Integrales 2D, 3D ...

→ FORMA DOMINIO INTEGRACIÓN
(es el aspecto nuevo ...)

→ Podemos integrar sobre líneas, superficies...

INTEGRALES LÍNEA / CAMINO

Ej) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$) función

CAMINO $\left\{ \begin{aligned} c : I = [a,b] &\to \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto (x(t), y(t), z(t)) \end{aligned} \right.$

$f \to T$, $c \to$ lado habitación

$\int_c f \sim$ valor medio T en ese lado

→ ¿cómo se CALCULA?

def $c \in C^1$, $f(x(t) \ldots)$ CONTINUA

$$\int_c f \underbrace{ds}_{\text{CAMINO}} = \int_a^b f(c(t)) \underbrace{\|c'(t)\| \, dt}_{ds}$$ $\to$ Promedio camino

$\hookrightarrow f(x(t), y(t), z(t))$

¿de dónde viene?

$\to$ ¿de donde viene $\|c'(t)\|$

$\longrightarrow \int \sim$ PARTICIÓN (esta es la IDEA)

$$\int_c f \, ds = \lim_N \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i, y_i, z_i) \|\Delta s_i\|$$

Pero $\|\Delta s_i\| = \underbrace{\left\| \frac{c(t_{i+1}) - c(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \right\|}_{\downarrow \, \|c'(t)\|} \underbrace{(t_{i+1} - t_i)}_{\downarrow \, dt}$

$N \to \infty$

Vamos a ver cómo se usa

Ej

$$c : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$$
$$t \mapsto (\cos t, \sin t, t)$$

CAMINO

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$
$$(x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$$

CALCUL.

$$\int_c f \, ds = \int_0^{2\pi} \underbrace{f(c(t))}_{b} \underbrace{\|c'(t)\|}_{a} \, dt$$

MODULO VECTOR DERIVADAS COMPONENTES

a) $$\|c'(t)\| = \sqrt{\left(\frac{d}{dt}\cos(t)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt}\sin(t)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt}t\right)^2}$$

$$= \sqrt{\underbrace{\sin^2(t) + \cos^2(t)}_{1} + 1}$$

$$= \sqrt{2}$$

b) $$f(c(t)) = f(\cos(t), \sin(t), t)$$

$$= \cos^2 t + \sin^2 t + t^2 = 1 + t^2$$

Finalmente obtenemos

$$\int_C f(x,y,z)\, ds = \int_0^{2\pi} (1+t^2)\, \underbrace{\sqrt{2}\, dt}_{ds}$$

$$= \sqrt{2}\left(t + \frac{t^3}{3}\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(2\pi + \frac{(2\pi)^3}{3}\right)$$

$$= 2\sqrt{2}\,\pi\left(1 + \frac{4\pi^2}{3}\right)$$

Vamos a considerar esta Extensión

INT. CAMINO $\rightarrow$ $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \underline{\mathbb{R}}$ Temperatura

CAMPO VEC. $(\underbrace{f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3} $ Fuerza

INT. f a lo largo CURVA

$\rightarrow$ LAVORO

$\longrightarrow$ **INT. LINEA**

F CAMPO VECT.

$c : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $c \in C^1$

$$\int_c F \cdot ds = \int_a^b F(c(t)) \cdot c'(t)\, dt$$

$\hookrightarrow$ PRODUCTO ESCALAR

f)

$$c(t) = (\sin t, \cos t, t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$F(x,y,z) = x\,\hat{i} + y\,\hat{j} + z\,\hat{k}$$

$$\int_c F \cdot ds = \int_c F(c(t)) \cdot c'(t)\,dt$$

$$c'(t) = (\cos(t), -\sin(t), 1)$$

$$F(c(t)) = \sin(t)\,\hat{i} + \cos(t)\,\hat{j} + t\,\hat{k}$$

$$F(c(t)) \cdot c'(t) = \sin(t)\cos(t) - \cos(t)\sin(t) + t$$

$$= t$$

OBTenemos $\displaystyle \int_0^{2\pi} t\,dt = \frac{1}{2}t^2 \Big|_0^{2\pi} = 2\pi^2$

Los INTEGRALES de línea TB se pueden escribir así

$$\int_c \bar{F} \cdot d\bar{s} = \int_a^b \left(F_1 \frac{dx}{dt} + F_2 \frac{dy}{dt} + F_3 \frac{dz}{dt} \right) dt$$

$$\overset{\text{def}}{=} \int_c F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz$$

$$ds = dx\, \hat{i} + dy\, \hat{j} + dz\, \hat{k}$$

Ej)

$$\int_c x^2\, dx + (xy)\, dy + dz$$

$$c : [0,1] \to \mathbb{R}^3 , \quad c(t) = (t, t^2, 1)$$

Se puede TRATAR como

$$\int_c \bar{F} \cdot d\bar{s} \quad \text{)→ el de arriba} , \quad F = (x^2, xy, 1)$$

$$= \int_0^1 \left(F_1 (c(t)) \frac{dx}{dt} + F_2 (c(t)) \frac{dy}{dt} + F_3 (c(t)) \frac{dz}{dt} \right) dt$$

Tenemos que calcular

$$F_1(c(t)) = t^2$$

$$F_2(c(t)) = t \cdot t^2 = t^3$$

$$F_3(c(t)) = 1$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dt}{dt} = 1 \; ; \; \frac{dy}{dt} = \frac{dt^2}{dt} = 2t \; ; \; \frac{dz}{dt} = \frac{d1}{dt} = 0$$

$$\int_c \bar{F} \cdot d\bar{s} = \int_0^1 \left(t^2 + 2t^4 \right) dt$$

$$= \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 + 2\frac{t^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{2}{5}$$

E)

$$\bar{F} = x^3\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$c : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$$

$$\theta \longmapsto \underbrace{(0,\ a\cos\theta,\ a\sin\theta)}$$

PARAMETRIZACIÓN CÍRCULO
en el plano yz

$$\int_c \bar{F} \cdot d\bar{s} = \int_0^{2\pi} F(c(\theta)) \cdot c'(\theta)\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} (0^3,\ a\cos\theta,\ a\sin\theta) \cdot (0, -a\sin\theta, a\cos\theta)\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} a(\sin\theta\cos\theta - \sin\theta\cos\theta)\, d\theta$$

$$= 0$$

¿cambia el Resultado si parametrizo la curva de OTRA MANERA?

→ Vamos a verlo

$$\int_c F \cdot ds$$ → depende TB de c

→ se cambia c?

→ in generale cambia $\int$

Pero, si es una reparametrización $\displaystyle\int_{c_1} F = \pm \int_{c_2} F$

$c_1 \xrightarrow{\text{reparametrización}} c_2$

Vamos a adararlo

def $h : [a,b] \to [a_1, b_1]$, $h \in C^1$

$c : [a_1, b_1] \to \mathbb{R}^3$, c ✓

$\underbrace{c \circ h}_{\text{REPARAMETRIZACIÓN } c} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$

→ preservan dirección (P)

revierte " (R)

¿Pues cómo cambian las integrales?

Teorema

b reparametrización c

$$\int_b F = \int_c F \qquad (p)$$

$$\text{''} \quad - \quad \text{''} \qquad (r)$$

VALE X INT. LIN.

→ CAMINO?

→ NO CAMBIA

Ej) $F = yz\,\hat{i} + xz\,\hat{j} + xy\,\hat{k}$

$c : [-5, 10] \to \mathbb{R}^3$

$t \mapsto (t, t^2, t^3)$

$$\int_c F \cdot ds = \int_c \left(F_1(c)\frac{dx}{dt} + F_2(c)\frac{dy}{dt} + F_3(c)\frac{dz}{dt} \right) dt$$

$$= \int_{-5}^{10} t \cdot t^3 \cdot 1 + 2t \cdot t^3 t + 3t \cdot t^2 \cdot t \; dt$$

Reparametrización $t \mapsto c(5-t)$

Vamos a considerar un CAMPO VECTORIAL en particular:

→ GRADIENTE

Teorema $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f \in C^1$

$c : [a,b] \to \mathbb{R}^3$, $c \in C^1$

$$\int_c \nabla f \cdot ds = f(c(b)) - f(c(a))$$

(La integral de un campo conservativo no depende del camino)

dem Introduzco $F(t) = f(c(t))$

$F'(t) = \nabla f(c(t)) \cdot c'(t)$ (Regla cadena)

$$\int_a^b F'(t)\, dt = f(c(b)) - f(c(a))$$

$$\int_c \nabla f \cdot ds = \int_a^b \nabla f(c(t)) \cdot c'(t)$$

$$= f(c(b)) - f(c(a))$$

E)

$$c(t) = \left(\frac{t^4}{4}, \sin^3\left(\frac{t\pi}{2}\right), 0\right), \quad t \in [0,1]$$

$$\int_c y\,dx + x\,dy \equiv \int F \cdot ds$$

$$F = \nabla f, \quad f = xy$$

$$\int_c y\,dx + x\,dy = f(c(1)) - f(c(0))$$

$$f(c(1)) = \frac{1^4}{4} \cdot \sin^3\left(\frac{\pi}{2}\cdot 1\right) = \frac{1}{4}$$

$$f(c(0)) = \frac{0^4}{4} \cdot \text{''}\ (0) = 0$$

$$\int \ldots = \frac{1}{4}$$