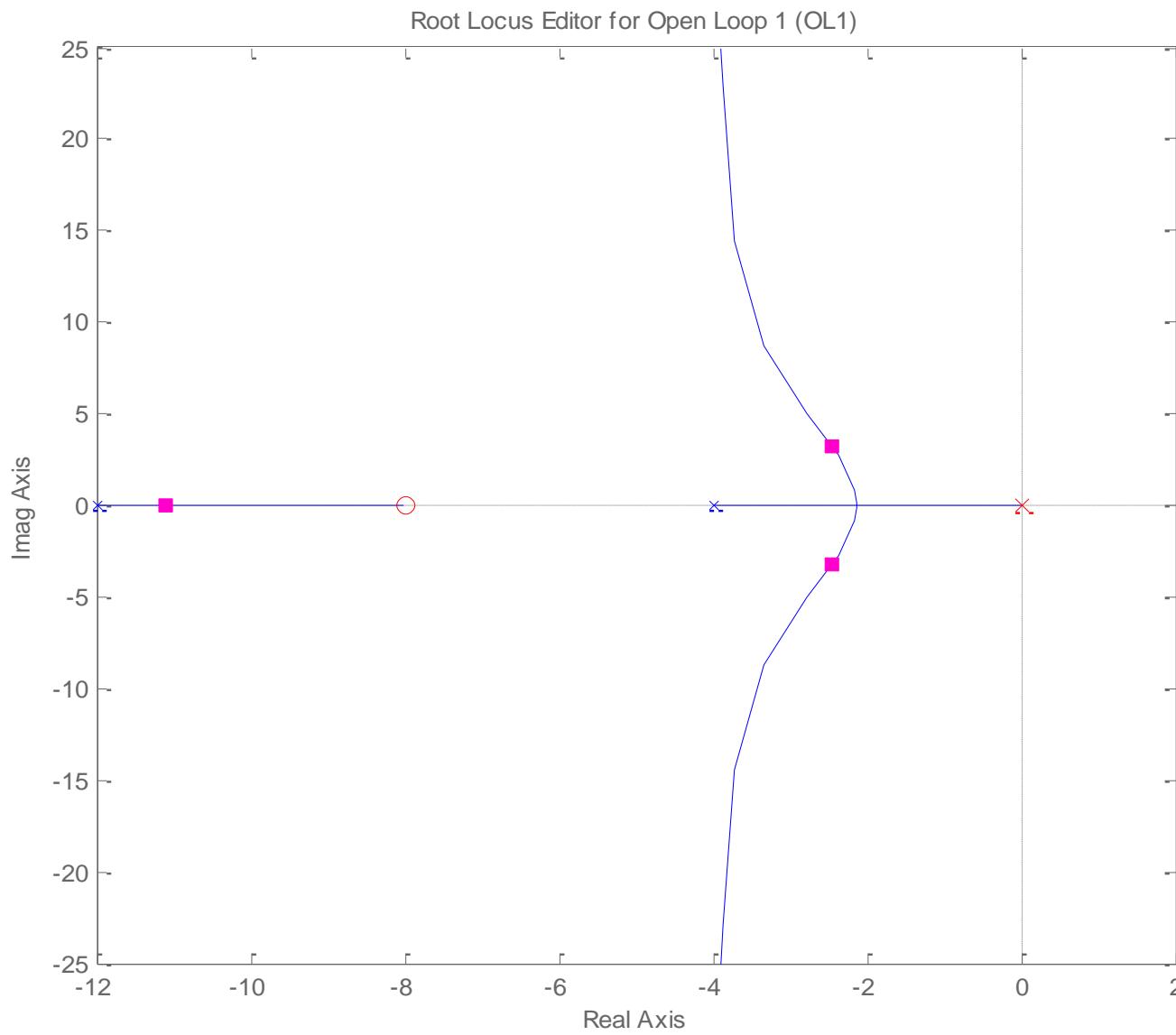
# Ideale PI-regelaar: Pool in 0, nulpunt in -14, K = 9,2



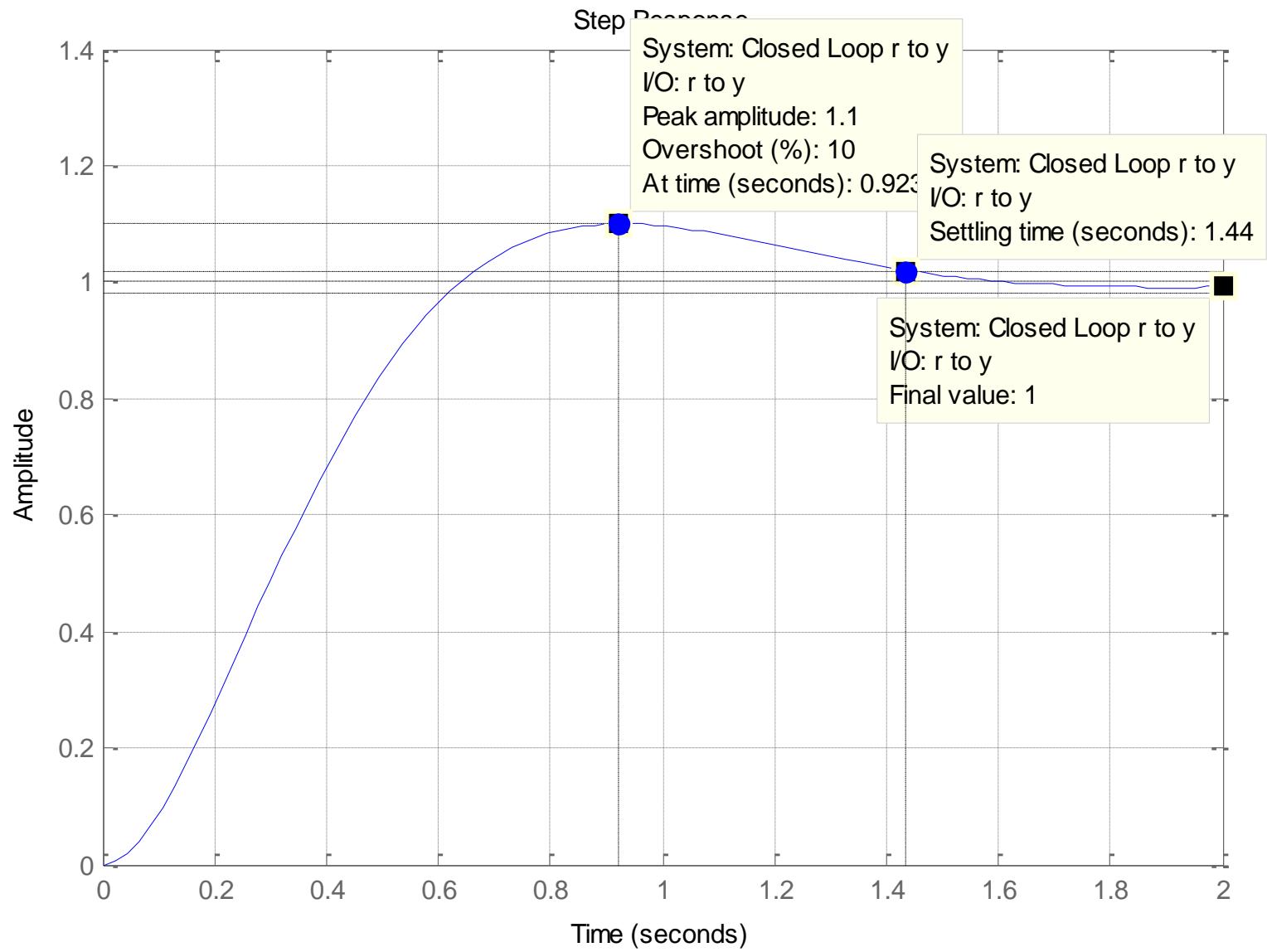
# Ideale PI-regelaar: Pool in 0, nulpunt in -14, K = 9,2



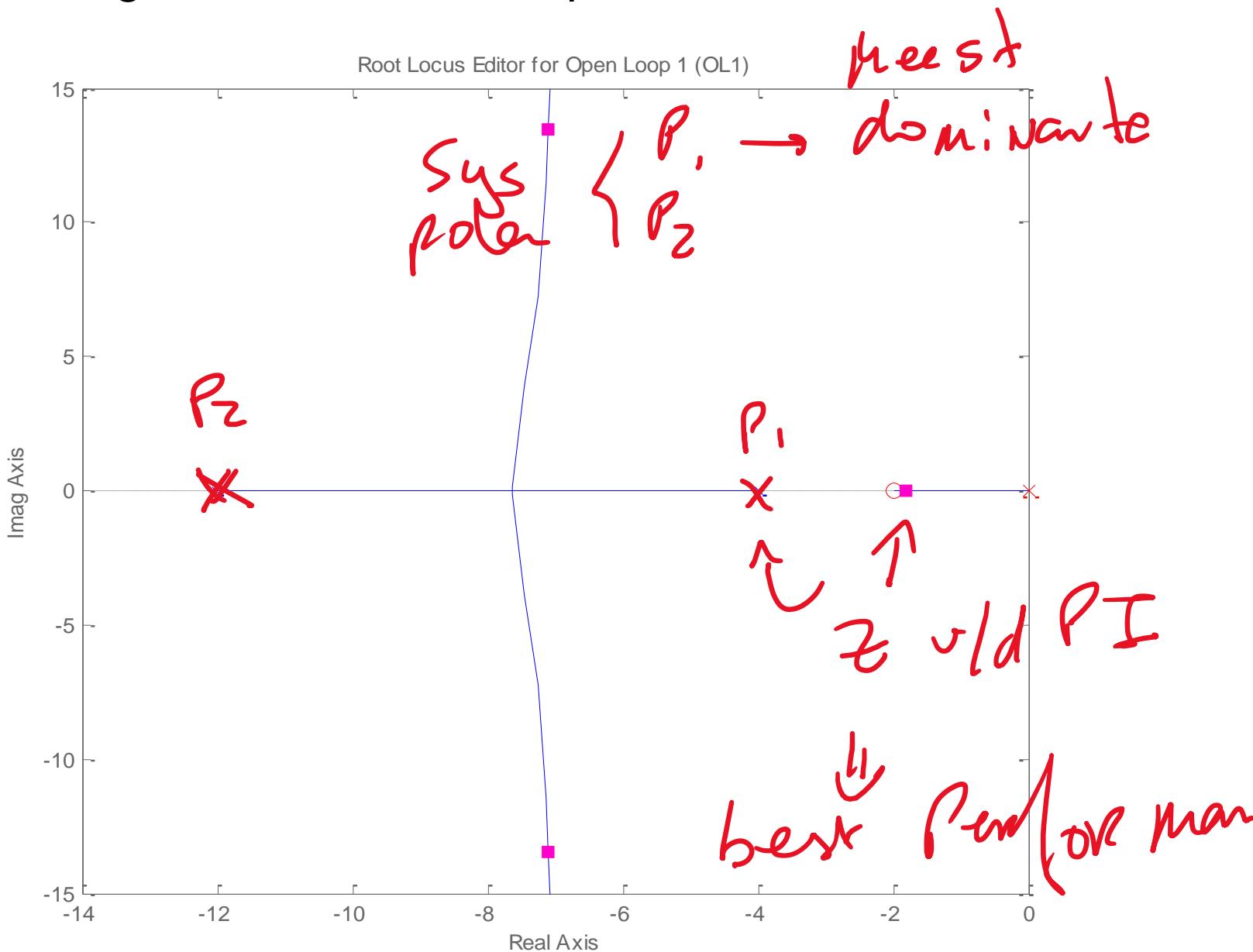
# Ideale PI-regelaar: Pool in 0, nulpunt in -8, K = 22,6



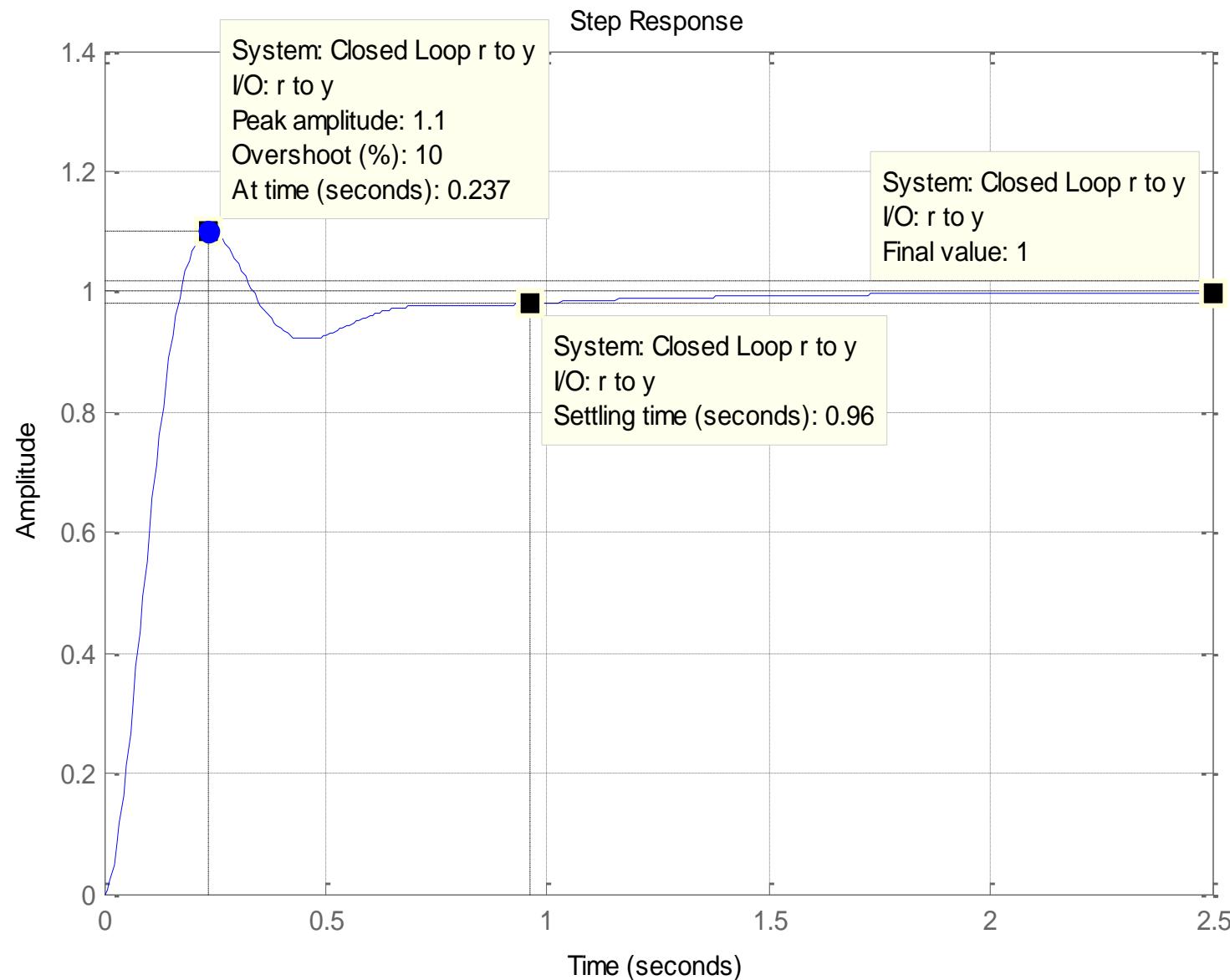
# Ideale PI-regelaar: Pool in 0, nulpunt in -8, K = 22,6



# Ideale PI-regelaar: Pool in 0, nulpunt in -2, K = 209



# Ideale PI-regelaar: Pool in 0, nulpunt in -2, K = 209



Een goede keuze voor de waarde van  $\tau_i$  in een PI-regelaar is dus een waarde die gelijk is aan of iets groter is dan de grootste tijdconstante van het systeem. Het nulpunt van deze PI-actie ligt dan iets rechts van de dominante systeempool

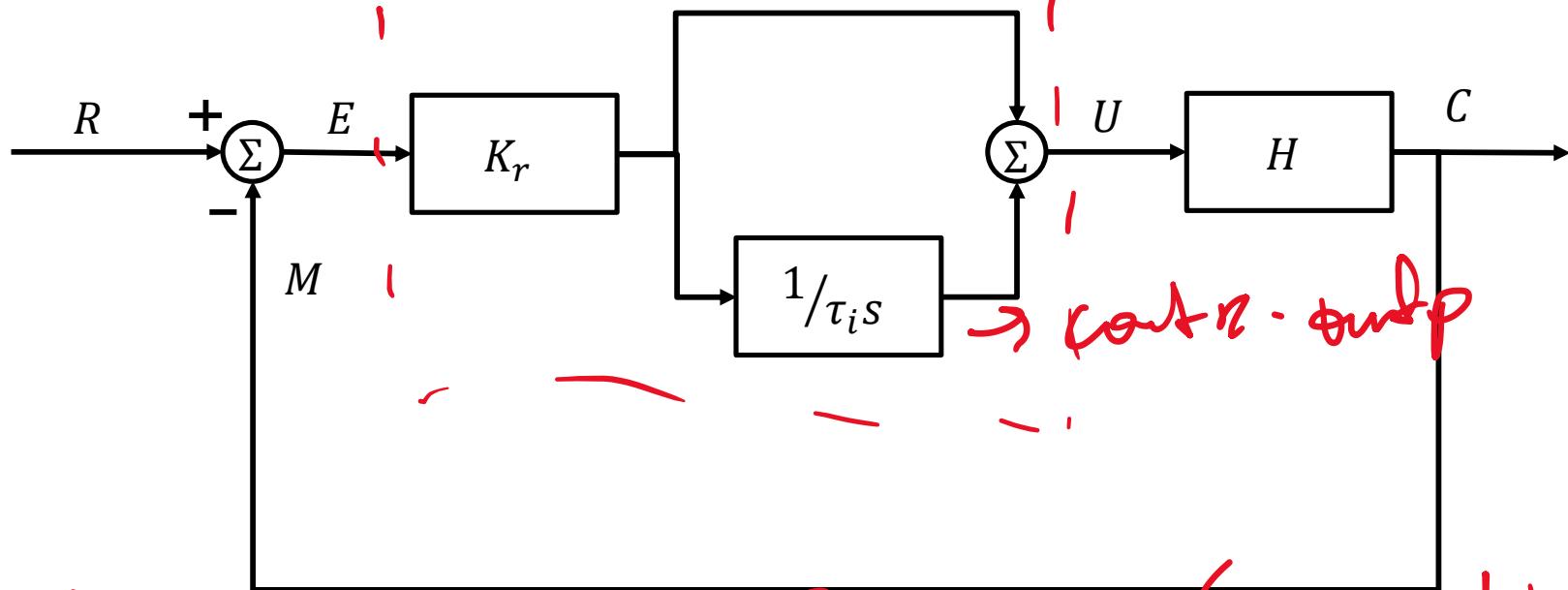
$$\tau_i$$

# PI-regelaar

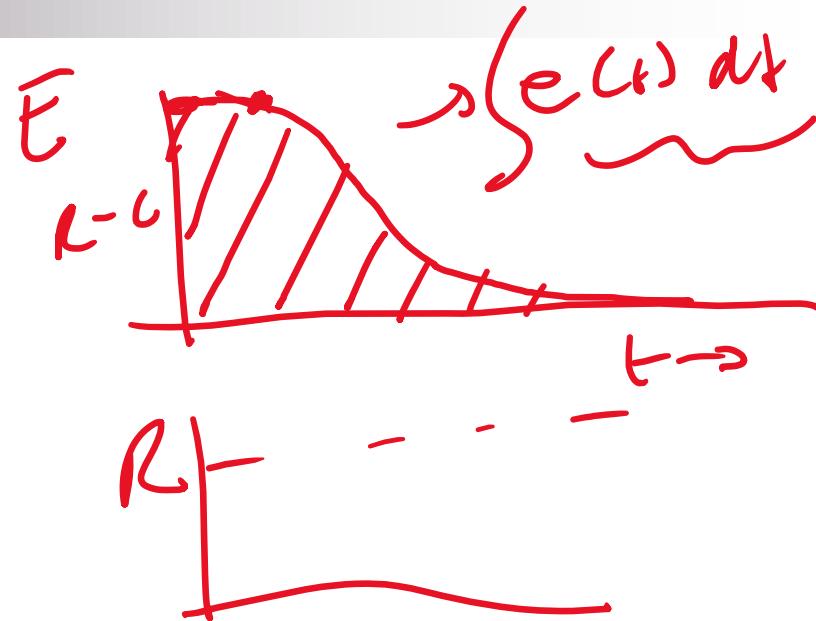
$$E_{stat} = \frac{100\%}{1 + K_L} \rightarrow \text{dus } E_{stat} = 0$$

$$K_L = K \frac{\prod |z_i|}{\prod |p_i|}$$

$p_i = 0$  voor  $i = 0 \dots N$



$$e(t) \cdot k \rightarrow P$$

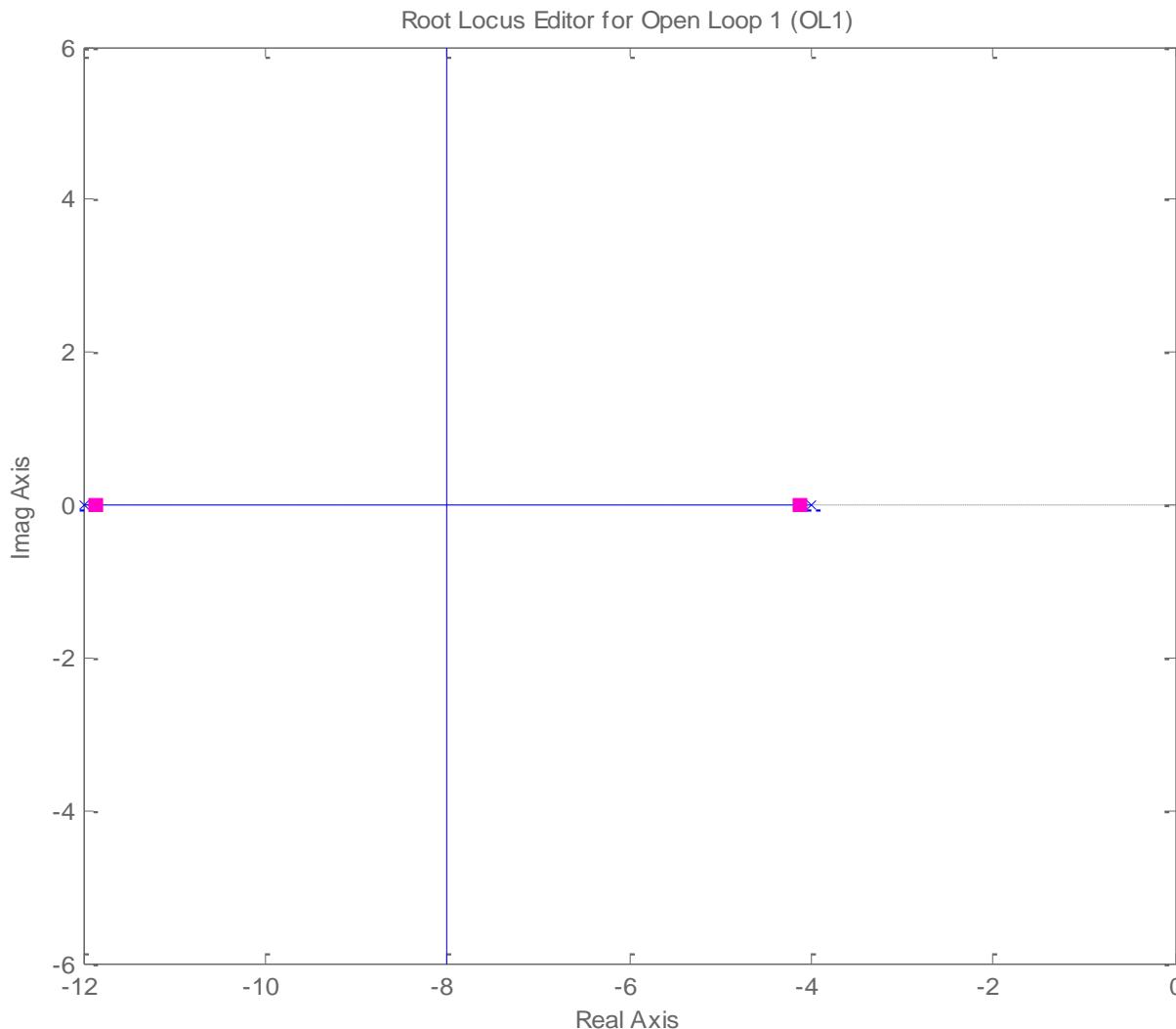


$$PI : K_i \int e(t) dt$$



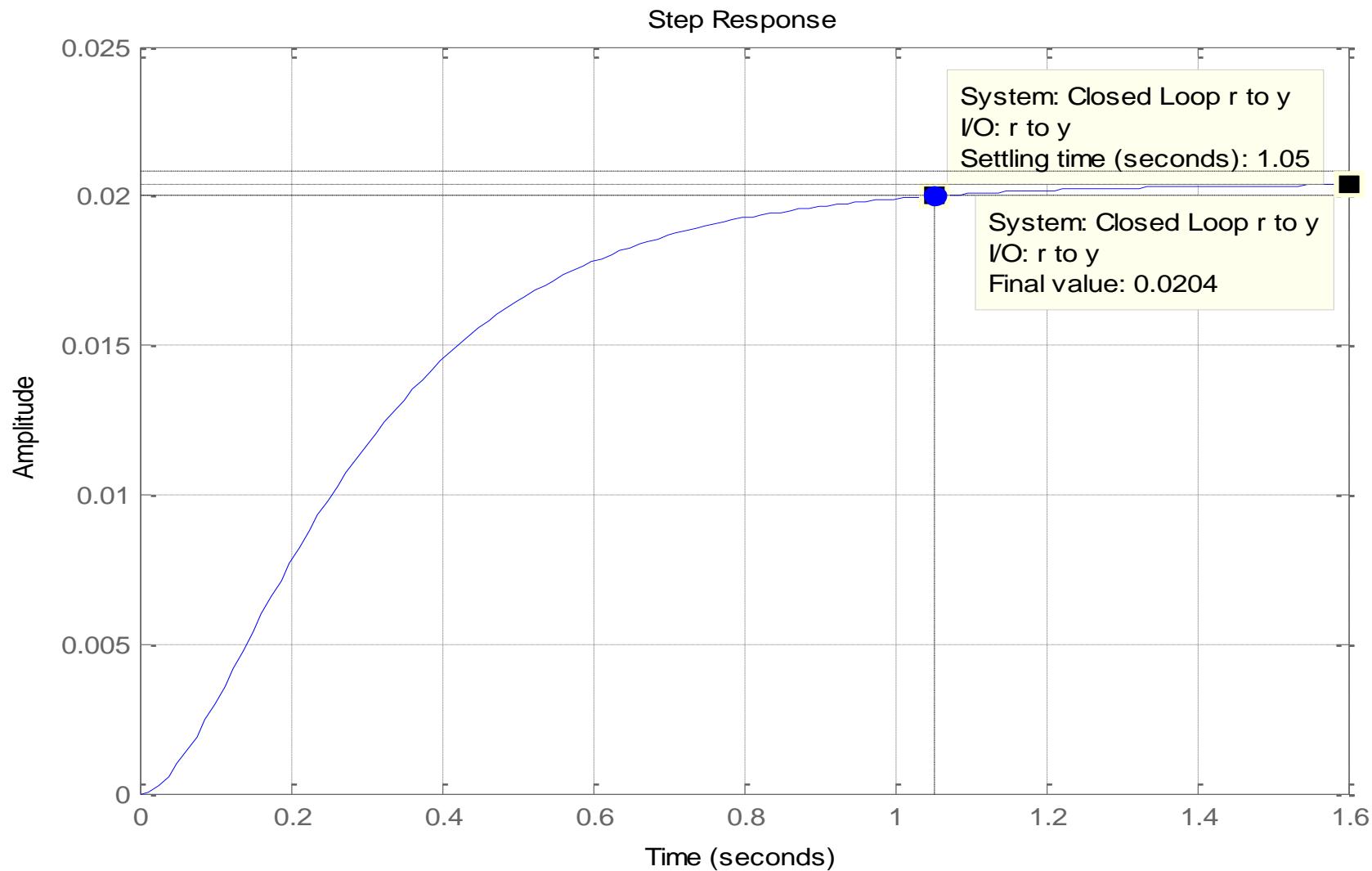
## Toevoegen D-actie (ideale PD-regelaar)

$H(s) = 1/(s^2 + 16s + 48)$ . Doel:  $E_{\text{stat}} = 0$ ,  $t_s = \text{minimaal}$ ,  $D \leq 10\%$   
Eerst alleen P-regelaar; poolbaan met  $K = 1$ :



# Toevoegen D-actie

Eerst alleen P-regelaar; stapresponsie closed loop,  $K = 1$



# Zuivere vs getemde PD-regelaar

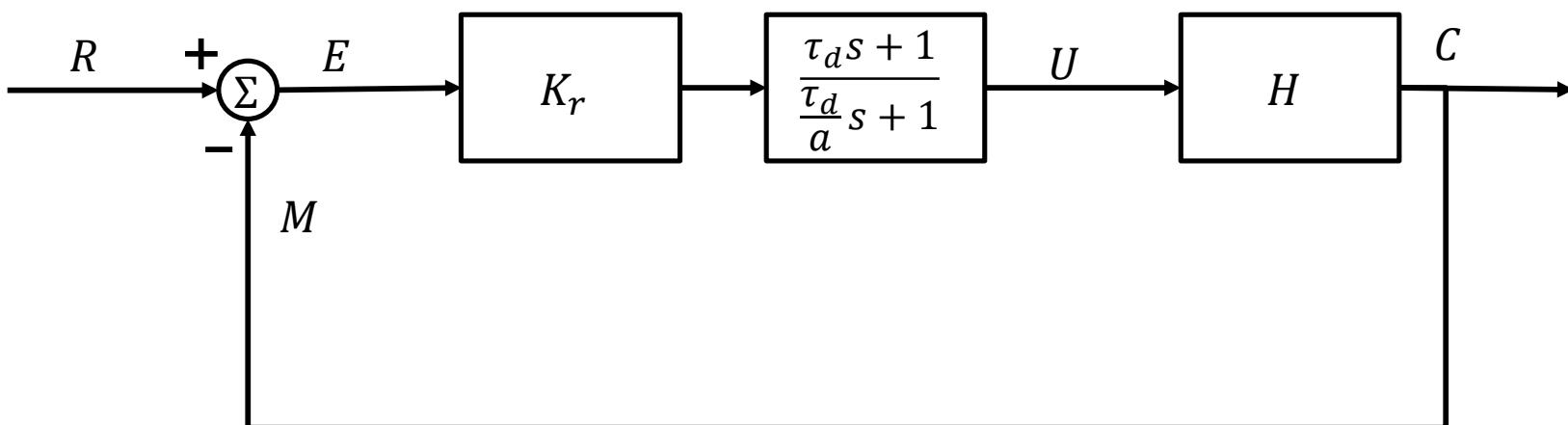
*ideal*

- Zuivere PD-regelaar:  $H_r = K_r(1 + \tau_d s)$  ↪

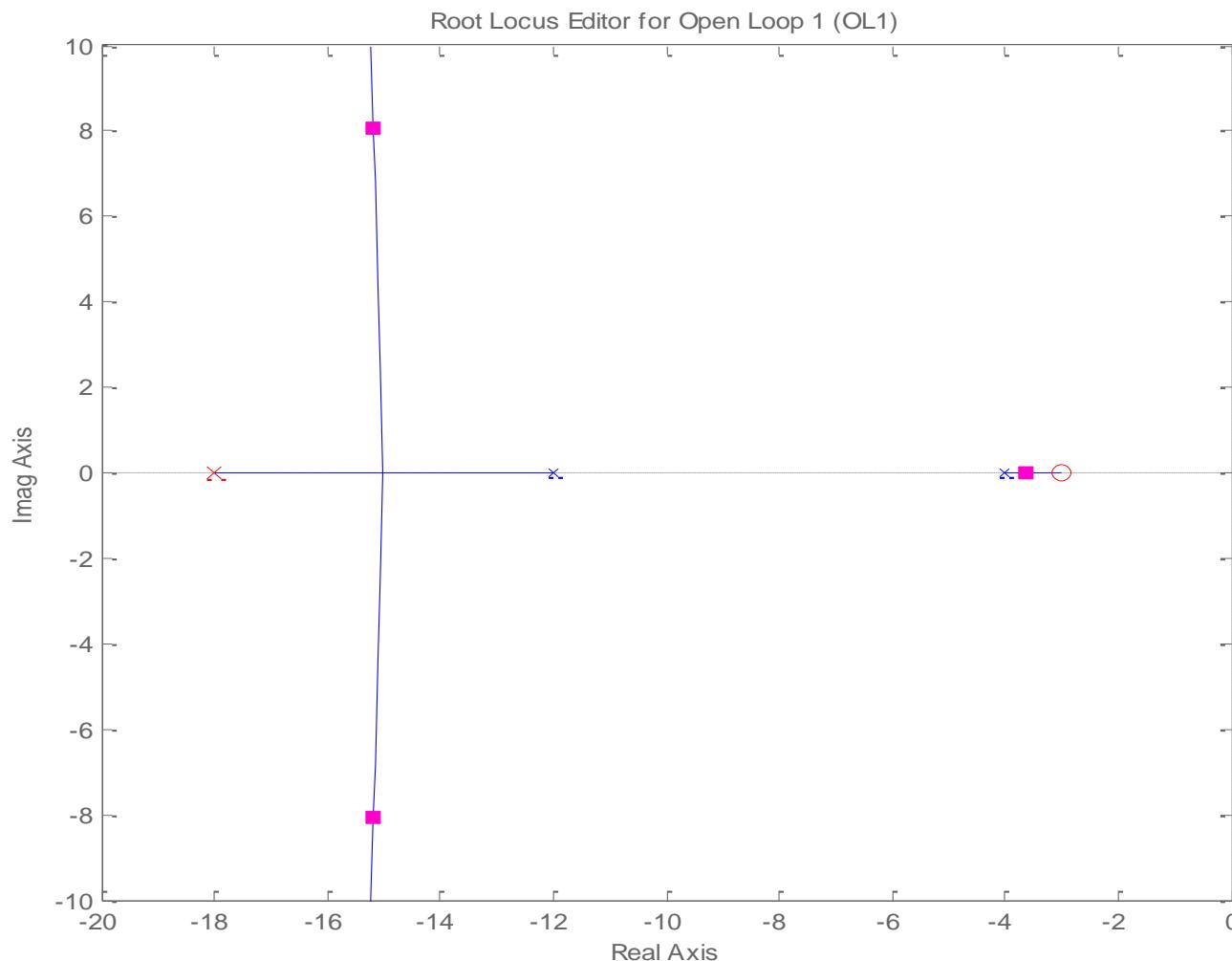
*non ideal*

- Getemde PD-regelaar:  $H_r = K_R \frac{\tau_d s + 1}{\frac{\tau_d}{a} s + 1}$  } ↪  $\tau \neq 0$   
 $a \neq 0 \rightarrow$

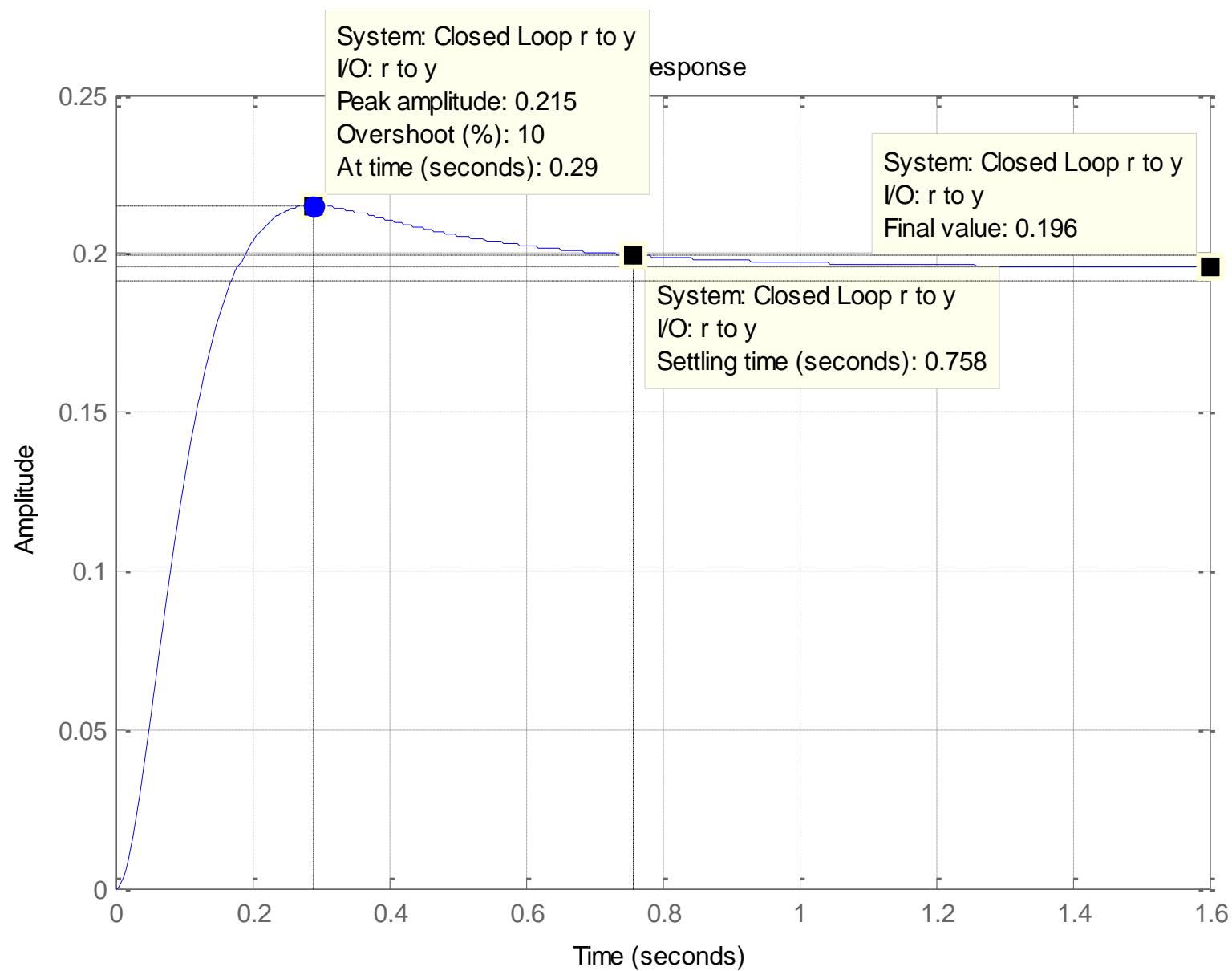
- $a$  is tamheidsfactor, vaak gekozen als 6, 10 of 20
- $a \rightarrow \infty$  ⇒ getemde wordt zuivere PD-regelaar



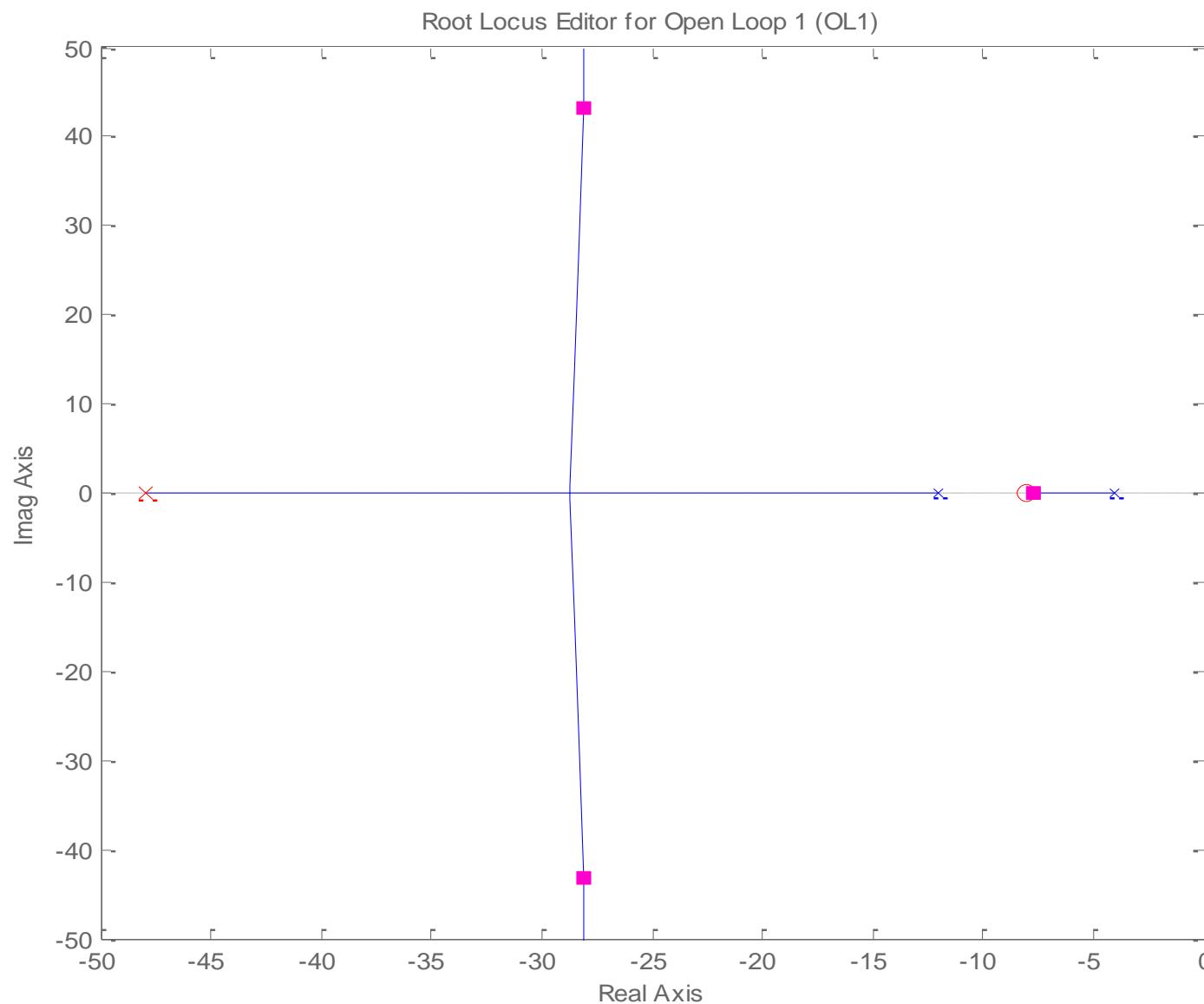
- Een D-actie wordt toegepast voor vergroting van de demping en/of de responsiesnelheid van een systeem.
- Niet-ideale PD-regelaar: Nulpunt in -3, pool in -18,  $K = 70$ :



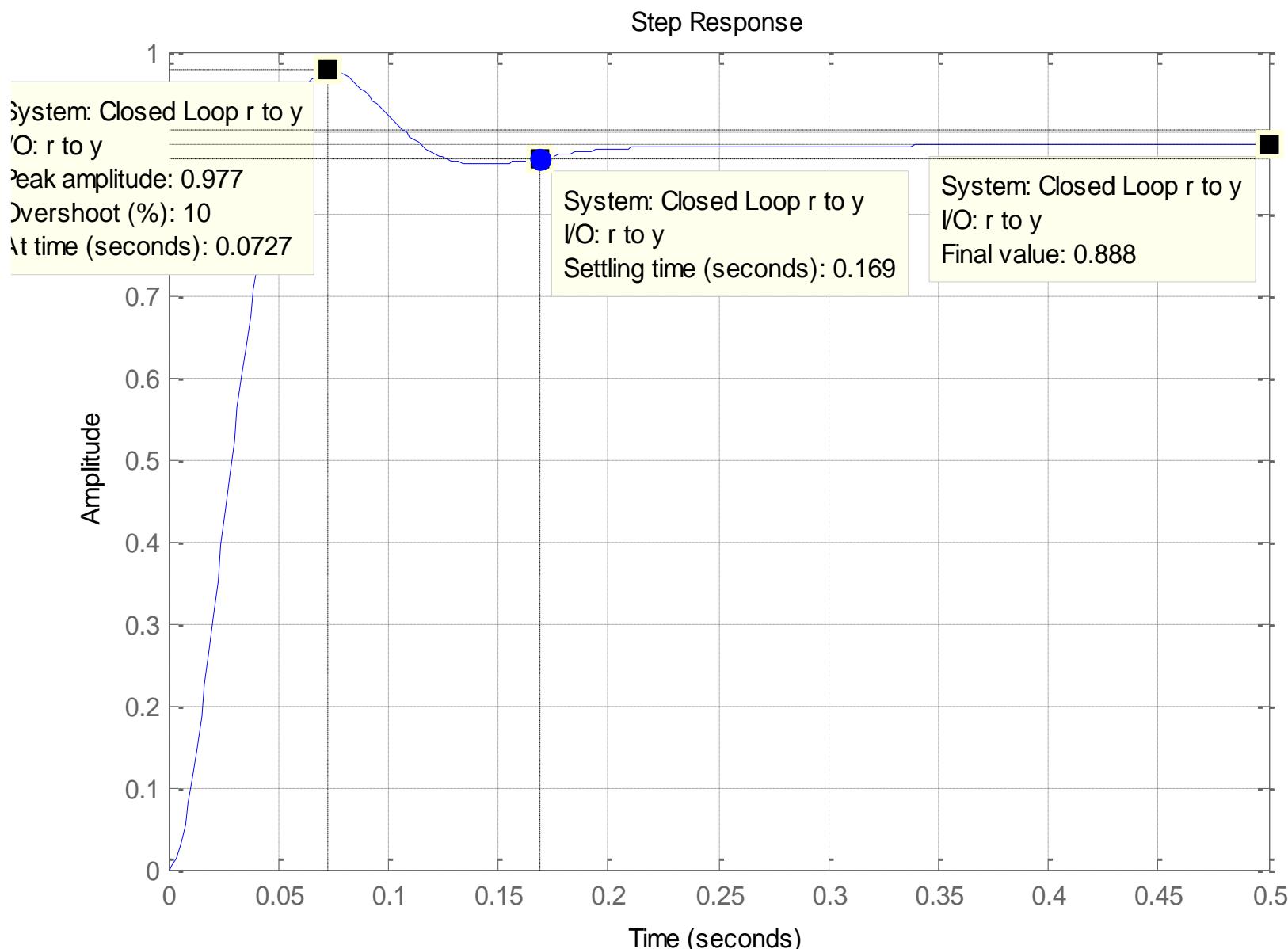
# Niet-ideale PD-regelaar: Nulpunt in -3, pool in -18, K = 70:



# Niet-ideale PD-regelaar: Nulpunt in -8, pool in -48, K = 2275:

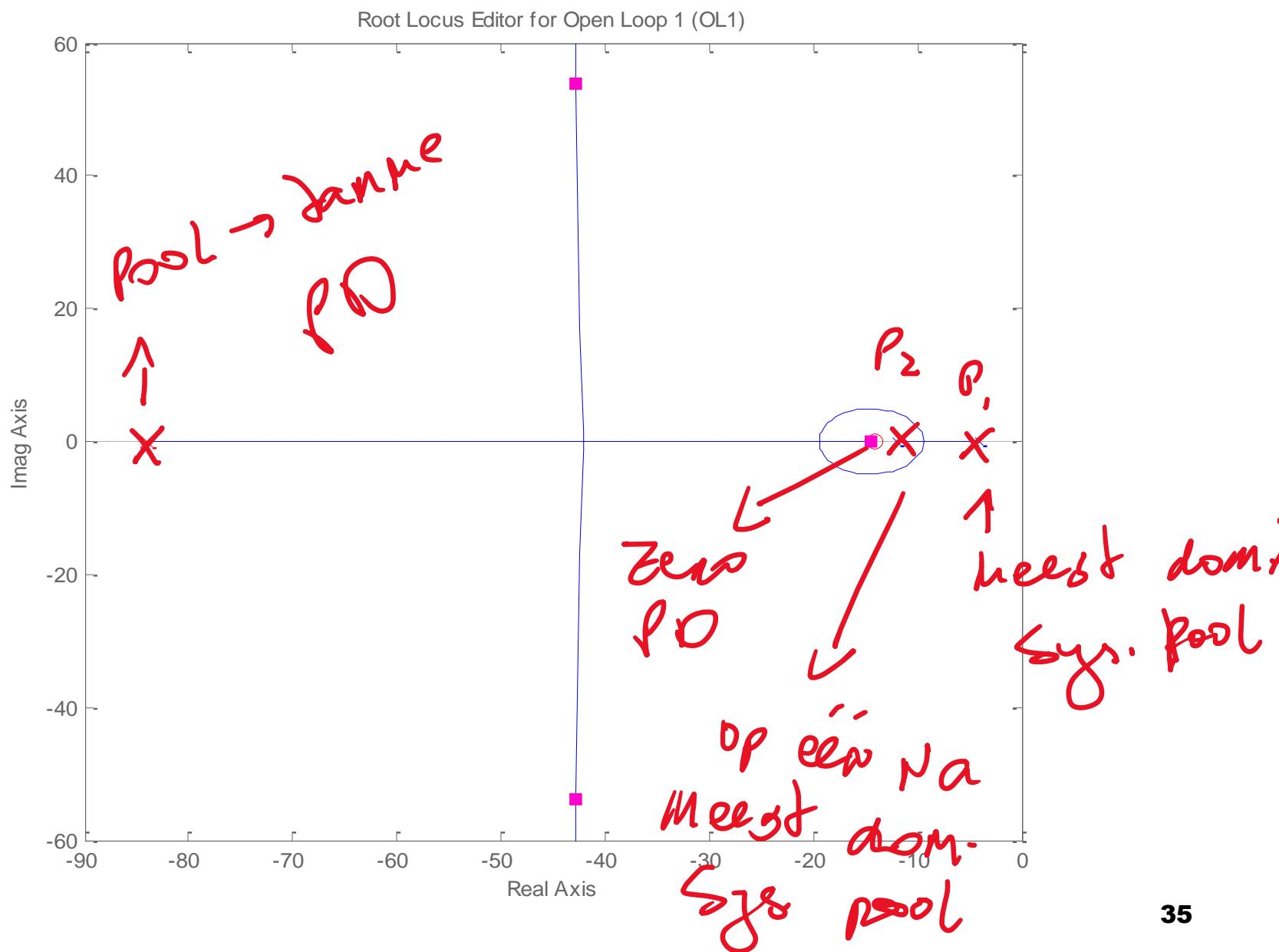


# Niet-ideale PD-regelaar: Nulpunt in -8, pool in -48, K = 2275:

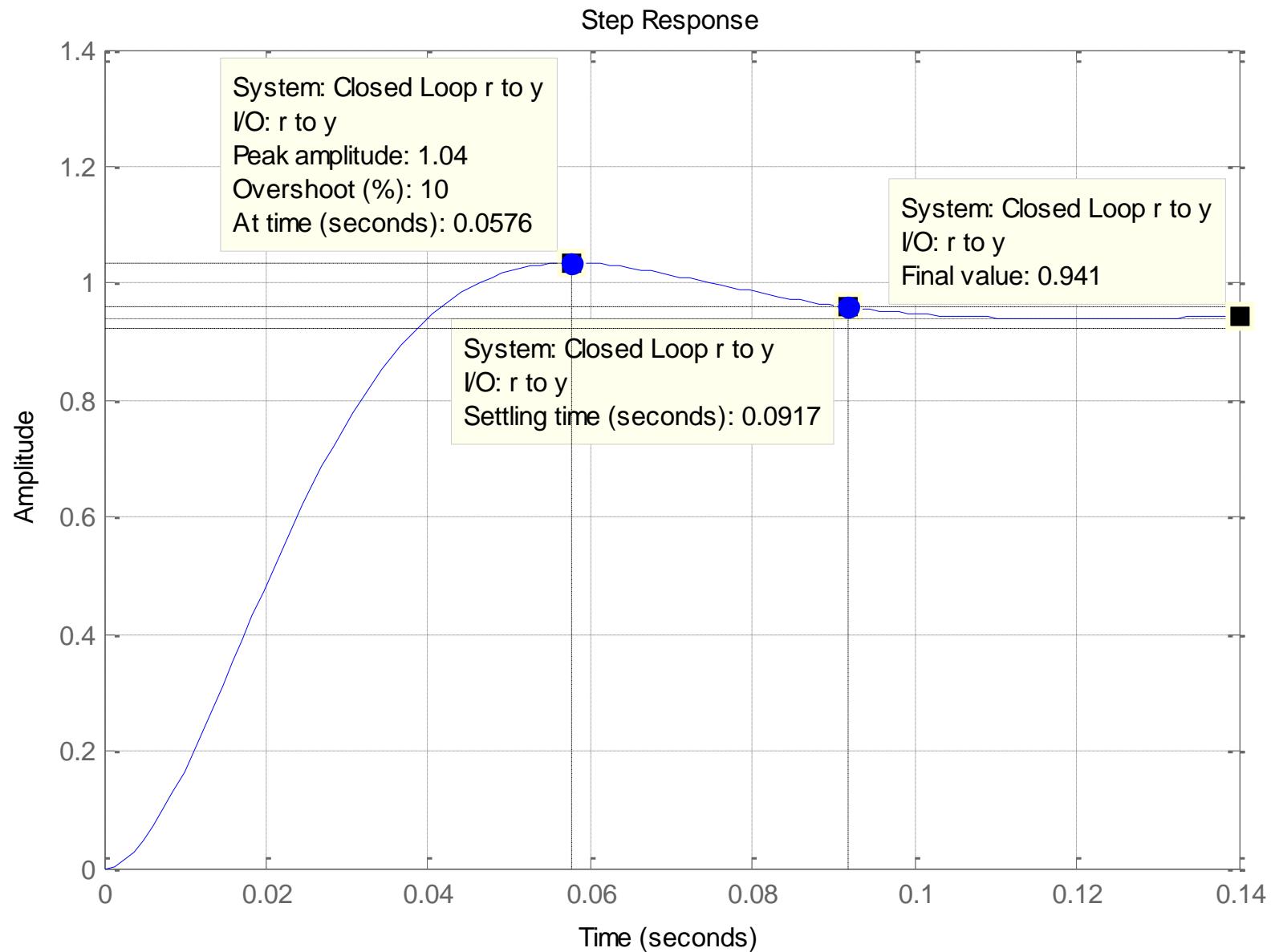




# Niet-ideale PD-regelaar: Nulpunt in -14, pool in -84, K = 4580:



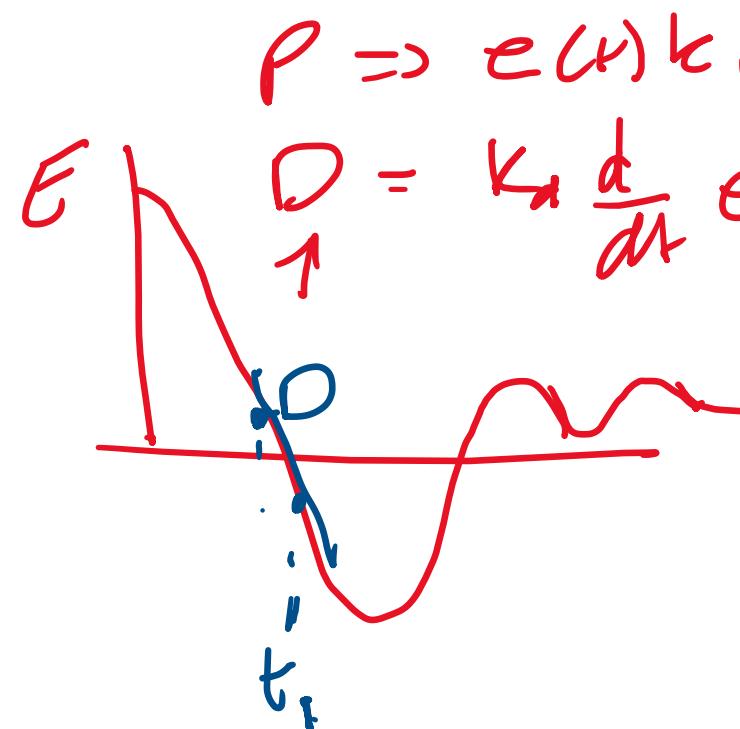
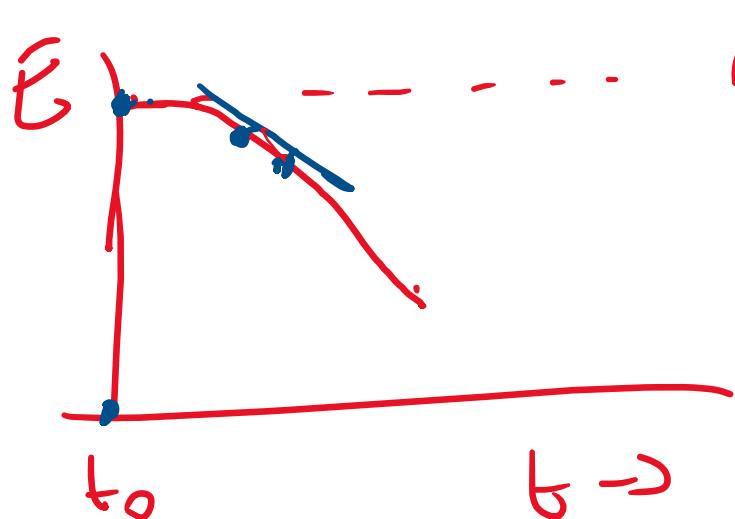
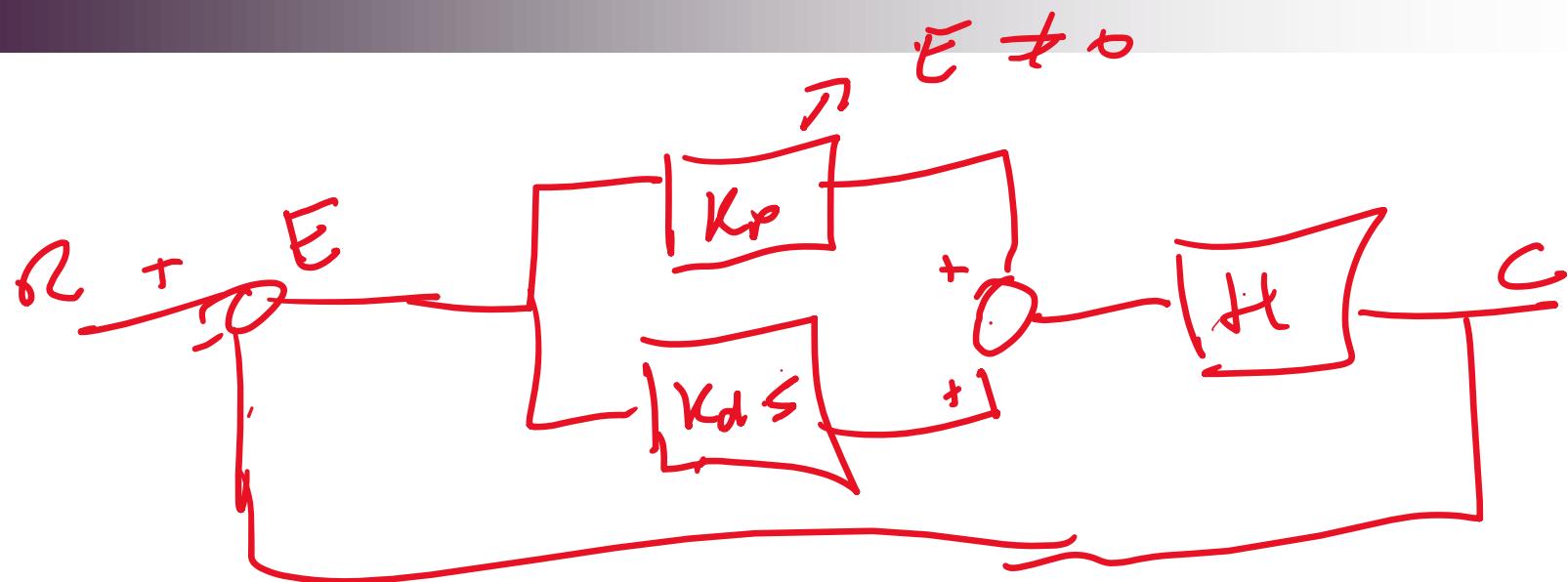
# Niet-ideale PD-regelaar: Nulpunt in -14, pool in -84, K = 4580:

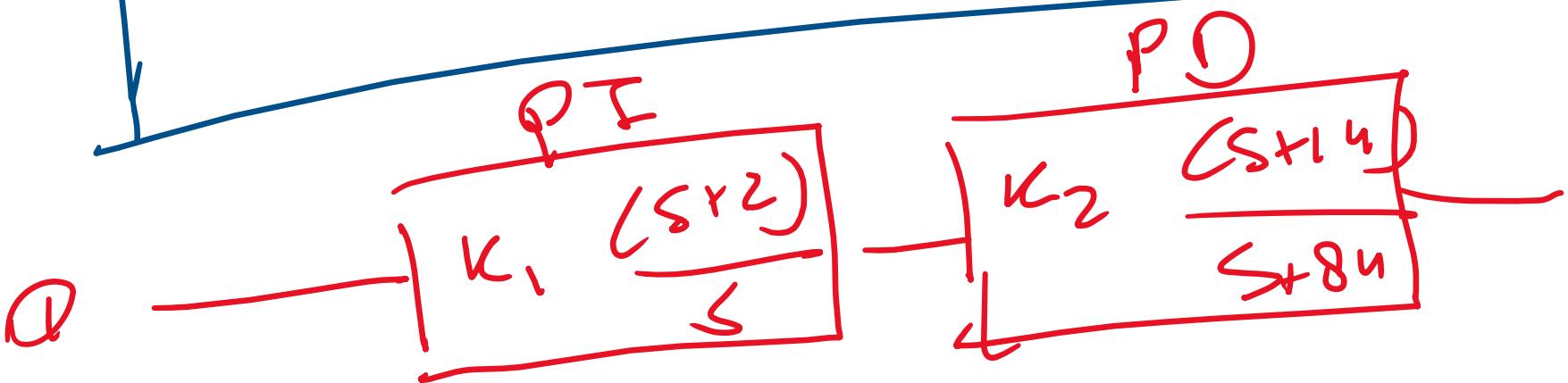
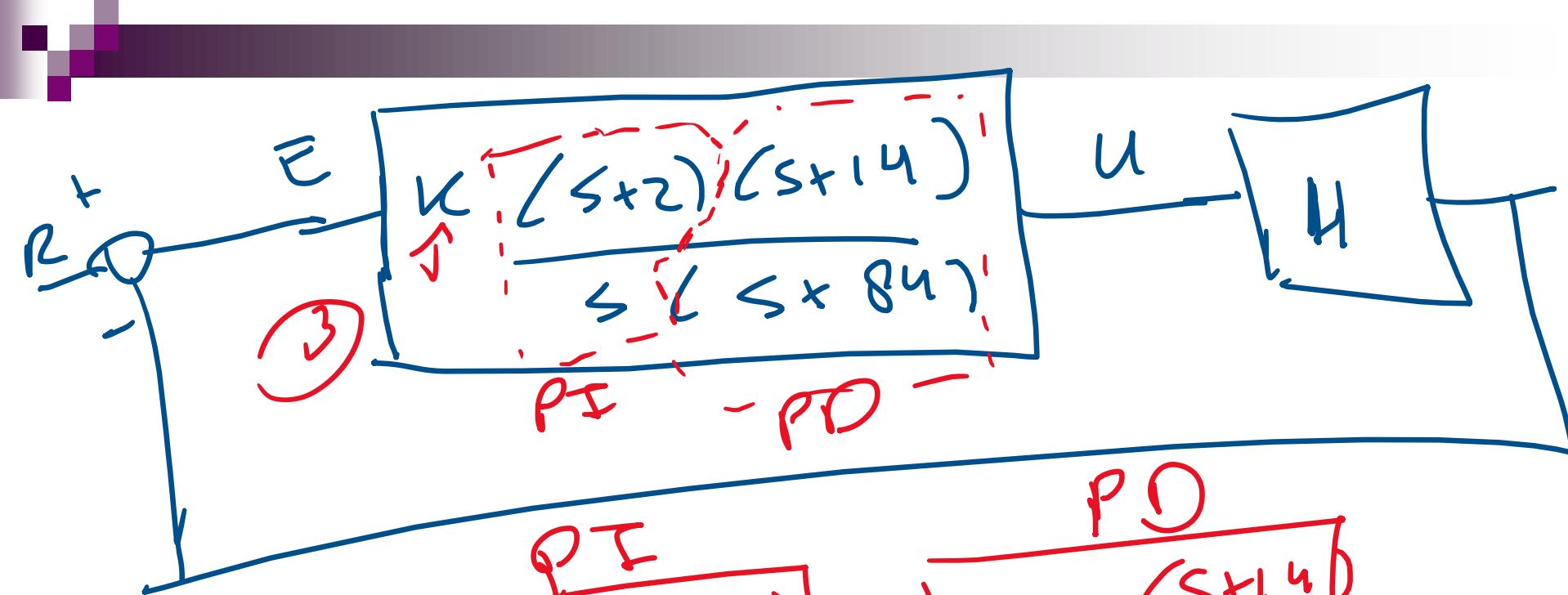


*loc van  $\tau$*

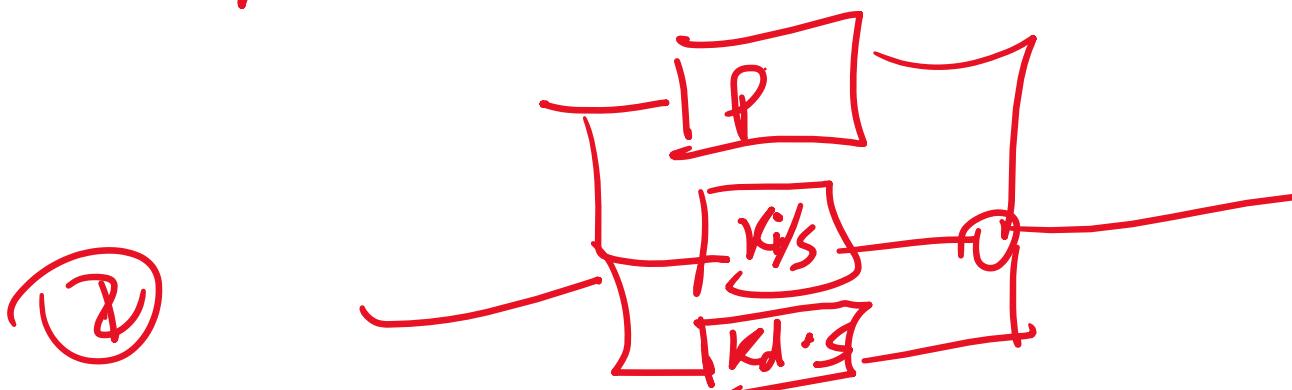
Voor de keuze van  $\tau_d$  kan dus de vuistregel worden gehanteerd dat bij systemen met twee of meer polen de differentiatietijd  $\tau_d$  iets kleiner wordt gekozen dan de op één na grootste tijdconstante van het systeem. Het nulpunt van deze D-actie ligt dan iets links van de één-na meest dominante systeempool.

P D





$$K_1 \cdot K_2 = K$$



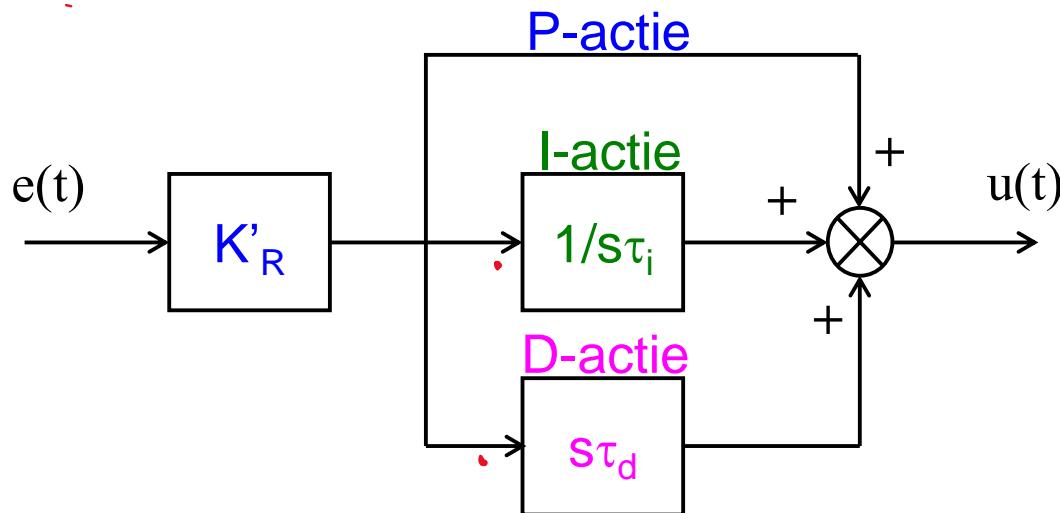
# DE PID-REGELAAR

De parallel PID-regelaar (toegepast in praktijk):

$$u(t) = K_R \cdot \left( e(t) + \frac{1}{\tau_i} \int_0^t e(t) \cdot dt + \tau_d \frac{de(t)}{dt} \right)$$

$K_p$  wordt soms  $K_r$  genoemd

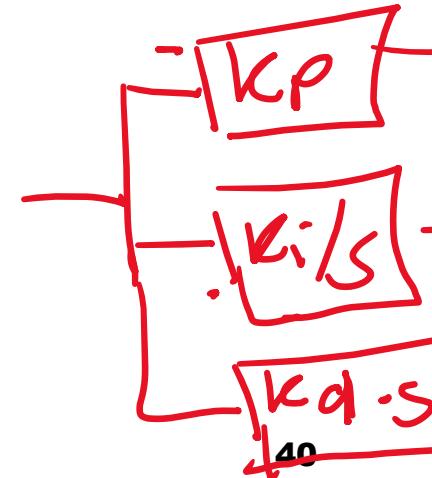
P = Proportioneel



I = Integrerend

D = Differentiërend

$$H_R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_R \cdot \left( 1 + \frac{1}{s\tau_i} + s\tau_d \right)$$



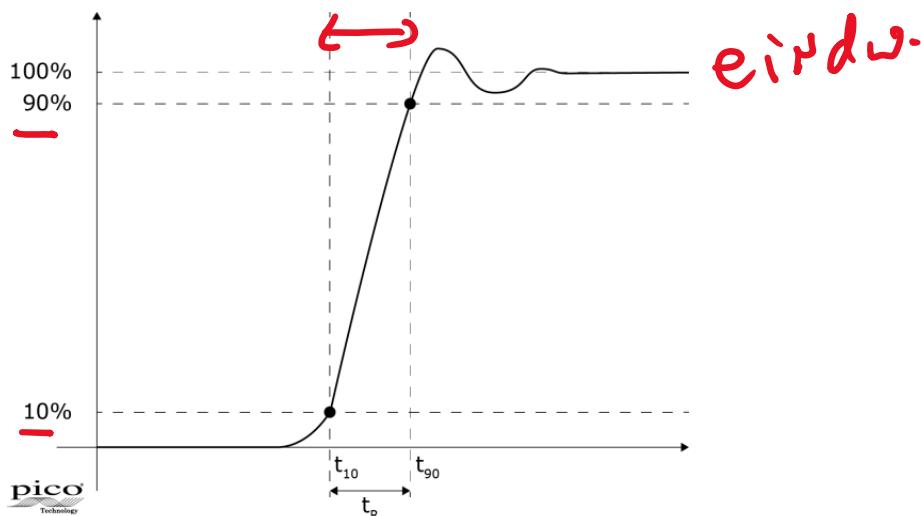
# PID-regelaars in het s-domein

*bepaden*

- P: ~~Instellen~~ van ontwerp criteria
  - $\dot{E}_{std}$   $\rightarrow \sigma$
- PI: Het nulpunt van deze I-actie ligt dan iets rechts van de dominante systeempool
- PD: Het nulpunt van deze D-actie ligt dan iets links van de één-na meest dominante systeempool.

# Controller design

Time domain	s-domain	Frequency domain
Overshoot (D%)		Gain Margin (GM)
Peak Time $t_p$	$\lambda$	Phase Margin (PM)
Settling Time $t_s$	$\omega$	Bandwidth ( $\omega_B$ )
Rise Time $t_r$	$\zeta = \omega \lambda$	



Rise Time  $t_r$  = tijd nodig om te gaan van 10-90% eindwaarde.  $t_r * \omega_B = \text{constant}$

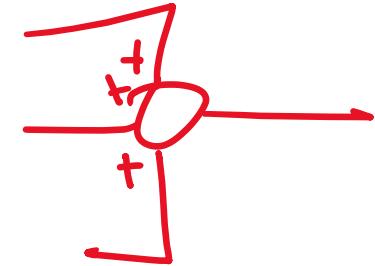
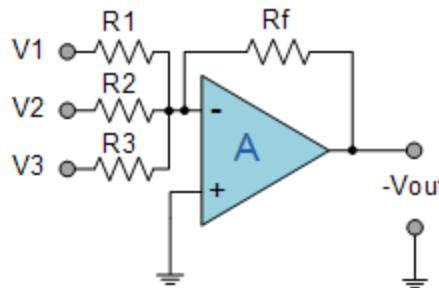
# Klassieke P/PI/PD/PID regelaars

*Freq*

Differential Op-amp

*Meas.* ↗ *Ref* ↘  
*P-regelaar* ↗ *V<sub>p</sub>* ↘ *Eraser*

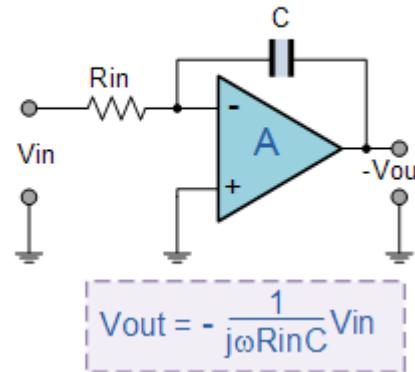
Summing Op-amp



Differentiator Op-amp

*D-actie* ↗  
 $\tau_d \cdot SV_{in}$

Integrator Op-amp



*I-actie* ↗  
 $\frac{1}{\tau_i} \cdot SV_{in}$

$\frac{1}{\tau_i} \cdot SV_{in}$

## Ontwerpen van regelacties in het $\omega$ -domein.

s vervangen door  $j\omega$ :

$$P \text{ regelaar: } H_r = K_r$$

$$\text{ideale PI regelaar: } H_r = K_r \left(1 + \frac{1}{\tau_i j\omega}\right)$$

$$\text{ideale PD regelaar: } H_r = K_r (1 + \tau_d j\omega)$$

$$\text{ideale PID regelaar: } H_r = K_r \left(1 + \frac{1}{\tau_i j\omega} + \tau_d j\omega\right)$$

Kan jij de bodediagrammen van al die vier  $H_r$ 's schetsen?

$\varphi M$

$G M$

Ontwerpcriteria: fase en versterkingsmarge;

Praktijkwaarden zijn respectievelijk 45° en factor 2 ofwel 6 dB.

Verder is de bandbreedte ook een belangrijk criterium.

$\omega_B$

Invloed van regelacties in het  $\omega$ -domein.

Voor het statische gedrag kijken we bij  $\omega = 0$  r/s.  $\rightarrow$  lage nu

Voor het dynamische gedrag kijken we naar de

- bandbreedte,
- fase- en
- versterkingsmarge

in het bode diagram en in het Nyquist diagram.

$$\varphi M \geq 45^\circ$$

$$G M \geq 6 \text{ dB}$$

# Ontwerpen in het $\omega$ -domein

Voorbeeld: De procesoverdracht is:

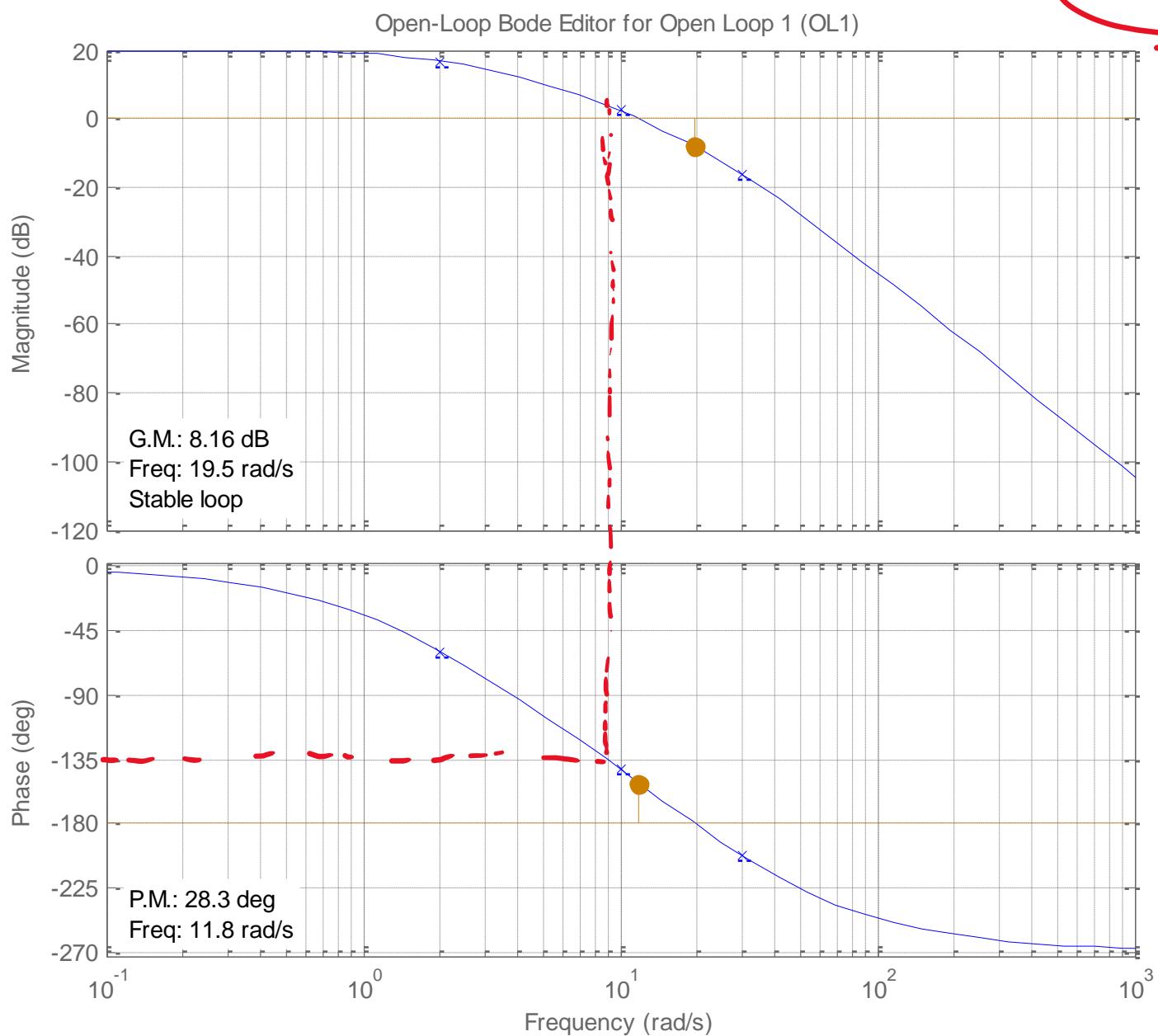
$$H_p(j\omega) = \frac{6000}{(j\omega+2)(j\omega+10)(j\omega+30)}$$

$\rho :$  

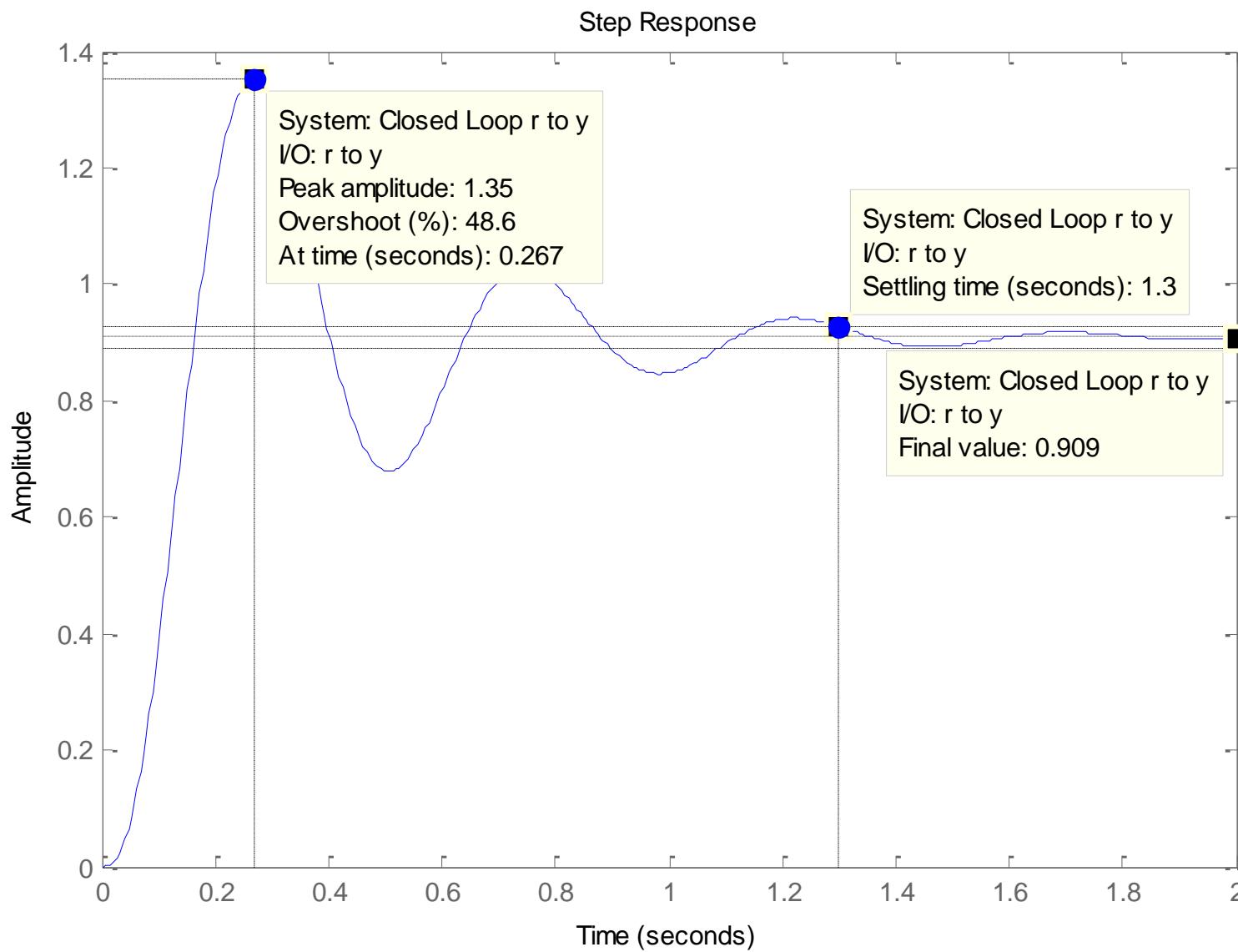
Vraag: Hoe kiezen we een goede K uit?

- 1) Poolbanen
- 2) Bode diagram -> Doen we nu

# Bode diagram met $K_r = 1$ (P-regelaar)



$\text{PM} \geq 45^\circ$   
 $\text{GM} \geq 6 \text{ dB}$   
 $|H| \varphi$



$$4 \text{ dB} \rightarrow 0 \text{ dB}$$

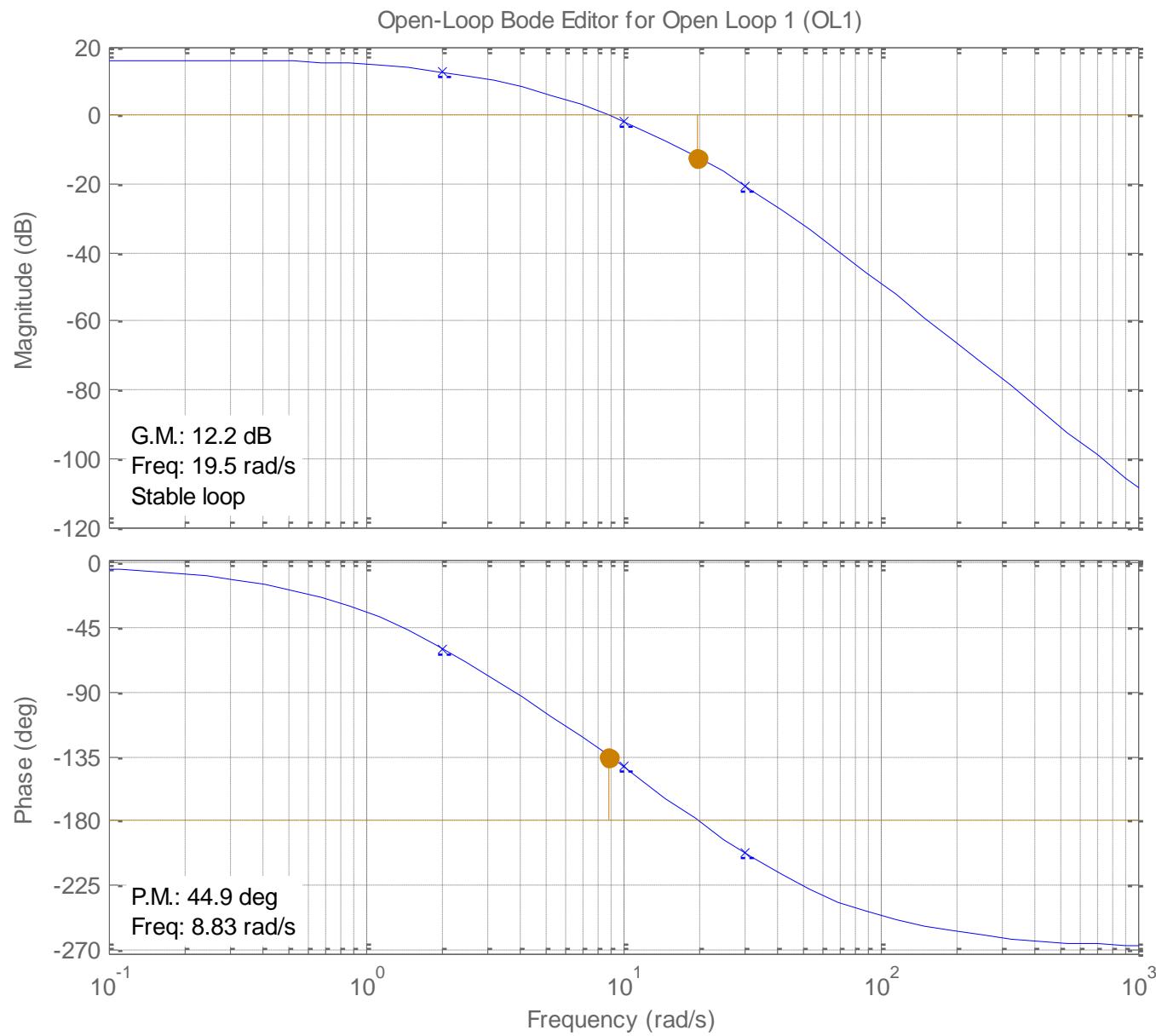
Voor  $PM = 45^\circ$  moet gelden:  $|H|_{\varphi(H)=-135^\circ} = 0 \text{ dB}$

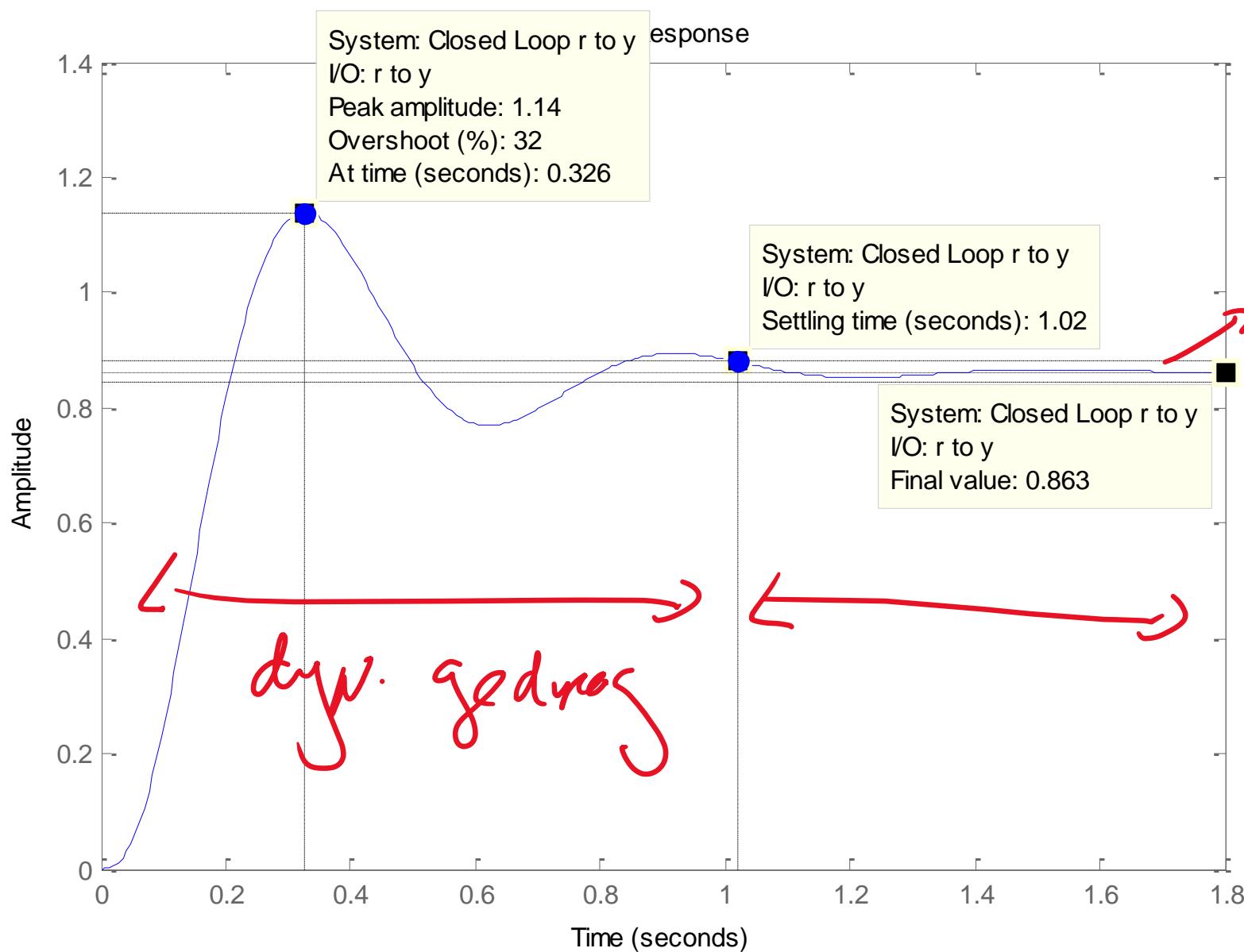
Voor  $K_r = 1$  geldt:  $|H|_{\varphi(H)=-135^\circ} \approx 4 \text{ dB} \approx \underline{1.6}$

Voor  $|H|_{\varphi(H)=-135^\circ} = 0 \text{ dB} = 1 \Rightarrow K_r = 1/1.6 \approx 0.63$

$$\frac{K_r \cdot 4 \text{ dB}}{\underline{0.63 \cdot 1.6}} = 0 \text{ dB}$$

# Bode diagram met $K_r = 0,63$ (P-regelaar) voor PM = 45°





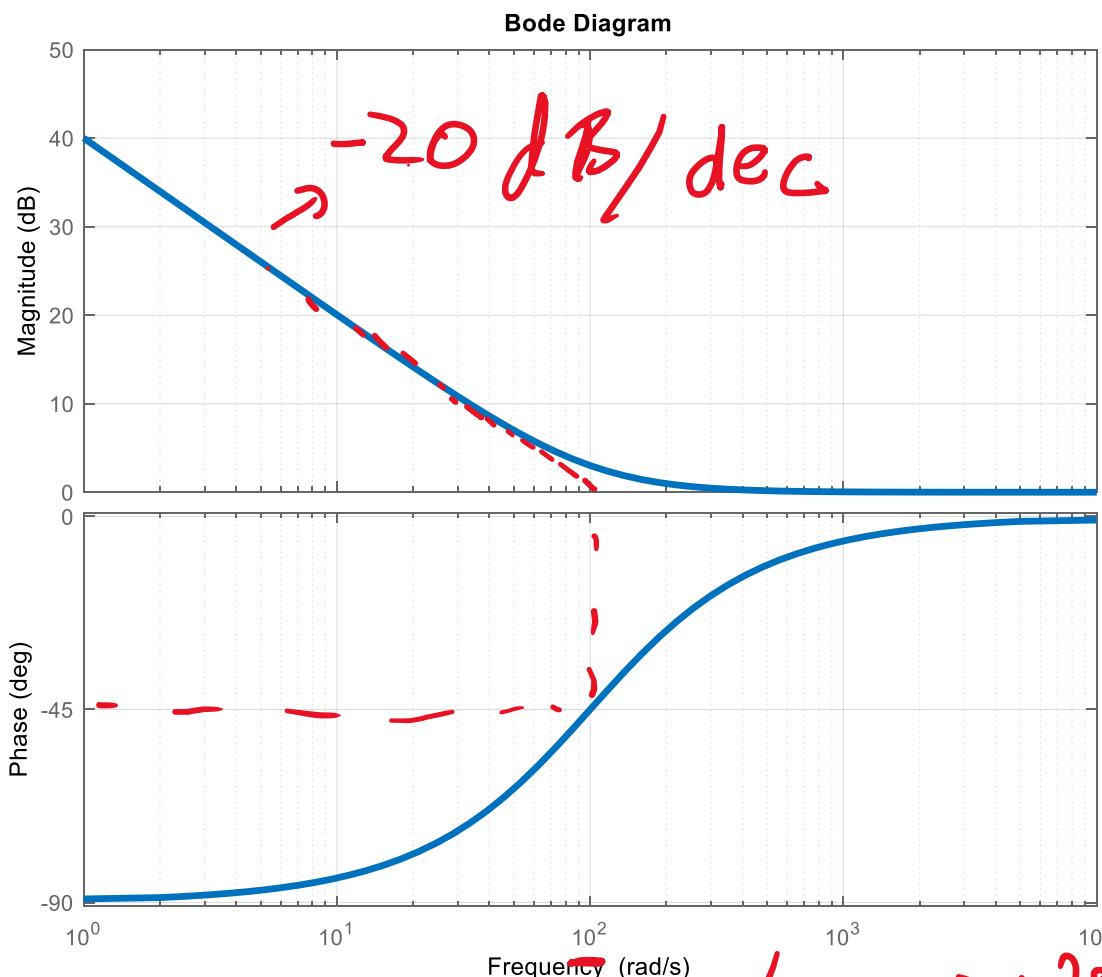
# PI-regelaar

$$\omega_i \leq 10\omega_{PM}$$

$$H_{PI} = K_r * \left(1 + \frac{1}{\tau_i * j\omega}\right) = K_r * \frac{j\omega + \frac{1}{\tau_i}}{j\omega}$$

$$\text{Vb: } K_r = 1; \underline{\tau_i = 0.01} \Rightarrow \underline{\omega_i = 100 \text{ rad/sec}}$$

$$\frac{1}{\tau_i}$$



$$j\omega + \frac{1}{\tau_i}$$

$$\omega_i = 1$$

$$\tau_i = 1$$

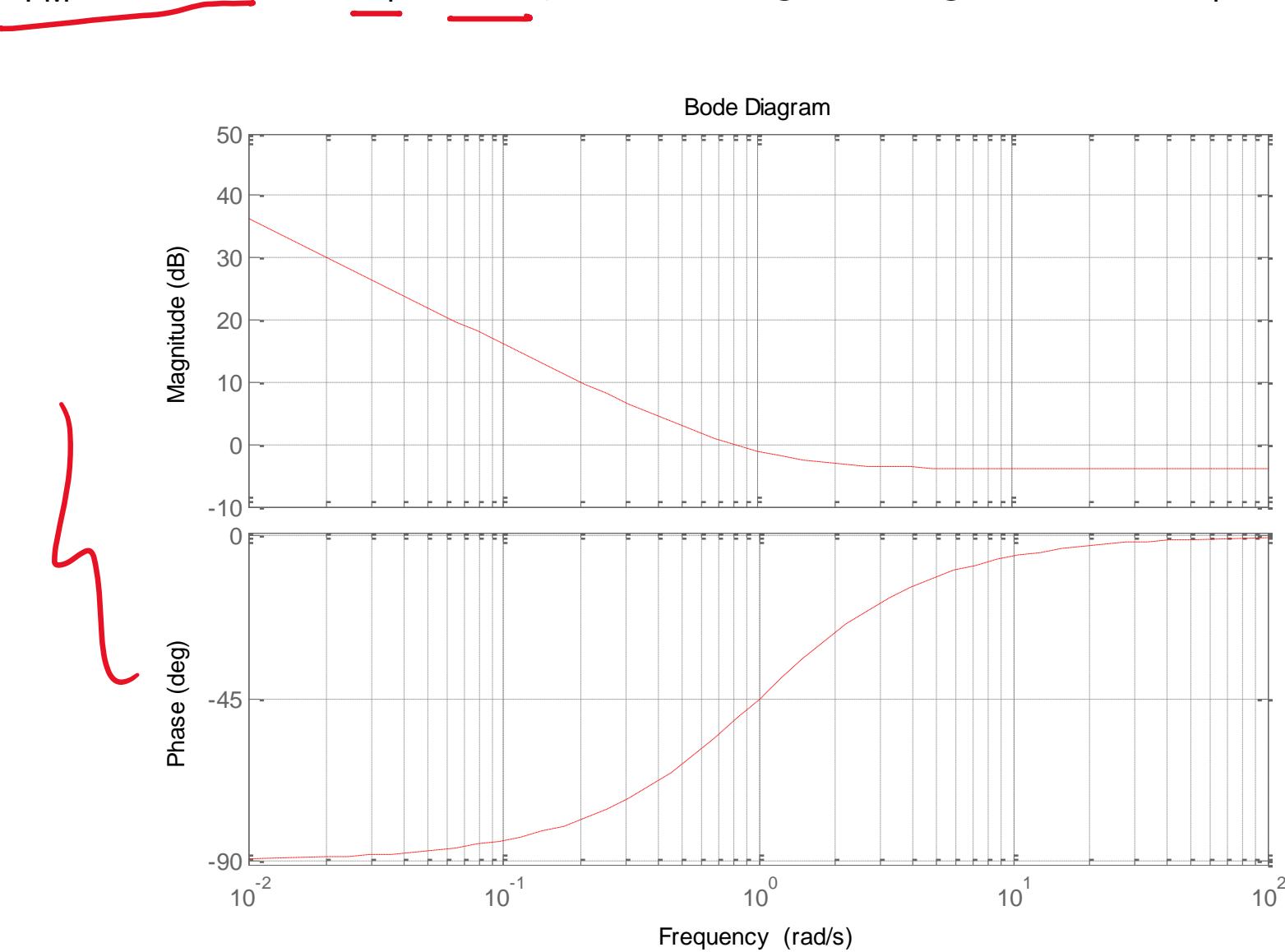
$$\sqrt{2} \approx 1$$

$$\propto 1/\tau_i \rightarrow \omega_i$$



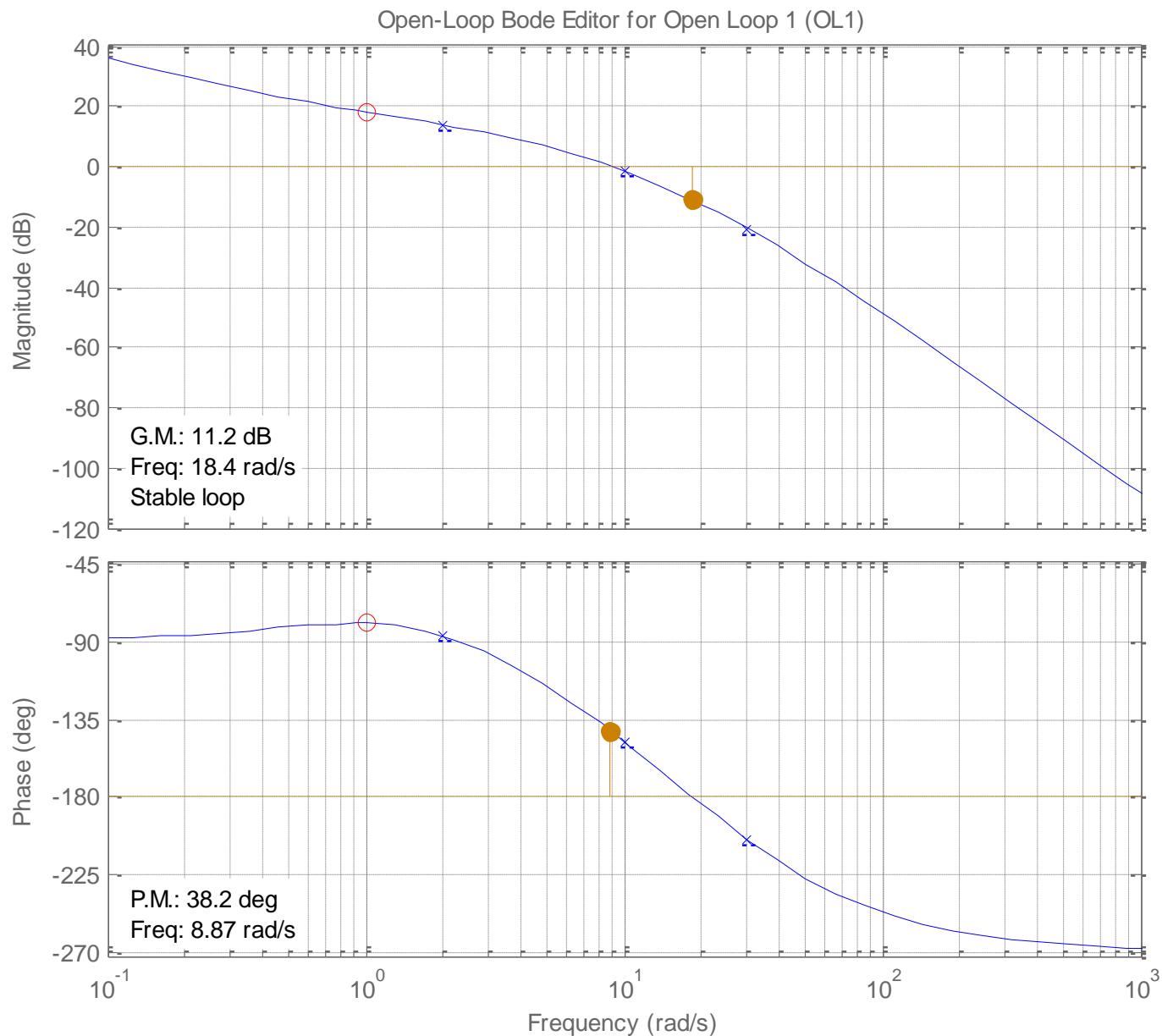
Toevoegen I-actie (ideale PI-regelaar):  $H_{PI} = (j\omega + 1)/j\omega$

( $\omega_{FM} \approx 10$  r/s dus  $\omega_i = 1$  r/s); bode diagram regelaar met  $K_r = 0,63$ :



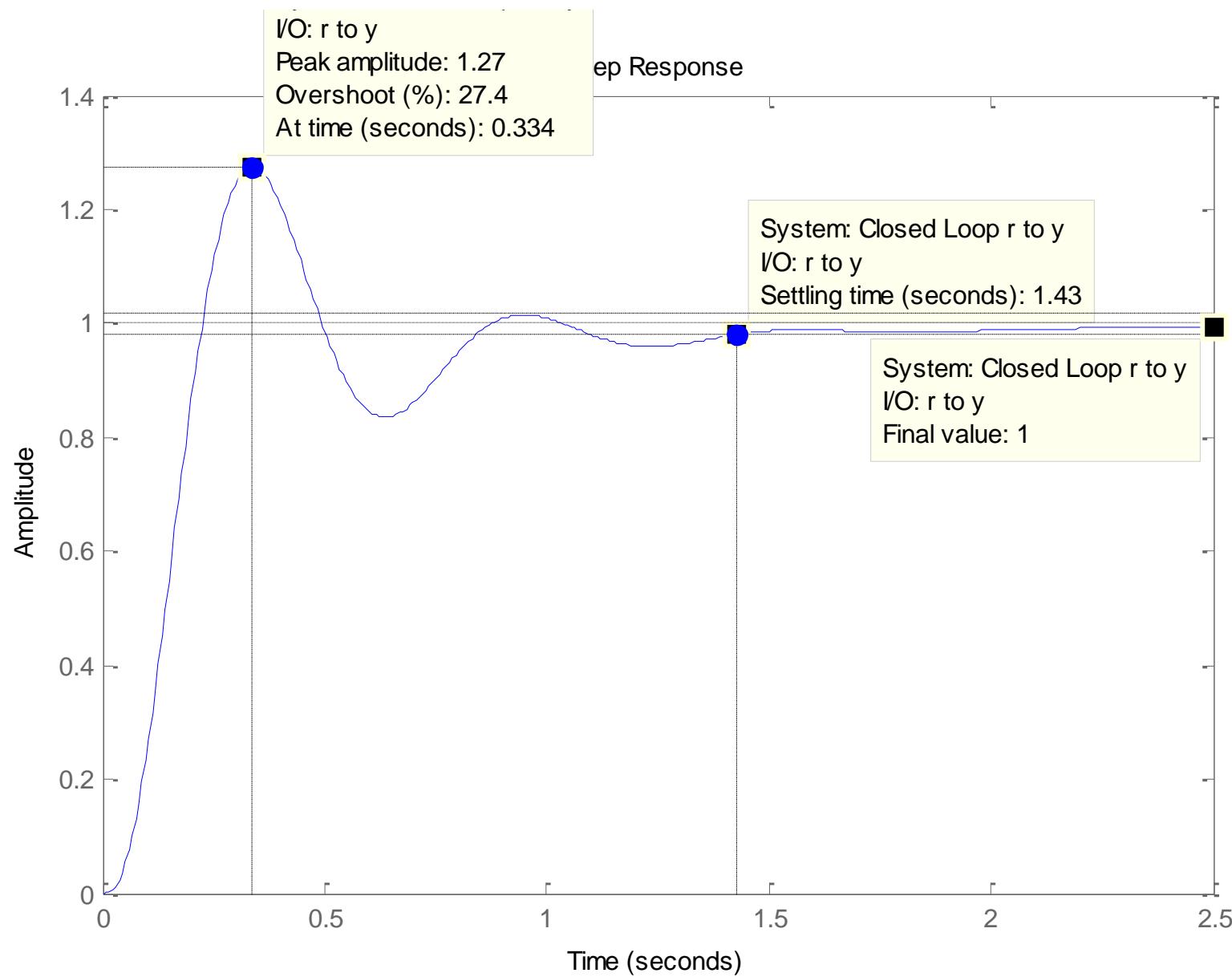


# Bode diagram proces met PI-regelaar:



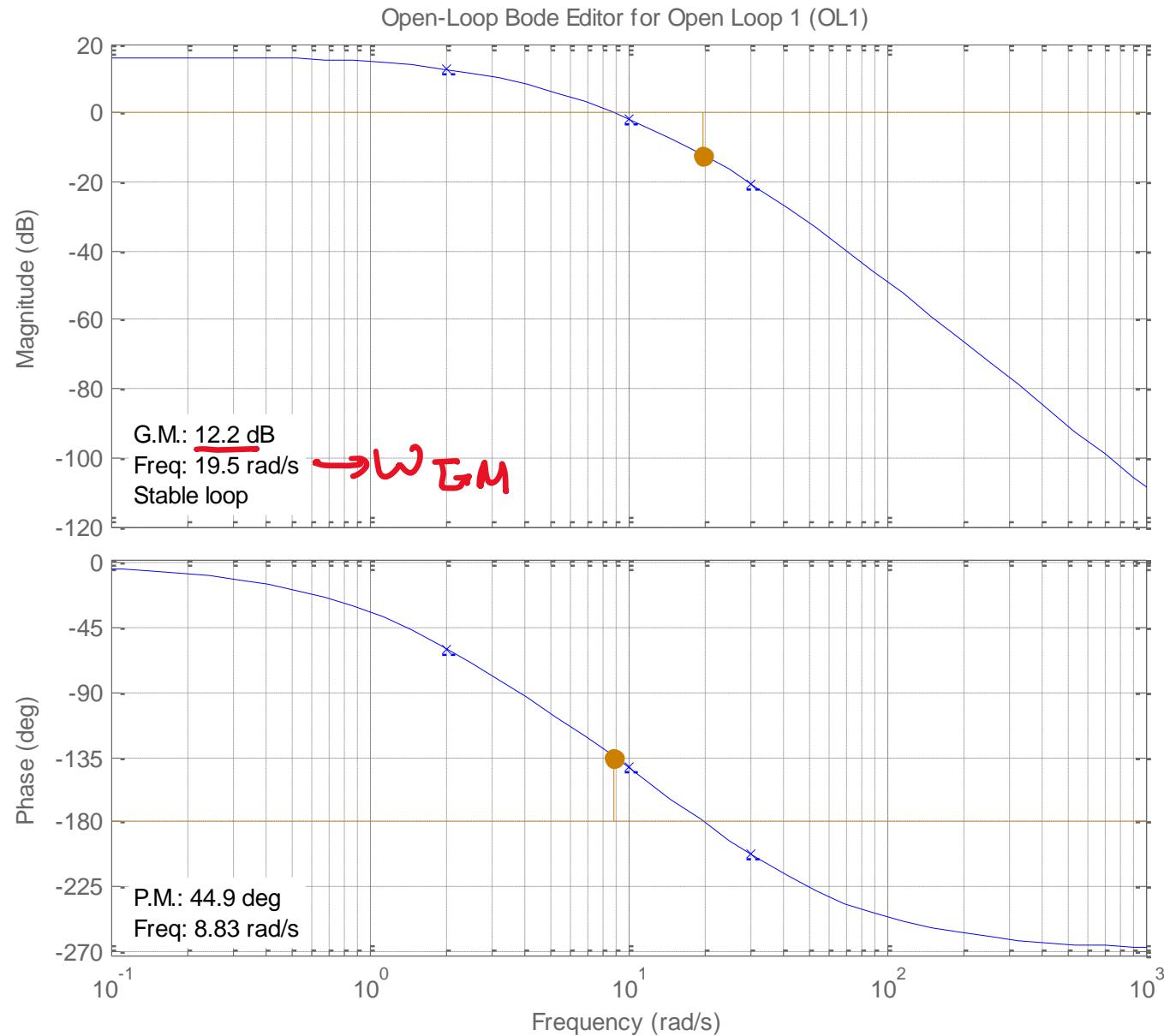


# Stapresponsie proces met PI-regelaar:



## Toevoegen D-actie (lead-regelaar)

Start: Bode diagram met  $K_r = 0,63$  (P-regelaar) voor PM = 45°



## Getemde D-actie, effecten van $a$ en $\tau_d$

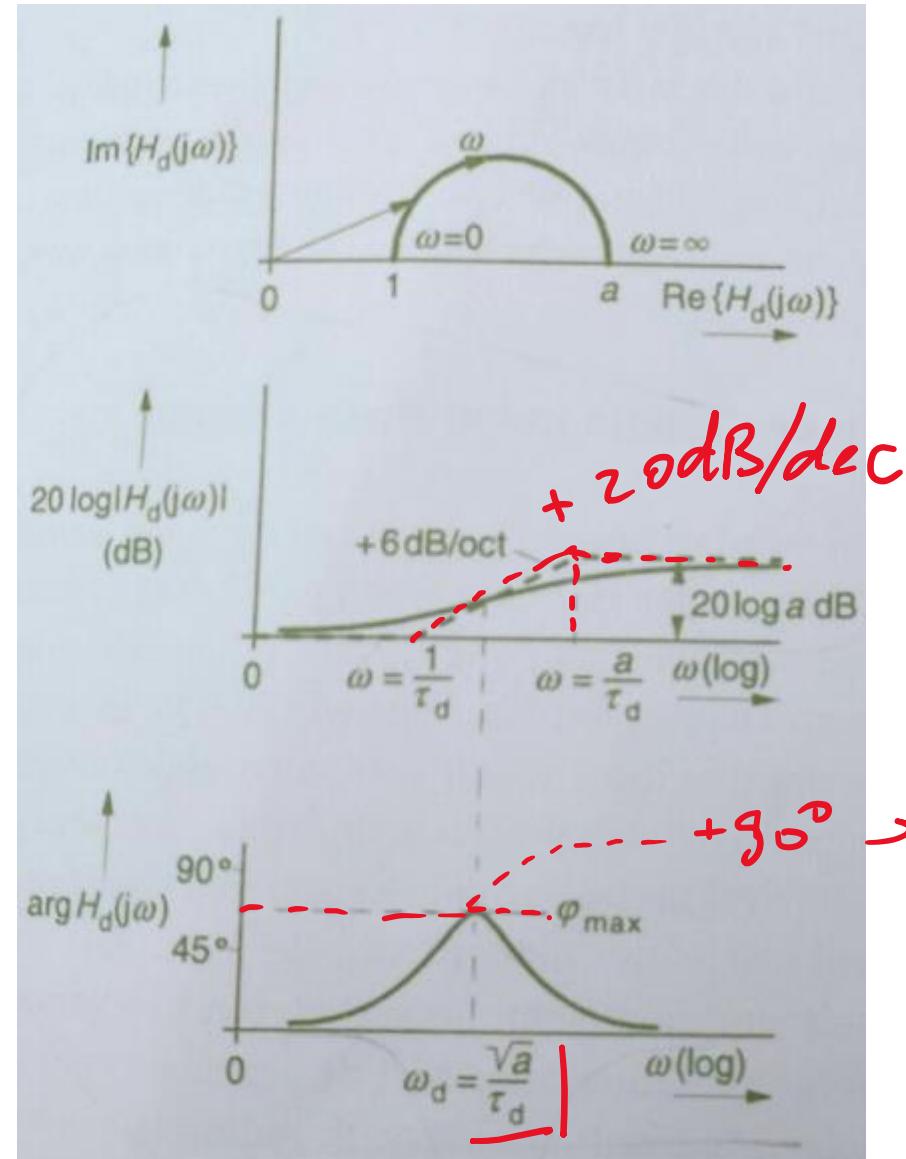
$$H_d(j\omega) = K_r \cdot a \cdot \frac{j\omega + \frac{1}{\tau_d}}{j\omega + \frac{a}{\tau_d}}$$

$$= K_r \cdot a \cdot \frac{j\omega + \frac{\omega_d}{\sqrt{a}}}{j\omega + \omega_d \cdot \sqrt{a}}$$

$$\tau_d = \frac{\sqrt{a}}{\omega_d}$$

↗

tame PD  
Lead controller



Dan: Toevoegen D-actie (lead-regelaar)

$$H_{lead}(j\omega) = K_r \cdot a \cdot \frac{j\omega + \frac{1}{\tau_d}}{j\omega + \frac{a}{\tau_d}} = K_r \cdot a \cdot \frac{j\omega + \frac{\omega_d}{\sqrt{a}}}{j\omega + \omega_d \cdot \sqrt{a}}$$

Stap 1: kies  $\underline{\omega_d} = \underline{\omega_{GM}} = \underline{20}$  r/s

Stap 2: kies  $\overline{PM} = 45^\circ$

Stap 3: bereken a met  $\underline{\varphi_{max}} = \underline{45^\circ}$ :  $a = \frac{1 + \sin \varphi_{max}}{1 - \sin \varphi_{max}} = \underline{6}$

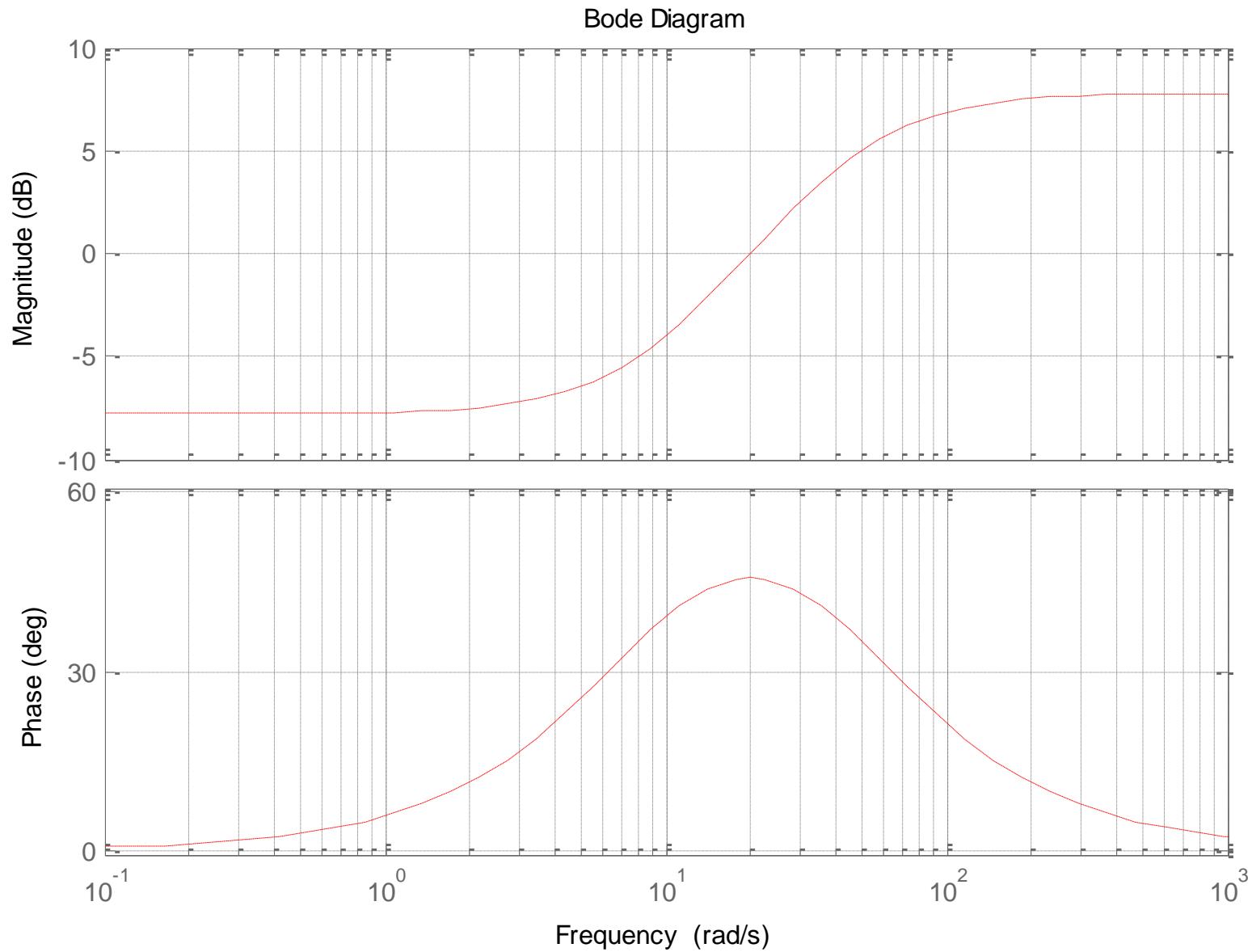
Stap 4: bepaal nieuwe  $K_r$ :  $K'_r = K_r * \frac{GM}{\sqrt{a}}$

$\underline{GM} = \underline{12}$  dB = factor  $\underline{4}$ , dus  $K'_r = \underline{0,63} * \underline{4} / \underline{\sqrt{6}} = \underline{1,03}$

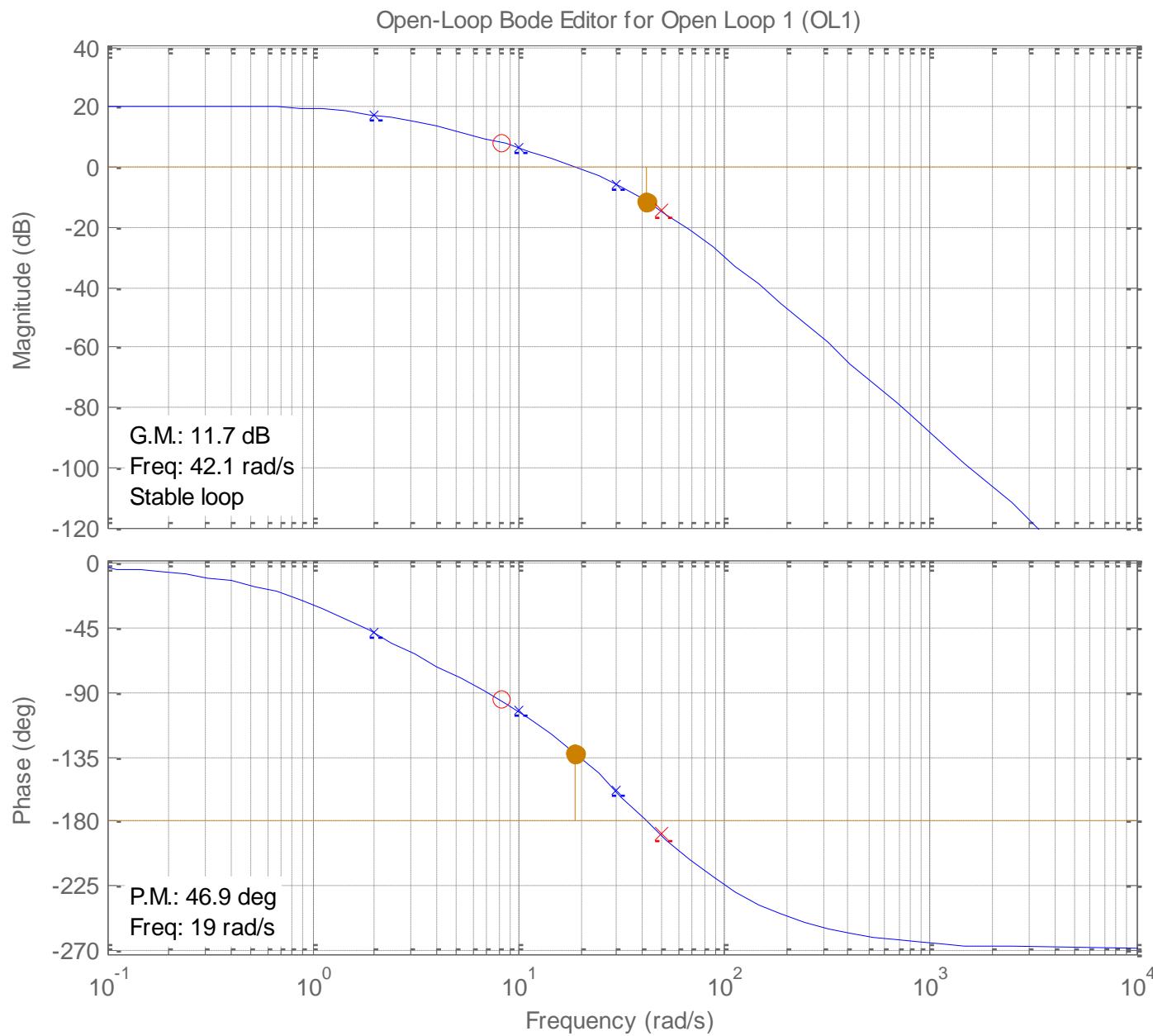
Resultaat:

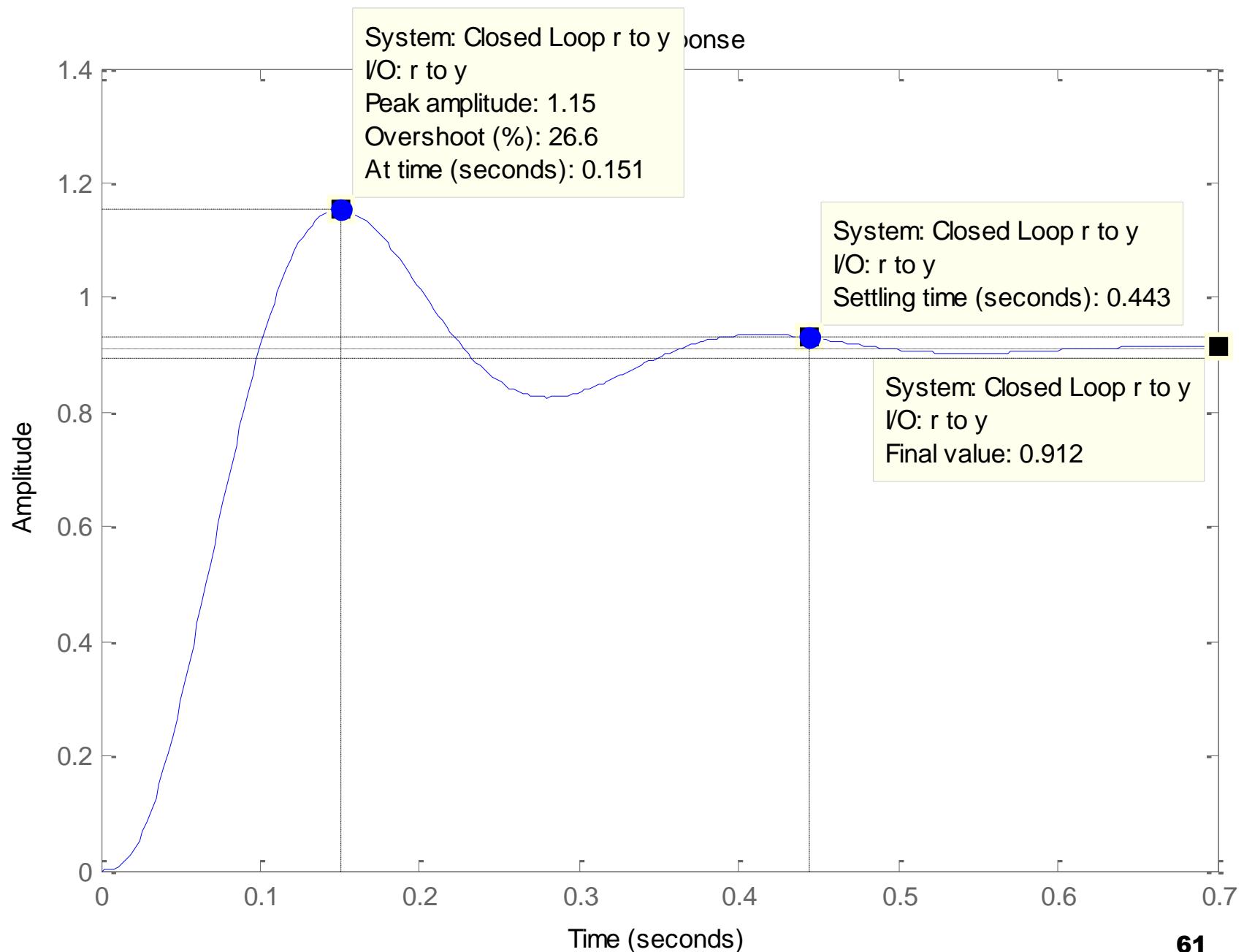
$$\textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3} + \textcircled{4} \Rightarrow H_{lead}(j\omega) = 1,03 \cdot 6 \cdot \frac{j\omega + \frac{20}{\sqrt{6}}}{j\omega + 20 \cdot \sqrt{6}} = 6,2 \cdot \frac{j\omega + 8,2}{j\omega + 49,2}$$

# Bode diagram lead-regelaar zonder $K_r$ :



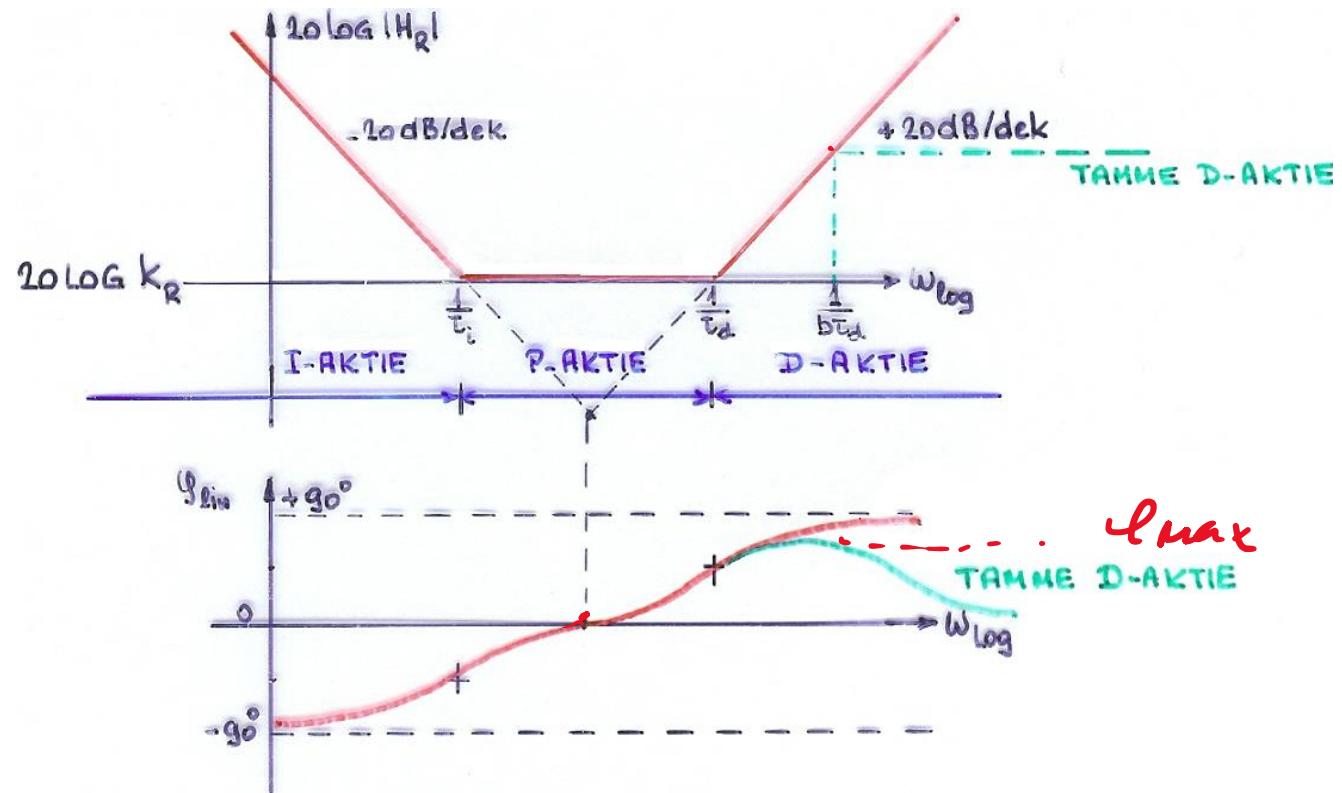
# Bode diagram proces met lead-regelaar:





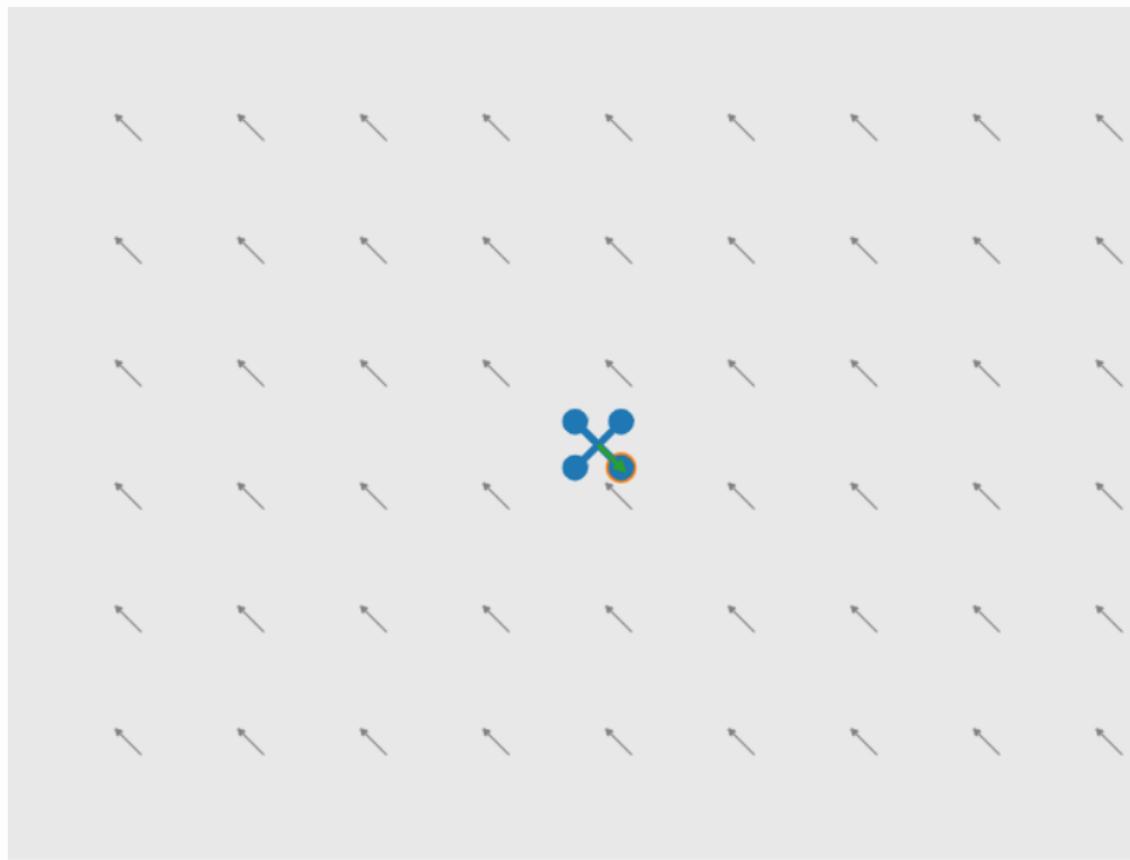
# DE TAMME PID-REGELAAR

$$H_R(s) = \frac{X(s)}{E(s)} = K_R \cdot \left(1 + \frac{1}{s\tau_i}\right) \left(1 + s\tau_d\right) \left(\frac{1}{1 + sb\tau_d}\right)$$

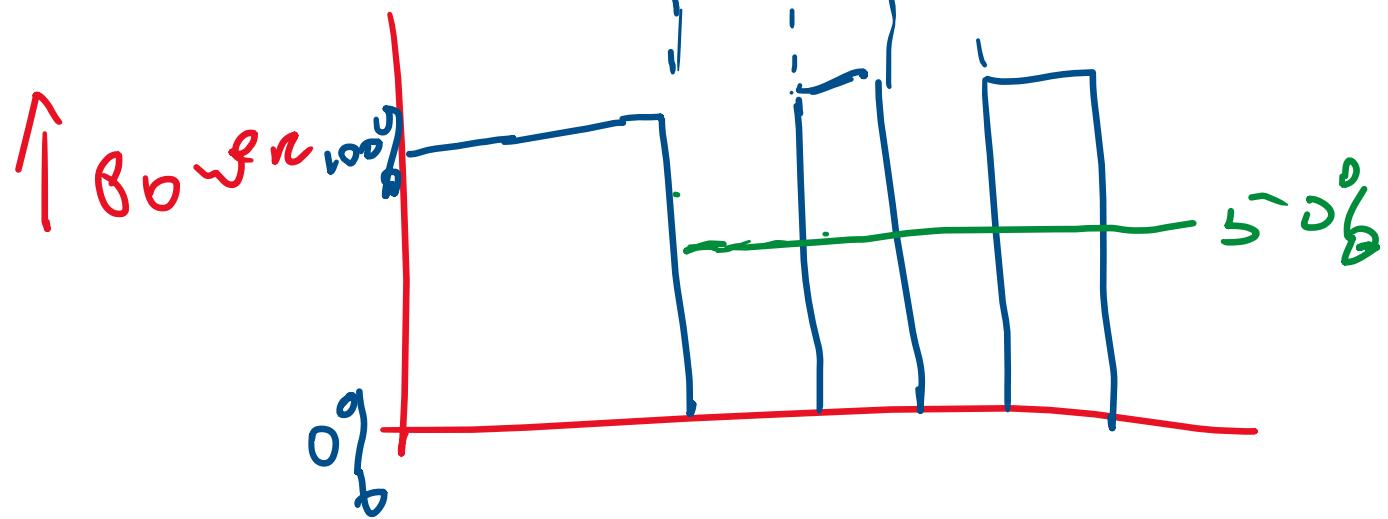
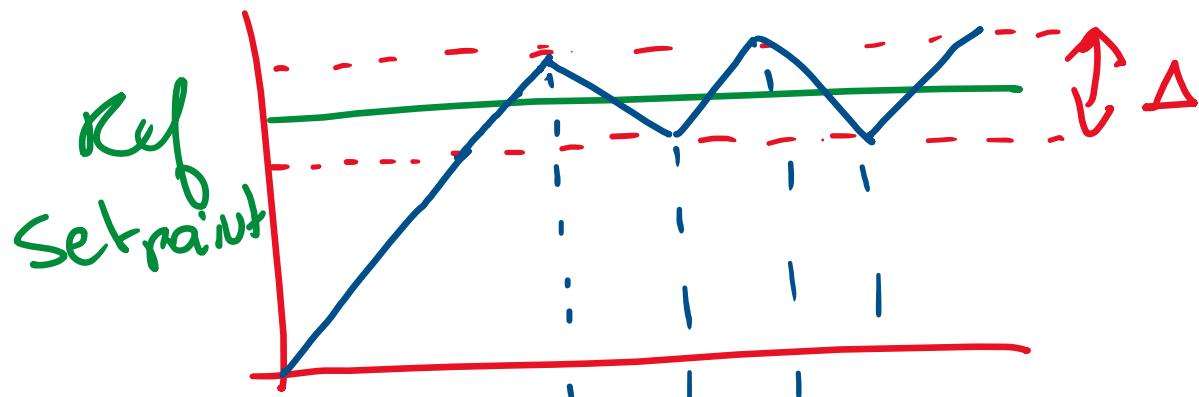


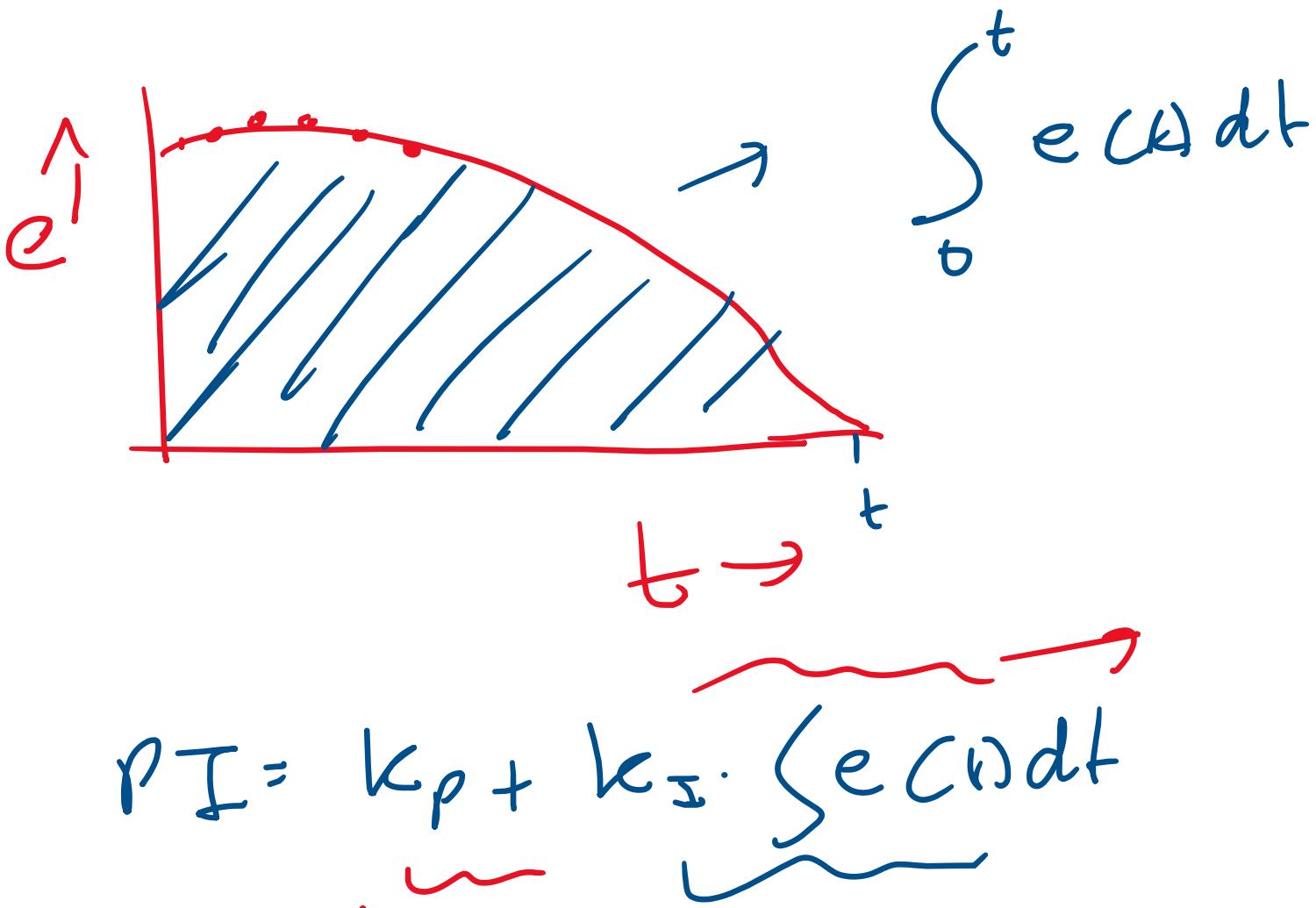
voordeel: - geen offset,  
- bijna even snel als de PD-reg.

# Interactieve demo – Position control



<https://feltrac.co/control/2020/01/12/simple-control-systems.html>





$$PI = K_P + K_I \cdot \int e(t) dt$$

dyn godnos

$E \rightarrow 0$

$$H_{PID} = k_p + k_i \cdot \frac{1}{s} + k_d \cdot s$$



Contr-

$$\left. \begin{array}{l} k_p \cdot \text{error} \\ + \\ k_i \cdot [\text{error} + \text{total error}] \\ k_d [\underline{\text{error - previous}}] \end{array} \right\}$$



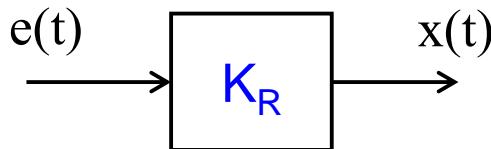
Vanaf deze dia komen extra/alternatieve uitleg van de stof. Tot deze dia wordt het in de klas behandeld.

# DE P-REGELAAR

$$H_R(s) = \frac{X(s)}{E(s)} = K_R$$

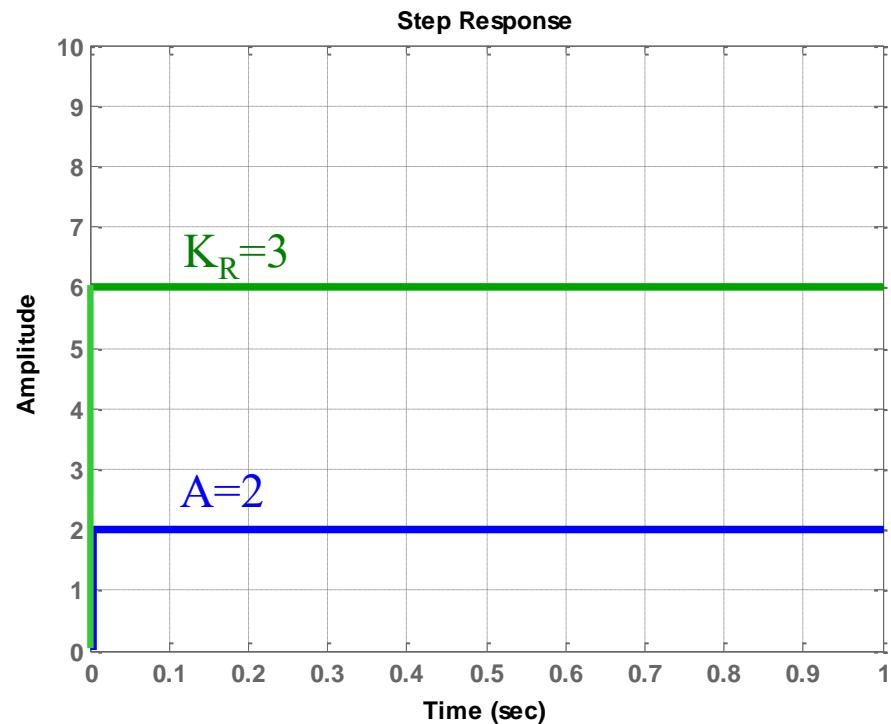
KR = Proportionaliteitsfactor

x = aansturing



$$x(t) = K_R \cdot e(t)$$

Als  $e(t) = A \cdot 1(t)$  dan  $x(t) = K_R \cdot A \cdot 1(t)$



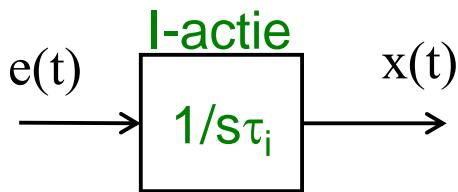
voordeel: snel

nadeel: offset niet nul

# DE I-REGELAAR

$$H_R(s) = \frac{X(s)}{E(s)} = \frac{1}{s\tau_i} = \frac{K_R}{s}$$

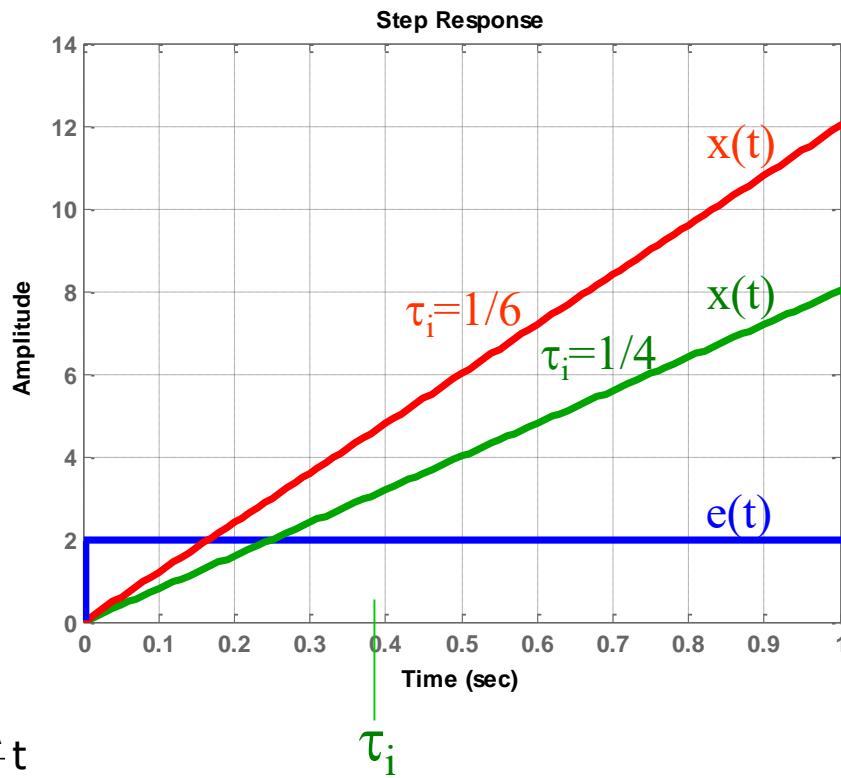
$\tau_i$  = integratie tijdconstante,  
pool = 0



$$x(t) = \frac{1}{\tau_i} \int_0^t e(t) dt$$

$$\text{Als } e(t) = A \cdot 1(t) \text{ dan } x(t) = \frac{1}{\tau_i} \int_0^t A \cdot 1(t) dt = \frac{A}{\tau_i} t$$

Als  $e(t)$  niet nul is blijft de uitgang van de I-regelaar veranderen totdat  $e = 0$ . Hiervan maakt men gebruik om de statische fout  $E_{\text{stat}}$  van een regelsysteem nul te krijgen, dus de offset  $E(\%) = 0 \%$ .



Als  $A=2$  en  $\tau_i=1/6$  dan  $x(t)=12$  t

als  $\tau_i=1/4$  dan  $x(t)=8$  t

voordeel: geen offset

nadeel: - minder stabiel dan P-reg.  
door extra  $90^\circ$  fase-naijwing,  
- traag

# VOORBEELD I-REGELAAR

Proces:

$$H_p(s) = \frac{1}{1+s}$$

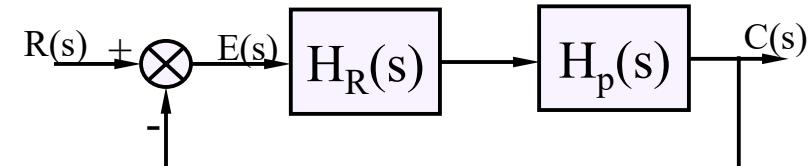
P-regelaar:

$$H_R(s) = \frac{X(s)}{E(s)} = K_R \Rightarrow H_L(s) = \frac{K_R}{1+s}$$

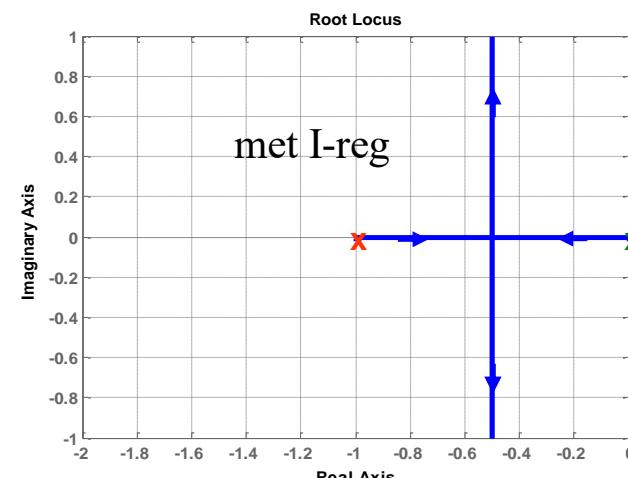
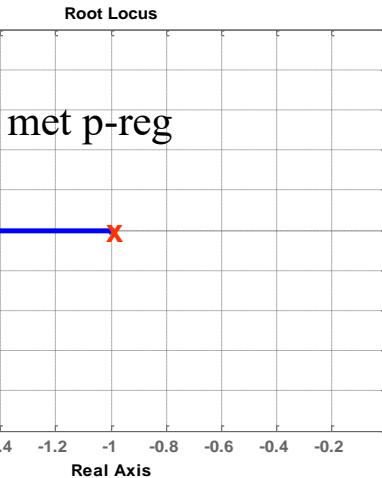
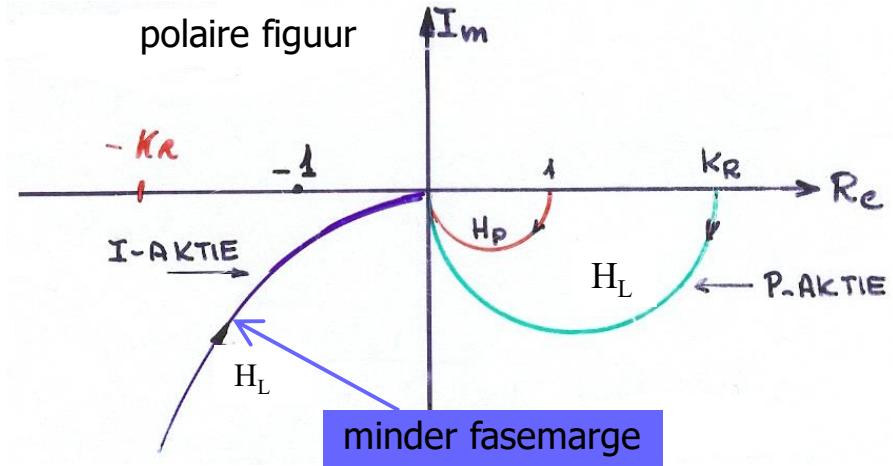
I-regelaar:

$$H_R(s) = \frac{X(s)}{E(s)} = \frac{1}{s\tau_i} = \frac{K_R}{s} \Rightarrow H_L(s) = \frac{K_R}{s(1+s)}$$

met  $K_R = \frac{1}{\tau_i}$



polaire figuur



pool v. I-regelaar

# DE PI-REGELAAR

$$H_R(s) = \frac{X(s)}{E(s)} = K_R \cdot \left(1 + \frac{1}{s\tau_i}\right) = K_R \cdot \left(\frac{1+s\tau_i}{s\tau_i}\right)$$

$\tau_i$  = integratietijdconstante

Vuistregel:  $\tau_i \geq$  grootste tijdc. proces bestaande uit serie van 1e-orde systemen.  
(nulpunt regelaar  $\geq$  grootste pool proces)

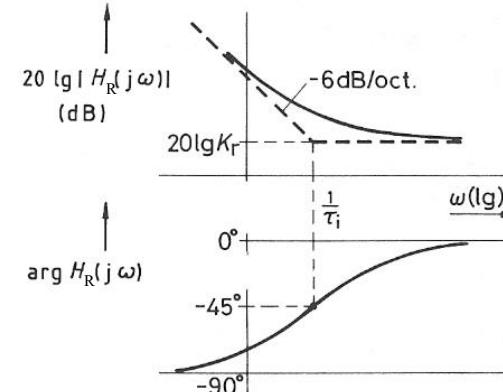
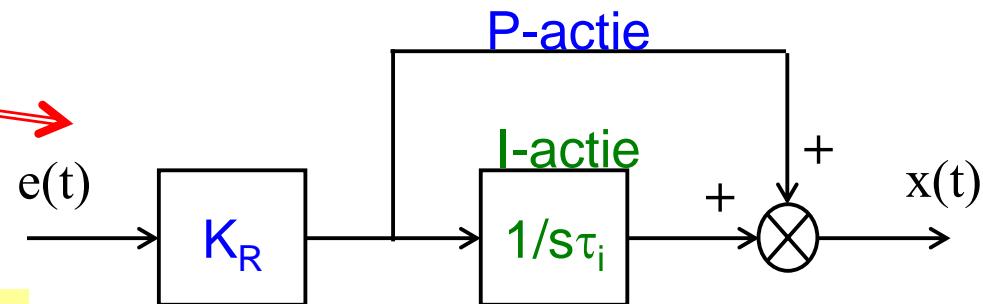
$$x(t) = K_R e(t) + \frac{K_R}{\tau_i} \int_0^t e(t) dt$$

De responsie op een eenheidstap  $e(t)=1(t)$  is:

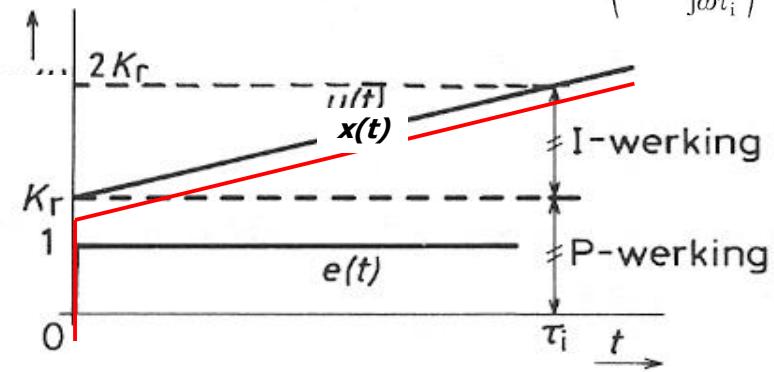
$$x(t) = K_R + \frac{K_R}{\tau_i} t$$

voordeel: - snel door P-actie,  
- geen offset door I-actie

nadeel: trager dan P-reg.



Bodediagram van  $H_r(j\omega) = K_r \left(1 + \frac{1}{j\omega\tau_i}\right)$



Responsie PI-regelaar

# VOORBEELD PI-REGELAAR

Proces:

$$H_p(s) = \frac{1}{1+s}$$

P-regelaar:

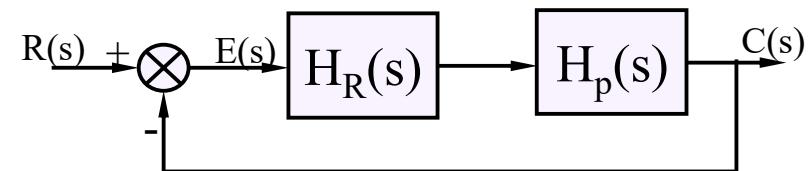
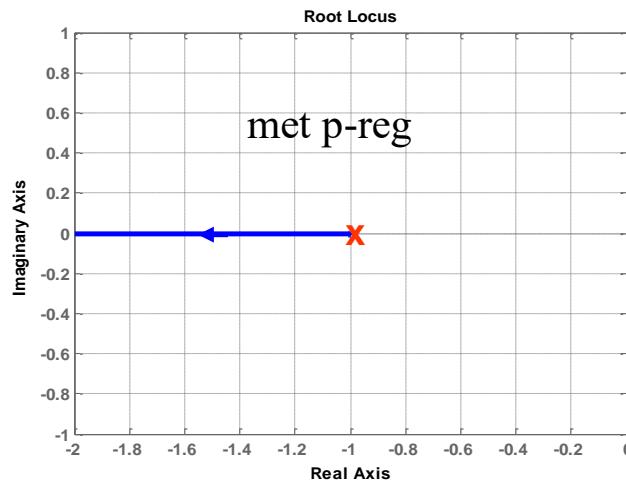
$$H_R(s) = \frac{X(s)}{E(s)} = K_R \Rightarrow H_L(s) = \frac{K_R}{1+s}$$

PI-regelaar:

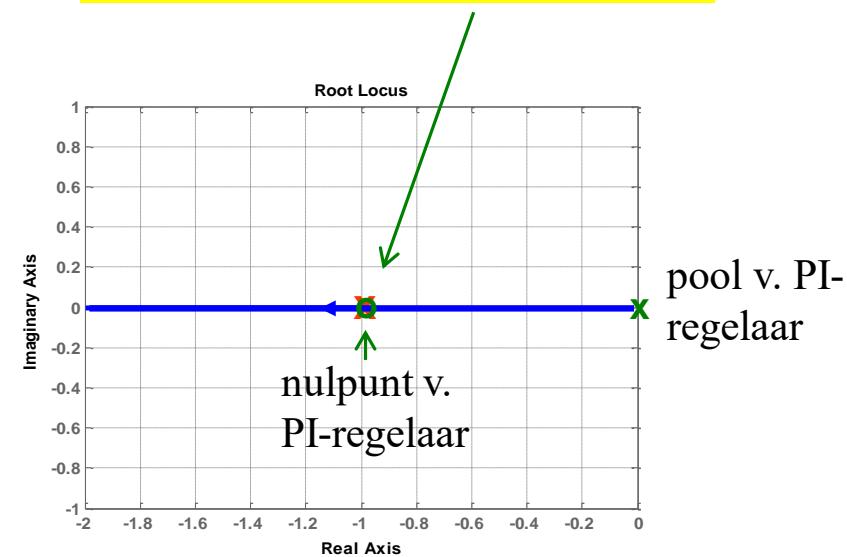
$$H_R(s) = \frac{X(s)}{E(s)} = K_R \left( \frac{1+s\tau_i}{s\tau_i} \right) \Rightarrow H_L(s) = K_R \left( \frac{1+s\tau_i}{s\tau_i} \right) \frac{1}{(1+s)}$$

met  $\tau_i = 1s$  (vuistregel: tijdconstante van het proces)

$$H_L(s) = K_R \left( \frac{1+s}{s} \right) \frac{1}{(1+s)} = \frac{K_R}{s}$$



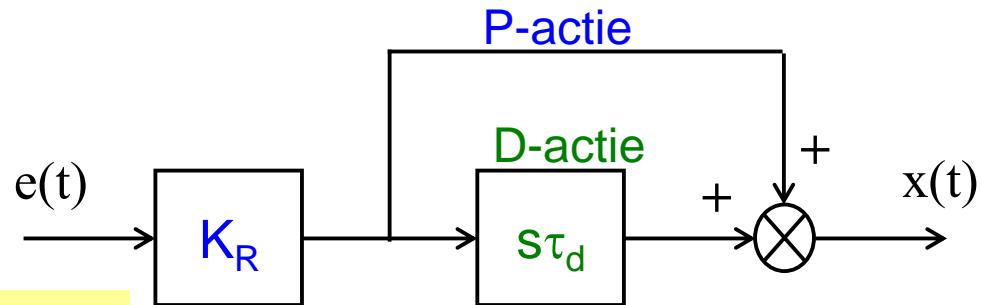
Nulpunt van PI-regelaar  
compenseert de pool  
van het proces !



# DE PD-REGELAAR

$$H_R(s) = \frac{X(s)}{E(s)} = K_R \cdot (1 + s\tau_d)$$

$\tau_d$  = differentiatietijdconstante



Vuistregel:  $\tau_d \leq$  één na grootste tijdc. proces bestaande uit serie van 1e-orde systemen (nulpunt regelaar  $\leq$  één na grootste pool proces)

$$x(t) = K_R e(t) + K_R \tau_d \frac{de(t)}{dt}$$

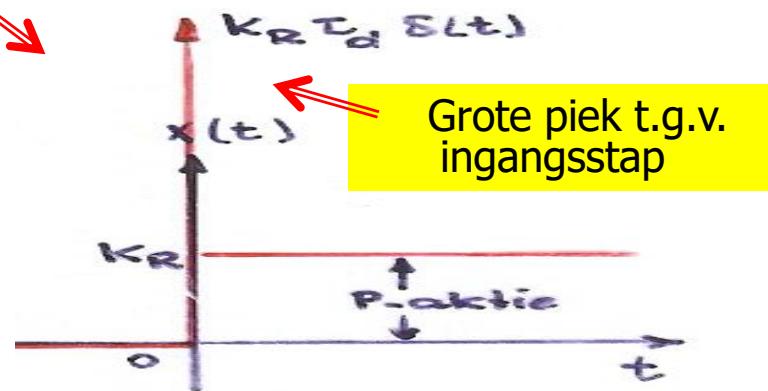
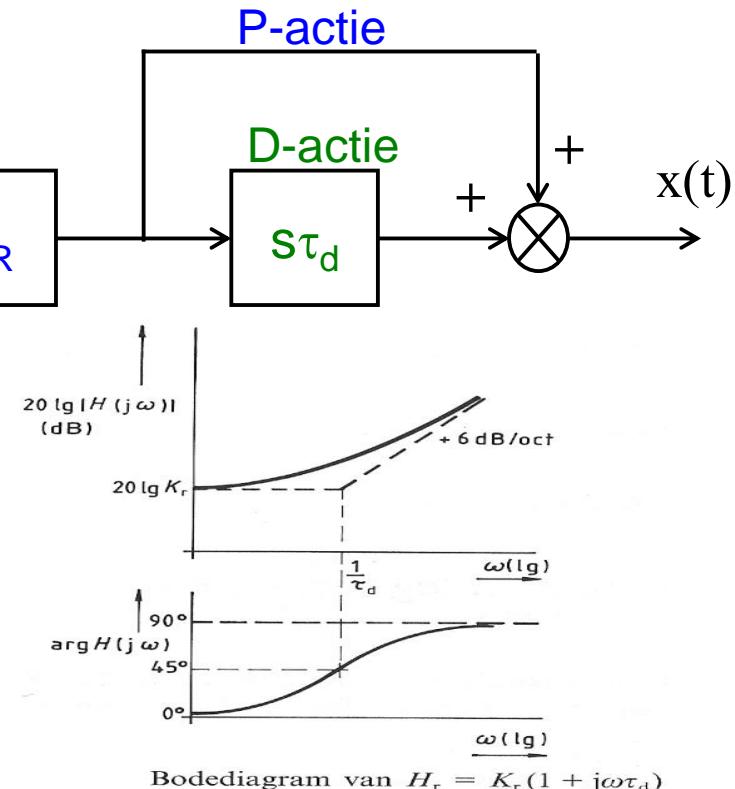
De responsie op een eenheidstap  $e(t)=1(t)$  is:

$$x(t) = K_R + K_R \tau_d \delta(t)$$

voordeel:- sneller dan P-reg.,

- stabieler door fasevoorijding,
- offset minder dan P-reg.

nadeel:- minder geschikt voor stapvormige ingangssignalen,  
remedie Lead filter



# DE PD-REGELAAR

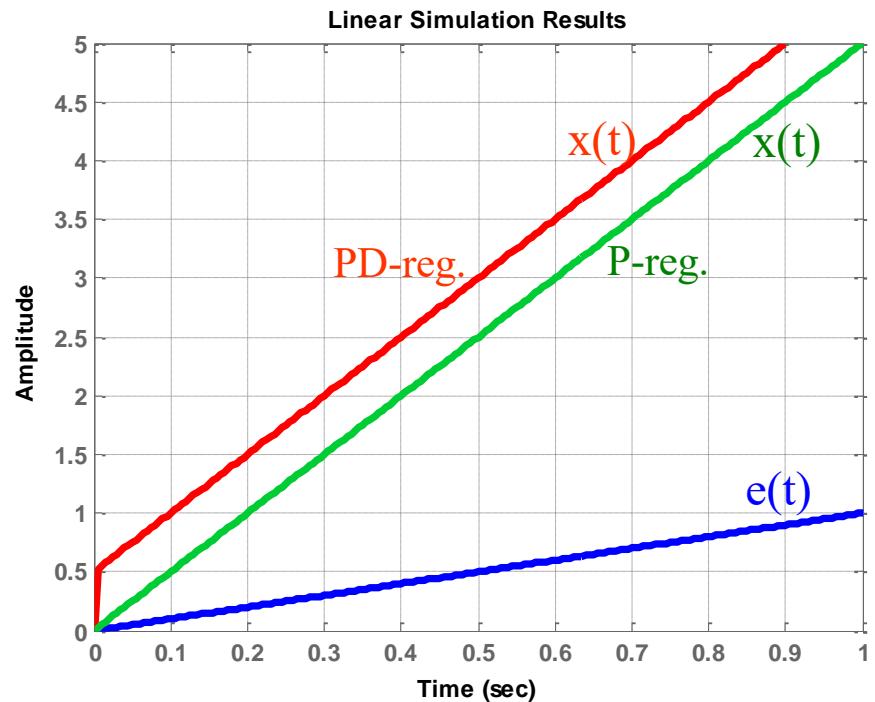
De responsie op een **rampfunctie**  $e(t)=t \cdot 1(t)$  is:

$$x(t) = K_R t + K_R \tau_d$$

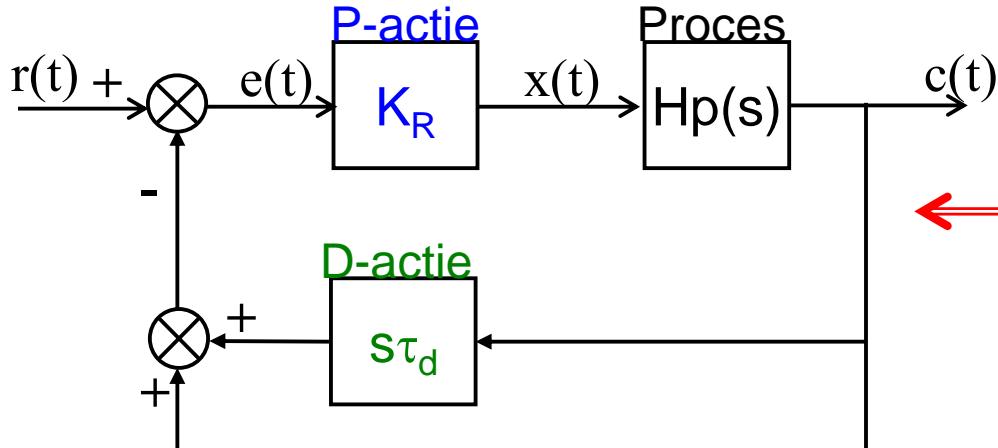
Als  $K_R=5$  en  $\tau_d=0,1$  s dan:  $x(t) = 5t + 0,5$

Door de D-actie wordt er met een sprong gereageerd op een verandering in de fout  $e(t)$ , bij een P-actie gaat dit geleidelijk.

De D-actie zorgt dus voor een sneller bijregelen dan bij alleen een P-actie!



## PD-actie in terugkoppelweg:



De uitgang van een proces verandert minder snel en nooit stapvormig, daardoor leidt differentiëren niet tot grote pieken op de uitgang van de D-actie.

De lusoverdracht  $H_L(s)$  verandert daardoor echter niet.

# VOORBEELD PD-REGELAAR

Proces:  $H_p(s) = \frac{32}{(s+2)(s+8)}$

P-regelaar:

$$H_R(s) = \frac{X(s)}{E(s)} = K_R \Rightarrow H_L(s) = \frac{32K_R}{(s+2)(s+8)}$$

PD-regelaar:

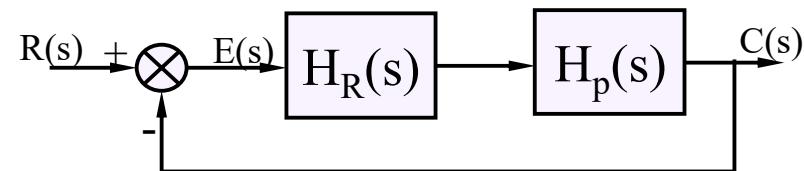
$$H_R(s) = \frac{X(s)}{E(s)} = K_R(1 + s\tau_d) \Rightarrow H_L(s) = K_R(1 + s\tau_d) \frac{32}{(s+2)(s+8)} =$$

$$K_R(1 + s\tau_d) \frac{2}{(\frac{1}{2}s+1)(\frac{1}{8}s+1)}$$

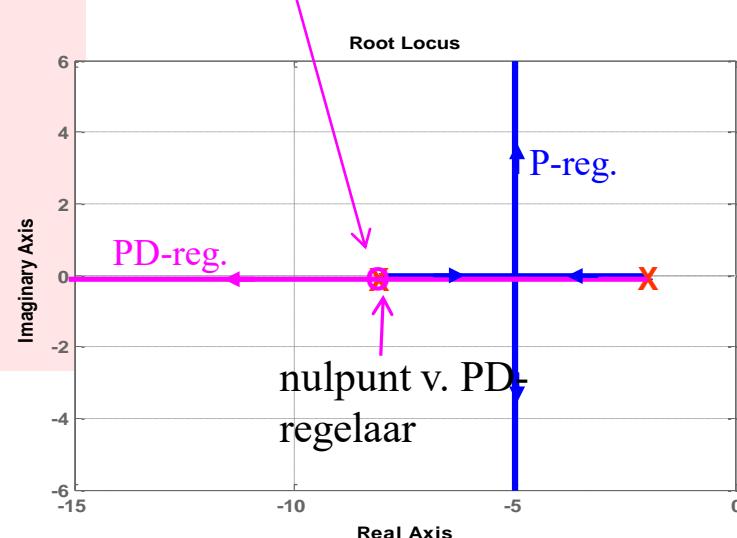
met  $\tau_d = 1/8s$  (vuistregel: één na grootste tijdconstante van het proces)

$$H_L(s) = K_R (1 + \frac{1}{8}s) \frac{2}{(\frac{1}{2}s+1)(\frac{1}{8}s+1)} = \frac{2K_R}{(\frac{1}{2}s+1)} = \frac{4K_R}{(s+2)}$$

Door compensatie door het nulpunt v.d. PD-regelaar ontstaat er een nieuwe poolbaan waarop de regelsysteem-pool steeds verder naar links kan worden verschoven, dus systeem sneller.



Nulpunt van PD-regelaar compenseert de pool van het proces !

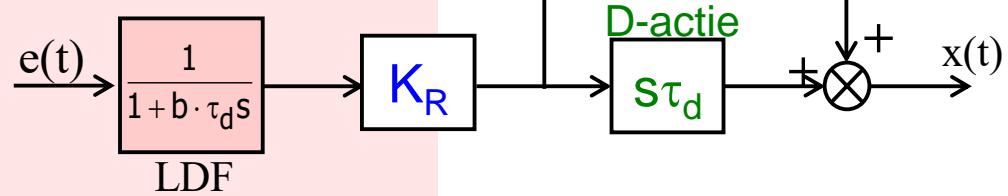


# DE TAMME PD-REGELAAR

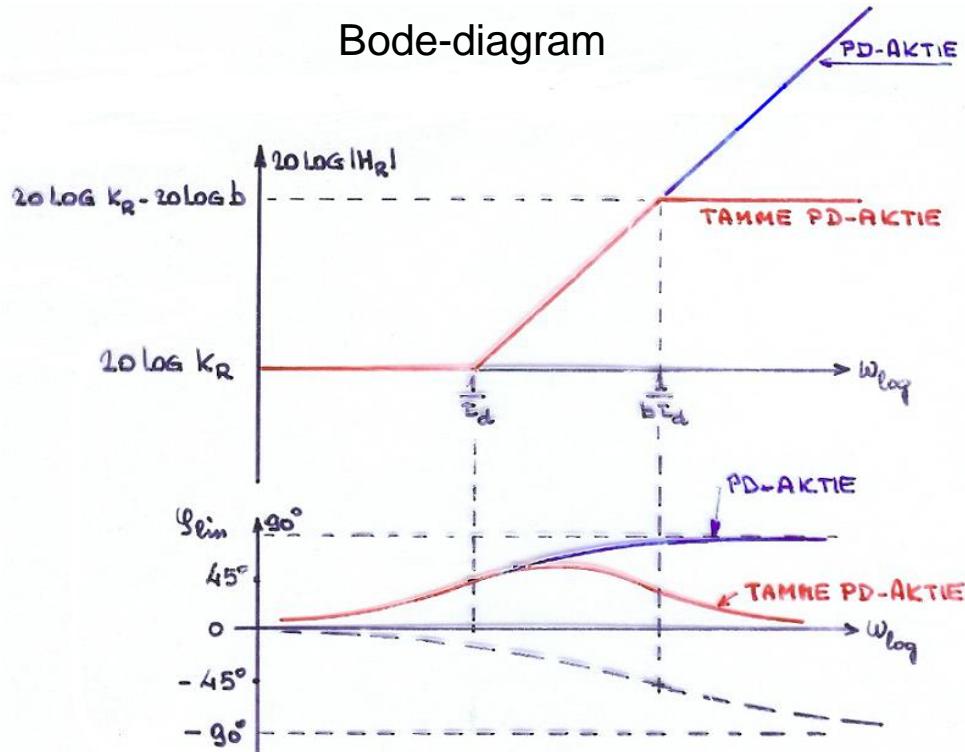
$$H_R(s) = K_R \cdot \frac{1 + \tau_d s}{1 + \frac{\tau_d}{a} s} \text{ of } K_R \cdot \frac{1 + \tau_d s}{1 + b \cdot \tau_d s} \text{ waarin } a \text{ de tamheidsfactor is}$$

met  $6 < a < 20$  of  $0,05 < b < 0,167$

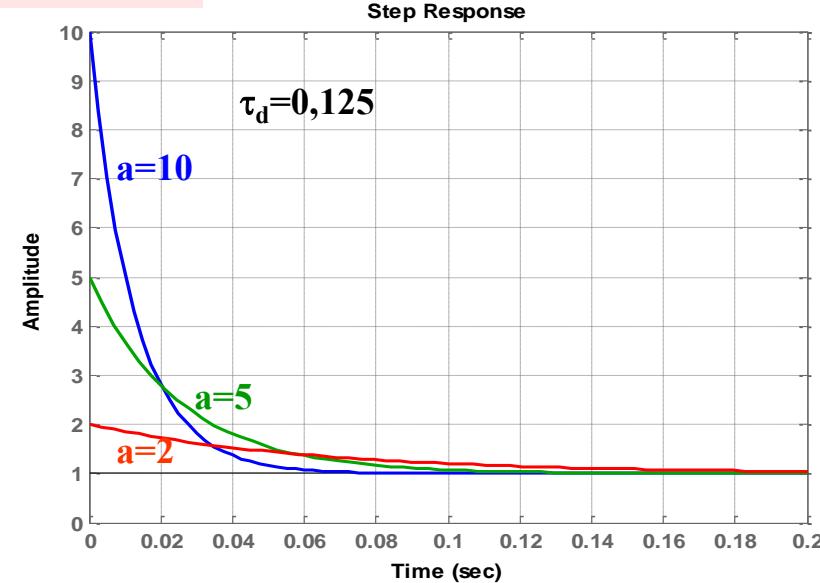
$$\text{nulpunt} = \frac{-1}{\tau_d} ; \quad \text{pool} = \frac{-a}{\tau_d}$$



Bode-diagram



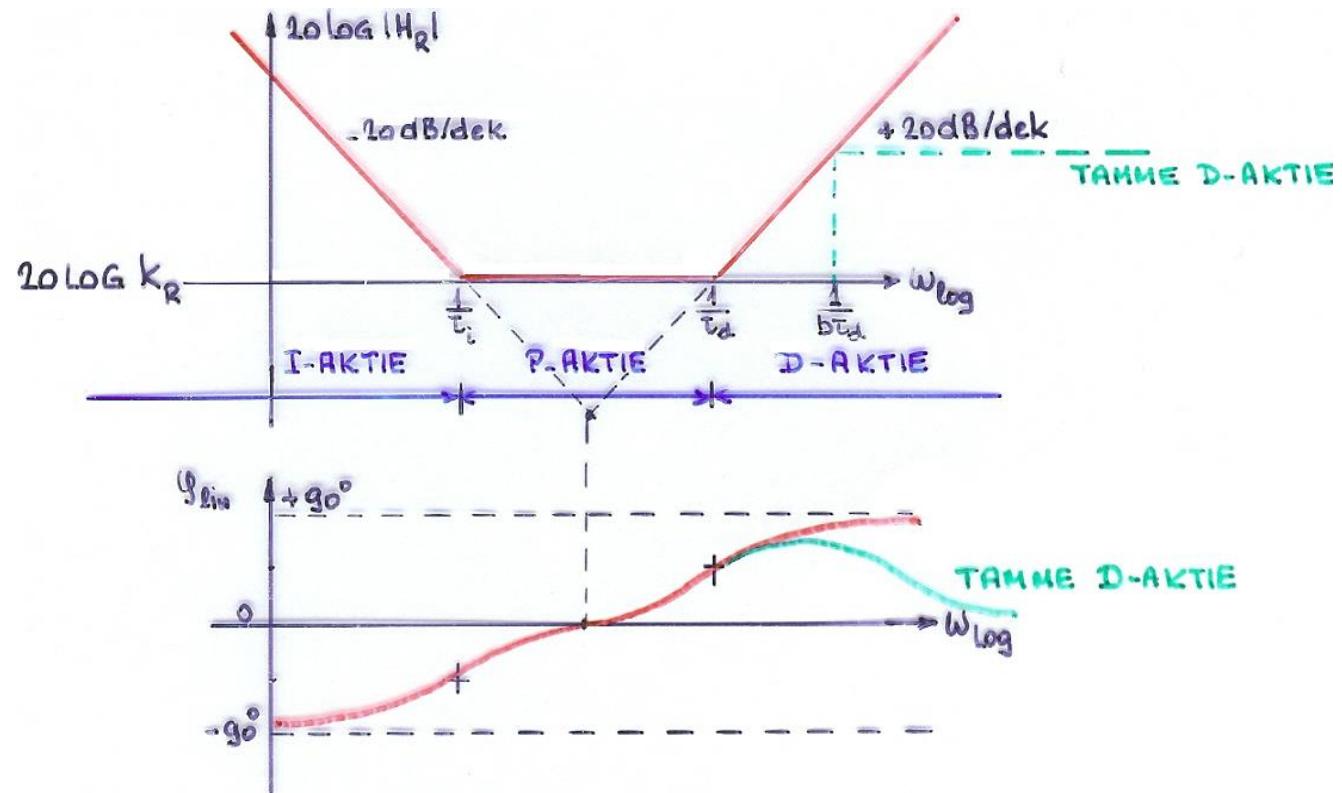
$\varphi_{\max}$  als  $\omega = 1/(\tau_d \sqrt{b})$



voordeel: rustiger en minder storingsgevoelig dan PD-regelaar door toevoeging v.e. eerste orde systeem (LDF)

# DE TAMME PID-REGELAAR

$$H_R(s) = \frac{X(s)}{E(s)} = K_R \cdot \left(1 + \frac{1}{s\tau_i}\right) \left(1 + s\tau_d\right) \left(\frac{1}{1 + sb\tau_d}\right)$$



voordeel: - geen offset,  
- bijna even snel als de PD-reg.