Hoy Practicamos con

$$\underbrace{\text{MAX y MIN LOC.}}$$

Lo PRIMERO : $\underbrace{\text{PUNTOS CRÍTICOS}}$

¿cómo se hace?

$$\underbrace{\nabla f = 0}_{\text{GRADIENTE NULO}} \longrightarrow \bar{x}_0$$

MAX o MIN?

→ Hessiano $[H_f]_{ij} = \left.\dfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f \right|_{\bar{x}_0}$

→ Aprendemos a calcularlo

E) 2.1.2 (i)

$$f(x,y) = \log(x^2 + y^3)$$

$$f_x = \frac{2x}{x^2 + y^3}$$

$$f_y = \frac{3y^2}{x^2 + y^3}$$

$$f_{xy} = \frac{2x^2 + 2y^3 - 4x^2}{(x^2 + y^3)^2} = -2\,\frac{x^2 - y^3}{(x^2 + y^3)^2}$$

$$f_{yy} = \frac{6y(x^2 + y^3) - (3y^2)^2}{(x^2 + y^3)^2} = 3\,\frac{2yx^2 - y^4}{(x^2 + y^3)^2}$$

$$f_{xy} = -\frac{6xy}{(x^2 + y^3)^2}$$

$$H_f = \frac{1}{(x^2 + y^3)^2} \begin{pmatrix} -2(x^2 - y^3) & -6xy \\ -6xy & 3(2yx^2 - y^4) \end{pmatrix}$$

E) 2.1.2 (v)

$$f(x,y) = \arctan\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$f_x = \frac{y^{\cancel{2}}}{x^2+y^2}\,\frac{1}{\cancel{y}} = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$f_y = \frac{\cancel{y^2}}{x^2+y^2}\left(-\frac{x}{\cancel{y^2}}\right) = -\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$f_{xx} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_{yy} = +\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_{xy} = +\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$H_f = \begin{pmatrix} -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} & \frac{x^2-y^2}{(\,-\,-\,)} \\ \frac{x^2-y^2}{(\,-\,-\,)^2} & +\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix}$$

¿Qué hacemos con la Hessiana?

1) H_f DEF. POS. $\iff$ VALORES PROPIOS POS.

$\rightarrow$ $\bar{X}_0$ MIN. LOC.

2) H_f DEF. NEG. $\iff$ VALORES PROPIOS NEG.

$\rightarrow$ $\bar{X}_0$ MAX. LOC

3) VALORES PROPIOS MIXTOS

$\rightarrow$ $\bar{X}_0$ SILLA

ESTE CRITERIO es general

$\rightarrow$ En dos VARIABLES se puede especializa así

$\det H_f$

- < 0 $\rightarrow$ Silla
- > 0
  - $f_{xx} > 0$ Min. loc.
  - $f_{xy} < 0$ Max loc.
- $= 0$? $\rightarrow$ Prueba Inconclusa

Volvemos al ejercicio anterior

$$\underbrace{f(x,y) = \arctan\left(\frac{x}{y}\right)}$$

$\longrightarrow$ Propiedad?

$$\left.\Delta f = 0\right\} \quad f \text{ ARMÓNICA}$$

$\longrightarrow$ Qué IMPLICA esto con respecto a la Hessiana?

$$\underbrace{T_r(H_f)} = 0$$

$$\underbrace{T_r H_f = \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} f = \Delta f}$$

TB = la suma de los VALORES PROPIOS

$\longrightarrow$ $T_r H_f = 0$

$\Rightarrow$ H_f NI def POS

NI def NEG.

$\longrightarrow$ Solo Puntos de SILLA

Ej 2.2.1 (i)

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 4y$$

Puntos críticos? → GRADIENTE NULO

$$\nabla f = (2x, 4y-4) = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{(x,y) = (0,1)}$$

$$\rightarrow \underbrace{f(0,1) = -2}$$

MÍNIMO o MÁXIMO?

→ Hessiano

$$H_f = \begin{pmatrix} f_{xx}(0,1) & f_{yx}(0,1) \\ f_{xy}(0,1) & f_{yy}(0,1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

CÓMO TIENE QUÉ SER?

→ Se es $\underbrace{\text{def Pos}}_{\text{AUT. POS}}$ es MIN.

$Sp\, H_f = \{2, 4\} > 0$

$\Rightarrow H_f$ def. Pos.

$\Rightarrow (0,1)$ MIN. LOC.

Ej 2.2.1 (iv)

$$k(x,y) = 8x^3 - 24xy + y^3$$

Puntos críticos? → GRADIENTE

$$\nabla k(x,y) = (24x^2 - 24y,\ -24x + 3y^2)$$

$$\nabla K(x,y) = 0 \begin{cases} x^2 = y & (i) \\ y^2 = 8x & (ii) \end{cases}$$

Elevo al cuadrado (i) y reemplazo (ii)

$$\underbrace{x^4 = y^2}_{(i)^2} \underbrace{= 8x}_{(ii)} \Rightarrow x^4 - 8x = 0 \Rightarrow x(x^3 - 8) = 0$$

$$x \begin{cases} \to 0 \Rightarrow y = 0 \longrightarrow (0,0) \\ \to 2 \Rightarrow \underbrace{y^2 = 16}_{y = 4} \longrightarrow (2,4) \end{cases}$$

2 Puntos críticos → $(0,0)$, $(2,4)$

¿Qué son?

→ Hessiano

$$H_K = \begin{pmatrix} 48x & -24 \\ -24 & 6y \end{pmatrix}$$

$$H_K(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -24 \\ -24 & 0 \end{pmatrix}, \quad \det H_K(0,0) < 0$$

→ ni mínimo, ni máximo

→ SILLA

$$H_K(2,4) = \begin{pmatrix} 96 & -24 \\ -24 & 24 \end{pmatrix}$$

$$\det H_K(2,4) = 24(96-24) > 0$$

→ $(2,4)$ MIN. LOC. $(K_{xx} > 0)$

E) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$

$$\nabla f = (3x^2 - 3y,\ 3y^2 - 3x)$$

$$\nabla f = 0 \quad \begin{cases} x^2 = y & (i) \\ y^2 = x & (ii) \end{cases}$$

Elevo (i) al 2 y reemplazo (ii)

$$x^4 = y^2 = x \Rightarrow x^4 - x = 0$$

$$x(x^3 - 1) = 0 \quad \begin{cases} x = 0,\ y = 0 \\ x = 1,\ y = 1 \end{cases}$$

Puntos Críticos $\underbrace{(0,0),\ (1,1)}_{\text{MIN, MAX?}}$

$\rightarrow$ Hessiano

$f_{xx} = 6x$, $f_{xx}(0,0) = 0$, $f_{xx}(1,1) = 6$

$f_{yy} = 6y$, $f_{yy}(0,0) = 0$, $f_{yy}(1,1) = 6$

$f_{xy} = -3$, $f_{xy}(0,0) = -3$, $f_{xy}(1,1) = -3$

$f_{yx} = ?$ $\rightarrow$ IGUAL Porque es un polinomio, entonces C^1.

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det H_f(0,0) = -9 < 0 \rightarrow (0,0)$ SILLA

$$H_f(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

$\left.\begin{array}{l} \det H_f(1,1) = 36 - 9 > 0 \\ f_{xx}(1,1) > 0 \end{array}\right\}$ MIN LOC.

$\underline{E)}$ $f(x,y) = e^{-x^2+\varepsilon y^2}$ (2.2.2)

Puntos críticos MAX y MIN

$$\nabla f = (-2x, 2\varepsilon y)\, f(x,y)$$

$$\nabla f = 0 \begin{cases} \varepsilon \neq 0, & (0,0) \\ \varepsilon = 0, & (0, y_0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f = \frac{\partial}{\partial x}(-2xf)$$
$$= -2f - 2xf'$$
$$= -2f + 4x^2 f$$
$$= 2(2x^2-1)f$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} f = 2\varepsilon f + 2\varepsilon y f'$$
$$= 2\varepsilon f + (2\varepsilon y)^2 f$$
$$= 2\varepsilon(1 + 2\varepsilon y^2) f$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f = -4\varepsilon x y f$$

$$\varepsilon = 0$$

$$H_f(0,y) = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{def. NEG.}}$$

$\longrightarrow (0, y_0)$ MAX. LOC.

$$\varepsilon \neq 0 \quad \begin{cases} \nearrow \ \varepsilon = 1 & (i) \\ \searrow \ \varepsilon = -1 & (ii) \end{cases}$$

$$(i) \quad H_f = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ SILLA

$$(ii) \quad H_f = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$\longrightarrow$ MAX.

Ej 2.2.4 (ii)

$$f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$$

extremos en $B = \{(x,y) : |x| \leq 2, |y| \leq 1\}$

Primero, observamos que $f(x,y) = (x+y)^2 \geq 0$

$$\nabla f = (2(x+y), 2(x+y))$$

$$\nabla f = 0 \longrightarrow x = -y$$

$$\underbrace{f(x,-x) = 0}$$

Considerando que $f \geq 0$, es un mínimo

Tenemos que estudiar lo que pasa en la frontera

$\longrightarrow$ es un rectangulo

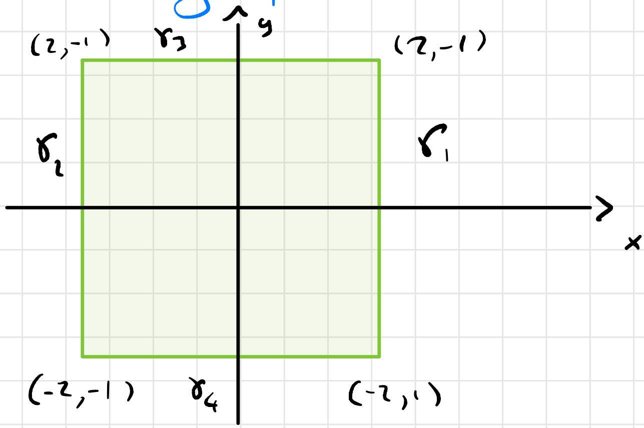
$$\partial B = \{x = 2, -1 \leq y \leq 1\} \quad \gamma_1$$

$$\cup \{x = -2, \quad " \quad\} \quad \gamma_2$$

$$\cup \{y = 1, -2 \leq x \leq 2\} \quad \gamma_3$$

$$\cup \{y = -1, \quad " \quad\} \quad \gamma_4$$

Representación gráfica



$$\gamma_1 \rightarrow f(2,y) = (2+y)^2$$

MAX en $y = 1 \rightarrow f(2,1) = 9$