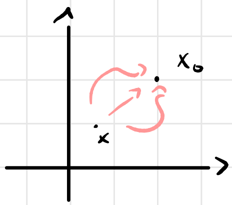
LIMITS

↳ Muchas variables

$x \to x_0$ (nos estamos moviendo en un espacio de varias dimensiones)



caso $\mathbb{R}^2$

nos podemos acercar al punto de muchas maneras posibles

→ El Limite Tiene que ser independiente del camino que elegimos

→ O SI NO, NO EXISTE

APARENTEMENTE es una complicación, pero es lo que nos va a ayudar

→ Si encuentro dos direcciones que me dan Resultados diferentes el LIMITE NO EXISTE

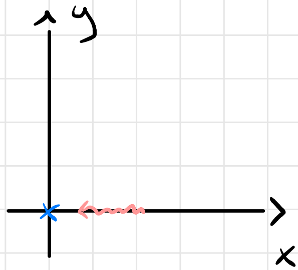
→ o equivalentemente, si encuentro una dirección en la que el LIMITE no existe ... Ya he terminado

VAMOS A VERLO en la PRÁCTICA ...

Ej 1.1.8

(i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x}{x^2+y^2}$

elijo $(x, 0)$

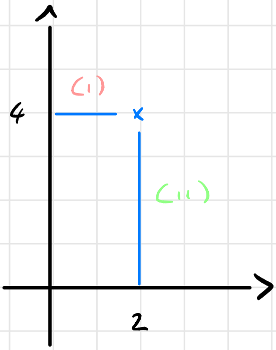


$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x}{x^2} = \lim \dfrac{1}{x} = \infty$

EL LIMITE NO EXISTE

Si elijo $(0, y)$ obtengo $\lim\limits_{y\to 0} 0 = 0$

(ii) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,4)} \dfrac{x+y}{x-y} = \dfrac{2+4}{2-4} = -\dfrac{6}{2} = -3$



dirección (i) $(x,4)$ con $x \to 2$

dirección (ii) $(2,y)$ con $y \to 4$

(i) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x+4}{x-4} = -3$

(ii) $\lim\limits_{y \to 2} \dfrac{2+y}{2-y} = -3$

$$(iii)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{xy^2}{x^2+y^2}}_{f(x,y)} = L$$

✓ $y=0$ $$\lim_{x\to 0} 0\,\frac{x}{x^2+0} = 0$$

✓ $x=0$ $$\lim_{y\to 0} \frac{0}{0+y^2}\,y^2 = 0$$

✓ $x = my^2$ $$\Rightarrow \frac{m^2y^4}{m^2y^4+y^2} = \lim_{y\to 0}\frac{m^2y^2}{m^2y^2+1} = 0$$

↑ non dependen

✓ $x = my$ $$\Rightarrow \frac{m\,y^3}{m^2y^2+y^2} = // \ \frac{my}{m^2+1} \overset{¿}{=} 0$$

$$|f(x,y)| \leq x\,\frac{y^2}{y^2} = x \leq |x| \to 0$$

↳ porque $x^2 \geq 0$

$$x^2+y^2 \geq y^2$$

$$\frac{1}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{y^2}$$

$$\frac{xy^2}{x^2+y^2} \leq x\,\frac{y^2}{y^2}$$

$$L = 0$$

(iv) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{tg\, x}{y} = \lim \frac{\sin x}{y} \frac{1}{\cos x}$

$y = \lambda x \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1}{\lambda} \underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\lambda}$

Depende de λ (es decir, de la dirección)

EL LÍMITE no EXISTE

(viii) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy}$

$y = \lambda x \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin \lambda x^2}{\lambda x^2} = 1$

$x = \lambda y \qquad // \qquad \frac{\sin \lambda y^2}{\lambda y^2} = 1$

El LÍMITE EXISTE y es igual 1

Lo puedo escribir en 1 var

$u = xy, \quad \frac{\sin u}{u} \to 1$ (no depende dirección)

(v) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

$y = \lambda x$, $\lim_{x\to 0} \frac{\lambda x^2}{x^2+\lambda x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\lambda}{1+\lambda}$

EL LIMITE NO EXISTE

↳ 1.1.10 → no es CONTINUA en O

(vi) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

$y = \lambda x$ $\lim_{x\to 0} \frac{\lambda x^3}{(x^2+\lambda^2 x^2)^{\frac{3}{2}}}$

$\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^3} \frac{\lambda}{(1+\lambda^2)^{\frac{3}{2}}}$

depende λ → $\nexists$

(vii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{x^2-y^2}$

$$y = \lambda x \ , \quad \lim_{x\to 0} \frac{\lambda^2 x^2}{x^2 - \lambda^2 x^2} = \frac{\lambda^2}{1-\lambda^2}$$

EL LIMITE NO EXISTE PORQUE Depende de λ

(ix) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-y^2}{x^2+y^2}$

$$y = \lambda x \ , \quad \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^2}(x-\lambda^2)}{\cancel{x^2}(1+\lambda^2)} = -\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}$$

EL LIMITE NO EXISTE PORQUE Depende de λ

(x) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2y^2+(x-y)^2}$$

$y=0$ $$\lim_{x\to 0} \frac{x^4}{0 + x^2} = 0$$

$x=0$ es lo mismo por simetría

$y=\lambda x$ $$\lim_{x\to 0} \frac{x^4(1+\lambda^4)}{\lambda^2 x^4 + (1-\lambda)^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} x^2 \frac{1+\lambda^4}{\lambda^2 x^2 + (1-\lambda)^2} = 0$$

Pero si $\lambda = 1$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} \underbrace{\frac{1+\lambda^2}{\lambda^2}}_{=2} = 2$$

Por esto, no existe

CONTINUITY

↳ SE TRATA TB DE CALCULAR LÍMITES

Ej **1.1.10**

(ii) $$f(x,y) = \begin{cases} 0 & (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

Continua en 0

$y = 0$, $f(x,0) = 0$

X = 0 ES LO MISMO x SIMETRÍA

$y = \lambda x$, $f(x, \lambda x) = \dfrac{\lambda x^2}{\sqrt{x^2 + \lambda^2 x^2}} = |x| \dfrac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} \to 0$

Tengo la sensación de que no depende de la dirección

$$\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{xy}{\sqrt{x^2}} = \frac{x}{|x|} y \leq \frac{|x|}{|x|} |y| = |y| \to 0$$

↳ $y \geq 0$

(iv) $f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{x^2+y^3}{x^2+y^2} & \text{''} \quad \neq \quad \text{''} \end{cases}$

$y = \lambda x$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + \lambda^3 x^3}{x^2 + \lambda^2 x^2} = \lim \frac{1 + \lambda^3 x}{1 + \lambda^2} = \frac{1}{1+\lambda^2}$$

depende de λ

f CONTINUA en $\mathbb{R}^2 / \{(0,0)\}$

(v) $f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{x^4 - y^4}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$

Tengo la sensación de que va a 0

→ Es que ARRIBA Tengo un Polinomio de grado 4 y abajo 2

$$|f(x,y)| \leq \frac{|x^4|}{|x|^2+|y|^2} + \frac{|y|^4}{|x|^2+|y|^2}$$

$$\leq |x|^2 + |y|^2 \to 0$$

↪ He utilizado $|y|^2 \geq 0$ en el denominador del Primer Termino

y $|x^2|$ en el segundo

$$(vi)\quad f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{x+y^2}{x^2+y^2} & \text{〃} \quad \text{〃} \neq \text{〃} \end{cases}$$

$x = 0 \qquad f(x,y) \to 1$

$y = 0 \qquad \text{〃} \quad \to \infty$

La función NO es continua en $(0,0)$

(viii) $f(x,y) = \begin{cases} 1 & x = y \\ \dfrac{\sin(x-y)}{e^x - e^y} & x \neq y \end{cases}$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\sin(x-y)}{e^x - e^y} \qquad (x_0 = y_0)$$

$$= \underset{\sim\sim\sim}{\lim} \frac{1}{e^y} \frac{\sin(x-y)}{e^{x-y} - 1}$$

$$= \lim_{z\to 0} e^{-y_0} \frac{\sin z}{e^z - 1} =$$

$$= \lim_{z\to 0} e^{-y_0} \frac{\sin}{z} \frac{z}{e^z - 1} = e^{-y_0} \neq 1$$

excepto si $y_0 = 0$

f es CONTINUA en $\mathbb{R}^2 / \{(x_0,y_0) : x_0 = y_0 \neq 0\}$

(ix) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 - y^2} & y = \pm x^2 \\ 0 & " = " \end{cases}$

Se TRATA de CALCULAR el LÍMITE

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{x^2 y^2}{x^4 - y^4}$$

$$y = \lambda x \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{\lambda^2 \cancel{x^4}}{\cancel{x^4}(1-\lambda^4)} = \frac{\lambda^2}{(1-\lambda^4)}$$

el LÍMITE depende de λ y por lo TANTO no existe

Por ende, la Función no es CONTINUA en ese punto

$$(x)\quad f(x,y)=\begin{cases}0 & \text{si } xy=0\\ (x+y)\sin\left(\frac{1}{x}\right)\sin\left(\frac{1}{y}\right) & \text{si } xy\neq 0\end{cases}$$

Primero notar que

$$|f(x,y)|\leq |x+y|\left|\sin\left(\tfrac{1}{x}\right)\right|\left|\sin\left(\tfrac{1}{y}\right)\right|$$

$|\sin(--)|\leq 1 \to$ $$\leq |x+y|\leq |x|+|y|$$

↪ DIS. TR.

ESTO demuestra que el LÍMITE es 0 solo si $(x,y)\to(0,0)$

Es decir la Función es CONTINUA en el origen

Sin embargo si considero por ejemplo

$$x=x_0,\quad y=0$$

$$\underset{\sim}{\lim}\ f(x,y)=x_0\sin\left(\frac{1}{x_0}\right)\overbrace{\sin\left(\frac{1}{y}\right)}^{\text{oscila siempre}}\neq 0$$

en general la Función no es continua en el conjunto $xy=0$

Puedo elegir $x=\left(0,\frac{1}{k\pi}\right)$ o $y=\left(\frac{1}{k\pi},0\right)$ y si vuelvo a obtener 0

Ej. 1.1.11

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{x^3y}{x^6+y^2} & \text{'' '' } \neq \text{ ''} \end{cases}$$

(i) $\lim\limits_{x \to 0} f(x, \lambda x)$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\lambda x^4}{x^6 + \lambda^2 x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\lambda x^2}{x^4 + \lambda^2} \begin{cases} 0 & \lambda \neq 0 \\ \frac{0}{0} & \lambda = 0 \end{cases}$$

(ii) $\lim\limits_{x \to 0} f(x, x^3) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^6}{x^6 + x^6} = \dfrac{1}{2}$

(iii) La función no es continua en $(0,0)$ porque el límite no existe ya que depende de la dirección.