Primera parte curso

Derivadas Funciones más VARIABLE

APLICACIÓN

$\to$ Fórmula de TAYLOR $\to$ ¿de qué se TRATA?

¿Cómo se generaliza?

$\to$ VAMOS AL GRANO

Teorema (de TAYLOR, al segundo ORDEN)

$f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C^3(U)$

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(x_0)$$

Suma sobre todos los posibles pares

$\to$ cuántos? n^2

$$+ \underline{R_{2,x_0}(h)}$$

$$R_{2,x_0}(h)/\|h\|^2 \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

con $R_{2,x_0}(h) = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-t)^2 \sum_{i,j,k=1}^{n} \frac{\partial^3}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} f(x_0+th)\, h_i h_j h_k \, dt$

La misma fórmula se puede escribir

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \underbrace{J_f(x_0)}_{\text{JACOBIANO) GRADIENTE}} h + \frac{1}{2} h^T H_f(x_0)\, h$$

$$H_f(x_0) \overset{def}{=} \underbrace{\text{Hessiano } f \text{ en } x_0}$$

$$[H_f(x_0)]_{ij} = \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}}_{\text{Extensión gradiente a segundo orden}} f$$

OBS La EXTENSIÓN a ÓRDENES MÁS ALTOS es (Relativamente) Intuitiva

Vamonos a centrarnos más bien en los ejemplos

E) $f(x,y) = \sin(x+2y)$

Fórmula de TAYLOR al segundo orden en $(0,0)$

→ Se trata de Evaluar los distintos términos de la fórmula

$$f(0,0) = \sin(0) = 0$$

$$f_x(0,0) = \cos(x+2y)\Big|_{(0,0)} = 1$$

$$f_y(0,0) = 2\cos(x+2y)\Big|_{(0,0)} = 2$$

$$f_{xx}(0,0) = \underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\cos(x+2y)}_{-\sin(x+2y)}\Big|_{(0,0)} = 0$$

$$f_{yy}(0,0) = \underbrace{\frac{\partial}{\partial y}\left(2\cos(x+2y)\right)}_{-4\sin(x+2y)}\Big|_{(0,0)} = 0$$

$$f_{xy}(0,0) = \frac{\partial}{\partial y}\cos(x+2y)\Big|_{(0,0)} = 0$$

Se obtiene

$$f(h) = f(h_1,h_2) = h_1 + 2h_2 + R_{2,0}(h)$$

E) APROXIMACIONES Lineales y CUADRÁTICAS

$$(3.98-1)^2/(5.97-3)$$

Se puede tratar como el desarrollo de

$$f(x,y)=\frac{(x-1)^2}{(y-3)^2}, \quad x_0=(4,6)$$

con $(h_1,h_2)=(-0.02,-0.03)$

→ USAMOS TAYLOR

$$f_x(x,y)=\frac{2(x-1)}{(y-3)^2}, \quad f_y(x,y)=-\frac{2(x-1)^2}{(y-3)^3}$$

$$f_{xy}=f_{yx}=-\frac{4(x-1)}{(y-3)^3},$$

$$f_{xx}(x,y)=\frac{2}{(y-3)^3}, \quad f_{yy}(x,y)=\frac{6(x-1)^2}{(y-3)^4}$$

Tenemos $f_x(4,6)=\frac{2}{3}$, $f_y(4,6)=-\frac{2}{3}$

Linear Aproximation $f(x+h)=1+(-0.02)\frac{2}{3}-(-0.03)\frac{2}{3}$

QUADRATIC APROXIMATION, añado

$$\frac{2}{3}(-0.02)^2-\frac{4}{9}(-0.02)(0.03)+\frac{2}{3}(-0.03)$$

AL IGUAL QUE en CÁLCULO I, esto tiene relación con máximos y mínimos

→ Ahora se vuelve más complejo

def $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$x_0 \in U$ LOCAL MIN. f

$\iff \exists V \in \underbrace{\mathcal{I}_{x_0}}_{\text{entorno } x_0} : \forall x \in V \quad f(x) \geq f(x_0)$

(Para el máximo cambia la desigualdad)

→ en ambos caso se habla de EXTREMO LOC.

def x_0 EXTREMO Loc. $f \iff x_0$ MIN o MAX

→ en esta línea

def x_0 Punto CRÍTICO $f \iff J_f(x_0) = 0$

def x_0 Punto de SILLA $f \iff x_0$ CRÍTICO pero no EXTREMO

¿Cómo se reconocen? → Derivadas

Ej) Puntos críticos $z = x^2 y + y^2 x$

→ Jacobiano ~ Gradiente

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + y^2 \quad ; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2yx + x^2$$

→ Lo tengo que igualar a 0

$$\begin{cases} 2xy + y^2 = 0 \\ x^2 + 2yx = 0 \end{cases}$$

Tengo que soluciona este sist.

→ $x^2 - y^2 = 0$ (Restando)

$x = \pm y$

→ reemplazando

$$\begin{cases} 2x^2 + x^2 = 0 & +x \\ x^2 - 2x^2 = 0 & -x \end{cases}$$

→ $\exists!$ Punto crítico $(0,0)$

NOTA QUE $y = x \Rightarrow \underbrace{z(x) = 2x^3}_{>0 \, <0}$

→ NO es EXTREMO

x_0 EXTREMO $\Rightarrow$ x_0 Punto CRÍTICO

$\underbrace{\quad\quad\quad\quad}_{\text{MIN o MAX}}$

$\cancel{\Leftarrow}$

↳ ¿cuándo?

→ $\underbrace{\text{Segunda derivadas}}_{\text{al igual que en C1}}$

Teorema $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in C^3(U)$,

x_0 Punto CRÍTICO f

Ahora os lo explico

($H_f(x_0)$ definido - POSITIVO

$\Rightarrow$ x_0 min. Rel.

(def. NEG $\Rightarrow$ MAX. Rel.)

Vamos a entender bien qué quiere decir

def $g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ FORMA CUADRÁTICA

$$g(h_1, \ldots h_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} h_i h_j$$

$$= (h_1, \ldots h_n) \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{n1} \\ & a_{ij} & \\ a_{1n} & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$$

E) Función Hessiana

$$H_f(x_0) = \frac{1}{2} h^T \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_n} \\ & \ddots & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}}_{\text{MATRIZ Hessiana}} h$$

Forma Cuadrática

def g definita Positiva $\iff \forall h \in \mathbb{R}^n \quad g(h) \geq 0$

$$g(h) = 0 \quad (h = 0)$$

o si no es definita negativa

¿Cómo lo veo?

Teorema g def. pos. $\iff \forall i \leq n \quad \underbrace{Re}(\lambda_i) > 0$

Hessiana simétrica $\to \lambda_i = \bar{\lambda}_i$ (Teorem. Spectral)

en el CASO $\mathbb{R}^2$

Teorema

$$B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad a > 0, \ \det B > 0 \Rightarrow g = \frac{h^T B h}{2} \text{ POS. DEF.}$$

E)

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$(x,y) \mapsto x^2 - 2xy + 2y^2$$

$$= (x-y)^2 + y^2 \geq 0$$

$\hookrightarrow f(0,0) = 0$

único punto crítico

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(0,0) & f_{yx}(0,0) \\ f_{xy}(0,0) & f_{yy}(0,0) \end{pmatrix}$$

$$f_x(x,y) = 2(x-y) \quad , \quad f_{xx}(x,y) = \underline{2 > 0}$$

$$f_{xy}(x,y) = -2$$

$$f_y(x,y) = -2(x-y) + 2y$$

$$f_{yy}(x,y) = -(-2) + 2 = 4$$

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det H_f(0,0) = 8 - 4 = 4 > 0$$

$\rightarrow$ MÍN. LOC.

Ejercicio más completo

Ej $f(x,y) = \log(x^2+y^2+1)$

determinar puntos críticos y decir si son máximos o mínimos

Puntos críticos $\Rightarrow \nabla f$

$$\nabla f = \left(\frac{2x}{x^2+y^2+1}, \frac{2y}{x^2+y^2+1} \right)$$

$$\nabla f = 0 \iff (x,y) = \underbrace{(0,0)}$$

ÚNICO PUNTO CRÍTICO

MAX, MIN?

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) = \frac{2(x^2+y^2+1) - 4x^2}{(x^2+y^2+1)} = \frac{2(y^2-x^2+1)}{y^2+x^2+1}$$

$$f_{xx}(0,0) = 2 = f_{yy}(0,0)$$

$\hookrightarrow$ x SIMETRÍA

$$f_{xy}(x,y) = -\frac{4xy}{(x^2+y^2+1)^2}$$

$$f_{xy}(0,0) = 0$$

$$H_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\det H_f = 4 > 0 \Rightarrow H_f$ POS. DEF

$\Rightarrow (0,0)$ MÍNIMO LOCAL

MAX y MIN. GLOBALES

<u>def</u> x_0 MAX (MIN) GLOB $f \iff \forall x \in D_f$

$$f(x) \leq f(x_0)$$
$$(\geq)$$

→ Antes de ver cómo se encuentran

→ ¿EXISTEN?

<u>Teorema</u> $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

- D cerrado y Acotado
- f cont.

$\Rightarrow \exists\, x_M, x_m$ MAX/MIN en D

entonces cómo los encuentro

→ CALCULO MAX y MIN en D y ∂D

→ comparo valores