Identificazione e controllo di Processi

Inverted Pendulum on Cart

Aniello Di Donato

A.A 2024/25

Università Degli Studi della Campania ”Luigi Vanvitelli”

Sezioni

1. Definizione del problema
2. Modello
3. Identificazione
4. MPC
5. Implementazione MPC

Definizione del problema

Descrizione del sistema

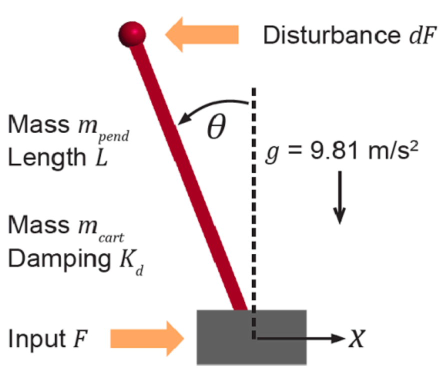


Figure 1: Pendulum on Cart

Parametri

- Massa del carrello $M_{cart} = 1\ [Kg]$
- Massa del pendolo $m_{pend} = 1\ [Kg]$
- Gravity $g = 9.81\ [m/s^2]$
- Lunghezza pendolo $L_{pend} = 0.5\ [m]$
- Coefficiente d'attrito del carrello $K_d = 10$

Uscite misurate

- Angolo del pendolo $\theta\ [rad]$
- Posizione del carrello $x\ [m]$

Ingresso di controllo

- Forza applicata al carrello $F\ [N]$

Obiettivi di controllo

Assumendo le seguenti **condizioni iniziali** per il sistema carrello/pendolo :

- Il carrello è stazionario a $x = 0$
- Il pendolo inverso è stazionario nella posizione verticale $\theta = 0$

Gli obiettivi di controllo sono:

- In seguito ad un cambio di set-point:
  - Il carrello può essere mosso in una nuova posizione tra $[-10, 10]$, mantenendo il pendolo nella posizione $\theta = 0$
  - $tempo\ di\ salita\ t_s \leq 4\ s$
  - $sovraelongazione\ S_{\%} \leq 5\ \%$
- In risposta ad un disturbo impulsivo applicato al pendolo
  - Il carrello deve ritornare alla sua posizione originaria con uno spostamento massimo di 1 m.
  - Il pendolo deve ritornare nella posizione verticale con uno spostamento massimo di 0.26 $rad \simeq 15\ deg$

Modello

Modello del sistema

Il modello carrello/pendolo è descritto da un set di equazioni non lineari

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{L}[\ \ddot{x}\ cos\theta\ +\ g\ sin\theta\ +\ \frac{dF}{m}cos\theta\ ]$$

$$\ddot{x} = \frac{1}{M\ +\ msin^2\theta}\ [-K_d\dot{x}\ +\ F\ -\ dF\ -\ mL\dot{\theta}^2 sin\theta\ +\ mg\ sin\theta\ +$$

$$+dF\ cos^2\theta]$$

Modello del sistema in spazio di stato

Siano $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}, \quad u = F, \quad y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad d = dF$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{1}{M+m\sin^2\theta}\left[-K_d\dot{x} + F - dF - mL\dot{\theta}^2\sin\theta + mg\sin\theta + dF\cos^2\theta\right] \\ x_4 \\ \frac{1}{L}\left(\ddot{x}\cos\theta + g\sin\theta + \frac{dF}{m}\cos\theta\right) \end{bmatrix}$$

Equilibrio del sistema

Si considera $\overline{y} = [0,\ 0]$ e il disturbo $dF = 0$.

Si impone:

$$\begin{cases} 0 = x_{e2} \\ 0 = f_c(x_{e1}, x_{e2}, x_{e3}, x_{e4}, 0) \\ 0 = x_{e4} \\ 0 = f_p(x_{e1}, x_{e2}, x_{e3}, x_{e4}, 0) \end{cases}$$

Il **punto di equilibrio** scelto è $\overline{x} = [0\ , 0,\ 0,\ 0]$, il cui $\overline{u} = 0$.

Per procedere all'identificazione é bene accertarsi che il sistema resti stabile intorno allo stato di equilibrio.

Simulazione sistema intorno al punto di equilibrio

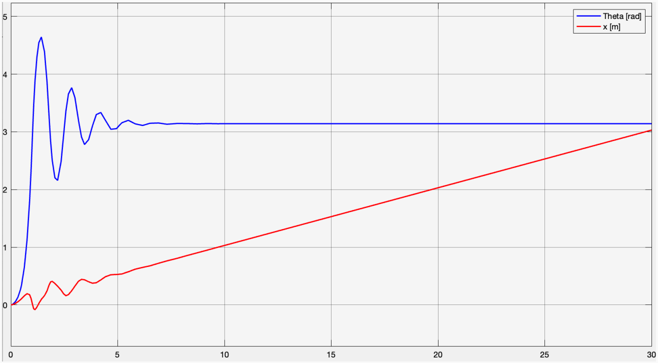


Figure 2: Risposta del sistema ad un ingresso impulsivo

Dato che il sistema non lineare intorno al punto di equilibrio calcolato è **instabile**, si è progettato un controllore per stabilizzare il sistema intorno al punto di equilibrio.

Sistema linearizzato intorno ad un punto di equilibrio

Nell'**intorno del punto di equilibrio** $(\overline{x}, \overline{u})$ si valuti il corrispondente **sistema linearizzato**:

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax + Bu \\
y &= Cx
\end{aligned}
$$

dove :

$$
\begin{cases}
x = \overline{x} \; + \delta x \\
u = \overline{u} \; + \delta u \\
y = \overline{y} \; + \delta y
\end{cases}
$$

- $[A,\ B]$ rappresentano le matrici Jacobiane valutate in $(\overline{x}, \overline{u})$

Sistema linearizzato intorno ad un punto di equilibrio

Nel punto di equilibrio considerato, il sistema linearizzato, cosi' come il sistema non lineare, è **instabile**

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -10 & 9.81 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -20 & 39.24 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 0\\ 2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\ d\end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}$$

$$c.i. \quad x(0) = \overline{x} + \delta x(0)$$

$$\text{eig(A)} = [0 \ -11.9 \ -3.2 \ \ 5.1]$$

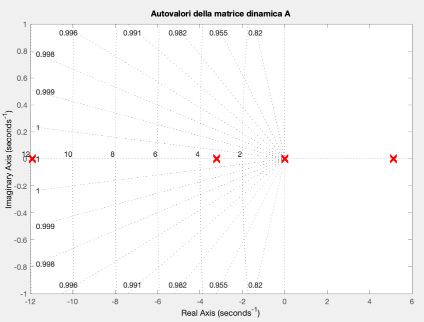


Figure 3: Autovalori matrice dinamica A

Per effettuare l'Identificazione e progettare poi il controllo MPC, si è stabilizzato il sistema carrello/pendolo intorno al punto di equilibrio scelto.

La tecnica di controllo scelta è **LQR + Filtro di Kalmann**.

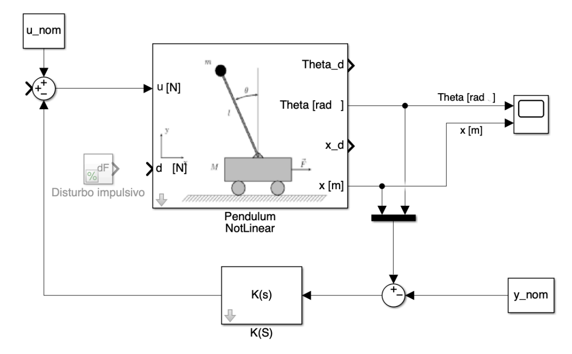


Figure 4: Schema di controllo sistema non lineare + controllore

Simulazione

$$Q_{LQR} = \left[10\ 0\ 0\ 0;\ 0\ 10\ 0\ 0;\ 0\ 0\ 100\ 0;\ 0\ 0\ 0\ 20\right],\ R = 1$$

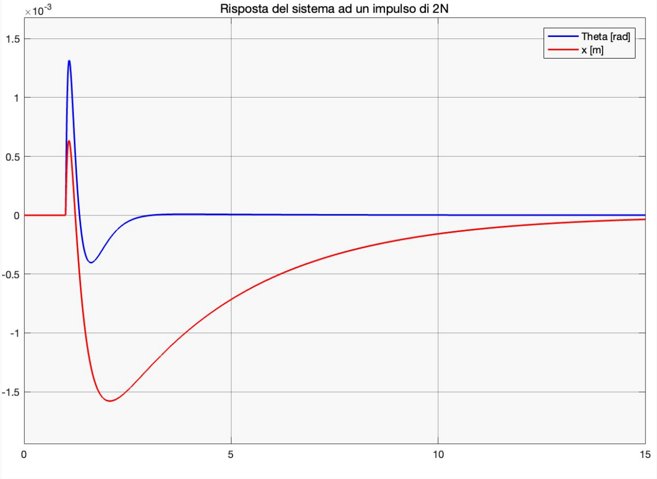


Figure 5: Risposta del sistema con un impulso di 2N applicato al carrello

Simulazione

$$Q_{LQR} = \left[10\ 0\ 0\ 0;\ 0\ 10\ 0\ 0;\ 0\ 0\ 100\ 0;\ 0\ 0\ 0\ 20\right],\ R = 1$$

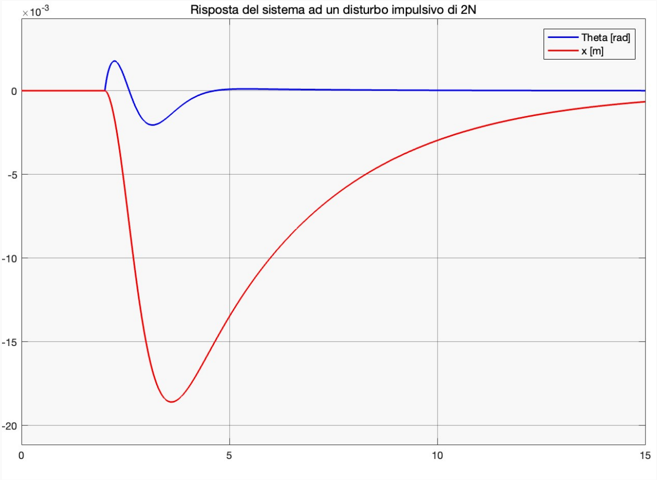


Figure 6: Risposta del sistema con un impulso di 2N applicato al pendolo

Identificazione

Obiettivi identificazione

Il modello complessivo da identificare è il seguente

$$\begin{bmatrix} y_\theta \\ y_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{u\theta}(s) & G_{d\theta}(s) \\ G_{d\theta}(s) & G_{dx}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ d \end{bmatrix}$$

che rappresenta il **sistema a ciclo chiuso Pendolo + Controllore**.

Si utilizzano **4 set di dati**:

- $u \to \theta, x$: contenente i campioni ingresso-uscita ottenuti facendo variare l'ingresso di controllo u e mantenendo il disturbo d al valore di equilibrio.
- $d \to \theta, x$: contenente i campioni ingresso-uscita ottenuti facendo variare il disturbo d e mantenendo l'ingresso u al valore di equilibrio

Scelta tempo di campionamento Ts

Per la scelta del tempo di campionamento del sistema **si è tenuto conto della dinamica più veloce del sistema**, relativa al movimento del pendolo stabilizzato.

Questo, per campionare le dinamiche del sistema senza **aliasing**.

Si è calcolato il Tempo di assestamento T_{ass} al 95$\%$ rispetto ad $|y_{max}|$.

Scelta tempo di campionamento Ts

- $T_{ass}\ al\ 95\% \simeq 1.5\ s$

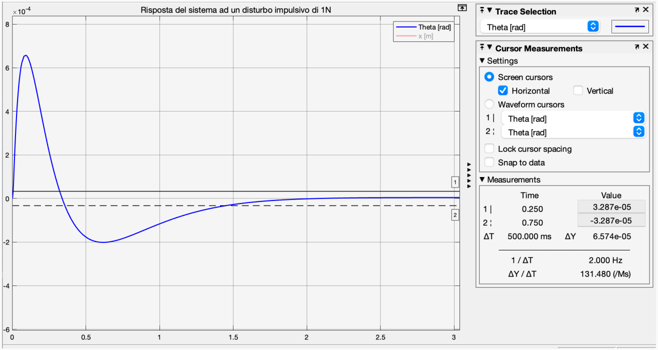


Figure 7: Risposta del sistema ad un impulso unitario

Una regola euristica per la scelta di Ts rispetto al tempo di assestamento è: $\frac{T_{ass}}{10\alpha} \leq T_s \leq \frac{T_{ass}}{\alpha}$ con $\alpha \in [5, 10]$.

Per $\alpha = 7$, si è scelto $T_s = 0.02\ s$

Design of experiment: Definizione dell'ingresso

L'ingresso utilizzato per l'identificazione é un segnale PRBS:

$$u(t) = \overline{u} + \delta u \tag{1}$$

dove

$$\delta u(t) = PRBS \in [-1, 1],\ N = 2047 \tag{2}$$

```
du = idinput(N,'prbs',[]);
```

L'**asse dei tempi** del **PRBS** è stato scelto come:

```
dt = 0.08 %[s];
t_prbs = (0:dt:dt*N)';
t_prbs(end) = [];
```

dove `dt = 4Ts = 0.08s`, per non specializzarsi troppo alle alte frequenze e per catturare anche dinamiche piu' veloci del polo dominante.

Design of experiment: Definizione dell'ingresso

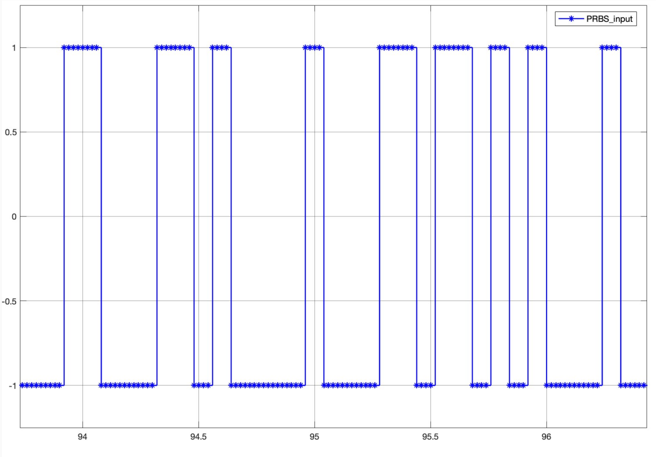


Figure 8: Segnale PRBS in ingresso al sistema

Design of experiment: sketch Simulink

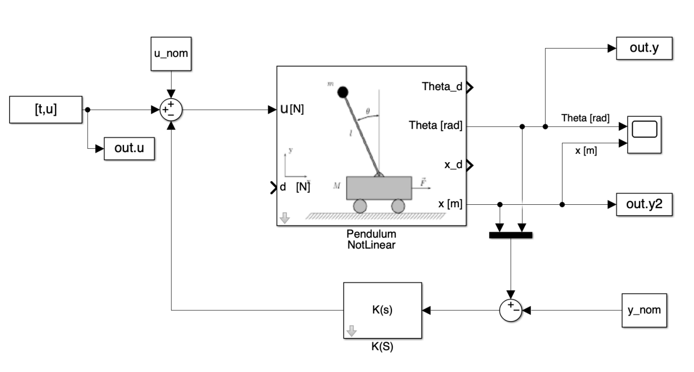


Figure 9: Schema simulink dell'esperimento

- blocco $From\ workspace$ per prelevare i campioni dell'ingresso generati
- blocco $To\ workspace$ per acquisire i campioni dell'uscita

Design of experiment: Acquisizione Dataset da $u \rightarrow \theta$

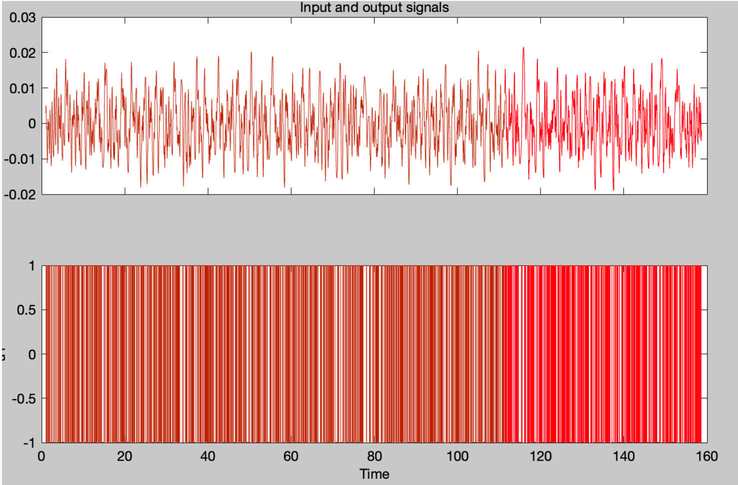


Figure 10: Segnali dall'ingresso u all'uscita θ

Design of experiment: Acquisizione Dataset da $u \rightarrow x$

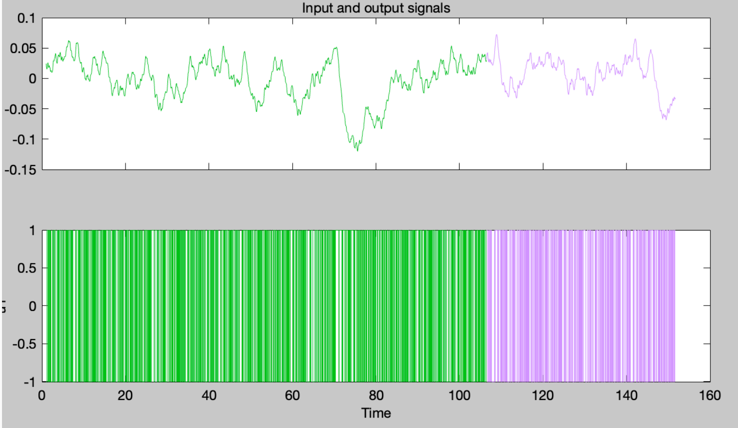


Figure 11: Segnali dall'ingresso u all'uscita x

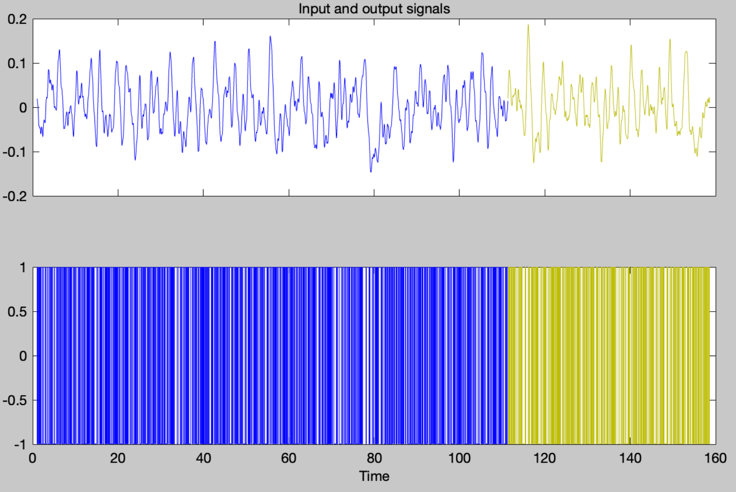


Figure 12: Segnali dall'ingresso d all'uscita θ

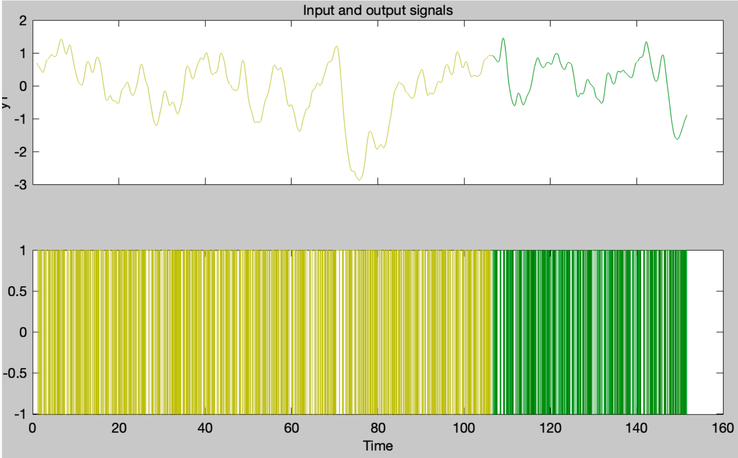


Figure 13: Segnali dall'ingresso d all'uscita x

Design of experiment: Pre-processing del dataset

- A ciascun dataset è stata **rimossa la media**
- Ciascun dataset è stato diviso in **working-set** (70%) e **validation-set** (30%)
- Vengono scartati i campioni per $t \leq T_{ass}$

```
u_out=u_out(t_out>t_ss);
y_out=y_out(t_out>t_ss);
t_out=t_out(t_out>t_ss);
t_out=t_out-t_out(1);
```

Identificazione: Modelli utilizzati

La stima dei modelli viene effettuata con:

- Famiglie di Modelli Polinomiali: (ARX, ARMAX)
- Spazio di stato.

Identificazione: Modelli ARX

La famiglia di **modelli ARX** include modelli $M(\theta)\ con\ \theta \in \Re$ descritti da:

$$y(t) = a_1 y(t-1)\ +\ a_2 y(t-2)\ +\ ...\ +\ a_{n_a} y(t-n_a) +$$
$$+\, b_1 u(t-1)\ +\ b_2 u(t-2)\ +\ b_{n_b} u(t-n_b)\ +\ \xi(t)$$

$$\xi(t) \backsim WN(0, \lambda^2), \quad E[\xi(t)] = 0$$

Il modello puó essere riscritto in forma di Box-Jenkins:

$$A(z)y(t) = B(z)u(t)\ +\ \xi(t)$$
$$A(z) = 1 - a_1 z^{-1} - ... - a_{n_a} z^{n_a}$$
$$B(z) = 1 + b_1 z^{-1} + ... + b_{n_a} z^{n_b}$$

I **parametri di progetto** sono $[n_a,\ n_b,\ n_k]$

Identificazione: Modelli ARMAX

La famiglia di **modelli ARMAX** include modelli $M(\theta)$ con $\theta \in \Re$ descritti da:

$$y(t) = a_1 y(t-1) \ + \ a_2 y(t-2) \ + \ ... \ + \ a_{n_a} y(t-n_a) +$$
$$+ b_1 u(t-1) \ + \ b_2 u(t-2) \ + \ b_{n_b} u(t-n_b) +$$
$$+\xi(t) \ + \ c_1 \xi(t-1) \ + \ ... \ + c_{nc} \, \xi(t-n_c)$$

$$\xi(t) \backsim WN(0, \lambda^2), \quad E[\xi(t)] = 0$$

Il modello puó essere riscritto in forma di Box-Jenkins, dove :

$$G(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \, , \, W(z) = \frac{C(z)}{A(z)}$$

I **parametri di progetto** sono $[n_a, \ n_b, \ n_c, \ n_k]$

Identificazione: Criteri di valutazione dei modelli

Ricordiamo che il modello complessivo da identificare è

$$\begin{bmatrix} y_\theta \\ y_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{u\theta}(s) & G_{d\theta}(s) \\ G_{d\theta}(s) & G_{dx}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ d \end{bmatrix}$$

I criteri di valutazione dei modelli sono i seguenti:

- Stabilità
- % Fit del modello sul Validation Set
- Test di Bianchezza al 90% con $N\ campioni = 20$ della stima della funzione di autocorrelazione. (18 campioni su 20 devono ricadere nella fascia)

Identificazione: Risultati Modelli $u \rightarrow \theta$

Table 1: Identificazione modello relazione $u \rightarrow \theta$

Ordine	% Test Bianch.	% Fit valid. set
ARX331	80%	99.6
ARX431	80%	99.6
ARMAX4342	95%	99.9

Identificazione: Risultati Modelli $u \to \theta$

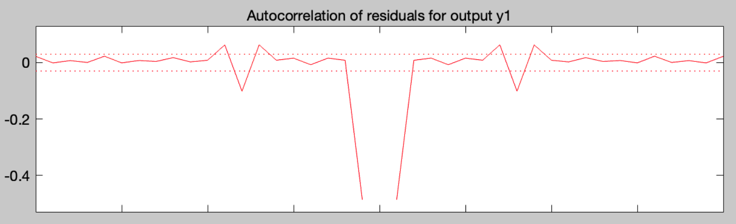


Figure 14: Test di Bianchezza di Anderson su 20 campioni di ARX(3,3,1)

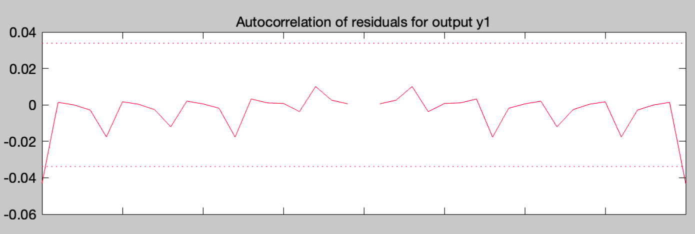


Figure 15: Test di Bianchezza di Anderson su 20 campioni di ARMAX(4,3,4,2)

Identificazione: Risultati Modelli $u \to \theta$

```
arx331 =
Discrete-time ARX model: A(z)y(t) = B(z)u(t) + e(t)
  A(z) = 1 - 2.592 (+/- 0.0002188) z^-1 + 2.226 (+/- 0.0003724) z^-2 - 0.6331 (+/- 0.0001645) z^-3

  B(z) = 0.0003521 (+/- 5.722e-08) z^-1 - 5.98e-05 (+/- 1.086e-07) z^-2 - 0.0002951 (+/- 8.084e-08) z^-3
```

Figure 16: Deviazione standard dei parametri ARX(3,3,1)

```
amx4342 =
Discrete-time ARMAX model: A(z)y(t) = B(z)u(t) + C(z)e(t)
  A(z) = 1 - 1.919 (+/- 0.004823) z^-1 + 0.4872 (+/- 0.007843) z^-2 + 0.8549 (+/- 0.00573) z^-3 - 0.4212 (+/- 0.003533) z^-4

  B(z) = 0.0005144 (+/- 1.076e-05) z^-2 - 0.0003334 (+/- 6.722e-06) z^-3 - 0.0001992 (+/- 5.652e-06) z^-4

  C(z) = 1 + 0.04202 (+/- 0.03005) z^-1 + 0.03498 (+/- 0.03016) z^-2 + 0.03731 (+/- 0.03015) z^-3 - 0.9557 (+/- 0.03003) z^-4
```

Figure 17: Deviazione standard dei parametri ARMAX(4,3,4,2)

Il modello scelto è ARMAX(4,3,4,2).

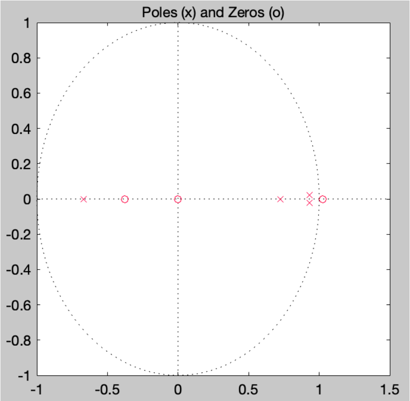


Figure 18: Mappa poli-zeri ARMAX(4,3,4,2)

Identificazione: $u \to x$

- Il segnale $PRBS$ in ingresso al sistema è stato modificato.
  La $f_{min} = \frac{1}{dt}$ di quest'ultimo è stata aumentata data la dinamica più lenta del carrello.
- Sono stati scartati i campioni per $t \leq T_{ass}$ con $T_{ass_x} = 10s$, tenendo conto sempre della dinamica più lenta del carrello.

Identificazione: Risultati Modelli $u \to x$

Table 2: Identificazione modello relazione $u \to x$

Ordine	% Test Bianch.	% Fit valid. set
ARX331	80%	99.8
ARX431	65%	99.7
ARMAX3211	80%	99.8

Il modello scelto è **ARX(3,3,1)**.

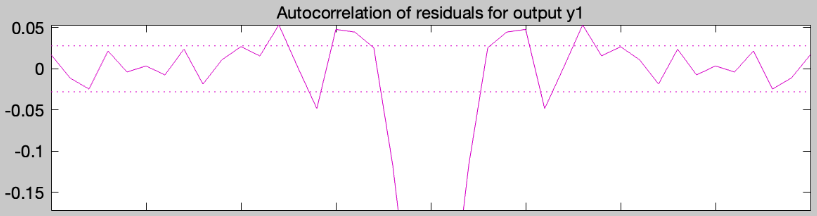


Figure 19: Test di Bianchezza di Anderson su 20 campioni

Identificazione: Risultati Modelli $u \rightarrow x$: ARX(3,3,1)

```
arx331 =
Discrete-time ARX model: A(z)y(t) = B(z)u(t) + e(t)
  A(z) = 1 - 2.676 (+/- 8.198e-05) z^-1 + 2.368 (+/- 0.0001611) z^-2 - 0.6925 (+/- 8.023e-05) z^-3

  B(z) = 0.0001804 (+/- 3.181e-08) z^-1 - 4.82e-05 (+/- 4.522e-08) z^-2 - 0.0001628 (+/- 3.504e-08) z^-3
```

Figure 20: Deviazione standard dei parametri

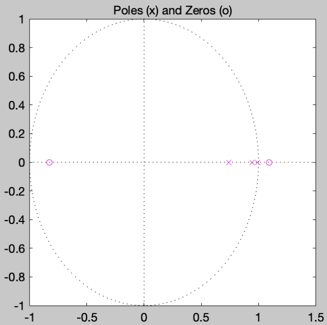


Figure 21: Grafico Poli-Zeri ARX(3,3,1)

Table 3: Identificazione modello relazione $dF \rightarrow \theta$

Ordine	% Test Bianch.	% Fit valid. set
ARX441	90%	99.6
ARX541	90%	99.6
ARMAX4332	95%	99.9

Il modello scelto è **ARX(4,4,1)**.

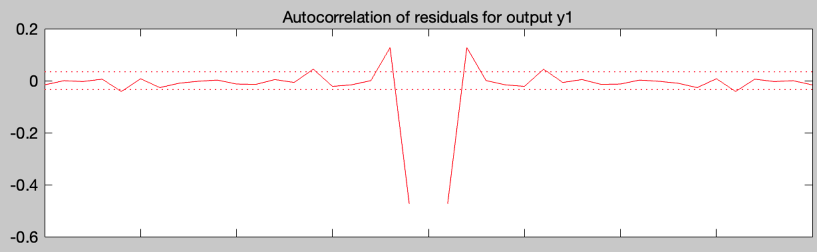


Figure 22: Test di Bianchezza di Anderson su 20 campioni

Identificazione: Risultati Modelli $dF \rightarrow \theta$: ARX(4,4,1)

```
arx441 =
Discrete-time ARX model: A(z)y(t) = B(z)u(t) + e(t)
  A(z) = 1 - 3.499 (+/- 0.005135) z^-1 + 4.538 (+/- 0.01469) z^-2 - 2.579 (+/- 0.014) z^-3 + 0.5389 (+/- 0.004445) z^-4


  B(z) = 0.0003829 (+/- 1.378e-07) z^-1 - 0.0002988 (+/- 1.961e-06) z^-2 - 0.0003209 (+/- 3.565e-07) z^-3 + 0.0002312 (+
                                                                                                            /- 1.74e-06) z^-4
```

Figure 23: Deviazione standard dei parametri

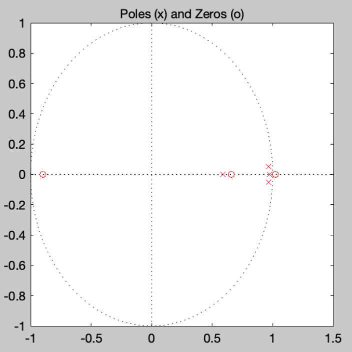


Figure 24: Grafico Poli-Zeri ARX(4,4,1)

Table 4: Identificazione modello relazione $dF \rightarrow x$

Ordine	% Test Bianch.	% Fit valid. set
ARX431	70%	99.8
ARMAX4332	85%	99.9

Il modello scelto è **ARMAX(4,3,3,2)**.

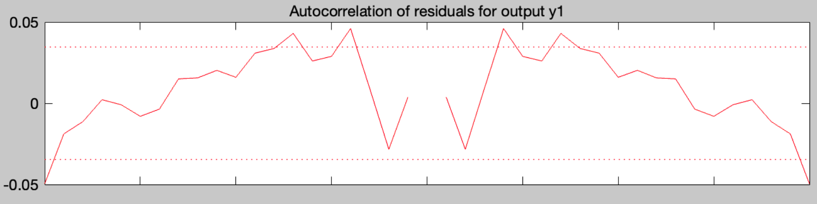


Figure 25: Test di Bianchezza di Anderson su 20 campioni

Identificazione: Risultati Modelli $dF \to x$: ARMAX(4,3,3,2)

```
amx4332 =
Discrete-time ARMAX model: A(z)y(t) = B(z)u(t) + C(z)e(t)
  A(z) = 1 - 3.588 (+/- 0.01482) z^-1 + 4.778 (+/- 0.04364) z^-2 - 2.791 (+/- 0.04288) z^-3 + 0.6013 (+/- 0.01406) z^-4

  B(z) = -4.009e-05 (+/- 2.548e-07) z^-2 + 2.519e-05 (+/- 7.064e-07) z^-3 + 9.579e-06 (+/- 2.003e-07) z^-4

  C(z) = 1 + 0.9989 (+/- 0.003861) z^-1 + 0.9687 (+/- 0.005188) z^-2 + 0.9624 (+/- 0.003834) z^-3
```

Figure 26: Deviazione standard dei parametri

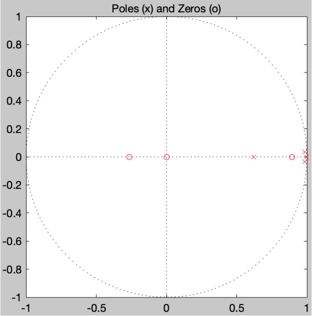


Figure 27: Grafico Poli-Zeri ARMAX(4,3,3,2)

Identificazione: Spazio di stato

$$
\begin{aligned}
x(t+1) &= Ax(t) + Bu(t) \\
y(t) &= Cx(t)
\end{aligned}
$$

Le matrici $A,\ B,\ C, n_a$ sono i parametri da stimare, con n_a ordine del modello

- **Ordine del modello** è stato scelto dal diagramma dei valori singolari
- **Form**: Forma canonica di Osservabilità

Ordine del modello $n_a = 5$

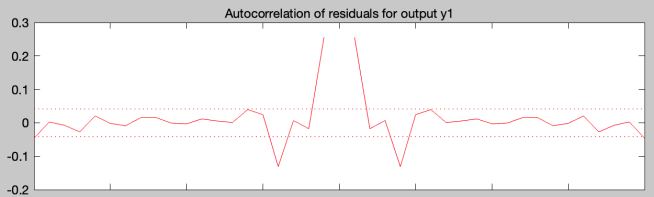


Figure 28: Test di Bianchezza di Anderson $u \to y$

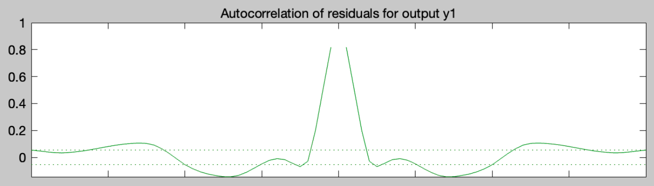


Figure 29: Test di Bianchezza di Anderson $d \to y$

Identificazione: Spazio di stato: Risultati

```
ss3 =
  Discrete-time identified state-space model:
    x(t+Ts) = A x(t) + B u(t) + K e(t)
       y(t) = C x(t) + D u(t) + e(t)

  A =
                           x1                     x2                     x3                     x4                     x5
   x1                       0                      1                      0                      0                      0
   x2    -0.9902 +/- 0.0001121      1.99 +/- 0.0001126    0.5104 +/- 0.0001226    -1.038 +/- 0.0003934    0.5245 +/- 0.0002833
   x3                       0                      0                      0                      1                      0
   x4                       0                      0                      0                      0                      1
   x5   0.001865 +/- 0.0001397  -0.001885 +/- 0.0001404    0.6355 +/- 0.0001629    -2.234 +/- 0.0005027     2.597 +/- 0.0003572

  B =
                           u1
   x1    0.00018 +/- 3.271e-08
   x2  0.0004357 +/-  5.97e-08
   x3    0.00036 +/- 6.463e-08
   x4  0.0008744 +/- 1.186e-07
   x5   0.001161 +/- 1.679e-07

  C =
       x1  x2  x3  x4  x5
   y1   1   0   0   0   0
   y2   0   0   1   0   0

  D =
       u1
   y1   0
   y2   0

  K =
                      y1                  y2
   x1    1.784 +/- 0.3428   -0.321 +/- 0.1717
   x2   0.9134 +/- 0.3997   0.1432 +/-  0.201
   x3    1.547 +/- 0.6797    0.373 +/- 0.3405
   x4  -0.6476 +/- 0.7952    1.538 +/- 0.3999
   x5   -1.626 +/- 0.9065    2.018 +/- 0.4566
```

Figure 30: Modello spazio di stato $u \to y$

```
ss2 =
  Discrete-time identified state-space model:
    x(t+Ts) = A x(t) + B u(t) + K e(t)
       y(t) = C x(t) + D u(t) + e(t)

  A =
                           x1                     x2                     x3                     x4                     x5
   x1                       0                      1                      0                      0                      0
   x2     -0.998 +/- 0.0001038      1.998 +/- 0.0001043      0.5576 +/- 0.002918      -1.126 +/- 0.006185      0.5648 +/- 0.003286
   x3                       0                      0                      0                      1                      0
   x4                       0                      0                      0                      0                      1
   x5  -0.001073 +/- 7.412e-05   0.001077 +/- 7.447e-05      0.8813 +/- 0.002049      -2.754 +/- 0.004348       2.872 +/- 0.002312

  B =
                           u1
   x1  3.463e-05 +/- 7.432e-07
   x2  -6.65e-05 +/- 6.702e-07
   x3  0.0004921 +/- 1.391e-06
   x4   0.001093 +/-  1.26e-06
   x5    0.00162 +/- 1.312e-06

  C =
       x1  x2  x3  x4  x5
   y1   1   0   0   0   0
   y2   0   0   1   0   0

  D =
       u1
   y1   0
   y2   0

  K =
                        y1                     y2
   x1    0.6013 +/- 0.03726  -0.06726 +/- 0.02019
   x2    0.7353 +/- 0.03595    -0.103 +/- 0.01943
   x3  0.008301 +/- 0.07045    0.4945 +/- 0.03814
   x4   0.04293 +/- 0.06758    0.5629 +/- 0.03658
   x5   0.09023 +/- 0.06975    0.6224 +/- 0.03767
```

Figure 31: Modello spazio di stato $d \to y$

Identificazione: Spazio di stato: Risultati

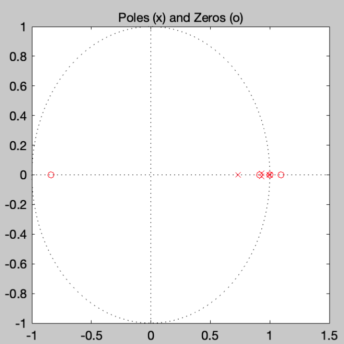


Figure 32: Mappa poli-zeri $u \to y$

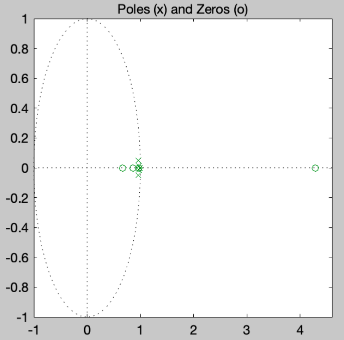


Figure 33: Mappa poli-zeri $d \to y$

Sono stati scelti i seguenti modelli identificati:

- $u \to \theta : \ ARMAX(4, 3, 4, 2)$
- $u \to x : ARX(3, 3, 1)$
- $d \to \theta : \ ARX(4, 4, 1)$
- $d \to x : \ ARMAX(4, 3, 3, 2)$

Identificazione: Test del modello identificato

E' stato applicato un impulso di $1N$ sul carrello a $t = 1s$

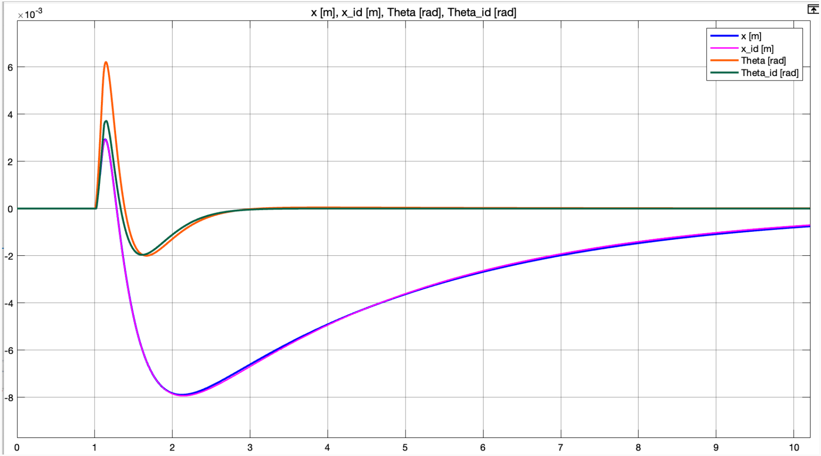
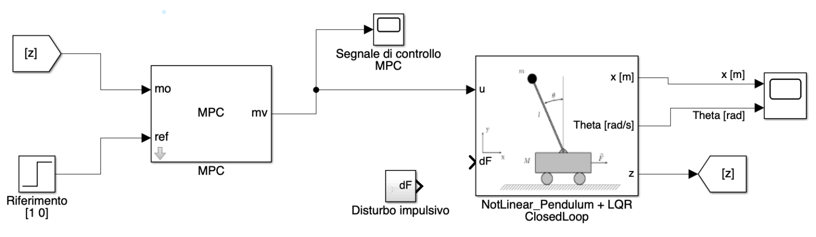


Figure 34: Confronto tra modello identificato e sistema linearizzato a ciclo chiuso

Identificazione: Test del modello identificato

Come ulteriore test del modello individuato, **è stato utilizzato il modello identificato come modello interno di un controllore MPC**



- **riferimento 'r'**: gradino unitario per il carrello
- **disturbo 'd'**: impulso unitario a $t = 8\ s$

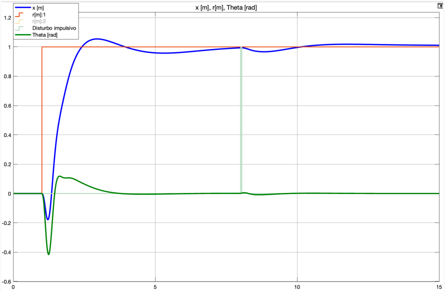


Figure 35: MPC sul sistema a ciclo chiuso identificato

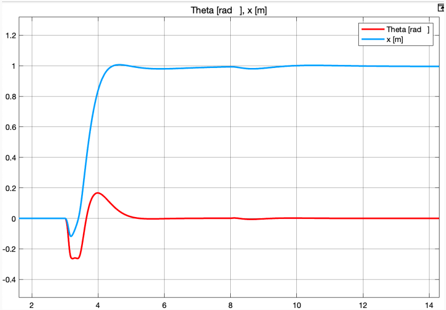


Figure 36: MPC sul sistema a ciclo chiuso linearizzato

MPC

Obiettivo MPC

Inseguire un riferimento T

rispettando i vincoli:

- vincolo sulla forza F applicabile: $-200 \leq F \leq 200$
- vincolo su ΔF applicabile : $-10 \leq \Delta F \leq 10$
- vincolo sulla posizione del carrello x : $-10 \leq x \leq 10$
- vincolo sullo spostamento del pendolo θ :$-0.26 \leq \theta \leq 0.26$

Struttura MPC da Command Line

- Il **modello interno** del controllore MPC è il **sistema a ciclo chiuso linearizzato intorno al punto di equilibrio stabilizzato** (definito precedentemente)

E' necessario definire le tipologie di segnali per il controllo MPC:

- **Manipulated Variables (MV)**: ingresso di controllo u
- **Measured Disturbance (MD)**: 0
- **Unmeasured Disturbance in input (UD)**: disturbo sul pendolo dF
  Measured Outputs (UO): posizione carrello x , angolo pendolo θ

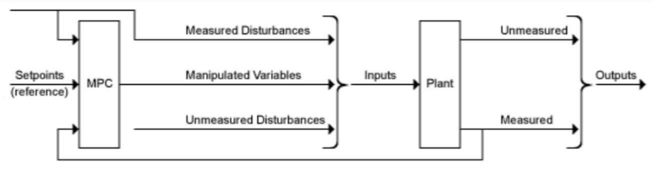


Figure 37: Struttura controllo MPC

MPC da Command Line: parametri

Il **tempo di campionamento** T_s del controllore e del processo é stato scelto pari a:

$$T_s = 0.02s$$

Gli **orizzonti di predizione** H_p e di **controllo** H_u sono stati scelti rispettivamente pari a:

$$H_p = 40$$
$$H_u = 5$$

É stato definito un **fattore di scalatura sull'ingresso di controllo** u, in quanto assume valori in norma molto diversi rispetto alle uscite.

$$scale\ factor = 100$$

MPC da Command Line: parametri

I valori delle matrici $Q(i)$ ed $R(i)$ che compongono Q e R non vengono cambiati lungo tutto l'orizzonte di predizione. I valori scelti per i pesi sono:

$$Weight_u = 1$$
$$Weight_{\Delta u} = 1$$
$$Weight_z = [1.2 \quad 1]$$

Sono stati settati i valori $ECR \neq 0$ per rendere $soft$ il vincolo sul *displacement* del pendolo

$$MinECR_{y_\theta} = 0.2$$
$$MaxECR_{y_\theta} = 0.2 \; (Small\ violation\ allowed)$$
$$Weight_{ECR} = 100000$$

MPC da Command Line: snippet di codice

```
mpc1 = mpc(F_k, 0.02); %defining mpc object

mpc1.PredictionHorizon = 40;
mpc1.ControlHorizon = 5;
mpc1.MV(1).ScaleFactor = 100;

%costrains
mpc1.MV(1).Min = -200;
mpc1.MV(1).Max = 200;
mpc1.MV(1).RateMin = -10;
mpc1.MV(1).RateMax = 10;
mpc1.OV(1).Min = -10;
mpc1.OV(1).Max = 10;
mpc1.OV(2).Min = -0.26;
mpc1.OV(2).Max = 0.26;
```

La simulazione è stata effettuata sul **sistema non lineare stabilizzato intorno al punto di equilibrio**.

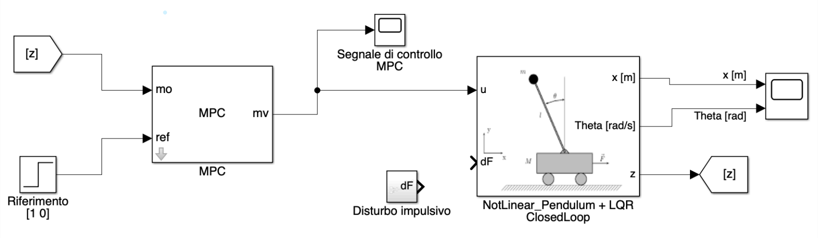


Figure 38: Schema di controllo

Scenario 1:

$$\begin{cases} riferimento\ sulla\ posizione\ del\ carrello\ \ : step\ di\ 2[m] \\ Disturbo\ impulsivo\ d = 4N\ a\ t = 6s \end{cases}$$

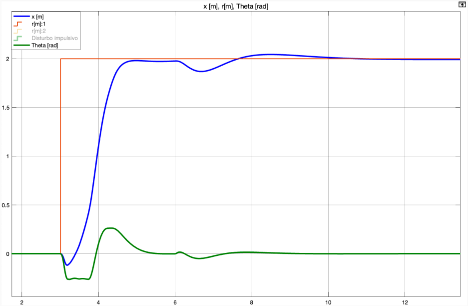


Figure 39: Risposta del sistema

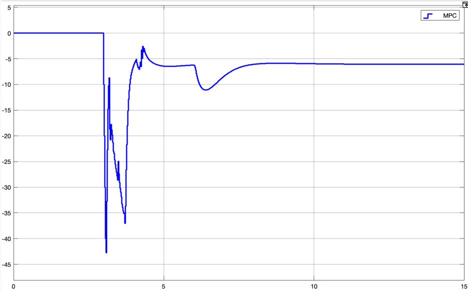


Figure 40: Segnale di controllo

Scenario 2:

$$\begin{cases} Riferimento\ di\ posizione\ per\ il\ carrello\ \ rif[m] : x_f = 3[m] \\ Disturbo\ impulsivo\ d = 2N\ a\ t = 12s \end{cases}$$

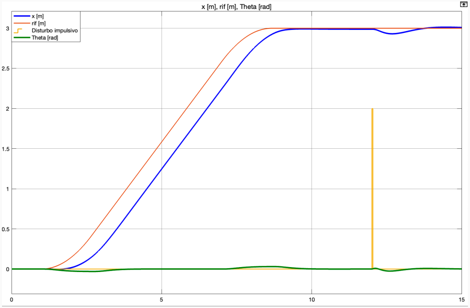


Figure 41: Risposta del sistema

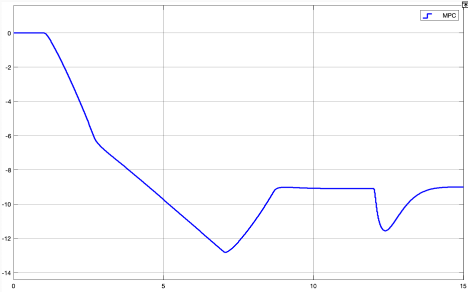


Figure 42: Segnale di controllo

Implementazione MPC

Implementazione MPC non vincolato: Definizione problema

Si consideri come *modello interno* del controllore il **modello linearizzato ricavato in precedenza a tempo discreto**.

$$
\begin{aligned}
x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \quad & x \,\epsilon\, \mathbb{R}^n \quad u \,\epsilon\, \mathbb{R}^l \\
y(k) &= C_y x(k) & y \,\epsilon\, \mathbb{R}^{m_y} \\
z(k) &= C_z x(k) & z \,\epsilon\, \mathbb{R}^{m_z}
\end{aligned}
$$

Implementazione MPC non vincolato: Definizione problema

Si vuole implementare la risoluzione del problema di controllo predittivo:

$$\min_{\Delta\hat{u}(k|k),\dots,\Delta\hat{u}(k+H_u-1|k)} \sum_{i=H_w}^{H_p} \|\hat{z}(k+i|k) - r(k+i|k)\|^2_{Q(i)} + \\ + \sum_{i=0}^{H_u-1} \|\Delta\hat{u}(k+i|k)\|^2_{R(i)}$$

In forma matriciale:

$$\left\|\hat{Z}(k) - T(k)\right\|^2_Q + \|\Delta U(k)\|^2_R$$

Dove le **predizioni dell'uscita d'interesse** $\hat{Z}(k)$ sono:

$$\hat{Z}(k) = C_z\hat{X}(k) = C_z\Psi_x x(k) + C_z\gamma_x u(k-1) + C_z\Theta_x\Delta U(k) = \\ = \Psi x(k) + \Upsilon u(k-1) + \Theta\Delta U(k).$$

Implementazione MPC non vincolato: Soluzione problema

Sia il **tracking error** $\varepsilon(k)$:

$$\varepsilon(k) = T(k) - \Psi x(k) - \Upsilon u(k-1)$$

La **soluzione al problema ai minimi quadrati** $\Delta U_{opt}(k)$:

$$\Delta\mathcal{U}(k)_{\text{opt}} = \begin{bmatrix} S_Q \\ S_R \end{bmatrix} \Theta \setminus \begin{bmatrix} S_Q \varepsilon(k) \\ 0 \end{bmatrix}$$

da cui:

$$K_{full} = \begin{bmatrix} S_Q \\ S_R \end{bmatrix} \Theta \setminus \begin{bmatrix} S_Q \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$K_{MPC} = K_{full}(1,:)$$

Sono state opportunamente calcolate le matrici $[\Psi, \Theta, \Upsilon, S_Q, S_R]$ nel file $mpc\_without\_constr.m$

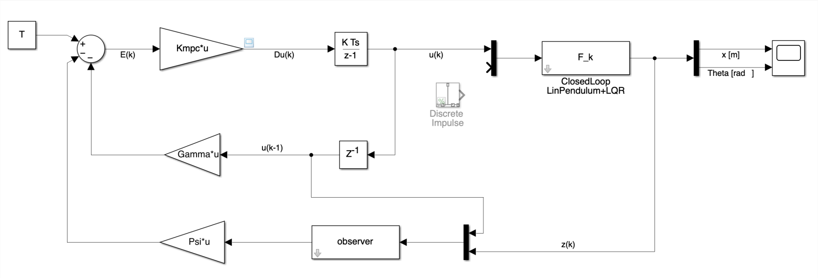


Figure 43: Schema di controllo MPC implementato: sistema linearizzato

Codice Matlab

```
Kfull = [Sq*TH ; Sr] \ [Sq ; zeros(Hu,length(Sq))];
Kmpc = Kfull(1,:);
```

Implementazione MPC non vincolato: parametri

- *Orizzonte di predizione* $Hp = 200$
- *Orizzonte di controllo* $Hu = 5$
- *Orizzonte di ritardo* $Hw = 1$
- $C_z = [1\ 0\ 0\ 0\ ; 0\ 1\ 0\ 0]$
-
```
Qi = [5 0 ; 0 2];
Q = kron(eye(Hp),Qi);
Q(1:2 , 1:2) = [500 0 ; 0 2];
Q(3:4 , 3:4) = [500 0 ; 0 2];
Q(5:6 , 5:6) = [500 0 ; 0 2];
```
-
```
Ri = 1;
R = kron(eye(Hu),Ri);
R(1,1) = 0.01;
R(2,2) = 0.1;
R(3,3) = 0.5;
```

Implementazione MPC non vincolato: Simulazione

Scenario:

$$\left\{ \, riferimento\ sulla\ posizione\ del\ carrello\ di\ tipo\ gradino\ r[m] \right.$$

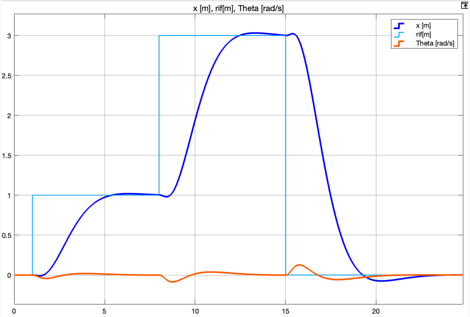


Figure 44: Risposta del sistema

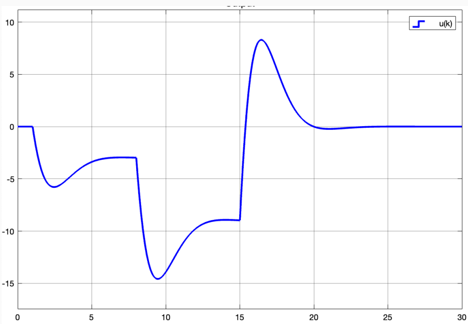


Figure 45: Segnale di controllo

Problema di ottimizzazione vincolato:

$$\min_{\Delta\mathcal{U}(k)} \quad \Delta\mathcal{U}(k)^T \mathcal{H} \Delta\mathcal{U}(k) - \mathcal{G}^T \Delta\mathcal{U}(k)$$

s.t.

$$\begin{bmatrix} \mathbb{F} \\ \Gamma\Theta \\ W \end{bmatrix} \Delta\mathcal{U}(k) \leq \begin{bmatrix} -\mathbb{F}_1 u(k-1) - f \\ -\Gamma[\Psi x(k) + \gamma u(k-1)] - g \\ -w \end{bmatrix}$$

dove : $\mathcal{H} = \Theta^T Q \Theta + R$, $\mathcal{G} = -2\Theta^T Q$

Implementazione MPC vincolato: matrici dei vincoli

Le matrici $[E, \;\; F, \;\; G]$ sono le matrici dei vincoli:

$$F' = \begin{bmatrix} -\frac{1}{u_{\min}} \\ \frac{1}{u_{\max}} \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} F' & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & F' & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & F' & -1 \end{bmatrix}$$

$$E' = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\Delta u_{\min}} \\ \frac{1}{\Delta u_{\max}} \end{bmatrix}$$

$$E = F$$

$$G' = \begin{bmatrix} -\frac{1}{x_{1\,\min}} & 0 \\ \frac{1}{x_{1\,\max}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{x_{3\,\min}} \\ 0 & \frac{1}{x_{3\,\max}} \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} G' & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & G' & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & G' & -1 \end{bmatrix}$$

Le matrici $[\Gamma, \;\; \mathbb{F}, \;\; W]$ sono ottenute dalle matrici$[E, \; F, \; G]$.

Il calcolo di queste è riportato nel file $constr\_matrix.m$

Implementazione MPC vincolato: Introduzione Slack Variable

Ad ogni iterazione si deve risolvere il problema di *Quadratic Programming* (QP).

Con il problema di ottimizzazione formulato in questo modo, l'algoritmo per la risoluzione di problemi QP produce il messaggio: $'Infeasible\ problem'$.

Soluzione: *'rilassamento'* dei vincoli

$$\min_{\Delta\mathcal{U}(k)} \quad \Delta\mathcal{U}(k)^T\mathcal{H}\Delta\mathcal{U}(k) - \mathcal{G}^T\Delta\mathcal{U}(k) + \rho||\epsilon||^2$$

s.t.

$$\begin{bmatrix} \mathbb{F} \\ \Gamma\Theta \\ W \end{bmatrix} \Delta\mathcal{U}(k) \leq \begin{bmatrix} -\mathbb{F}_1 u(k-1) - f \\ -\Gamma[\Psi x(k) + \gamma u(k-1)] - g \\ -w \end{bmatrix} + \epsilon \qquad \rho >> 0$$

$$\epsilon \geq 0$$

Implementazione MPC vincolato: Introduzione Slack Variable

- Con ρ molto grande, diventa un problema **hard constrained**

Con questa formulazione il problema QP diventa:

$$\min_{[\theta,s]} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta\mathcal{U} \\ \epsilon \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 2\mathcal{H} & 0 \\ 0 & \rho \cdot I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\mathcal{U} \\ \epsilon \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathcal{G} \\ 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Delta\mathcal{U} \\ \epsilon \end{bmatrix}$$

s.t

$$\begin{bmatrix} A_{vinc} & -I \\ 0 & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\mathcal{U} \\ \epsilon \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} b_{vinc} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

dove:

$$A_{vinc} = \begin{bmatrix} \mathbb{F} \\ \Gamma\Theta \\ W \end{bmatrix} \quad b_{vinc} = \begin{bmatrix} -\mathbb{F}_1 u(k-1) - f \\ -\Gamma[\Psi x(k) + \gamma u(k-1)] - g \\ -w \end{bmatrix}$$

Il problema QP è stato risolto ad ogni iterazione tramite la funzione $MatLab\,'mpcActiveSetSolver'$

- $Hp = 200, \qquad Hu = 5, \qquad Hw = 1$
- $Q_{(i)} = \begin{bmatrix} 5 \cdot 10^5 & 0 \\ 0 & 1 \cdot 10^3 \end{bmatrix}, \qquad R_{(i)} = 1$
- $\rho = 10^5$

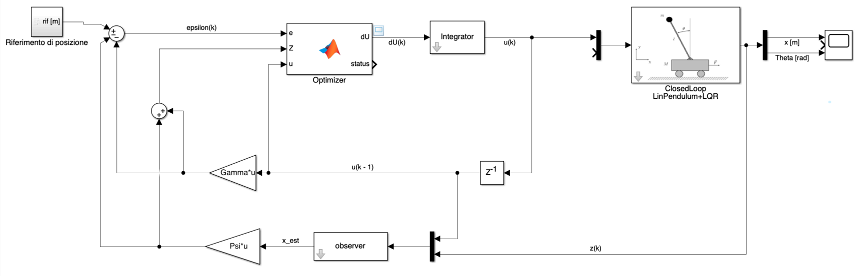


Figure 46: Schema di controllo: sistema linearizzato

Implementazione MPC vincolato: Simulazione

Scenario:

$$\left\{ Riferimento\ di\ posizione\ per\ il\ carrello\ \ rif[m] : x_f = 3[m] \right.$$

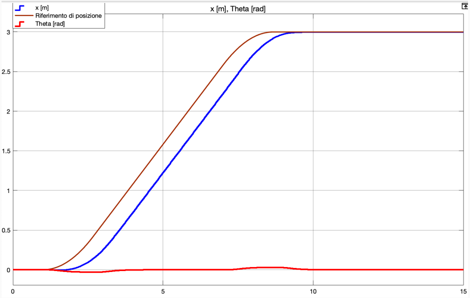


Figure 47: Risposta del sistema

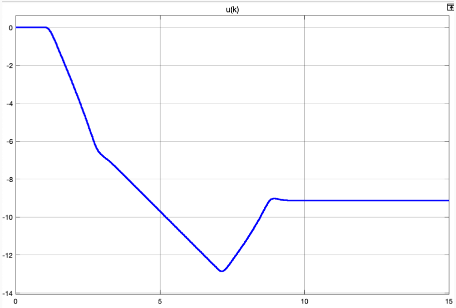


Figure 48: Segnale di controllo

Implementazione MPC vincolato: Simulazione sul sistema Non Lineare

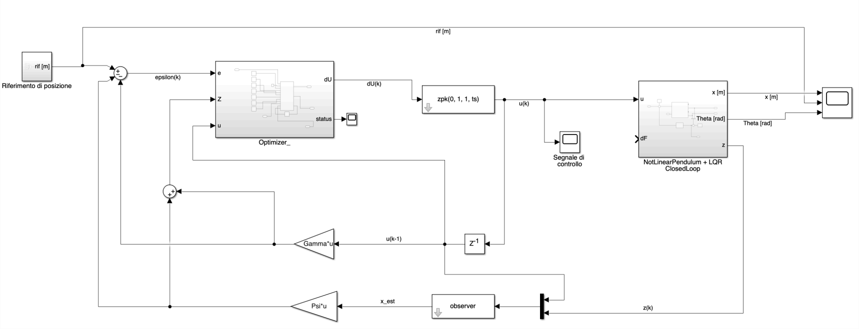


Figure 49: Schema di controllo: sistema Non Lineare

Implementazione MPC vincolato: Simulazione sul sistema Non Lineare

Scenario:

$$\left\{ \; Riferimento\ di\ posizione\ per\ il\ carrello\ \ rif[m] : x_f = 3[m] \right.$$

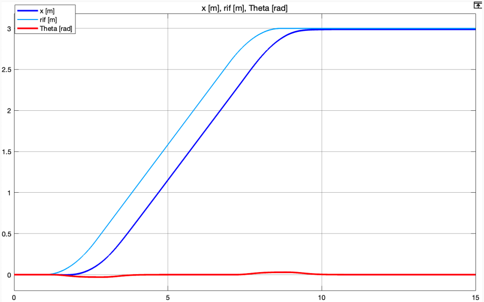


Figure 50: Risposta del sistema

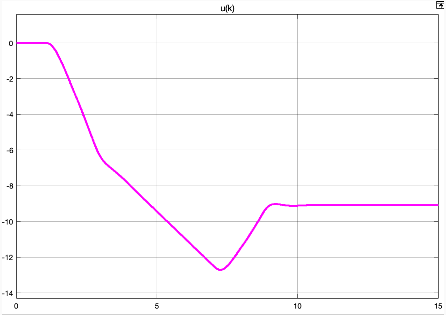


Figure 51: Segnale di controllo: sistema Non Lineare