INTEGRALES

→ CAMBIO VARIABLE

1D $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

$x = g(u)$

$$\int_c^d f(g(u)) \underbrace{\left(\frac{dx}{du}\right)}_{\left(\frac{dg(u)}{du}\right)} du$$

$g^{-1}(a)$

nD → Derivadas Parciales

→ ¿cómo cambia?

Consideramos el caso - -

2D

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

Cambio VARIABLES → Función

$T : D \to D^*$, $x \longmapsto u(x,y)$

C^1 , $\underbrace{\text{biyectiva}}_{\text{uno a uno}}$ $\quad y \longmapsto v(x,y)$

T

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D^*} f(u(x,y), v(x,y))\,\underbrace{|J_T|}_{\text{Determinante}}\,du\,dv$$

IDEAS

- $dx = \left(\frac{dx}{du}\right) du$ → Der. Parc. → JACOBIANO
- ¿ porqué cojo determinante? → Area rectángulo

Vamos a ver cómo se usa

→ Coordenadas Polares

$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta$$

$$J_T = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\det J_T = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

E) AREA CÍRCULO RADIO 1

$$\iint_D dx\,dy \quad , \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \; r = 2\pi \frac{r^2}{2}\Big|_0^1 = \pi$$

viene del J

EN GENERAL

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D^*} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,\underline{r}\,dr\,d\theta$$

↳ No olvidéis viene de J

OTRO EJEMPLO

$$\iint_D \log(x^2+y^2)\,dx\,dy$$

D región entre Primer Cuadrante Círculos

$$x^2+y^2=a^2$$

$$x^2+y^2=b^2$$

$$0<a<b$$

→ I cuadrante

→ Jacobiano

$$\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta}_{} \int_a^b dr\; r\; \log(r) = \frac{\pi}{2}\int_a^b dr\; r\; \log(r)$$

solo contribuye con $\frac{\pi}{2}$ a multiplicar

Cómo se calcula esa integral ?

$\longrightarrow$ x PARTES

$$\int_a^b r \log(r)\, dr = \frac{r^2}{2} \log(r)\Big|_a^b - \int_a^b r\, dr$$

$$= \frac{b^2}{2}\log(b) - \frac{a^2}{2}\log(a)$$

$$- \frac{b^2}{2} + \frac{a^2}{2}$$

$$= \frac{b^2}{2}\log(b) - \frac{a^2}{2}\log(a) - \frac{1}{2}\left(b^2 - a^2\right)$$

$\underrightarrow{E_j}$: Integral GAUSSIANA

→ Importante en ESTADÍSTICA

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}}$$

¿cómo se calcula?

vamos a considerar

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx\right)^2 = \pi$$

$$\lim_{a\to\infty} \iint_D e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq a^2\}$$

→ Pasamos en CC.PP.

en CC.PP. el integral se escribe

$$\int_0^{2\pi} \underbrace{\int_0^a e^{-r^2}\, r\, dr}\, d\theta$$

$$z = r^2, \quad dz = 2r\,dr, \quad dr = \frac{dz}{2r}$$

$$a \mapsto a^2, \quad 0 \mapsto 0$$

$$\int_0^a e^{-r^2} r\,dr = \int_0^{a^2} e^{-z}\, \cancel{r}\, \frac{dz}{2\cancel{r}} \longrightarrow dz$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{-0} - e^{-a^2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-a^2}\right)$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\left(1 - e^{-a^2}\right) d\theta = \pi\left(1 - e^{-a^2}\right)$$

Si cojo el límite

$$\lim_{a\to\infty} \pi\left(1 - e^{-a^2}\right) = \pi$$

3D ¿Qué pasa en ...?

→ Lo mismo, pero...

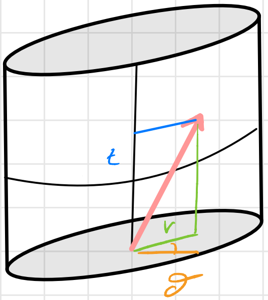
→ Cambia el <u>Jacobiano</u>

$u, v, w \;:\; x = x(u, v, w),\; y \ldots$

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} x & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial}{\partial u} y & - & - \\ \vdots & - & - \end{pmatrix}$$

→ Vamos a por un ejemplo

COORDENADAS CILÍNDRICAS



en el PLAN SON POLARES

en el eje VERTICAL SON CARTESIANAS

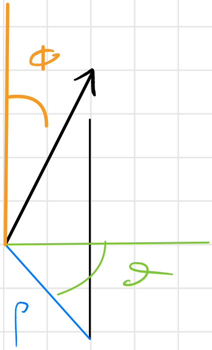
$$x = r\cos\theta \quad , \quad y = r\sin\theta \quad , \quad z = z$$

$$J = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tenemos la fórmula

$$\iiint f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint f(\ldots)\,r\,dr\,d\theta\,dz$$

COORDENADAS ESFÉRICAS



$$
\begin{aligned}
x &= \rho \sin\phi \cos\theta \\
y &= \rho \sin\phi \sin\theta \\
z &= \rho \cos\phi
\end{aligned}
$$

Jacobiano?

$$
J = \begin{pmatrix}
\sin\phi\cos\theta & -\rho\sin\phi\sin\theta & \rho\cos\phi\cos\theta \\
\sin\phi\sin\theta & \rho\sin\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\sin\theta \\
\cos\phi & 0 & -\rho\sin\phi
\end{pmatrix}
$$

$$
\det J = \rho^2 \sin\phi
$$

Tenemos la fórmula

$$
\int_W f\,dx\,dy\,dz = \int_{W^*} f(\ldots)\,\rho^2 \sin\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi
$$

Vamos a calcular el volumen de una esfera

Radio R

Centro $(0,0,0)$

$$\int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^{\pi} d\phi \sin\phi \int_0^{R} \rho^2 d\rho$$

$$\int_0^{2\pi} d\vartheta = 2\pi$$

$$\int_0^{\pi} d\phi \sin\phi = \cos\phi \Big|_{\pi}^{0} = 1-(-1) = 2$$

$$\int_0^{R} \rho^2 = \frac{\rho^3}{3}\Big|_0^R = \frac{R^3}{3}$$

$$\int_w dw = \frac{4}{3}\pi R^3$$

E)

$$\int_{W} dx\, dy\, dz \; e^{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$W = \underbrace{\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 1\}}_{\text{ESFERA UNITARIA}}$$

en coordenadas POLARES

$$\int_{W} e^{\rho^3} \underbrace{\rho^2 \sin\phi}_{\text{viene del jacobiano}} \, d\rho\, d\theta\, d\phi$$

$\rightarrow$ solo contribuye con una constante

$$= \int_0^1 d\rho \int_0^{\pi} d\phi \int_0^{2\pi} d\theta \; e^{\rho^3} \rho^2 \sin\phi$$

$$= 2\pi \int_0^1 d\rho \; e^{\rho^3} \rho^2 \int_0^{\pi} d\phi \, \sin\phi$$

$$= 2\pi \left(\cos(\phi) \Big|_{\pi}^{0} \right) \int_0^1 d\rho\, \rho^2 e^{\rho^3}$$

$$= \underbrace{4\pi \int_0^1 d\rho\, \rho^2 e^{\rho^3}}_{\text{¿cómo se hace?}}$$

$$\rho^2 e^{\rho^3} = \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial \rho} e^{\rho^3}$$

$$= \frac{4\pi}{3} e^{\rho^3} \Big|_0^1 = \frac{4\pi}{3} (e - 1)$$