DERIVADA PARCIAL

$$f : \mathbb{R}^{n} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_1, \dots x_n) \rightarrow f'(\dots)$$

derivo con respecto a x_i y considero la OTRAS VARIABLES CONSTANTES

→ n DERIVADAS PARCIALES (una para cada VARIABLE)

→ GRADIENTE

$$\nabla f = \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_i} \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)}_{}$$

VECTOR LONGITUD n

Ej 1.2.1 (ix)

$$f(x,y,z) = z^{xy^2}$$
$$= e^{xy^2 \log z}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 \log z \; e^{xy^2 \log z} = y^2 \log z \; z^{xy^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2yx \log z \quad z^{xy^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = xy^2 \frac{1}{z} \; z^{xy^2} = xy^2 z^{xy^2 - 1}$$

$$\nabla f = (y^2 \log z \; z^{xy^2}, \; 2yx \log z \; z^{xy^2}, \; xy^2 z^{xy^2-1})$$

Ej 1.2.1 (xi)

$$f(r,\theta) = r^2 \sin\theta + \cos^2\theta$$

$$f_r = 2r\sin\theta$$

$$f_\theta = r^2\cos\theta - 2\cos\theta\sin\theta$$

$$\nabla f = (2r\sin\theta, \; r^2\cos\theta - \sin 2\theta)$$

Para el caso más general

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$J_f(x)$ JACOBIANO

$$[J_f(x)]_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

Ej 1.3.1 (iv)

$$D(x,y) = (xe^y + \cos y, x, x + e^y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} D(x,y) = (e^y, 1, 1)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \quad '' \quad = (xe^y - \sin y, 0, e^y)$$

$$J_f(x,y) = \begin{pmatrix} e^y & xe^y - \sin y \\ 1 & 0 \\ 1 & e^y \end{pmatrix}$$

Ej 1.2.4

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

i) f_x, f_y EXISTEN en $(0,0)$?

$\to$ definición

$$f_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\frac{2h \cdot 0}{h^2} - 0 \right) = 0$$

EXISTE y es igual a 0

$$f_y(0,0) = ?$$

LO MISMO x SIMETRÍA

$$f(x,y) = f(y,x)$$

$\to$ OBTENGO MISMO RESULTADO

(ii) f_x CONTINUA en $(0,0)$

$$f_x(x,y) = (x^2+y^2)^{-2}\left[2y(x^2+y^2) - 4x^2y\right]$$

$$= \frac{2y\left[(x^2+y^2) - 2x^2\right]}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2y(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

Tenemos que comprobar que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f_x(x,y) = f_x(0,0) = 0$$

$$x = 0 \qquad \lim_{y\to 0} f_x(0,y) = \lim_{y\to 0} 2\frac{\cancel{y}^3}{y^{\cancel{4}}} = \infty$$

$\Rightarrow f_x$ no es CONTINUA en 0

no me permite averiguar si es diferenciable o no

Hemos visto en CLASE un ejemplo de función diferenciable que no tiene derivadas continuas

(iii) Probar que f no es DIFERENCIABLE en $(0,0)$

→ APLICAMOS DEFINICIÓN

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - f_x(0,0)x - f_y(0,0)y}{\|(x,y)\|}$$

$f(0,0) = 0$ Por definición

$f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$ (APARTADO i)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$x = y \quad \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$$

NO ES DIFERENCIABLE

Ej 1.2.6

(i) CONTINUIDAD función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^4}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{〃} = \text{〃} \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)\ ?$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^4}{x^2+y^2}$$

$x=0,\ y=0 \to f=0$ (LÍMITE 0)

$$y = mx\ ,\ f(x,mx) = \frac{x^6m^4}{x^2+m^2x^2}$$

$$= \frac{m^4}{1+m^2}x^4 \to 0$$

$$f(x,y) = |f(x,y)| = \frac{x^2y^4}{x^2+y^2} \le \frac{\cancel{x^2}y^4}{\cancel{x^2}} \to 0$$

TODO POSITIVO

LA Función es continua en $(0,0)$

→ Y por ende en todo $\mathbb{R}^2$

ES DIFERENCIABLE? Pues no lo sabemos.

(ii) DIFERENCIABILIDAD

→ APLICAMOS la definición

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x(\cdot)x-f_y(\cdot)y}{\|(x,y)\|}$$

$$\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$f(0,0) = 0$$

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{\cancel{h^2}\cdot 0}{\cancel{h^2}} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \frac{0\cdot h^4}{h^2} = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{x^2y^4}{x^2+y^2}}_{} = 0$$

$$\leq \frac{x^2y^4}{x^2+y^2} \to 0$$

(Se demuestra como antes)

Ej 1.2.7

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(1) CONTINUIDAD en $\mathbb{R}^2$

Fuera de $(0,0)$ es obvio, ¿en $(0,0)$?

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{x^2+y}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{} = g(0,0) = 0\ ?$$

noto una asimetría

→ A lo mejor obtengo cosas diferentes

$$g(0,y) = \frac{y}{|y|}$$ ($\underbrace{\text{EL LÍMITE NO EXISTE}}_{}$)

según te acerques por la derecha o izquierda

$$g(x,0) = \frac{x^2}{|x|} = \frac{|x|^2}{|x|} = |x| \to 0$$

(ii) Derivadas parciales en $(0,0)$

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(h,0)-g(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{h^2}{|h|}\right)$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h} \quad \text{NO EXISTE}$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(0,h)-g(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\frac{h}{|h|}\right) \quad \text{NO EXISTE}$$

(iii) ¿DIFERENCIABLE? NO

↳ es que no puedo APLICAR la def

Ej 1.2.8

$$f(x,y) = |xy|^{\alpha}$$

i) $\alpha > \frac{1}{2}$, f diff $(0,0)$?

$\rightarrow$ APLICAMOS Definición

$\hookrightarrow$ es inmediato ver que

- $f(0,0) = 0$
- $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$

Así que se trata de calcular

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|xy|^{\alpha}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim \frac{|xy|^{\frac{1}{2}}|xy|^{\alpha-\frac{1}{2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{|xy|^{\frac{1}{2}}|xy|^{\alpha-\frac{1}{2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} \overset{*}{\leq} |xy|^{\alpha-\frac{1}{2}} \to 0$$

$\hookrightarrow$ si $\alpha > \frac{1}{2}$

$*$ $(|x|-|y|)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2+y^2 \geq 2|xy| \geq |xy|$

$$\sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{|xy|} \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{|xy|}}$$

Se simplifica con num.

(ii) Se ve que $f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0$

(iii) $\alpha = \frac{1}{2}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|xy|^{\frac{1}{2}}}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}$$

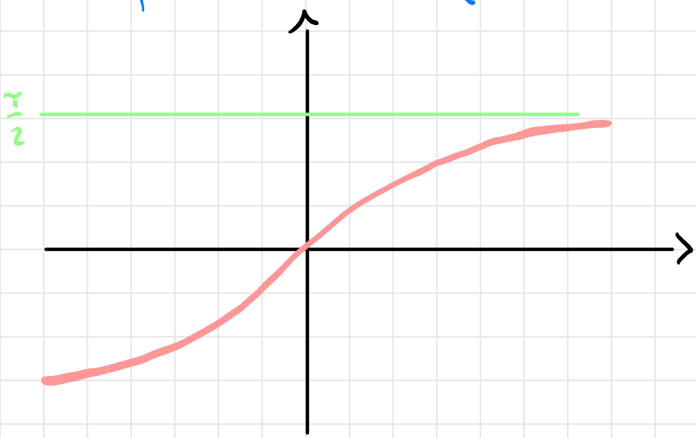
$$y = \lambda x \quad , \quad \frac{\sqrt{\lambda}\,\cancel{|x|}}{\cancel{|x|}\,(1+\lambda^2)^{\frac{1}{2}}}$$ depende $\sqrt{\lambda}$

Ej 1.2.10

$f(x,y) = \arctan(x^2+y^2)$

i) $\operatorname{Im} f$

Gráfica $\arctan(z)$



$z>0 \rightarrow \arctan >0$

en nuestro caso $z = x^2+y^2 > 0$

$\rightarrow$ SOLO ESTOY en $z>0$ entonces la Im es >0

$\operatorname{Im}_f = [0, \frac{\pi}{2})$

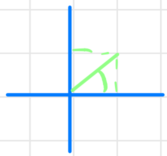
11) CURVAS de NIVEL $c = 0$, $c = \frac{\pi}{4}$

$$\arctan(x^2+y^2) = 0$$

$$x^2+y^2 = 0 \rightarrow$$ CÍRCULO RADIO 0

$$\arctan(x^2+y^2) = \frac{\pi}{4}$$

$$x^2+y^2 = \underbrace{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1}$$



$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(〃)}{\cos(〃)} = \tan(〃) = 1$$

CÍRCULO RADIO 1

iii) $\nabla f = (f_x, f_y)$

$$f_x = \frac{\partial}{\partial x} \arctan(x^2+y^2)$$

$$= \frac{2x}{1+(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y = \frac{2y}{1+(x^2+y^2)^2}$$

$$\nabla f = \frac{(x,y)}{1+(x^2+y^2)^2}$$

PLAN TANGENTE $(1,0)$

$$z = f_x(1,0)(x-1) + f_y(1,0)y + f(1,0)$$

$$\arctan(1^2+0^2) = \frac{\pi}{4}$$

$$f_x(1,0) = 1 \quad ; \quad f_y(1,0) = 0$$

$$z = x + \frac{\pi}{4} - 1$$