Semanas Pasadas

1) Funciones en $\mathbb{R}^n$

2) Límites

3) Derivadas

Al igual que $n=1$ permite definir

¿cómo se EXTIENDE en n dim.?

$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

def DERIVADA PARCIAL

1D

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

vector base canónica: $e_i = (0, \dots, 1, \dots 0)$ (1 en la posición i)

$$\bar{x} \longmapsto \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\bar{x}} = \lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{x} + h\bar{e}_i) - f(\bar{x})}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, \underline{x_i + h}, \dots x_n) - f(\dots)}{h}$$

dominio? donde el límite exista

NOTACIÓN: $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, f_{x_i}

Ej $f(x,y) = x^2y + y^3$

derivadas parciales? → CUÁNTAS? 2

una con respecto a x
una con respecto y

→ número derivadas parciales función corresponde a la dimensiones dominio función.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \quad (y \text{ se considera CONSTANTE})$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 3y^2 \quad (x \text{ se considera CONSTANTE})$$

no es OTRA COSA que una derivada en 1 var

→ Aplico TODO el BAGAJE que ya conozco

Ej $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ → Regla Cociente

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y(x^2+y^2) - 2x^2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)}$$

→ Tengo TB $\dfrac{\partial f}{\partial x}$

→ Tengo 2 en TOTAL

Puedo ordenar las derivadas en un vector

def $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\nabla f = \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_i}, \dots \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)}_{\text{dimension dominio } f} \quad \underline{\text{GRADIENTE}}$$

¿Qué ocurre si tengo $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$?

→ ¿cómo generalizo el gradiente?

def $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

JACOBIANO $J_f(\bar{x}) \in \mathbb{R}_{n \, m}$, $[J_f(\bar{x})]_{ij} = \dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$

OBS $m = 1$, $J_f(\bar{x}) = \nabla f |_{\bar{x}}$

E)

$$f(x,y) = (e^{x+y} + y,\ y^2 x)$$

$$\frac{\partial f_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{x+y} + y\right) = e^{x+y}$$

$$\frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\text{''} \quad \text{''}\right) = e^{x+y} + 1$$

$$\frac{\partial f_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\, y^2 x = y^2$$

$$\frac{\partial f_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{''} \quad = 2yx$$

$$J_f = \begin{pmatrix} e^{x+y} & e^{x+y} + 1 \\ y^2 & 2yx \end{pmatrix}$$

Estas son las nociones que me permiten extender la teoría de las derivadas a n var.

→ Pues vamos a EXTENDERLA

SIGNIFICADO GEOMÉTRICO

1D	2D
Tangente curva en punto	PLANO TANGENTE
$y = ax + b$	$z = ax + by + c$
$a = f(x)\Big\rvert_{x_0}$	$a = \dfrac{\partial f}{\partial x}\Big\rvert_{(x_0,y_0)}$
	$b = \dfrac{\partial f}{\partial y}\Big\rvert_{(x_0,y_0)}$

ECUACIÓN PLANO TANGENTE

$$z = f(x_0,y_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right](x-x_0) + \left[\frac{\partial f}{\partial y} \;\; '' \;\; \right](y-y_0)$$

$$= f(x_0,y_0) + \nabla f\Big\rvert_{(x_0,y_0)} \cdot \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$$

en término del gradiente

Ej $z = x^2 + y^4 + e^{xy}$

Plano Tangente $(1,0)$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{\bar{c}} = 2x + y e^{xy} \Big|_{\bar{c}} = 2 + 0\, e^{1\cdot 0}$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{\bar{c}} = 4y^3 + x e^{xy} \Big|_{\bar{c}} = 4\cdot 0^3 + 1\cdot e^{1\cdot 0} = 1$$

$$z(1,0) = 1^2 + 0^4 + e^{0\cdot 1} = 1 + 1 = 2$$

$$z = 2(x-1) + 1(y-0) + 2$$

$$= 2(x-1) + y + 2$$

$$= 2x + y$$

Podemos definir entonces

def $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

f diferenciable en (x_0, y_0)

$$\Longleftrightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right](x-x_0) - \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right](y-y_0)}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|} = 0$$

existe y ...

He considerado $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\to$ CASO MÁS GENERAL

def $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\bar{x}_0 \in U$

$$f \text{ diferenciable} \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0) - J_f(x_0)(x-x_0)}{\|x-x_0\|} = 0$$

diferenciabilidad

↳ relación con OTRAS PROPIEDADES

→ CONTINUIDAD

Teorema

$f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$\underbrace{f \text{ dif } x_0 \subset U}_{\text{HIPOTESIS}} \Rightarrow \underbrace{f \text{ cont } x_0}_{\text{Tesis}}$$

Si es diferenciable es continua

si es continua ? no puedo decir nada

entonces? cuándo es DIFERENCIABLE?

→ es suficiente averiguar la derivadas parciales? NO

Ej

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & x = 0 \text{ or } y = 0 \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

$\frac{\partial}{\partial x} f = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ pero f $\underbrace{\text{no es continua}}_{\text{rotura en } 0}$ | entonces no es diferenciable un CRITERIO para establecer si una función es diferenciable

Teorema

$f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ EXIST and CONT. x_0 $\forall i, j$ $\Rightarrow$ f diff x_0

Ej $f(x,y) = \frac{\cos x + e^{xy}}{x^2+y^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(ye^{xy} - \sin x)(x^2+y^2) - 2x(\cos x + e^{xy})}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{xe^{xy}(x^2+y^2) - 2y(\cdots)}{(x^2+y^2)^2}$$

CONT excepto $(0,0)$

$\Rightarrow$ f diff. $\mathbb{R}^2 / \{(0,0)\}$

Si no es diferenciable, LAS DERIVADAS PARCIAL NO ES CONT.

La implicación opuesta es cierta?

Es decir, si una función es diferenciable en x_0

$\Rightarrow$ Tiene derivadas parciales continuas en x_0

LA RESPUESTA es NO

E)

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & x^2+y^2=0 \\ (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & x^2+y^2\neq 0 \end{cases}$$

DIFERENCIABLE en 0? $\rightarrow$ APLICO DEFINICIÓN

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(0,0)\,x-f_y(0,0)\,y}{\|(x,y)\|}$$

$$\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2} \quad ; \quad f(0,0) = 0$$

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h^2\sin\left(\frac{1}{|h|}\right) - 0}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} h\sin\left(\frac{1}{|h|}\right) = 0$$

Por simetría obtengo el mismo resultado con $f_y(0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - \overbrace{f(0,0)}^{=0} - \overbrace{f_x(0,0)}^{=0}\,x - \overbrace{f_y(0,0)}^{=0}\,y}{\|(x,y)\|}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\overbrace{\sqrt{(x^2+y^2)}}^{z} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)}{\cancel{\sqrt{x^2+y^2}}}$$

$$= \lim_{z\to 0} z \sin\left(\frac{1}{z}\right) = 0$$

ES DIFERENCIABLE !

Vamos a las derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\sin(--) - \frac{x\cos(--)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

evidentemente no es continua en 0

IMPORTANTE : no confundan la FUNCIÓN DERIVADA y su CONTINUIDAD en un punto

(QUE ES LO QUE ACABAMOS de CALCULAR)

y la derivada en un punto

→ EXISTE siempre por definición diff.

Ojo! diff $\Rightarrow \exists f_x(0,0)$ y las OTRAS.

$\cancel{\Leftarrow}$

Ej) $f(x,y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}}$

$$f_x(0,0) = f_y(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{h^{\frac{1}{3}} \cdot 0 - 0}{h} = 0$$

simetría

Pero no es diferenciable

$$\lim_{(x,y)\to 0} \frac{f(x,y) - \underset{0}{f(0,0)} - \underset{0}{f_x(0,0)}x - \underset{0}{f_y(0,0)}y}{\|(x,y)\|}$$

$$\lim_{(x,y)\to 0} \frac{x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{x^2+y^2}} \underset{x=y}{=} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\sqrt{2x^2}} = \infty$$