Semana pasada

ESPACIO EUCLÍDEO $\mathbb{R}^n$ (ambiente donde trabajamos)

↳ Abiertos/Cerrados

↳ entorno $\bar{x}$ = cualquier abierto que contiene $\bar{x}$

a partir de AQUÍ _ _

FUNCIONES

$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Hoy nos centramos en la primera operación sobre funciones

↳ AL IGUAL que CÁLCULO I es

LÍMITES

LÍMITES

↳ $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ → puede ser una o más dimensiones

¿Qué quiere decir?

→ Cuando x se acerca a x_0

$\Rightarrow$ $f(x)$ se acerca a L

¿cómo lo formalizamos?

x se acerca a x_0 $\Rightarrow$ $x \in I_{x_0}$ → entorno

$f(x)$ se acerca a L $\Rightarrow$ $f(x) \in I_L$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall I_L, \exists I_{x_0} \Big)$$ da igual cuánto esté cerca

$$\underbrace{x \in I_{x_0}}_{\text{x está cerca } x_0} \Rightarrow \underbrace{f(x) \in I_L}_{\text{f(x) está cerca de } L}$$

ESTA YA ES UNA DEFINICIÓN VÁLIDA

Podemos desglosarla ...

x está cerca x_0

distancia entre x y x_0 es pequeña

$$\|x - x_0\| < \delta$$

es la noción que ya utilizamos la semana pasada

un número que mide lo pequeña que es la distancia

Puedo escribir la definición anterior ...

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff \underbrace{\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0}_{\text{da igual cómo esté de cerca}} : \underbrace{\|x - x_0\| < \delta}_{x \text{ cerca } x_0} \Rightarrow \underbrace{\|f(x) - L\| < \varepsilon}_{f \text{ cerca } L}$$

OBSERVACIÓN: misma definición que en $\mathbb{R}$

→ OTRA MANERA evaluar DISTANCIA

Ej

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

→ Puedo escribir ≤ 0?

→ no, no sería una función

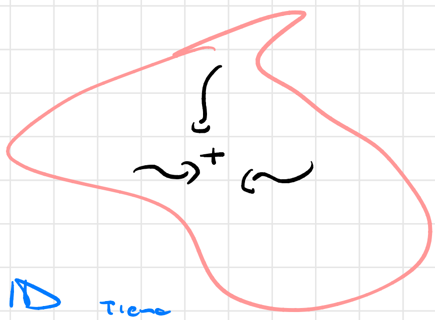
$$\lim_{x \to x_0} f(x) \nexists$$

cerca de 0 tengo tanto $f = 1, -1$

→ $$\underbrace{\lim_{x \to 0^+} f(x) \neq \lim_{x \to 0^-} f(x)}_{\text{dos maneras de acercarme a un punto}}$$

→ $\underbrace{\text{en } \mathbb{R}^n \text{ TENEMOS } \infty}_{\text{ESTO es LO QUE CAMBIA}}$

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y)$$

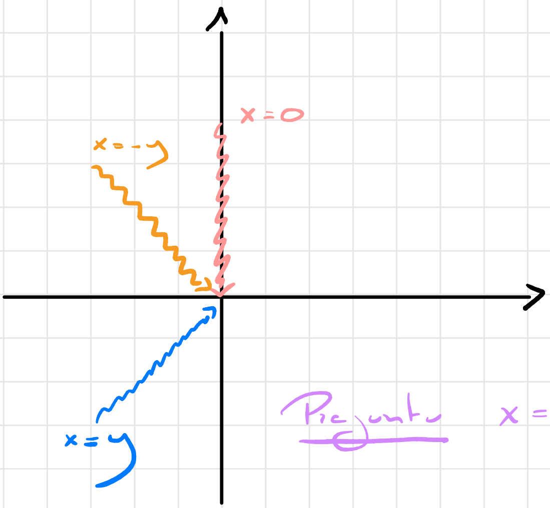


Al igual que en 1D tiene que coincidir

E)

$$f(x,y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x-y)^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \ ?$$



$$f(0,y) = \frac{0}{y^2}$$

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = 0$$

Pregunta: $x = 2$ me vale? NO, no me estoy acercando

$$f(x,x) = \frac{x^4}{x^4 + 0^2} = 1, \quad \lim_{x\to 0} f(x,x) = 1$$

$$f(x,-x) = \frac{x^4}{x^4 + 4x^2}, \quad \lim_{x\to 0} f(x,-x) = 0$$

EL LÍMITE NO EXISTE

(que al principio parece la dificultad)

→ en realidad, lo de las ∞ direcciones, es lo que nos salva

→ Si encontramos dos que dan resultados diferentes, ya he acabado

E)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ? \quad , \quad f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$$

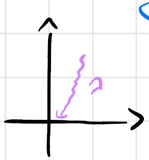
De Acuerdo con lo que hemos aprendido, intento varias direcciones

$$x = 0 \quad , \quad f(0,y) = \frac{0 \cdot y}{0^2+y^2} = 0$$

$$y = 0 \quad , \quad f(x,0) = \frac{x^2 \cdot 0}{x^2+0^2} = 0$$

$$x = y \quad , \quad f(x,x) = \frac{x^3}{2x^2} = \frac{x}{2} = 0$$

$y = \lambda x$ (más general que el anterior)



Si depende de λ no existe

$$f(x, mx) = \frac{m x^3}{x^2(1+m^2)} = \frac{m}{1+m^2} x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

OTRO CAMINO QUE se suele utilizar mucho

$$y = mx^2 \quad , \quad f(x, mx^2) = \frac{m x^4}{x^2 + m^2 x^4} = \frac{m x^2}{1 + m x^2} \to 0$$

CADA VEZ OBTENGO 0 : ¿Y si fuera este el límite?

→ Lo tengo que demostrar

→ 2 maneras

1º método

↳ Sandwich

$$f(x,y) \leq |f(x,y)| = \left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right| = \frac{x^2}{x^2+y^2}|y|$$

Si el último término va a 0, he terminado

→ Cómo lo pruebo?

$$x^2 \leq x^2+y^2 \qquad (x^2 \geq 0)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2} \geq \frac{1}{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2|y|}{x^2+y^2} \leq \frac{x^2}{x^2}|y| = |y| \xrightarrow[(x,y)\to 0]{} 0$$

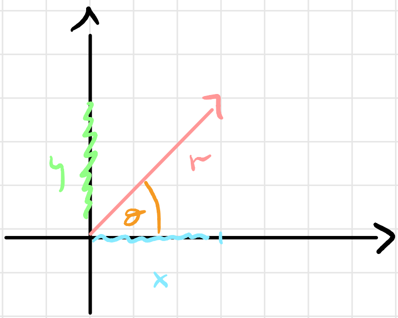
¿Por qué es necesario coger el módulo?

→ Para no depender del signo

$$f(x,y) \leq |f| \leq |y| \to 0$$

11º método

↳ Convertirlo en límite lvar
(no hablo de fijar una dirección)
→ Cambio coordenadas
→ Coordenadas Polares



$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

¿Cómo se escribe nuestra función en coordenadas polares?

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$$

$$y = r\sin\theta$$

$$x^2 = r^2\cos^2\theta$$

$$x^2+y^2 = r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r^2$$

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^{\cancel{3}}}{\cancel{r^2}} \cos^2\theta \sin\theta = 0$$

↳ el ángulo da un poco igual

Estas son las principales diferencias con el caso de 1 var.

El Resto es bastante parecido

<u>Teorema</u> (Unicidad)

$$\left.\begin{array}{l} f \to b_1 \, ; \, f \to b_2 \\ x \to x_0 \end{array}\right\} \Rightarrow b_1 = b_2$$

Además, al igual que en 1D, la operación de límite se comporta bien con respecto a las OPERACIONES ALGEBRÁICAS

$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$g :$ 〃 〃

- $c \in \mathbb{R}, \; f \to b \Rightarrow cf \to cb$
- $f \to b_1, \; g \to b_2$ 〃 $f+g \to b_1 + b_2$

$fg \to b_1 b_2$ $\underline{(m=1)}$

no puedo calcular $b_1 b_2$

$$\frac{1}{f} \to \frac{1}{b_1} \quad (m=1)$$

$f \to (f_1, \ldots, f_i, \ldots f_m) \longrightarrow b = (b_1, \ldots, b_i, \ldots b_m)$

$\Rightarrow f_i \Rightarrow b_i$

LÍMITES
↳ CONTINUIDAD } 1D ✓

nD ✓

f CONT x_0 $\Leftrightarrow$ $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

SIGNIFICADO GEOMETRICO? → PARECIDO

1D → NO SALTOS

nD → NO ROTURAS

como consecuencias propiedades anterior

f, g CONT x_0 $\Rightarrow$ $f+g$ " "

fg " $(m=1)$

$\frac{1}{f}$ " $(m=1)$

cf "

$(f_1, \ldots, f_m)$ CONT x_0 if f_i CONT x_0

un campo vectorial es continuo si sus componentes son continuas

E)

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$(x,y) \to \left(x^2 y , \frac{y + x^3}{1 + x^2} \right)$$

es continua porque sus componentes son continuas

$x^2 y$ continua en $\mathbb{R}^2$

(los polinomios son siempre continuos)

$\frac{y + x^3}{1 + x^2}$ cont en $\mathbb{R}^2$

La Relación entre continuidad y composición merece ser analizada en detalle

Teorema

$$\left.\begin{array}{l} g : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \\ f : B \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p \end{array}\right\} \quad g(A) \subset B$$

g cont $x_0 \in A$, f cont. $g(x_0) \in A$

$\Rightarrow f \circ g$ cont x_0

Ej) $f(x, y, z) = \underbrace{(x^2 + y^2 + z^2)^{30}}_{\text{composition of}} + \underbrace{\sin(z^3)}_{\text{composition of}}$

$(x, y, z) \longmapsto x^2 + y^2 + z^2$ $\qquad$ $z \longmapsto z^3$

$u \longmapsto u^{30}$ $\qquad$ $u \longmapsto \sin(u)$