SEMANA PASADA : DERIVADA PARCIAL (empezamos con)

→ EXTENSIONES ...

$x, v \in \mathbb{R}^n$ ; $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $t \mapsto x + vt$ } Línea

↳ DIRECCIÓN LINEA

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ , $t \mapsto \underbrace{f(x+vt)}$

función luego la curva $L$

→ CÓMO VARIA $f$ luego $L$ ?

def DERIVADA DIRECCIONAL

$$f'_v(x) = \frac{d}{dt} f(x+vt)\Big|_{t=0} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}$$

OBS $v = \hat{e}_i$ ⇒ $\underbrace{\text{DERIVADA PARCIAL}}$

↳ vector BASE CAN

en este sentido es una generalización

Ej $(x, y, z) \mapsto T$ } campo térmico

espacio temp

→ Derivada direccional : cómo varia $T$ en una dirección

→ TASA CAMBI

Se define a TRAVÉS de un $\underbrace{\text{LÍMITE}}$

¿EXISTE? → ¿CUÁNDO?

Teorema

$f$ diferenciable $x \Rightarrow f_v(x)$ EXISTE $\forall v$

$$f_v(\bar{x}) = \nabla f|_{\bar{x}} \cdot v$$

E) $f(x,y,z) = x^2 e^{-yz}$

der. dir $v = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$

en $(1,0,0) \equiv x_0$

$$f_x = 2x e^{-yz}$$

$$f_y = -z x^2 e^{-yz}$$

$$f_z = -y x^2 e^{-yz}$$

$$\nabla f|_{x_0} = (2,0,0)$$

$$f_v(x_0) = \nabla f|_{x_0} \cdot v = (2,0,0) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

LA NOCIÓN de DERIVADA DIRECCIONAL AYUDA a ACLARAR EL SIGNIFICADO de $\nabla$

Teorema $\nabla f$ APUNTA HACIA LA DIRECCIÓN DE MÁXIMO CRECIMIENTO de $f$

dim $\hat{n}$ vector unitario, $\hat{n} = (0, \ldots 1, \ldots 0)$

TASA CAMBIO $\nabla f \cdot \hat{n} = \underbrace{\|\nabla f\| \cos\theta}$

MÁXIMA $\theta = 0$

$\to$ $\hat{n}$ Paralelo $\nabla f$

en esta línea ..

Teorema $\nabla f \perp$ CURVAS de NIVEL

$\hookrightarrow$ Perpendicular

Me EXPLICO $\to$ CÓMO SE FORMULA?

$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

DIFERENCIABLE en $x_0 \in \ell_f^{(c)} = \{ x \in A : f(x) = c \}$

$\nabla f|_{x_0} \cdot v = 0$

$\hookrightarrow$ $v \in c(t)$ CURVA

$c(0) = x_0$

En esta línea ...

PLANO TANGENTE $\mathcal{L}_f^{(c)}$

$$P_f^{(c)} = \{ x \in A : \nabla f(x_0)(x - x_0) = 0 : x_0 \in \mathcal{L}_f^{(c)} \}$$

Ej SUPERFICIE $\overbrace{3xy + z^2}^{f(x,y,z)} = 4$ ) Superficie de nivel es una f en $\mathbb{R}^3$

PLANO TANGENTE en $(1,1,1)$

$f(x,y,z) = 3xy + z^2$ (Reconocer $f$ )

$\nabla f = (3y, 3x, 2z)$

$\nabla f_{(1,1,1)} = (3,3,2)$

PLANO TANGENTE $\underbrace{(3,3,2) \cdot (x-1, y-1, z-1) = 0}_{3x + 3y + 2z = 8}$

Ej 1.4.7

Superficie metal

La Temperatura depende de la posición

$$T(x,y) = e^x \cos y + e^y \cos x$$

i) ¿en qué dirección crece más rápido?

$$\nabla T(x,y) = (e^x \cos y - e^y \sin x,$$
$$-e^x \sin y + e^y \cos x)$$

ii) ¿en qué dirección crece más lentamente

$$-\nabla T(x,y)$$

Hemos entendido un poco mejor la utilidad del gradiente y este tipo de nociones...

VAMOS a VER AHORA CÓMO SE COMPONEN

Teorema

$$\left.\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \\ g &: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \end{aligned}\right\} \text{ diferenciable } x_0$$

i) $c \in \mathbb{R}$, $h(x) = c f(x)$ dif. $x_0$, $J_h(x_0) = c\, J_f(x_0)$

ii) $h(x) = f(x) + g(x)$ dif $x_0$, $J_h(x_0) = J_f(x_0) + J_g(x_0)$

iii) $(m=1)$ $h = gf$ dif $x_0$, $J_h(x_0) = \underbrace{g(x_0)}\, J_f(x_0) + \underbrace{f(x_0)}\, J_g(x_0)$

números

$(m=1)$

iv) $(m=1)$ $g \neq 0$, $\dfrac{f}{g}$ dif $x_0$, $J_h(x_0) = \dfrac{g(x_0) J_f(x_0) - f(x_0) J_g(x_0)}{[g(x_0)]^2}$

E)

$$h(x,y,z) = \frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+1} \equiv \frac{f(x,y,z)}{g(x)}$$

$$\left.\begin{aligned} \nabla f &= (2x,\ 2y,\ 2z) \equiv J_f \\ \nabla g &= (2x,\ 0,\ 0) \equiv J_f \end{aligned}\right\} \text{funciones } \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$J_h = \frac{g(x)\,J_f(x) - f(x)\,J_g(x)}{(g(x))^2}$$

$$= \frac{(x^2+1)(2x,2y,2z) - (x^2+y^2+z^2)(2x,0,0)}{(x^2+1)}$$

¿Cómo se componen las funciones?

REGLA de la CADENA

$$z = f(y), \quad y = g(x)$$

$$z = f(g(x)), \quad \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}$$

$$= f'(g(x))\, g'(x)$$

¿CÓMO LA EXTIENDO?

Teorema $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ ABIERTOS

$g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$f : V \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ : $g(U) \subset V$

$g$ dif. $x_0 \in U$, $f$ dif $g(x_0) \in V$

$\Rightarrow$ $f \circ g$ dif $x_0$, $J_{f \circ g}(x_0) = J_f(y_0)\, J_g(x_0)$

EL JACOBIANO FACTORIZA por Composición

# Caso Especial

$$c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$c(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

$$h = f(c(t)) = f(x(t), y(t), z(t))$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

$$= \underbrace{\nabla f\,(c(t))}_{J_f(c(t)} \cdot \underbrace{c'(t)}_{J_c(t)}$$

# Segundo Caso Particular

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ , $g(x,y,z) = (u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z))$

Consideramos $h = f \circ g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

Resulta $h(x,y,z) = f(u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z))$

$$\underbrace{\left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial h}{\partial z}\right)}_{\nabla h = J_h} = \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)}_{\nabla f = J_f} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & & \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \\ & & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Finalmente $J_h = J_f \cdot J_g$

E)

$$f(u, v, w) = u^2 + v^2 - w$$

con

$$u(x, y, z) = x^2 y$$
$$v(x, y, z) = y^2$$
$$w(x, y, z) = e^{-xz}$$

$$h(x, y, z) = x^4 y^2 + y^4 - e^{-xz}$$

QUEREMOS CALCULAR $\frac{\partial h}{\partial x}$

Podemos CALCULARLA DIRECTAMENTE

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 4 y^2 x^3 - z e^{-xz}$$

O APLICANDO LA REGLA

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$= 2 x^2 y (2xy) + 0 + z e^{-xz}$$

Vamos a considerar por fin el caso más general

$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longmapsto (x^2+1, y^2)$$

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(u,v) \longmapsto (u+v, u, v^2)$$

Calculamos el jacobiano de las dos funciones

$$\underbrace{J_g(x,y)}_{\text{es una matriz } 2\times 2} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(x^2+1) & \frac{\partial}{\partial y}(x^2+1) \\ '' \quad y^2 & '' \quad y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix}$$

$$J_f(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u}\, u+v & \frac{\partial}{\partial v}\, u+v \\ '' \quad u & '' \quad u \\ '' \quad v^2 & '' \quad v^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2v \end{pmatrix}$$

EL RESULTADO final se OBTIENE multiplicando las dos matrices

$$J_{f\circ g}(x,y) = J_f(g(x,y))\, J_g(x,y)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2y^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix}$$

Tengo que evaluar el elemento $2v$ en $g$, $2y^2$

segunda coordenada

$$= \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x & 0 \\ 0 & 4y^3 \end{pmatrix}$$