PRÓXIMA MAGISTRAL

→ MIÉRCOLES 26, 13h, 2.3. C04

Ya hemos terminado la primera mitad del curso

→ CÁLCULO DIFERENCIAL

- LÍMITES

↳ Derivadas (Parciales)

→ Direccionales

→ OPERADORES DIF. VEC.

DIFERENCIAB.

→ TAYLOR

→ max/min (Hessian)

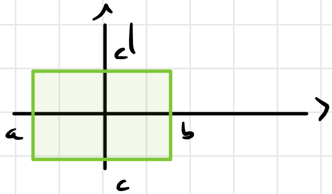
→ LAGRANGE

CÁLCULO INTEGRAL

$$f \subset R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

↳ rectángulo

$$R = [a,b] \times [c,d]$$



↳ Producto CARTESIANO

Suponemos $f(x,y) \geq 0$

→ Superficie por encima Rectángulo } Por ejemplo si es ACOTADO

→ VOLUMEN entre Superficie (f) y R

$$\underbrace{\iint_R f(x,y)\,\overbrace{dx\,dy}^{dA} = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dx\,dy}$$

definición RIGUROSA ?

→ PARTICIÓN S_n de R

→ $\lim_n S_n = \int$ - -

¿Cuándo converge?

→ Funciones ACOTADAS

Teorema $f : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

f ACOTADA A SALTOS

f discontinua en número finito puntos

$\Rightarrow f$ integrable

La semejanza con la definición en 1D permite EXPORTAR algunas

1) Linealidad $\iint_R (af + bg)\,dA = a\iint_R f\,dA + b\iint_R g\,dA$

2) MONOTONICIDAD $f \geq g \quad \iint_R f \geq \iint_R g$

3) ADITIVIDAD

$$Q = R_1 \cup R_2 \cup \ldots = \bigcup_{i=1}^{n} R_i$$ (unión rectángulos)

$$\iint_Q f = \sum_i \iint_{R_i} f$$

¿Cómo se calcula? → BASTANTE INTUITIVA

Teorema (Fubini - Tonelli)

f cont en $R = \underbrace{[a,b] \times [c,d]}_{\text{dominio regular}}$

$$\iint_R f(x,y)\, dA = \int_a^b \left(\underbrace{\int_c^d f(x,y)\, dy}_{\text{funciones de } x} \right) dx$$

$$= \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\, dx \right) dy$$

Se puede EXTENDER $\underbrace{\text{a funciones a SALTOS}}_{\text{discontinuas en \# finitos puntos}}$

E)

$$\iint_R (x^2 + y)\, dA \quad R = [0,1] \times [0,1]$$

$$\int_0^1 dy \int_0^1 dx\, (x^2 + y) = \int_0^1 dy \left(\frac{x^3}{3} + xy\right)\Bigg|_0^1$$

$$= \int_0^1 dy \left(\frac{1}{3} + y\right) = \left(\frac{y^2}{2} + \frac{y}{3}\right)\Bigg|_0^1$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3+2}{3 \cdot 2} = \frac{5}{6}$$

→ Vale TB para f con valores negativos

E) 3.1.1 (v)

$$\iint_Q (x\sin y - y e^x)\, dA \,, \quad Q = [-1,1]\times\left[0,\tfrac{\pi}{2}\right]$$

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} dy \, (x \sin y - y e^x)$$

$$= \int_{-1}^{1} dx \left(-x\cos y - \frac{y^2}{2} e^x \right)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \int_{-1}^{1} dx \left(x - \frac{\pi^2}{8} e^x \right) = \frac{x^2}{2} - \frac{\pi^2}{8} e^x \Bigg|_{-1}^{1}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}}_{} - \frac{\pi^2}{8}\left(e - e^{-1} \right)$$

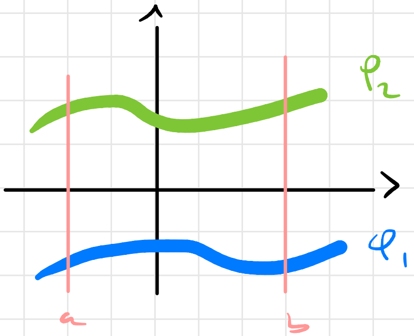
es la contribución
función impar
en intervalo par

Vamos a ver el caso de conjunto más completos

→ REGIONES ELEMENTALES

def D y-sencillo

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\ ,\ x \in [a,b]\}$$



de la misma manera puedo definir X-sencillo

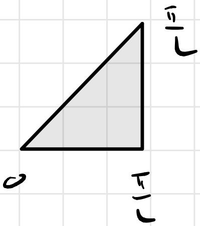
$$\iint_D f\, dA = \underbrace{\int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy\ f(x,y)}_{\text{Funciones } X}$$

Lo mismo para X-Sencillo

E)
$$\iint_T \left(x^3 y + \cos y \right) dx\, dy$$

$$T = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \ , \ 0 \le y \le x \right\}$$

→ TRIÁNGULO



$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{x} dy \left(x^3 y + \cos y \right)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \left(x^3 \frac{y^2}{2} \Big|_0^x + \sin y \Big|_0^x \right) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \left(\frac{x^5}{2} + \sin x \right)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{x^6}{6} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{2} \right)^6 + 1$$

E) 3.1.2 (ii) (b)

$$\iint_Q (xy - x^3)\, dA$$

$$Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \in [0,1], -1 \le y \le x\}$$

$$\int_0^1 dx \int_{-1}^{x} dy\, (xy - x^3)$$

$$= \int_0^1 dx \left(x\frac{y^2}{2} - x^3 y \right)\Bigg|_{-1}^{x} =$$

$$= \int_0^1 dx \left(-\frac{x^3}{2} - \frac{x}{2} - x^4 - \cancel{x^3} \right)$$

$$= -\left(\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{8} + \frac{x^2}{4} \right)\Bigg|_0^1 = -\frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4}$$

Es) 3.1.2 (iii) (c)

$$Q = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \le |x| \; , \; x \in [-2,2] \}$$

$$\iint_Q f(x,y) \, dA$$

$$f(x,y) = 2x - \sin(x^2 y)$$

$$|y| \le |x| \implies -|x| \le y \le |x|$$

$$x < 0 , \; x \in [-2, 0) \implies x \le y \le -x$$

$$x \ge 0 , \; x \in [0, 2] \implies -x \le y \le x$$

Resulta

$$\underbrace{\int_{-2}^{0} dx \int_{x}^{-x} dy \; f(x,y)}_{A} + \underbrace{\int_{0}^{2} dx \int_{-x}^{x} dy \; f(x,y)}_{B}$$

A) $$\int_{-2}^{0} dx \int_{x}^{-x} dy \; (2x - \sin(x^2 y))$$

$$= \int_{-2}^{0} dx \left(2xy + \frac{1}{x^2} \cos(x^2 y) \right) \Bigg|_{x}^{-x}$$

$$= \int_{-2}^{0} dx \; (2xy) \Big|_{x}^{-x} + \int_{-2}^{0} dx \; \frac{\cos(x^2 y)}{x^2} \Bigg|_{x}^{-x}$$

$$= \int_{0}^{-2} 4x^2 + \int_{-2}^{0} \underbrace{\left(\frac{\cos(-x^3)}{x^2} - \frac{\cos(x^3)}{x^2} \right)}_{= 0} dx$$

Se Podía predecir

$\rightarrow$ Integral Función impar en intervalo simétrico

$$= \frac{4}{3} x^3 \Big|_{0}^{-2} = -\frac{32}{3}$$

B) $\int_0^2 dx \int_{-x}^{x} dy \, (2x - \underbrace{\sin(x^2 y)}_{\text{NO CONTRIBUYE}})$

$$= \int_0^2 2xy \Big|_{-x}^{x} = \int_0^2 4x^2 = \frac{4}{3} 8 = \frac{32}{3}$$

Sumando las dos contribuciones

Ej 3.1.2 (i.o) (d)

$$Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 , |x| + |y| \leq 1\}$$

$$\iint_Q dA \, f(x,y) \quad , \quad f(x,y) = y \sin x$$

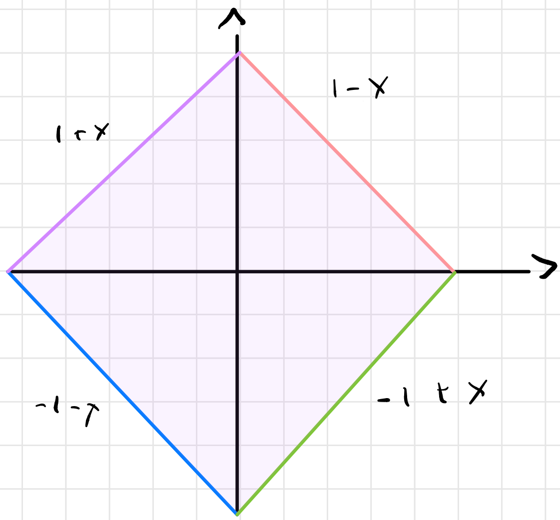
Vamos a ver cómo está hecho Q

$x, y > 0 \quad x + y = 1 \quad , \quad y = 1 - x$

$x, y < 0 \quad x + y = -1 \quad , \quad y = -1 - x$

$x > 0 \; y < 0 \quad x - y = 1 \quad , \quad y = -1 + x$

$x < 0 , y > 0 \quad -x + y = 1 \quad , \quad y = 1 + x$



$$\underbrace{\int_{-1}^{0} dx \int_{-1-x}^{1+x} dy \; f(x,y)}_{A} + \underbrace{\int_{0}^{1} dx \int_{-1+x}^{1-x} dy \; f(x,y)}_{B}$$

A) $$\int_{-1}^{0} dx \int_{-1-x}^{1+x} dy \; y \sin x = \int_{-1}^{0} dx \left(y^2 \sin(x) \right)\Big|_{-1-x}^{1+x}$$

$$= \int_{-1}^{0} (1+x)^2 \sin(x) - (1+x)^2 \sin(x) \, dx = 0$$

B) $$\int_{0}^{1} dx \int_{-1+x}^{1-x} dy \; y \sin(x) = 0$$

→ Funciones antisimétricas en intervalo simétrico