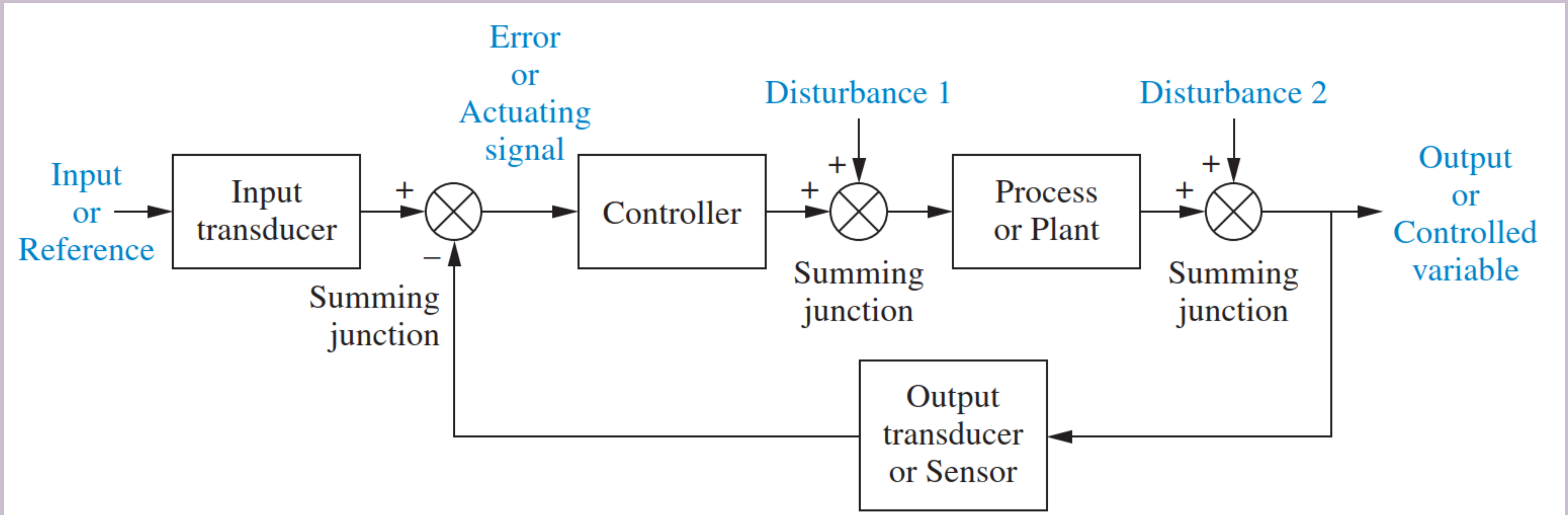
Terugkoppeling & stabiliteit

3.6.2 Stability of LTI Systems
6.4 Stability Margins

Terugkoppeling & stabiliteit, principe van terugkoppeling



Gesloten systeem; systeem met terugkoppeling:

1. Meten
2. Vergelijken
3. Aansturen

Terugkoppeling & stabiliteit, principe van terugkoppeling

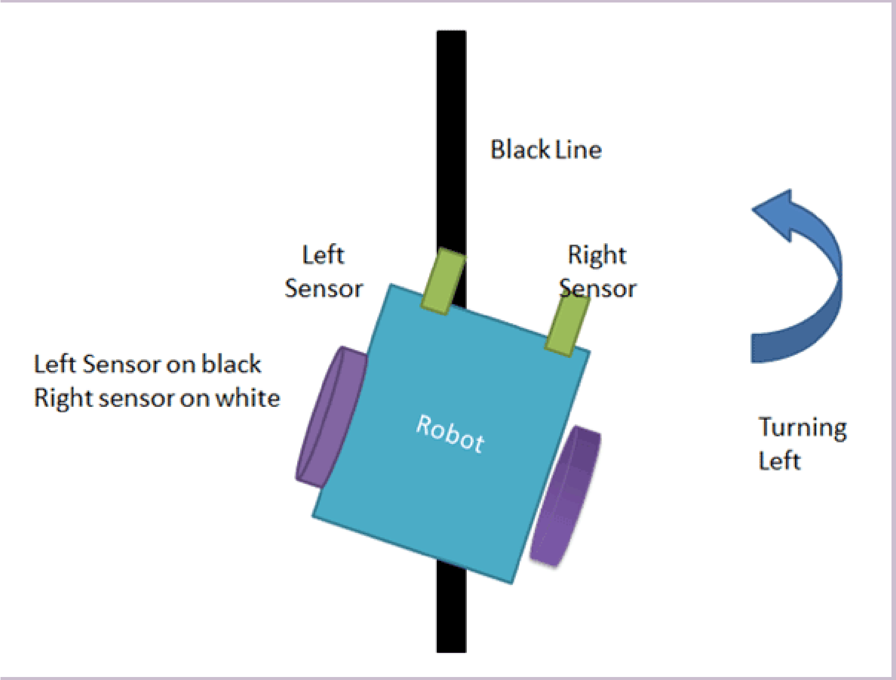
Door terugkoppeling wordt een systeem minder gevoelig voor verstoringen, maar de kans op instabiliteit wordt vergroot.

Frequentie-domein:

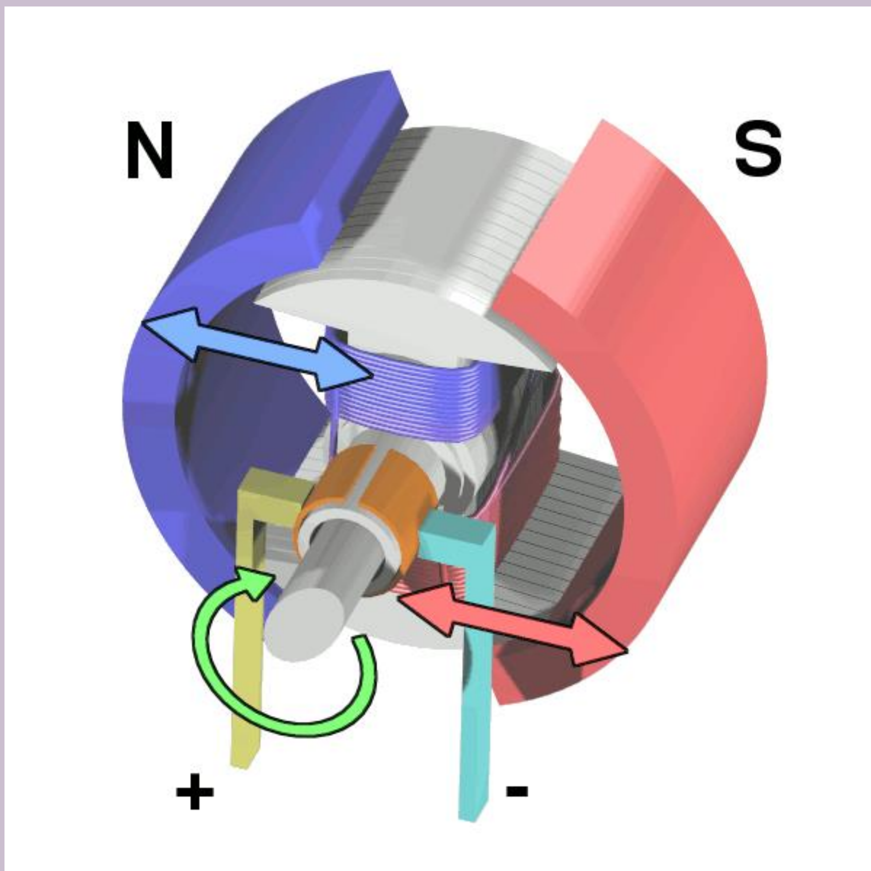
- Stabiliteitscriterium van Nyquist
- Stabiliteitsmarges van Bode

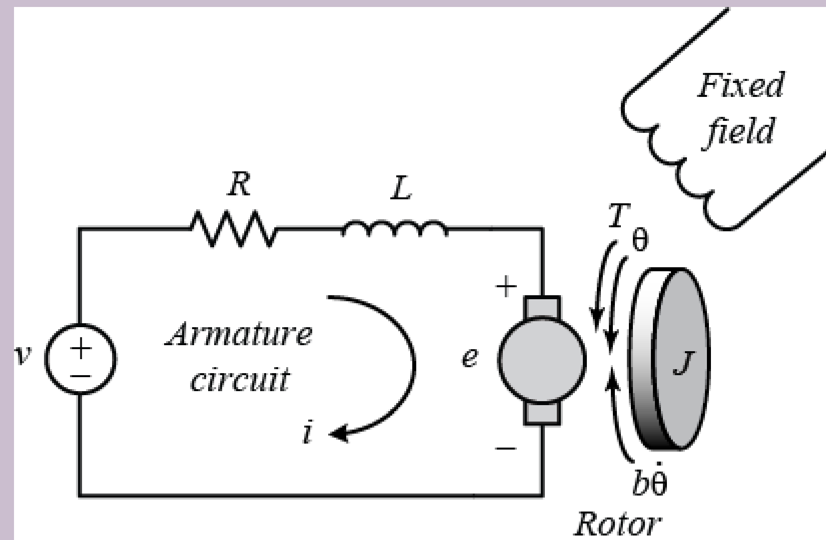
Technieken in s-domein op basis van poollocaties zijn sterk gerelateerd aan het tijddomein.

Robot auto die lijn volgt



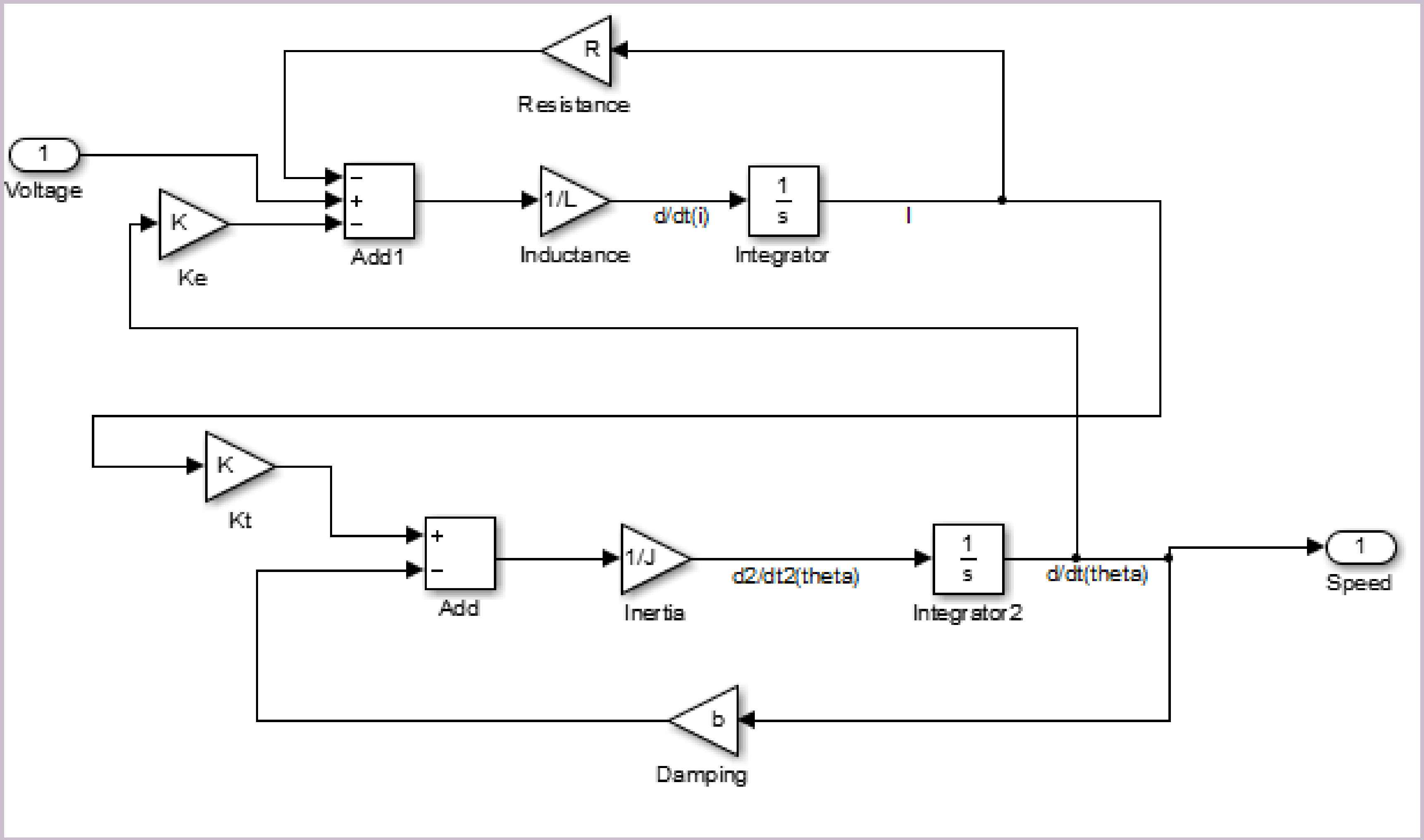
DC Motor





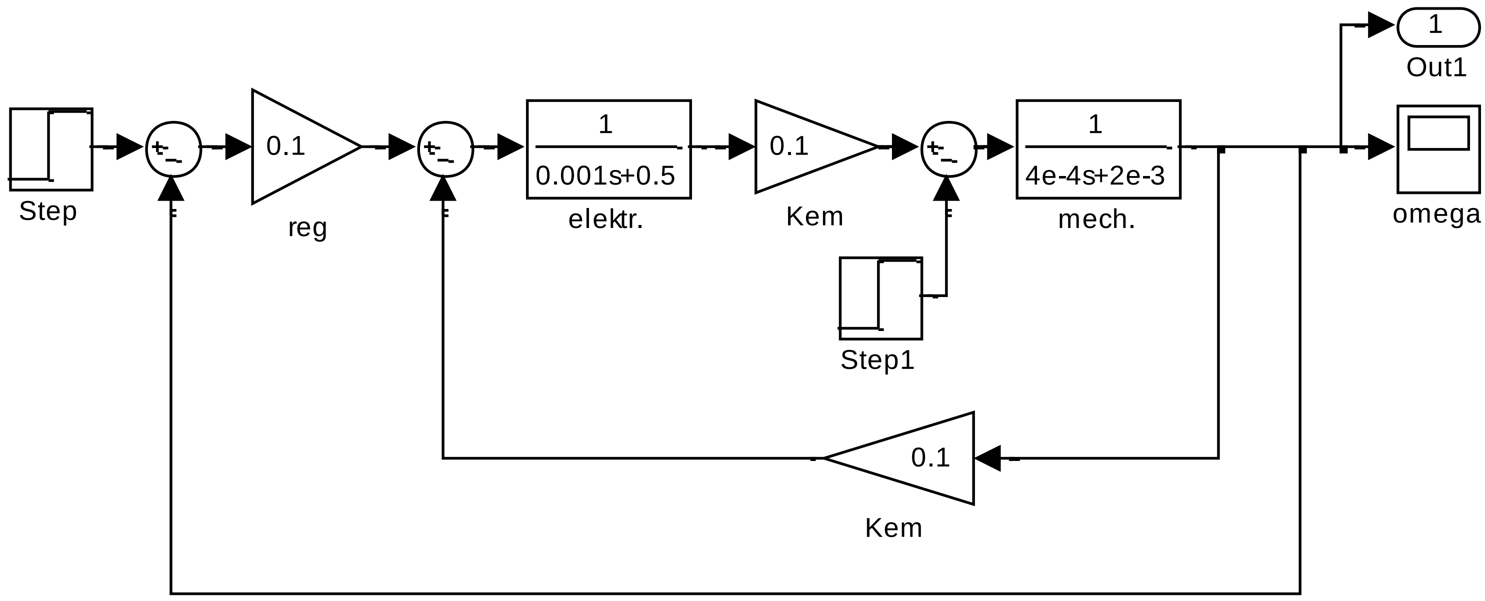
$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} = T - b\frac{d\theta}{dt} \Longrightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{J}(K_t i - b\frac{d\theta}{dt})$$

$$L\frac{di}{dt} = -Ri + V - e \Longrightarrow \frac{di}{dt} = \frac{1}{L}(-Ri + V - K_e\frac{d\theta}{dt})$$

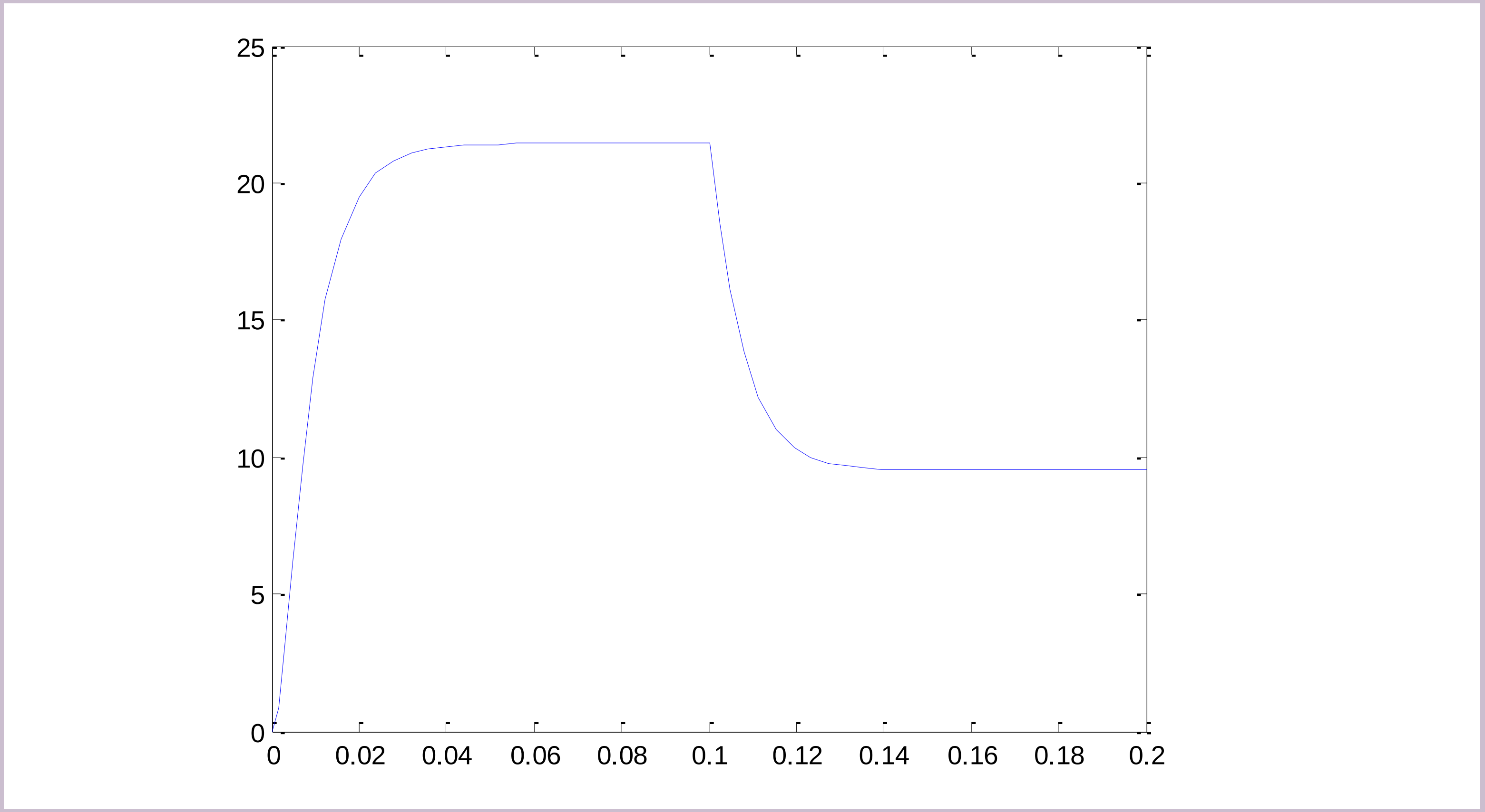

R
Resistance
1
Voltage
K
Ke
Add1
1/L
Inductance
d/dt(i)
1
s
Integrator
I
K
Kt
+
−
Add
1/J
Inertia
d2/dt2(theta)
1
s
Integrator2
d/dt(theta)
1
Speed
b
Damping

Terugkoppeling & stabiliteit: Stabiliteit & ω-domein

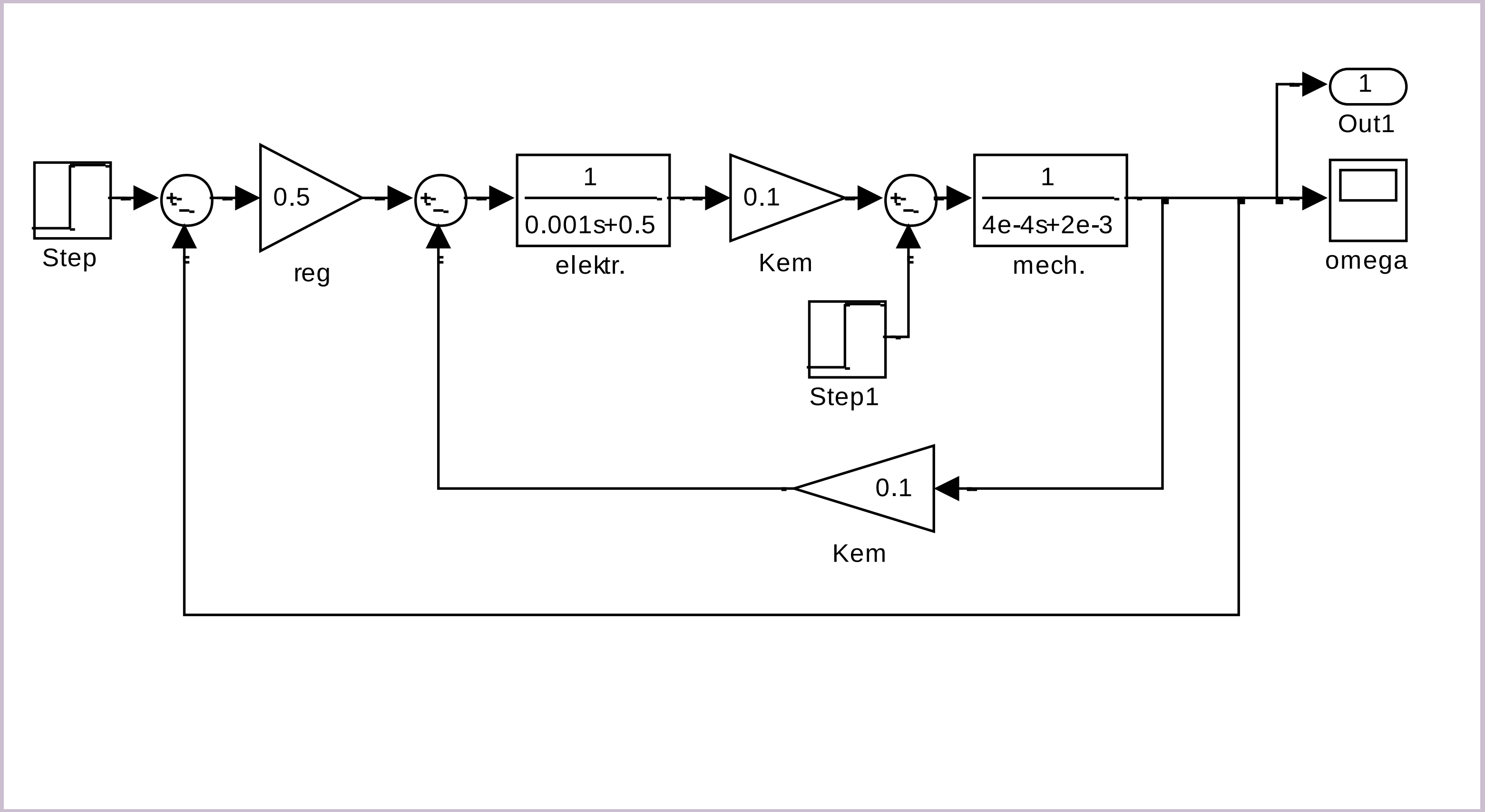
Vb: snelheidsregeling DC-motor



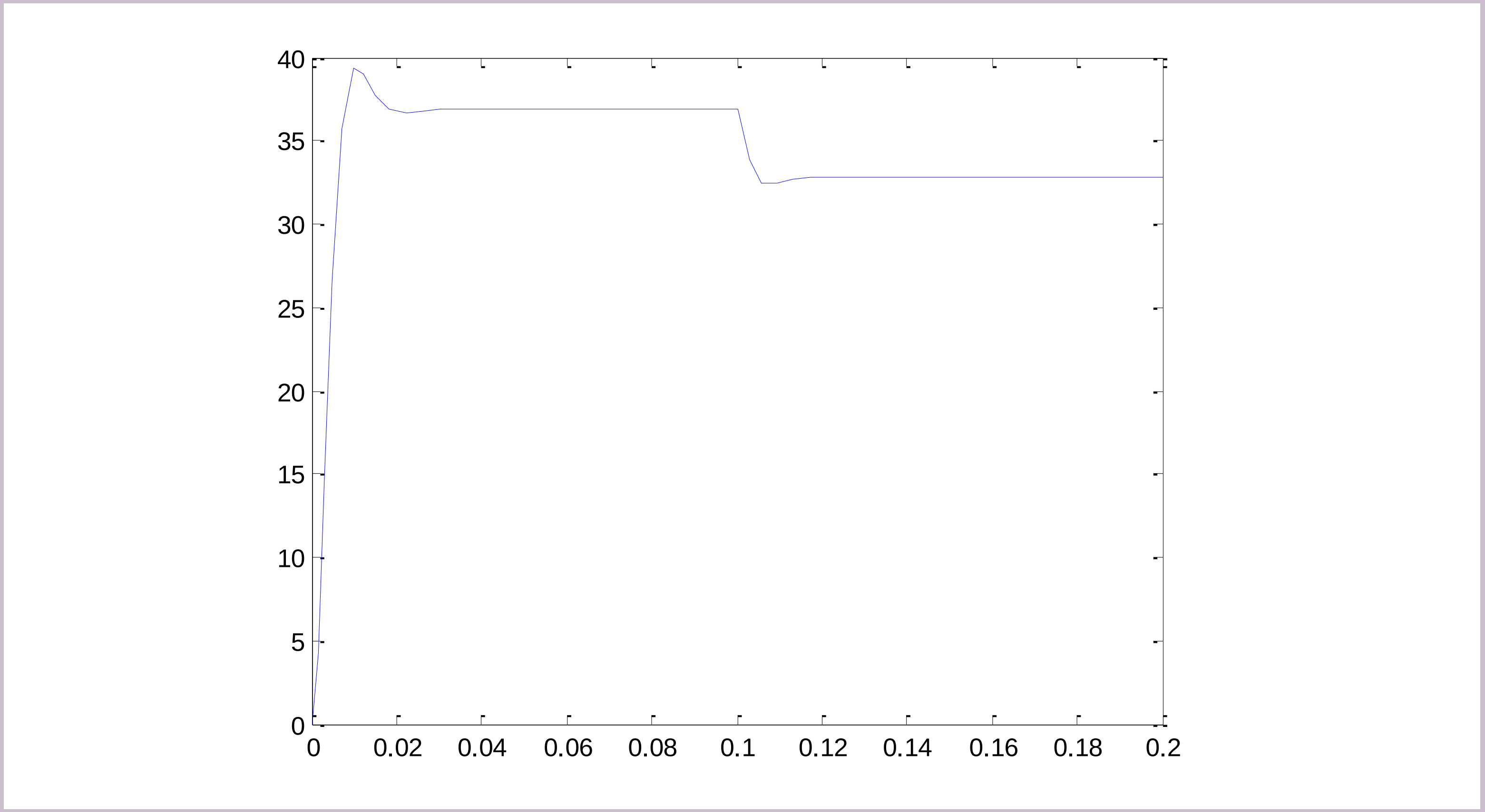
Terugkoppeling & stabiliteit: Stabiliteit & ω-domein



Terugkoppeling & stabiliteit: Stabiliteit & ω-domein



Terugkoppeling & stabiliteit: Stabiliteit & ω-domein



Terugkoppeling & stabiliteit: Stabiliteit

Enkele definities:

- stabiel systeem: responsie is begrensd op een willekeurig ingangssignaal (ook begrensd)
- betere beoordeling: responsie op een impuls gaat -> 0 voor t -> ∞, dan is het systeem stabiel
- De impulsresponsie Y(s) = 1x H(s), dus Y(s) = H(s), dus is uit het pn beeld van H(s) het systeemgedrag af te leiden.

Terugkoppeling & stabiliteit: Stabiliteit

Ligging van de systeem polen:

- linker halfvlak: op reële as of toegevoegd complex: systeem stabiel, $\beta > 0$
- Op de imaginaire as, systeem is instabiel, output is constant: oscillator, $\beta = 0$
- Rechter halfvlak: systeem is instabiel, in tijd toenemende amplitude op ieder willekeurig ingangssignaal

Terugkoppeling & stabiliteit: Stabiliteit in het s-domein

Een systeem is stabiel als:

- Responsie op een willekeurig signaal is beperkt
- Polen in het linker halfvlak

Een linear systeem is stabiel indien zijn impulsresponsie naar nul gaat als de tijd naar oneindig gaat.

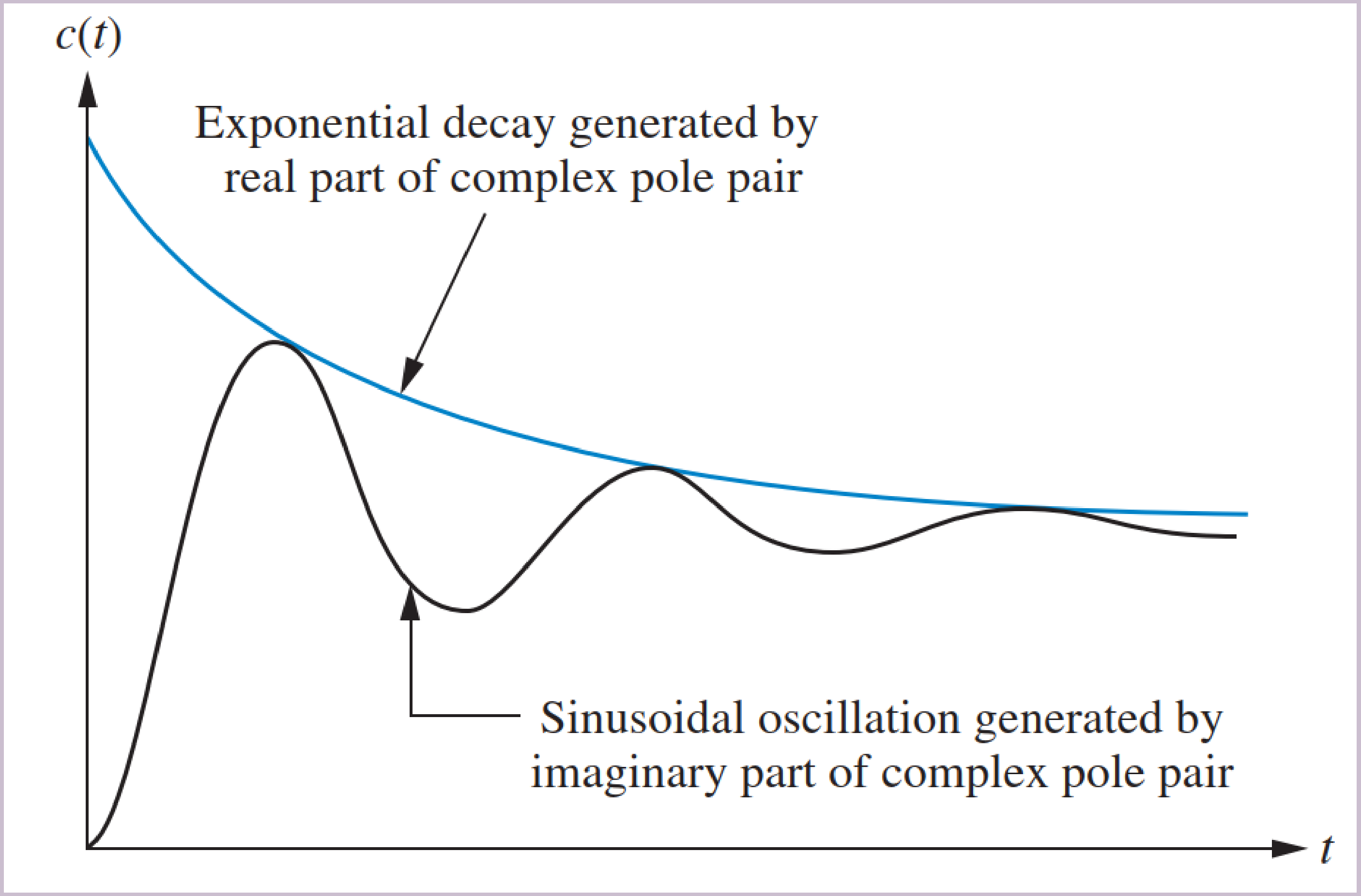
Terugkoppeling & stabiliteit: Stabiliteit in het s-domein

- een systeem is stabiel als alle polen in het linkerhalfvlak liggen (er mogen wel nulpunten in het rechterhalfvlak liggen)
- 1 of meer polen in het rechter halfvlak: systeem is instabiel
- polen op de imaginaire as: demping is nul, systeem is instabiel (eigenlijk marginaal stabiel)

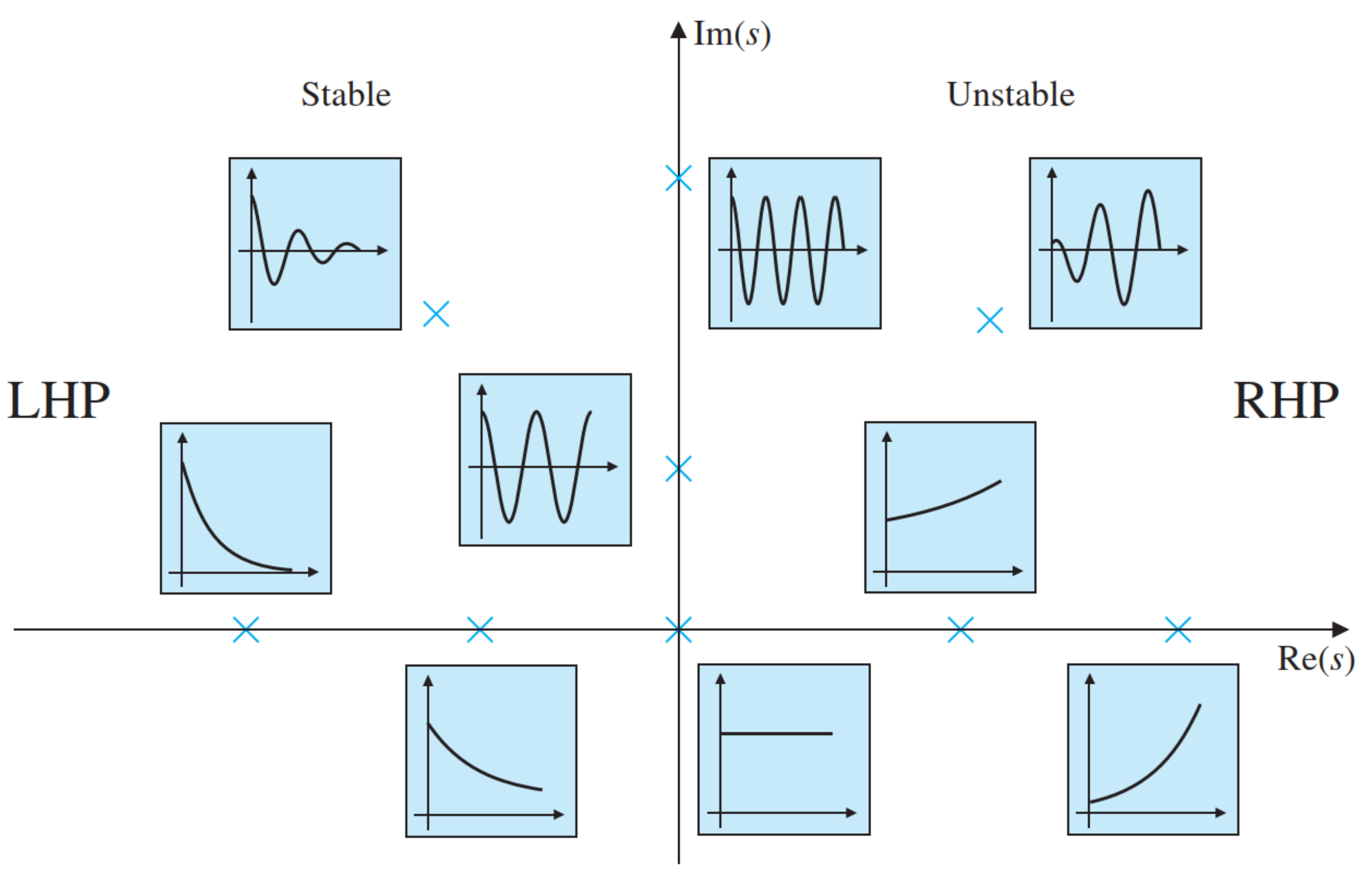
$$A_i \cdot e^{p_i t}$$

$$p_i = \lambda_i + j\omega_i$$

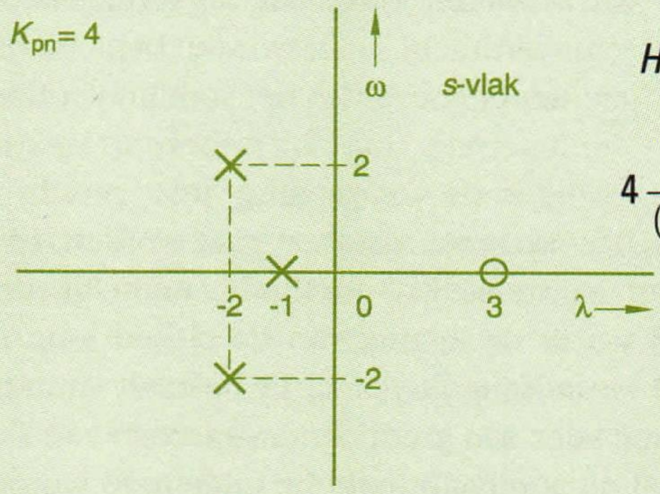
Gedempte 2de orde systeem



Stabiliteit in het *s*-domein



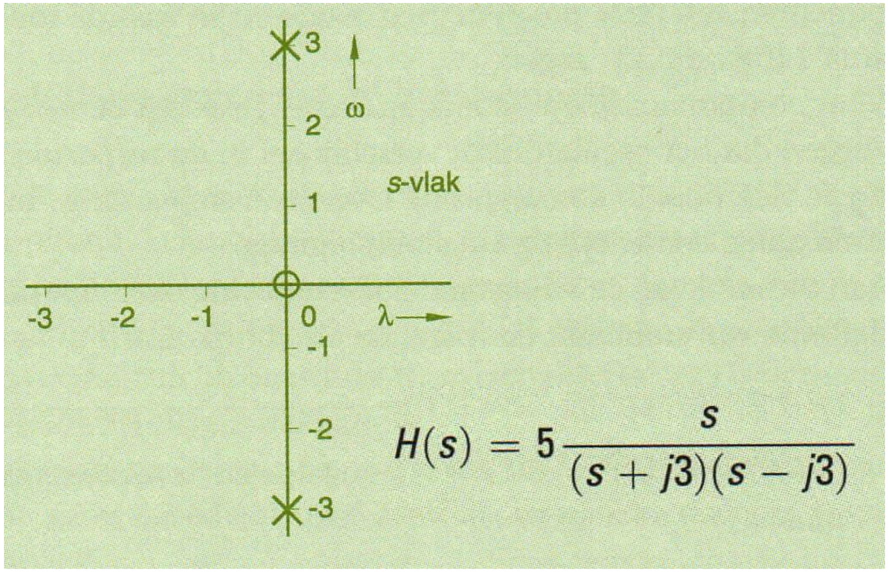
Terugkoppeling & stabiliteit: Stabiliteit



$$H(s) = \frac{4s - 12}{s^3 + 5s^2 + 12s + 8} = 4\,\frac{s-3}{(s+1)(s+2+j2)(s+2-j2)}$$

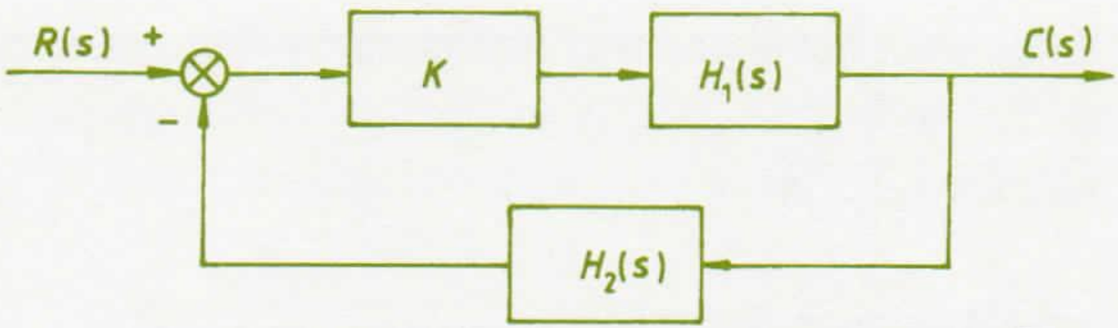
Voorbeeld van een stabiel systeem, de polen liggen in het linker halfvlak

Terugkoppeling & stabiliteit: Stabiliteit & terugkoppeling



Voorbeeld van een instabiel systeem, de polen liggen op de imaginaire as!

Terugkoppeling & stabiliteit: Stabiliteit bij terugkoppeling

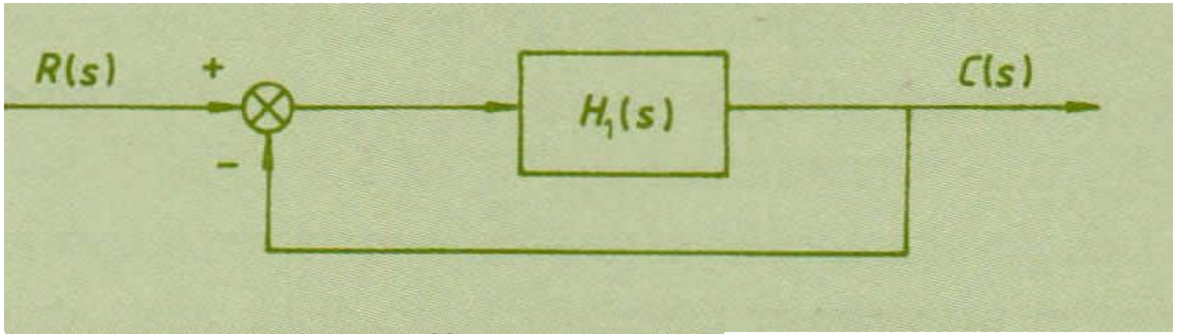


$$H(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{KH_1(s)}{1 + KH_1(s)H_2(s)}$$

$$1 + K \cdot H_1(s) \cdot H_2(s) = 0$$

Terugkoppeling & ligging van de polen van het teruggekoppelde systeem

Terugkoppeling & stabiliteit: Stabiliteit bij terugkoppeling



$$H_1(s) = \frac{K}{1+\tau s} = \frac{\frac{K}{\tau}}{s+\frac{1}{\tau}}$$

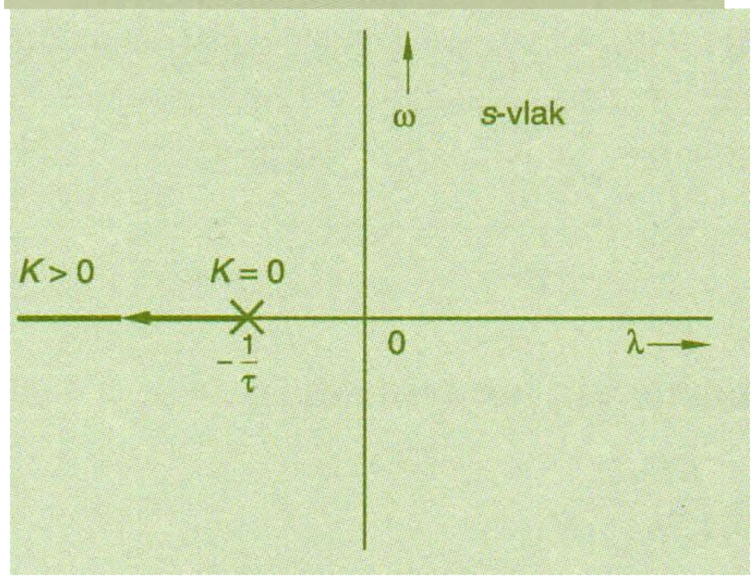
Overdracht systeem

$$H(s) = \frac{K}{1+\tau s+K} = \frac{\frac{K}{\tau}}{s+\frac{1+K}{\tau}}$$

Overdracht teruggekoppeld systeem

Terugkoppeling & stabiliteit: Stabiliteit bij terugkoppeling

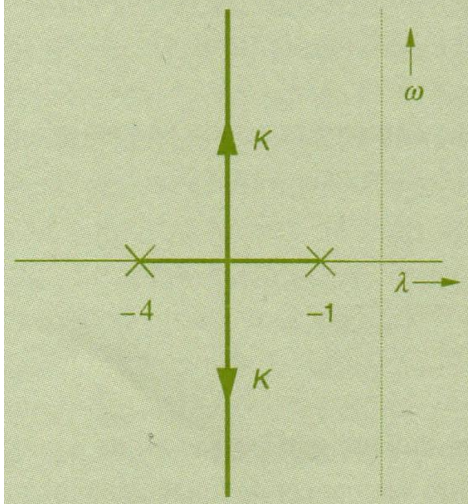
$$H(s) = \frac{K}{1 + \tau s + K} = \frac{\frac{K}{\tau}}{s + \frac{1+K}{\tau}}$$



$K = 0 \Rightarrow H_{CL} = H_{OPEN}$
$K > 0 \Rightarrow H_{CL} = stabiel$; pool naar links
$-1 < K < 0 \Rightarrow \mathrm{H_{CL}} = \mathrm{stabiel}$, pool naar rechts
$K \succ -1 \Rightarrow H_{CL} = instabiel$

Terugkoppeling & stabiliteit: Stabiliteit bij terugkoppeling

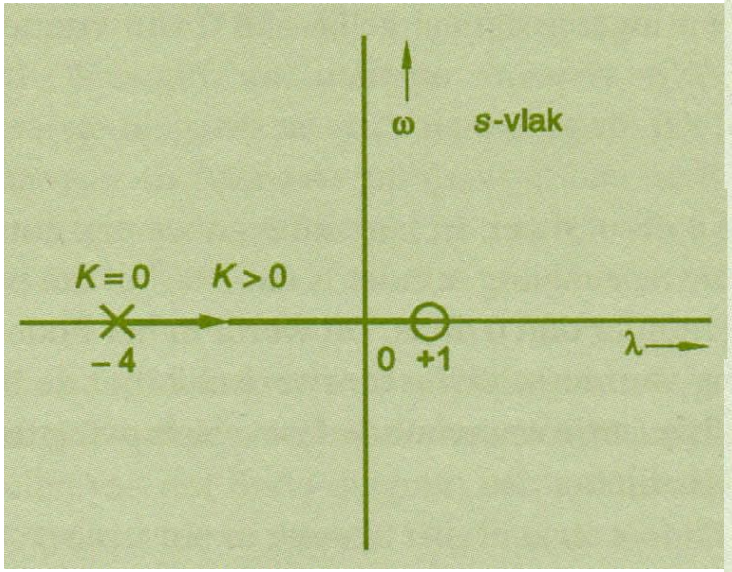
$K \leq 2.25 \Rightarrow H_{CL} = stabiel$
$K > 2.25 \Rightarrow H_{CL} = stabiel; oscillatie\ vanwege\ complexe\ polen$



$$H(s) = \frac{K}{(s+1)(s+4)+K}$$

$$s_{1,2} = -2,5 \pm j\sqrt{K-2,25}$$

Terugkoppeling & stabiliteit: Stabiliteit bij terugkoppeling



$$H_1(s) = \frac{K(s-1)}{(s+4)}$$

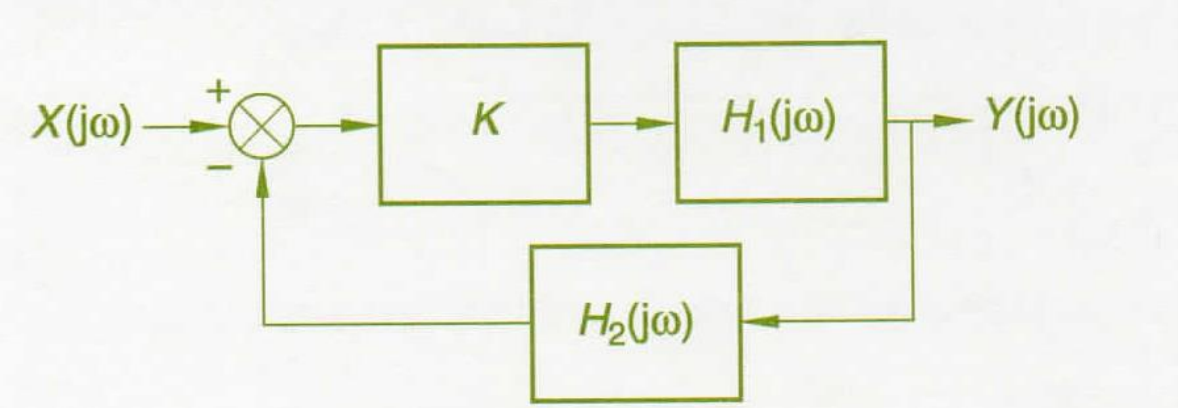
$$H(s) = \frac{K(s-1)}{(s+4)+K(s-1)}$$

$$(s+4)+K(s-1)=0$$

$K \rightarrow \infty, s = 1 \Rightarrow H_{CL} = instabiel K = 0, s = -4 \Rightarrow H_{CL} = H_{OPEN}$

$K = 4, s = 0 \Rightarrow H_{CL} \rightarrow pool\ op\ oorsprong \Rightarrow instabiel.$

Terugkoppeling & stabiliteit: Stabiliteit & ω-domein



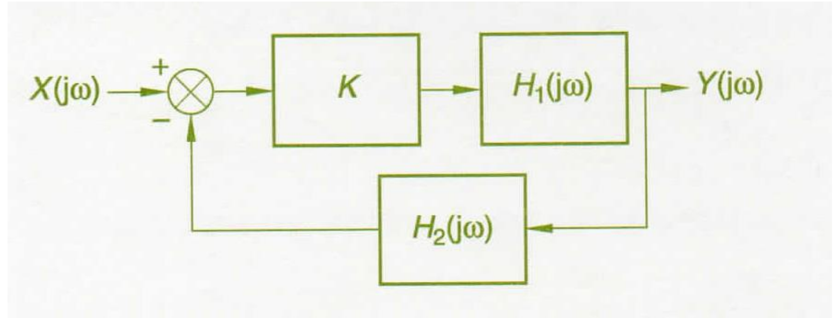
$$H_{tot}(j\omega) = \frac{H_{rechtdoorgaand}(j\omega)}{1 + H_{rondgaand}(j\omega)} = \frac{KH_1(j\omega)}{1 + KH_1(j\omega)H_2(j\omega)}$$

Als: $1 + H_{rondgaand}(j\omega) = 0$ dan: $H_{tot}(j\omega) = \infty$

Met: $H_{rondgaand}(j\omega) = K \cdot H_1(j\omega) \cdot H_2(j\omega)$

Lusversterking is: $\left| H_{rondgaand}(j\omega) \right|$

Terugkoppeling & stabiliteit: Stabiliteit & ω-domein



Terugkoppeling & stabiliteit: Stabiliteit & ω-domein

In het Bode-diagram van $H_{rondgaand}(j\omega)$ kan de stabiliteit van een geregeld systeem worden onderzocht door te kijken of bij een fase-naijling van 180° de lusversterking gelijk aan of groter is dan 1, ofwel 0 dB of meer. Dit leidt tot de begrippen **fasemarge** en **versterkingsmarge**.

De stabiliteit is ook te beoordelen op basis van de polaire figuur, het Nyquistdiagram. Het stabiliteitscriterium van Nyquist luidt in het kort:
Als men over de polaire figuur van $H_{rondgaand}(j\omega)$ gaat van $\omega = 0$ naar $\omega = \infty$ en het punt -1 wordt **niet omsloten**, dan is het systeem stabiel.

Deze methode is echter alleen geldig voor systemen en regelaars met polen in het linkerhalfvlak en/of in de oorsprong.

Terugkoppeling & stabiliteit: Stabiliteit & ω-domein

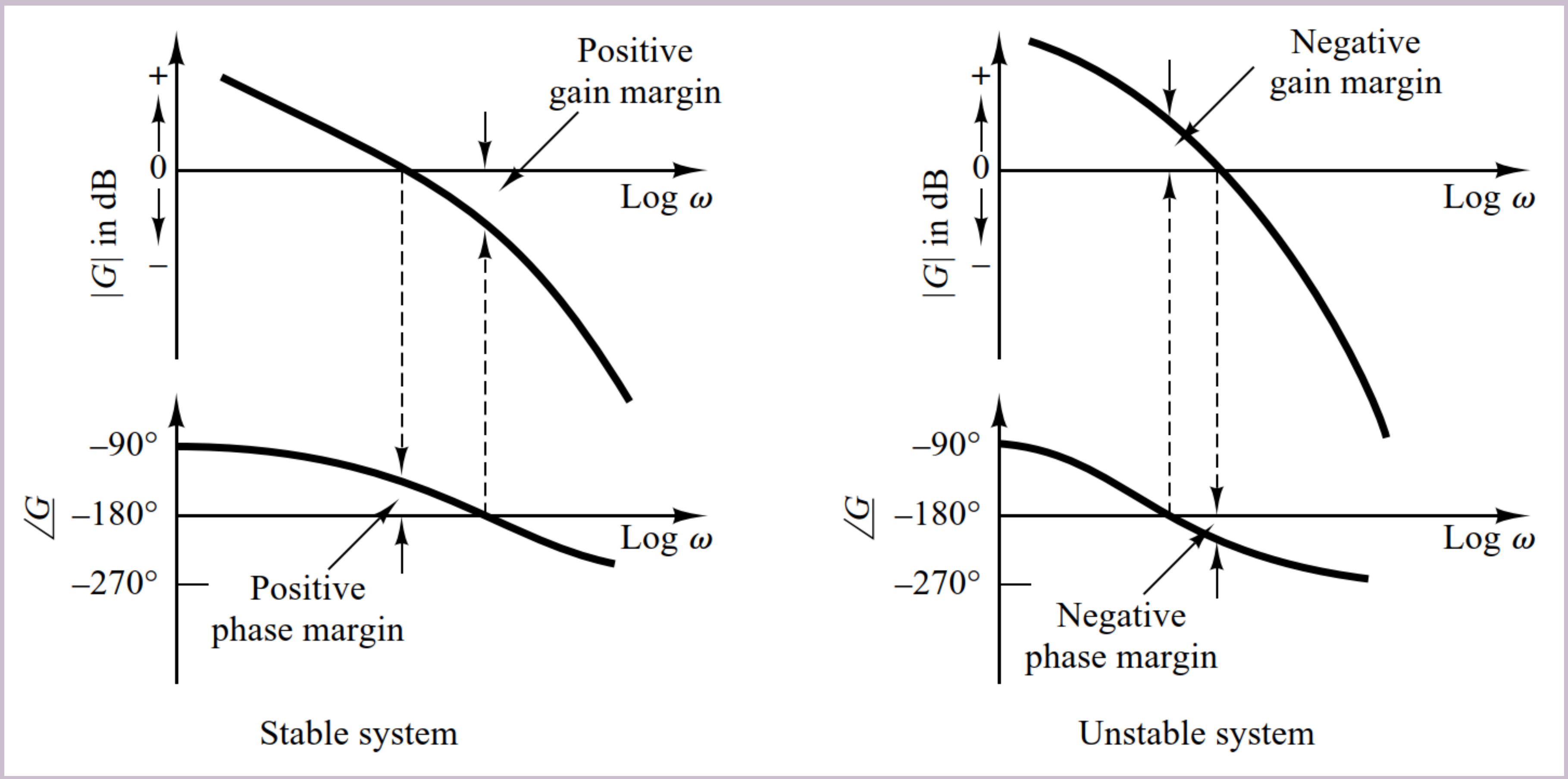
Stabiliteitscriterion:

$H_L \neq -1$ dus: $|H_L| \neq 1$ en tegelijkertijd $\arg(H_L) \neq -180°$

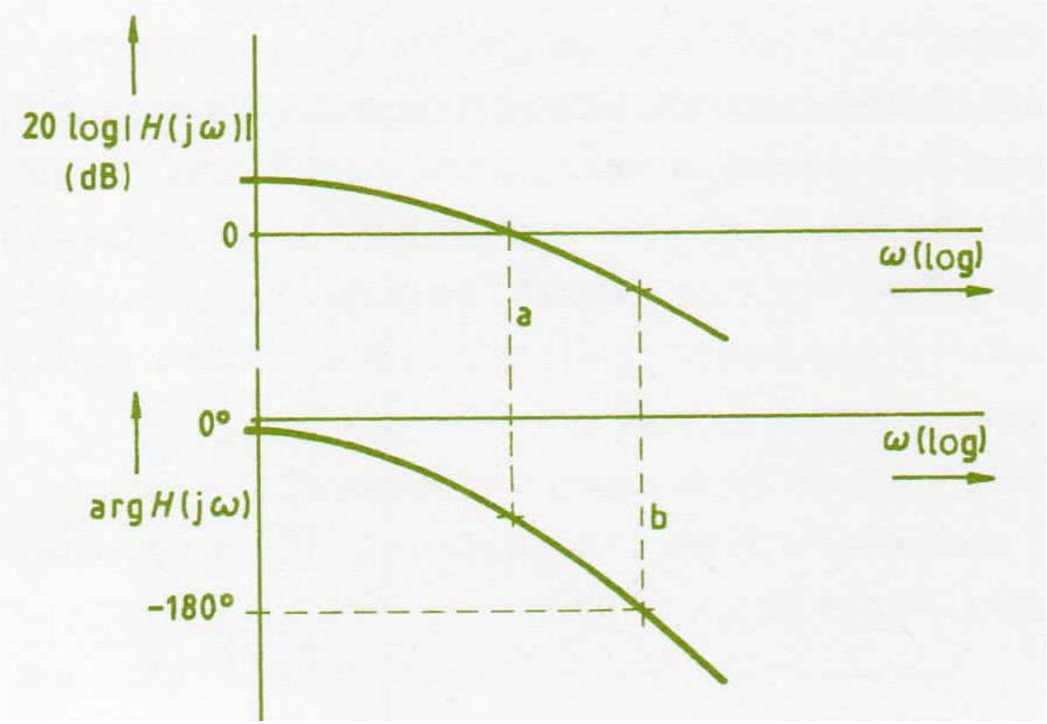
Versterkingsmarge = Het verschil tussen de amplitude van H_L en 0 dB op de frequentie waarop $\arg(H_L) = -180°$

Fasemarge= Het verschil tussen de fase van H_L en $-180°$ op de frequentie waarop $H_L = 0$ dB.

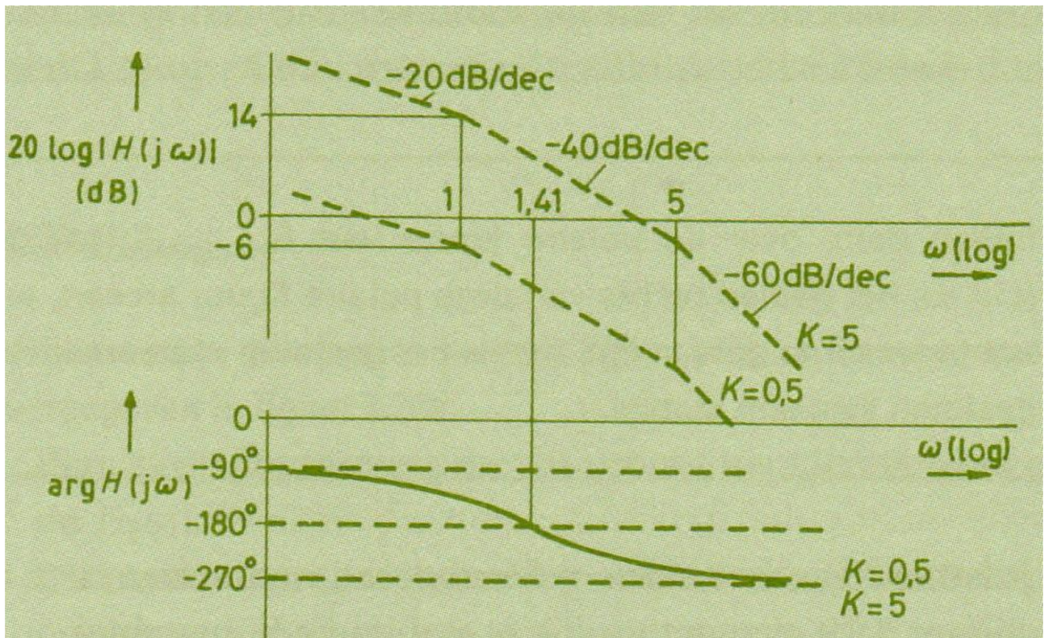
Terugkoppeling & stabiliteit: Stabiliteit & ω-domein



Terugkoppeling & stabiliteit: Stabiliteit & ω-domein



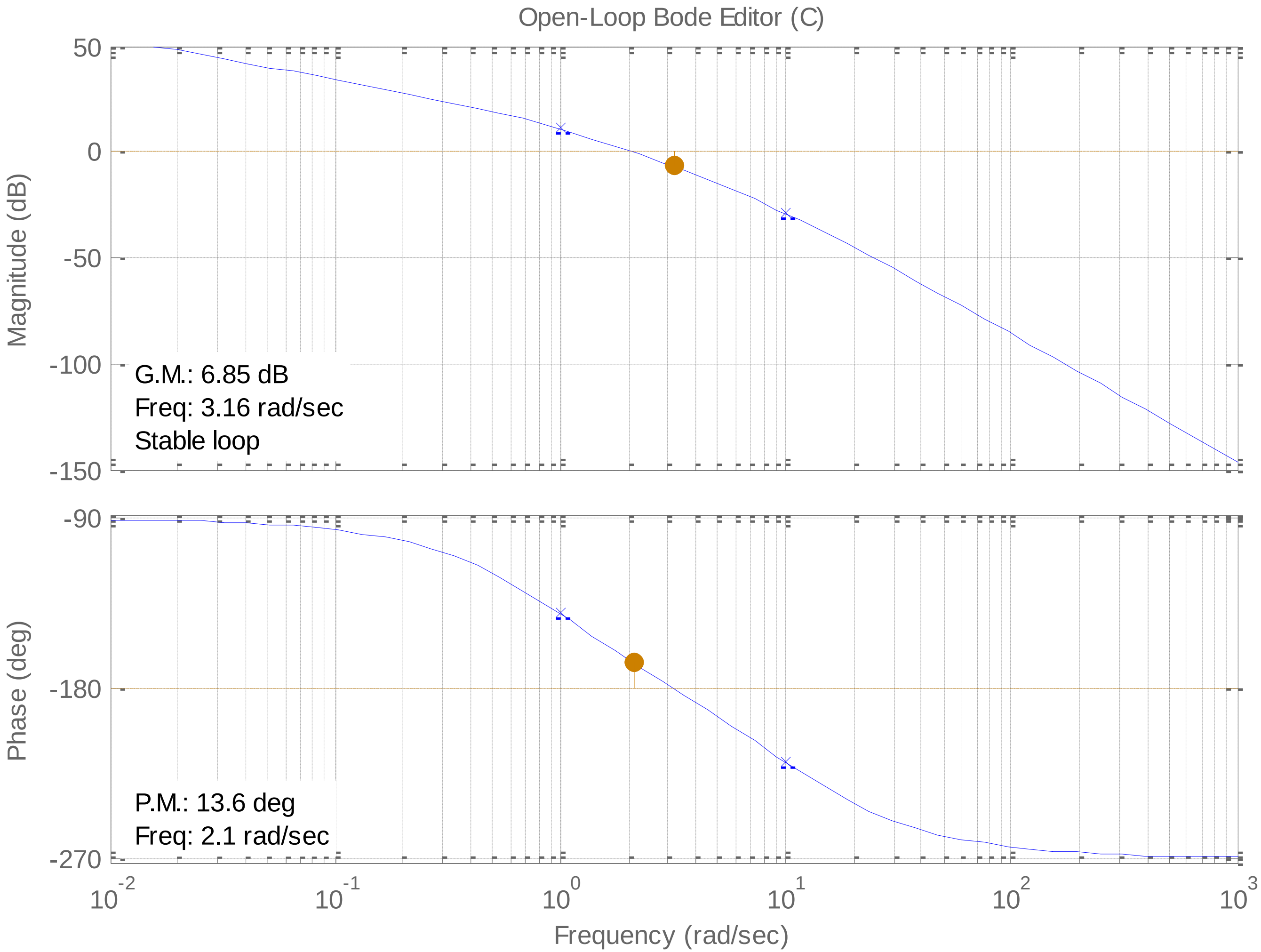
Terugkoppeling & stabiliteit: Stabiliteit & ω-domein



$$H_{rondgaand}(j\omega) = \frac{K}{j\omega(1 + j\omega\,0{,}2)(1 + j\omega)}$$

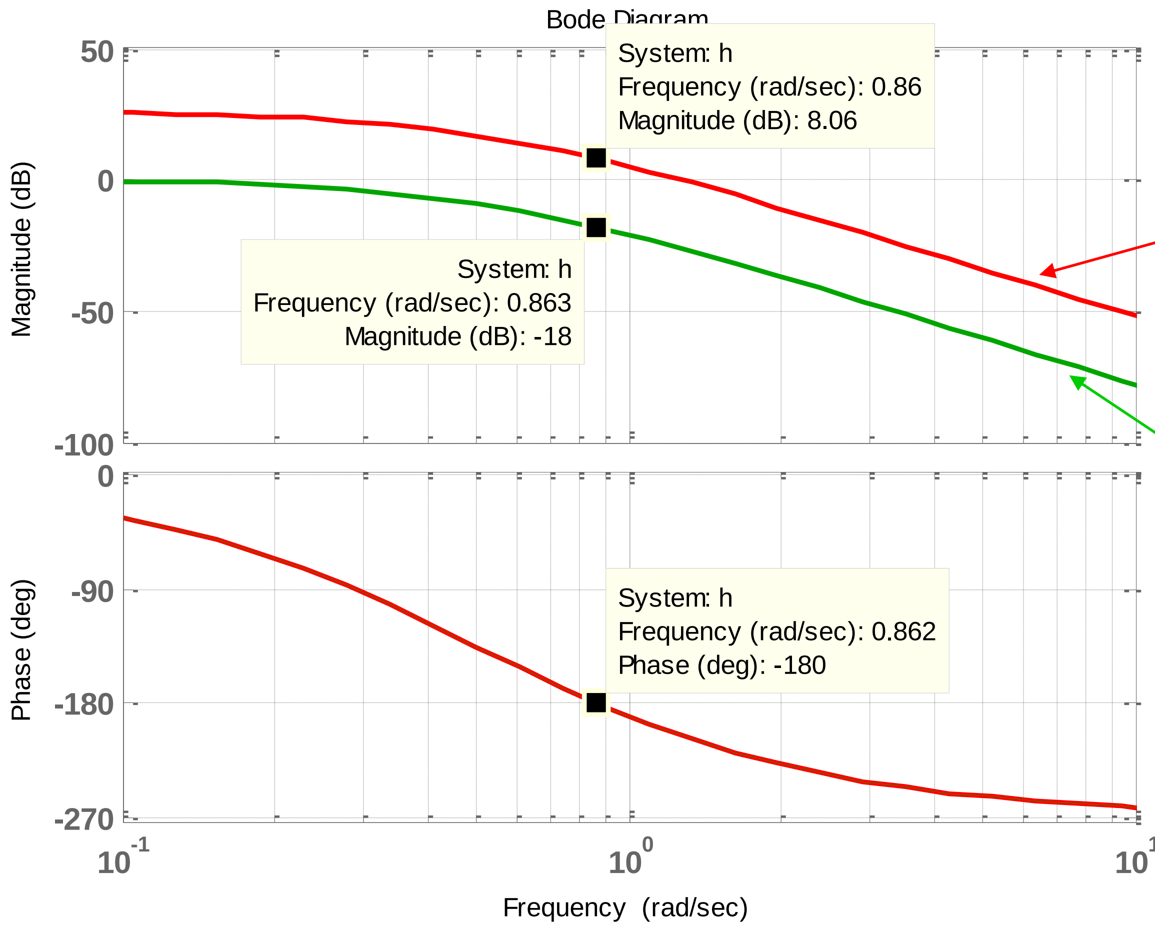
ω-domain

Bode plot 3rd order system, K = 1: $H(s) = \dfrac{50}{s(s+1)(s+10)}$



Terugkoppeling & stabiliteit: Stabiliteit & ω-domein

Uit het Bodediagram van de lusoverdracht volgt of het regelsysteem stabiel is of niet:



$$H_L(s) = \frac{20}{(2s+1)^3}$$

Instabiel omdat $|HL(j\omega)|>1$ bij $\arg\{HL(j\omega)\}=-180°$

$$H_L(s) = \frac{1}{(2s+1)^3}$$

Stabiel omdat $|HL(j\omega)|<1$ bij $\arg\{HL(j\omega)\}=-180°$

Terugkoppeling & stabiliteit: Stabiliteit & ω-domein

Opgave: gegeven het systeem: $$H(s) = \frac{3162}{(s+10)^3}$$

Gevraagd: GESLOTEN-LUS STABIEL?

- bereken de fasemarge-frequentie en de fasemarge
- bereken de versterkingsmarge-frequentie en de versterkingsmarge

ω-domain

Rekenvoorbeeld Fasemarge.

Gegeven een 3e orde systeem: $H(s) = \dfrac{3162}{(s+10)^3}$ Bereken FM en ω_{FM}

$$H(j\omega) = \frac{3162}{(j\omega+10)^3}$$

ω_{FM} is de frequentie waarop |H(jω)| = 0 dB = factor 1

$$\left|H(j\omega)\right| = \left|\frac{3162}{(j\omega+10)^3}\right| = \frac{3162}{\left|j\omega+10\right|^3} = \frac{3162}{\left\{\sqrt{\omega^2+10^2}\right\}^3} = 1$$

ω_{FM} = 10.7 rad/s.

arg(H(jω)) = - 3 * $\tan^{-1}$(ω/10) = - 3 * $\tan^{-1}$(10.7/10) = - 141.2º

PM = 180º - 141.2º = 38.8º

ω-domain

Rekenvoorbeeld Versterkingsmarge.

$$H(s) = \frac{3162}{(s+10)^3}$$

Bereken VM and ω_{VM}

$$H(j\omega) = \frac{3162}{(j\omega+10)^3}$$

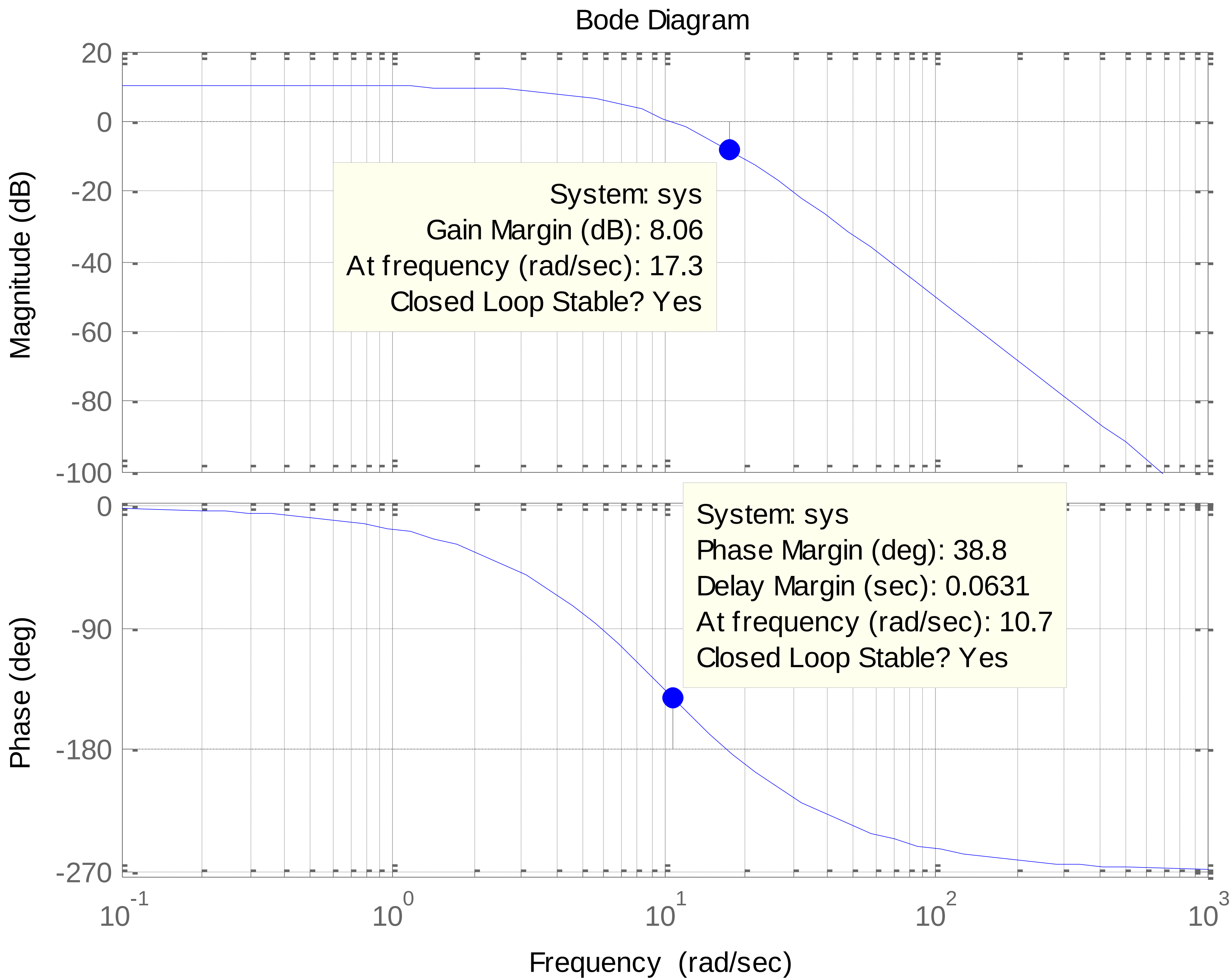
ω_{VM} is frequentie waarop arg(H(jω)) = - 180º

arg(H(jω)) = - 3 * $\tan^{-1}$(ω/10) = - 180º

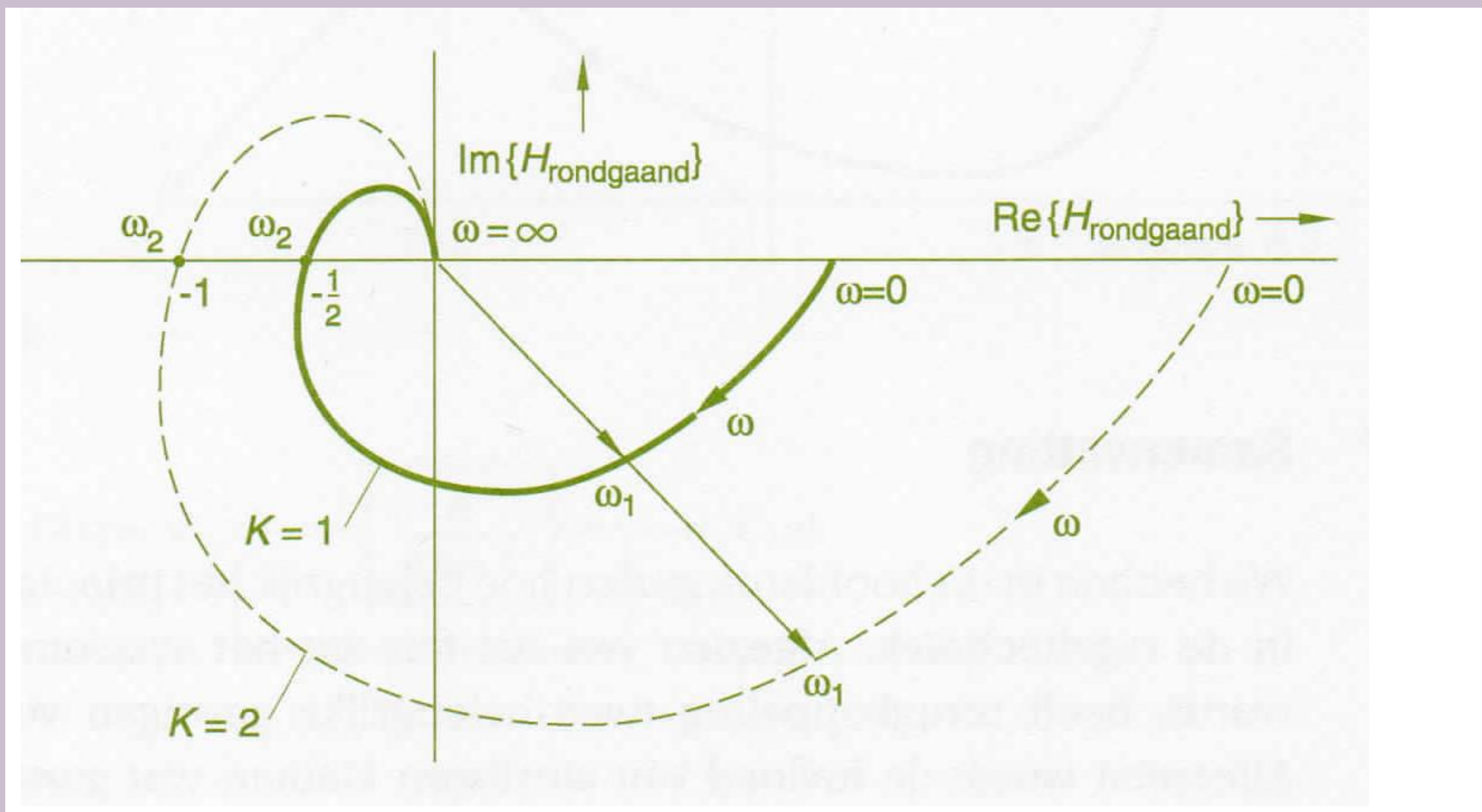
ω_{GM} = 17.3 rad/s.

$$\left|H(j\omega)\right| = \frac{3162}{\left\{\sqrt{\omega^2+10^2}\right\}^3} = \frac{3162}{\left\{\sqrt{17.3^2+10^2}\right\}^3} = \frac{3162}{8000} = 0.395\times = -8.06dB$$

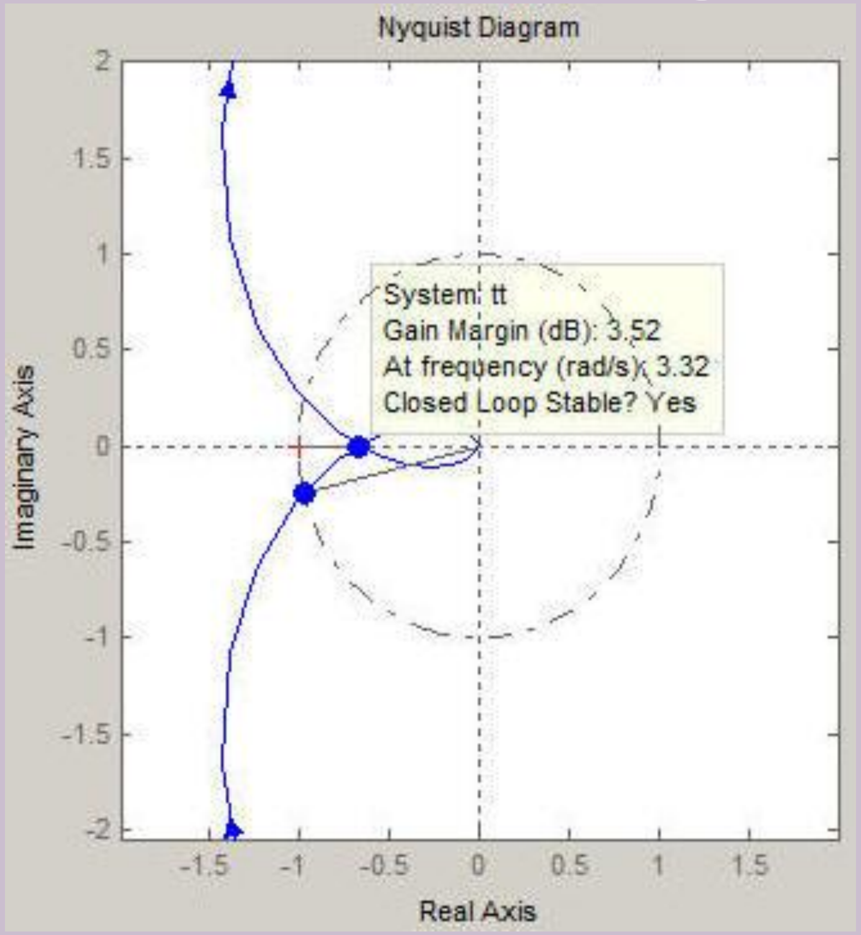
GM = 0 – (– 8.06) = 8.06 dB

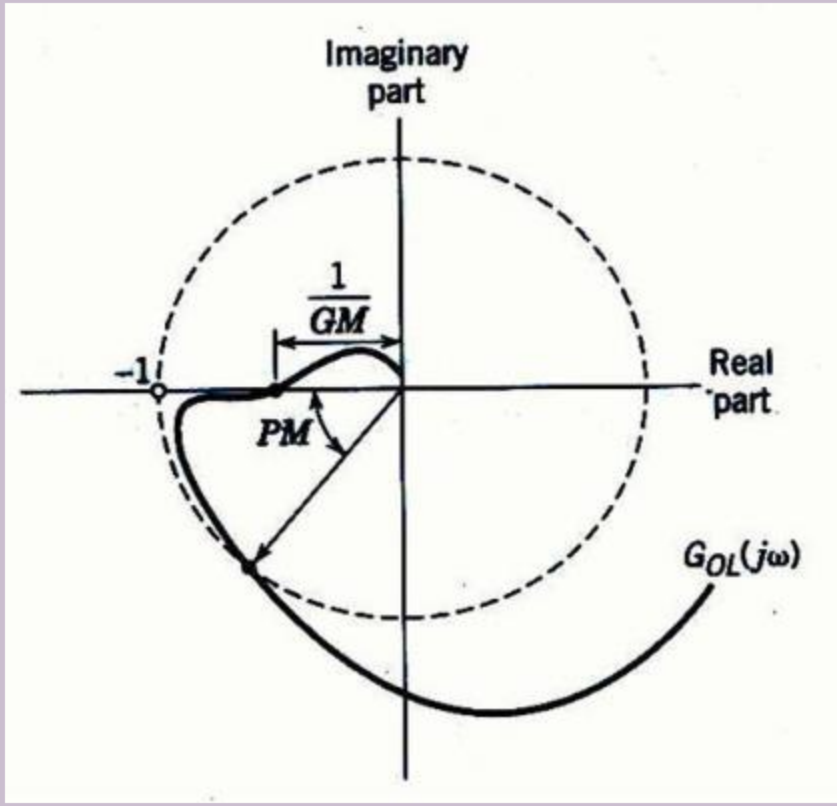

Bode Diagram
Magnitude (dB)
20
0
-20
-40
-60
-80
-100
System: sys
Gain Margin (dB): 8.06
At frequency (rad/sec): 17.3
Closed Loop Stable? Yes
Phase (deg)
0
-90
-180
-270
System: sys
Phase Margin (deg): 38.8
Delay Margin (sec): 0.0631
At frequency (rad/sec): 10.7
Closed Loop Stable? Yes
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
10^{3}
Frequency (rad/sec)

Terugkoppeling & stabiliteit: Stabiliteit & ω-domein



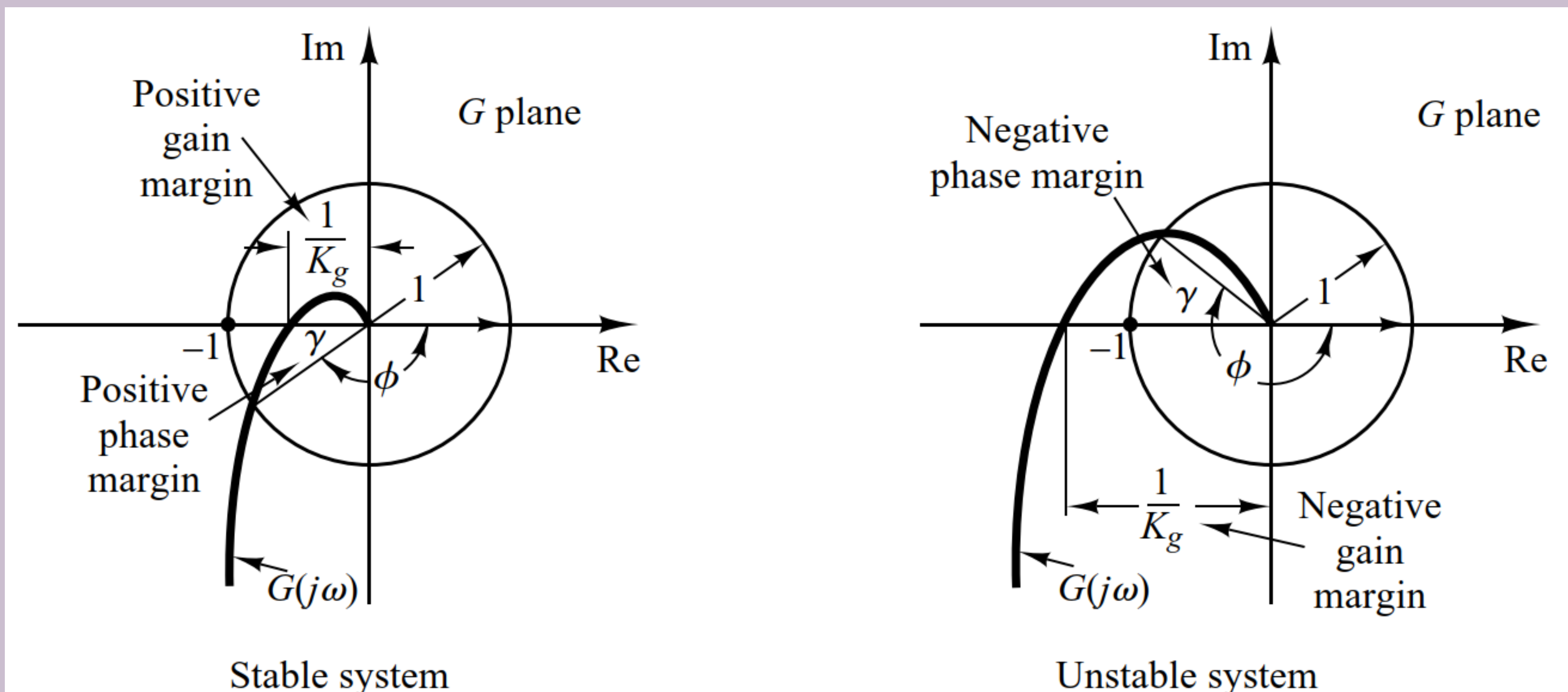
Versterkingsmarge in Nyquist



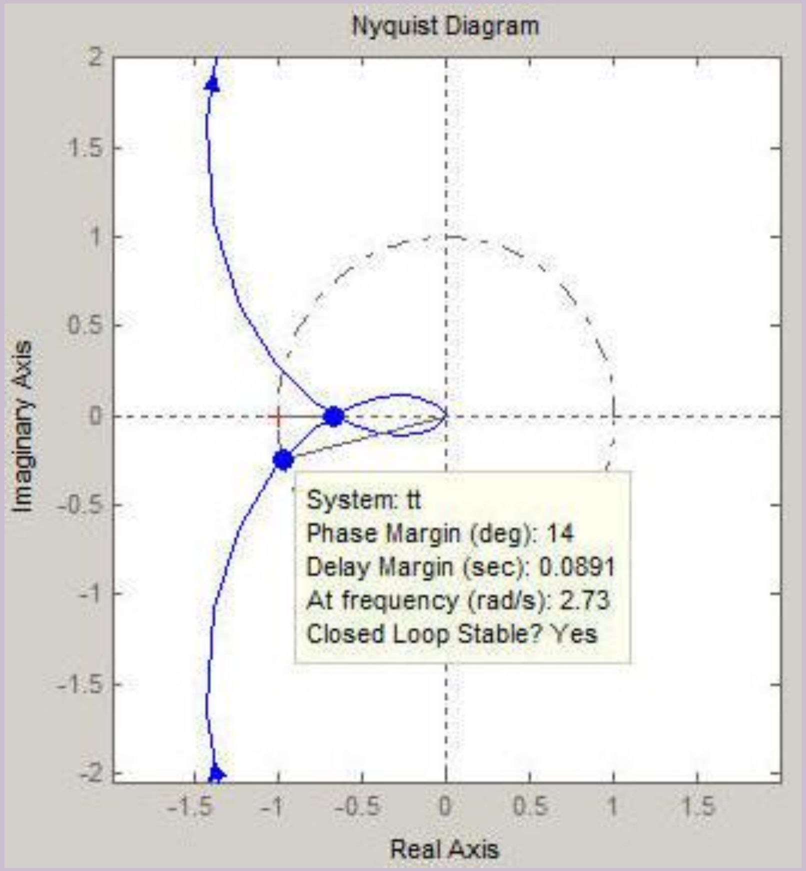


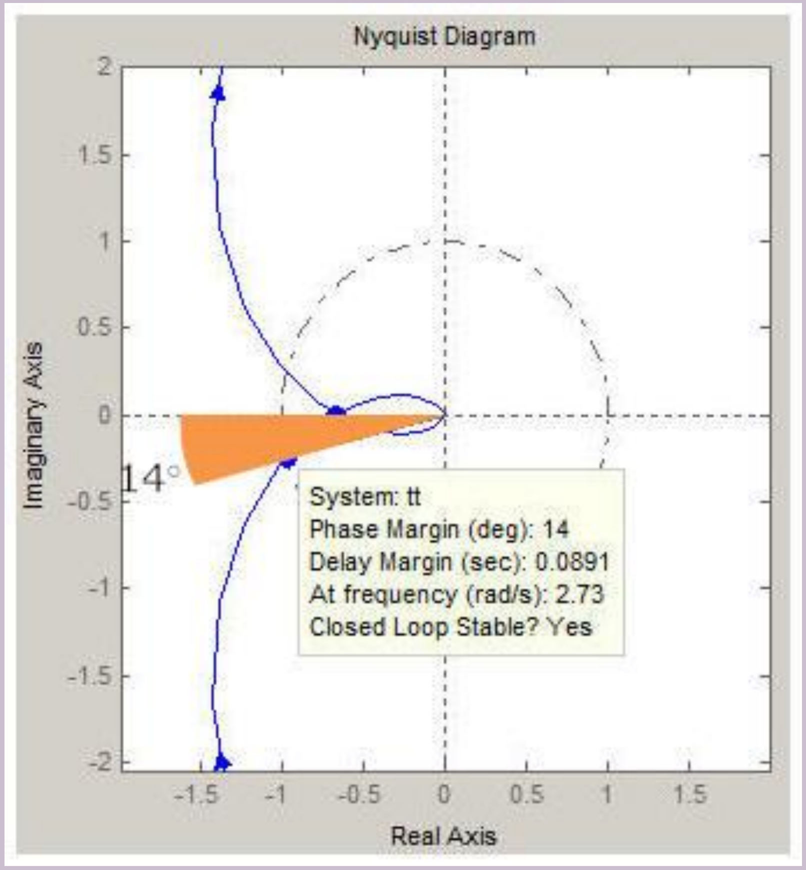
http://lpsa.swarthmore.edu/Nyquist/NyquistStability.html

Versterkingsmarge in Nyquist

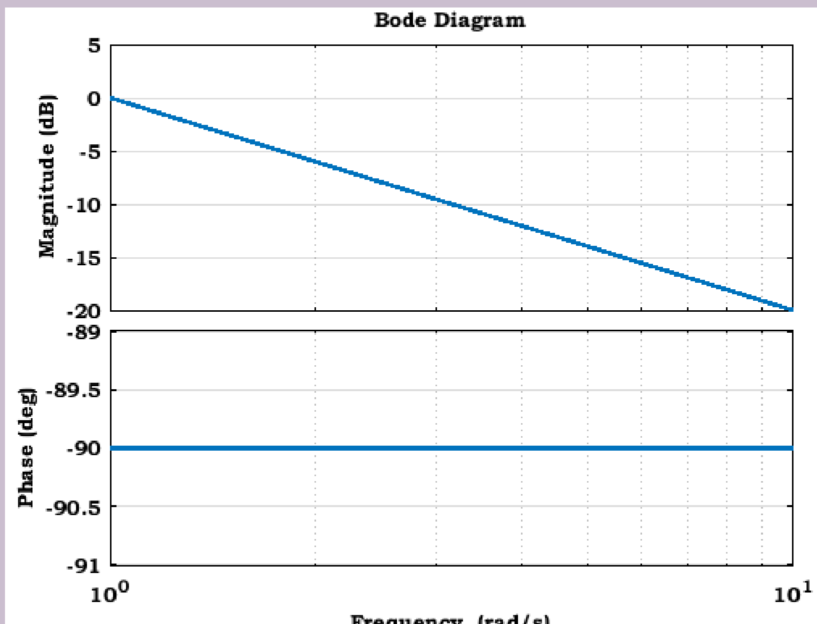


Fasemarge in Nyquist



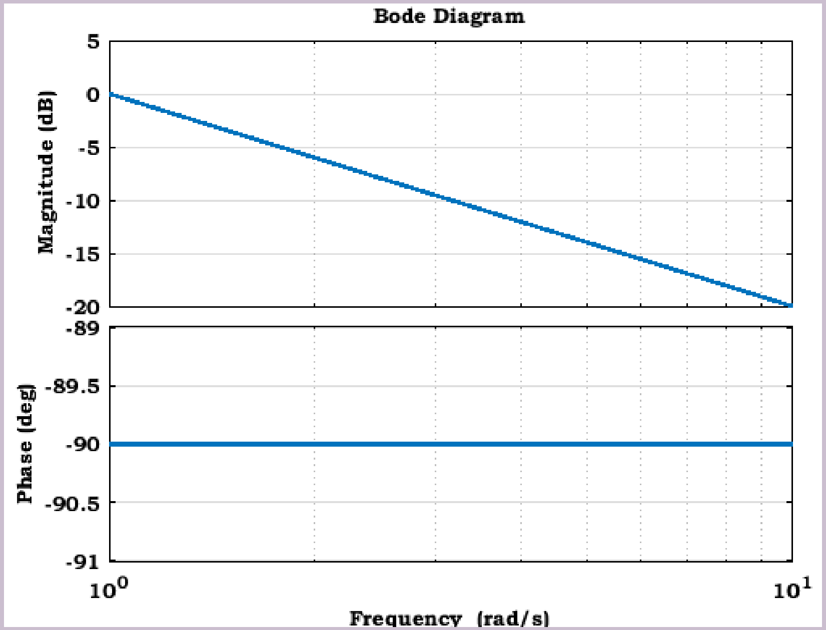


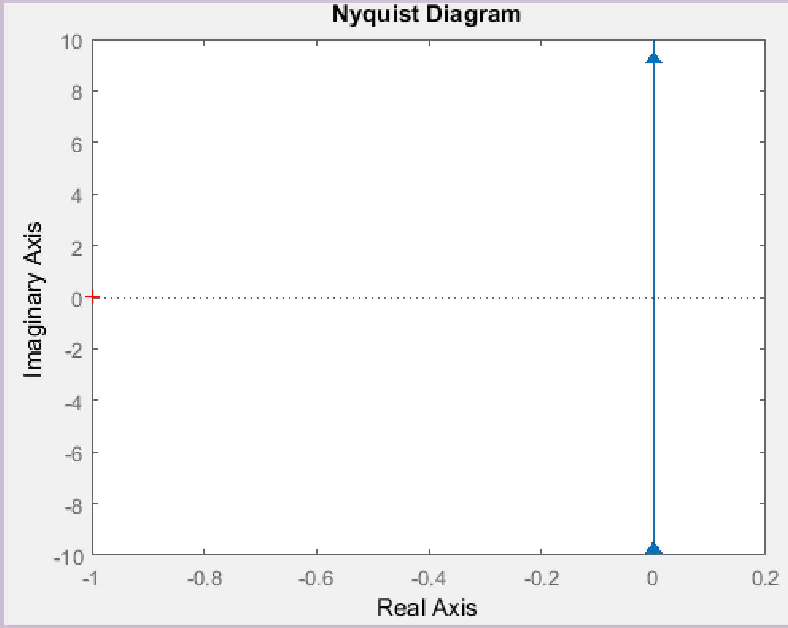
Integrator, gesloten-lus stabiel?



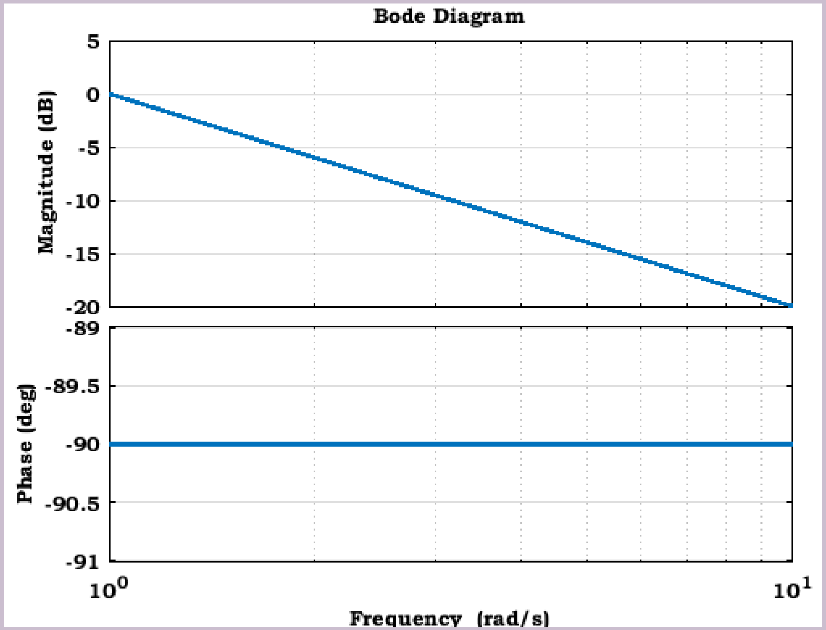
$$H_{OL}(s) = \frac{1}{s}$$

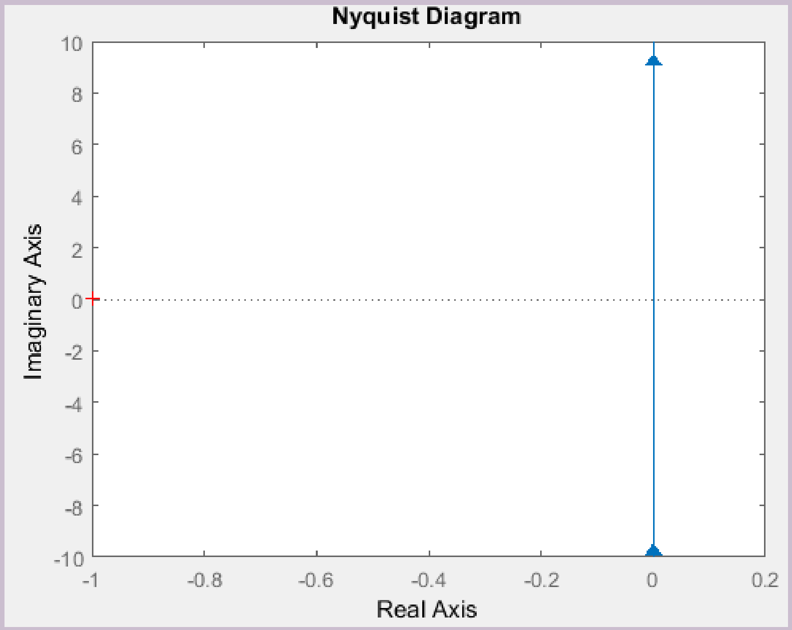
Integrator, gesloten-lus stabiel?





Integrator, gesloten-lus stabiel?

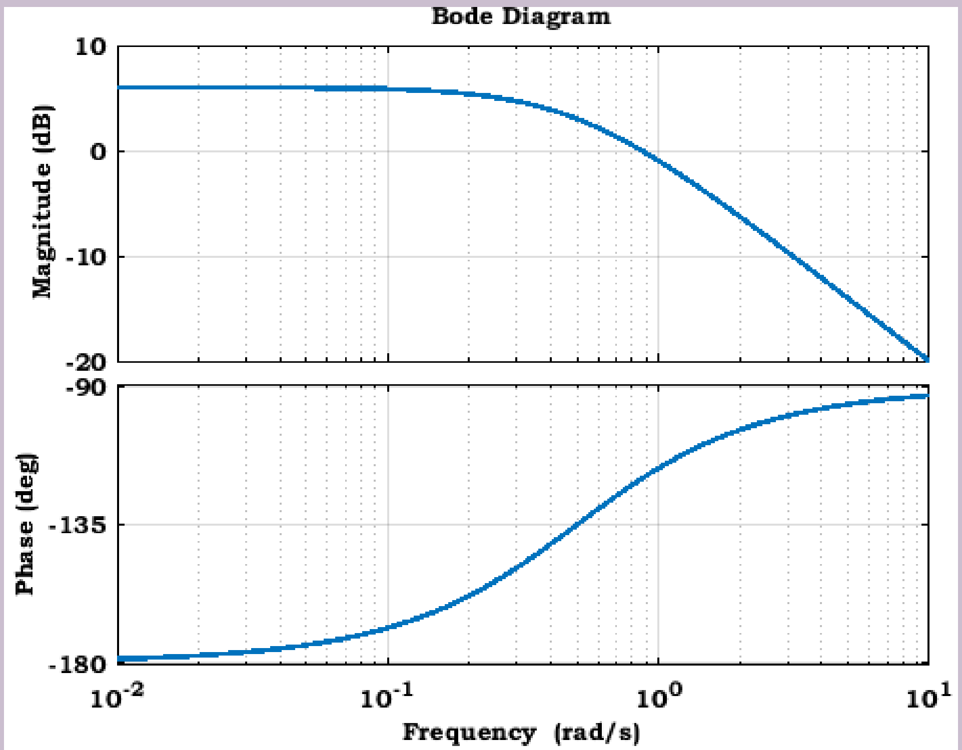




$H_{CL}(s) = \frac{\frac{1}{s}}{1+\frac{1}{s}} = \frac{1}{s+1}$, pool = -1, gesloten-lus stabiel, maar open-lus instabiel

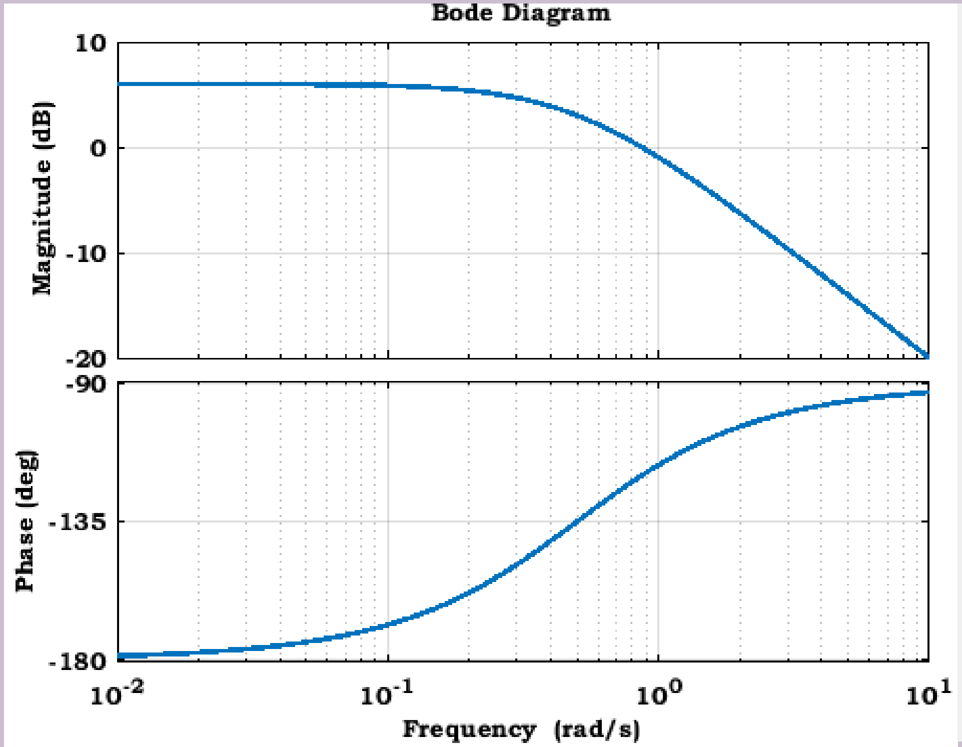
Rechterhalfvlak pool, gesloten-lus stabiel?

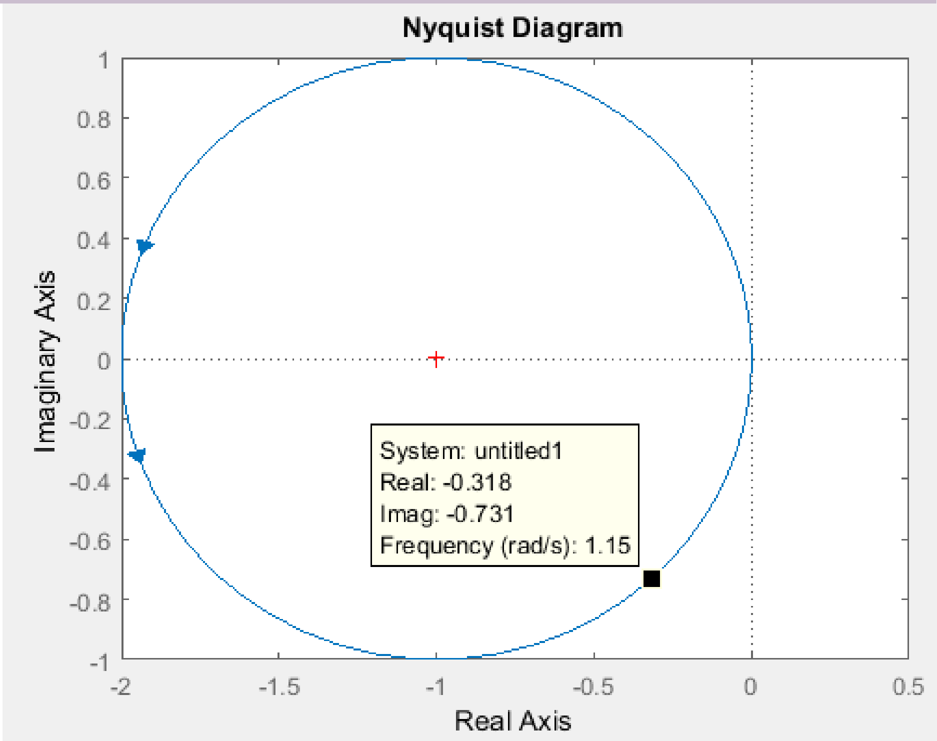
$$H_{OL}(s) = \frac{1}{s - 0.5}$$



Rechterhalfvlak pool, gesloten-lus stabiel?

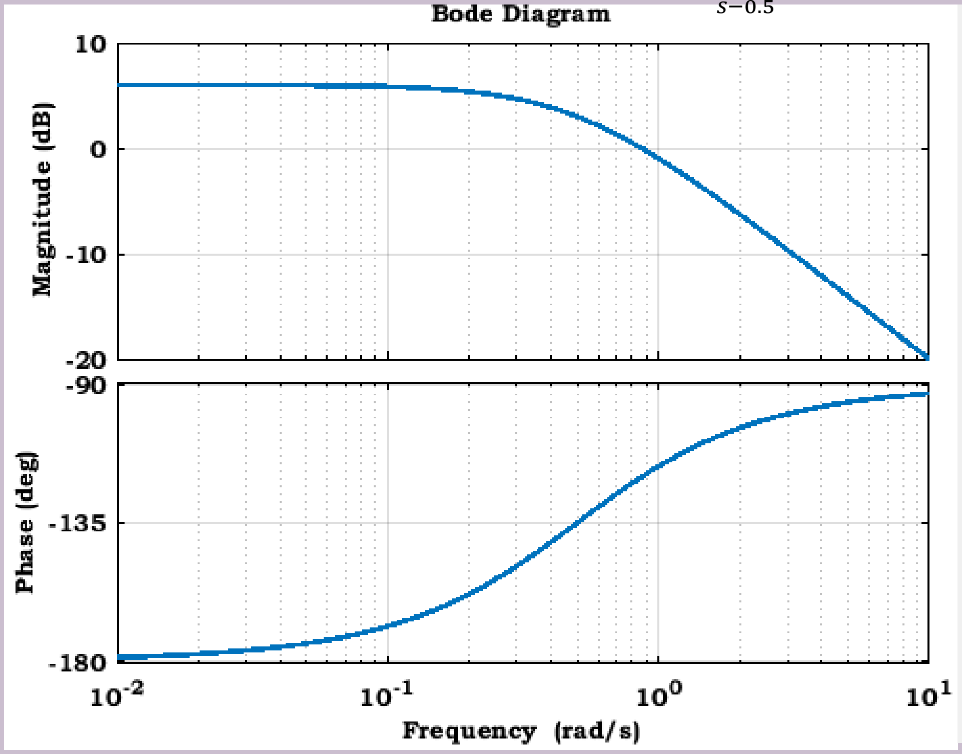
$$H_{OL}(s) = \frac{1}{s - 0.5}$$

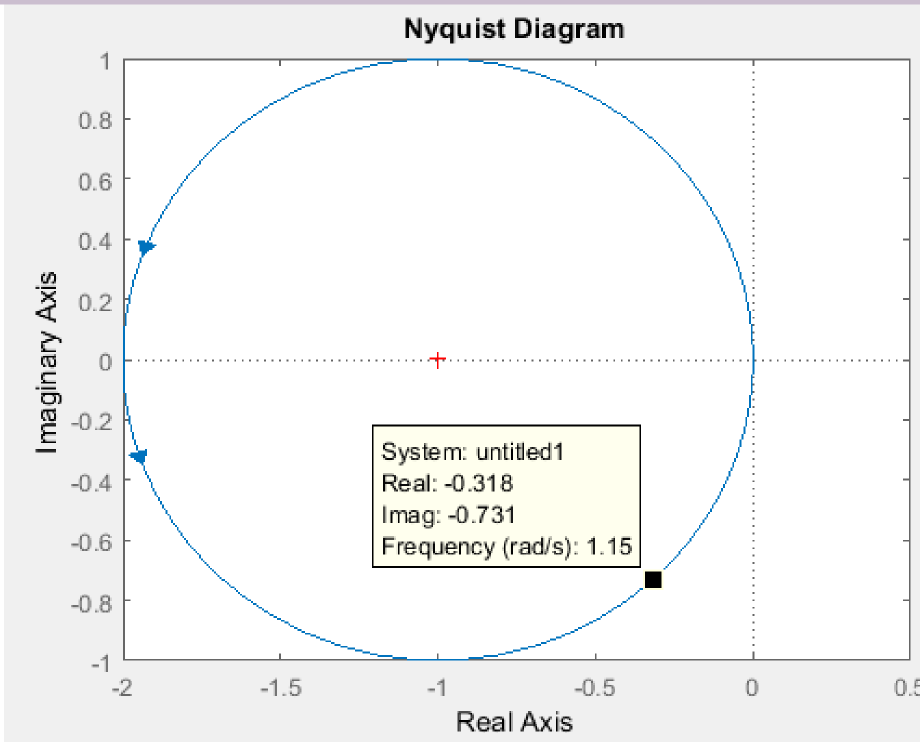




Rechterhalfvlak pool, gesloten-lus stabiel?

$$H_{OL}(s) = \frac{1}{s-0.5} \qquad H_{CL}(s) = \frac{\frac{1}{s-0.5}}{1+\frac{1}{s-0.5}} = \frac{1}{s+0.5}$$ *, eigenlijk is het stabiel.*





Rechterhalfvlak pool, gesloten-lus stabiel?

$H_{OL}(s) = \frac{1}{s-0.5}$ $\qquad$ $H_{CL}(s) = \frac{\frac{1}{s-0.5}}{1+\frac{1}{s-0.5}} = \frac{1}{s+0.5}$ $\quad , eigenlijk\ is\ het\ stabiel.$

Conclusie: Stabilitititeitsonderzoek via Versterkingsmarge en Fasemarge geldt niet voor systemen die in het rechtere half-vlak een pool of nulpunt hebben.

Conclusie2: Wij zoeken echter naar stabiliteit van stabiele systemen ☺
Dat omdat een hoge versterking K, het systeem instabiel kan maken. Daar gaat het hele onderzoek om.