ÚLTIMA CLASE

→ MAX y MIN GLOBALES en un $\underbrace{\text{Conjunto}}$

→ Frontera

→ Manifestación Problema más general

MAX y MIN vinculados a Condición

→ PROBLEMA MUY común

Ej: empresa produce bienes
cuyos coste depende de un números de var.

→ Queréis minimizarlo

→ Sin embargo tenéis que
hacerlo manteniendo
condición

→ MULTIPLICADORES LAGRANGE

E) CRÁTER → $f(x,y) = x^2 + y^2$ (modelo muy sencillo)

→ Bajo x una senda $\left.\begin{array}{l} \underline{} \\ \to \quad y = 1 - x \end{array}\right\} S$

Pregunta: Punto más bajo del CRÁTER ALCANZADO por la senda

→ Punto más bajo en (0,0)

→ Pero la senda no llega

→ MAX y MIN $\underbrace{f \text{ restringido a } y = 1 - x}_{f|_S}$

¿Qué hace Mult. LAG?

→ mínimo def en término sistemas ecuaciones asociadas al gradiente

Primero

$$y = 1 - x \rightarrow \overbrace{\underbrace{y + x - 1}_{g(x,y) = 0}}^{g(x,y)} = 0$$

¿Qué es?

→ CURVA NIVEL } conjuntos puntos donde g constante

→ el MIN. estará en esta curva

↳ ¿cómo se relaciona con ∇?

$\nabla g \perp$ CURVA NIVEL g

$\nabla g \rightarrow$ MAX CR.

CURVA NIV $\rightarrow g$ CONST

} $\rightarrow \perp$

¿Qué pasa con f?

→ Buscamos una relación entre su ∇ y el de g

$$S \begin{cases} \nearrow & g(x,y) \\ \searrow & c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

$$t \mapsto (0,1) + t(1,1)$$

Nuestro problema ~ $\min f|_S = f(c(t))$

$\underbrace{\text{MIN en } x_0}$ → Supongamos $c(0) = x_0$

de CÁLCULO I

$$0 = \frac{d}{dt} f(c(t)) \Big|_{t=0} = \nabla f(x_0) \cdot c'(0)$$

$$\Rightarrow \nabla f \perp S$$

→ GRADIENTE f y g en el MIN PARALELOS

$$\underbrace{\nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0)}$$

IDEA CUALITATIVA: en x_0 pendiente sendero y montaña tienen que ser paralelo
→ o si no podría bajar todavía más
y x_0 no sería mínimo

¿QUÉ HAGO CON ESTA ECUACIÓN?

$$\underbrace{\nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0)}$$

→ n EQ. (2 en nuestro ej).

$$f_{x_1}(x_0) = \lambda g_{x_1}(x_0)$$

$$f_{x_2} \; - - -$$

→ ¿incógnitas? $n+1$

$x_0 = (x_0^{(1)}, x_0^{(2)} \; - - \;) \to n$

$\lambda \to$ 1 más

→ necesito otra eq. $g(x_0) = 0$

OTRA MANERA

→ minimizar

$$h(x_1 - - \;) = f(--) - \lambda g(--)$$

E) $f(x,y) = x^2 - y^2$

Extremos en $\underbrace{x^2 + y^2 = 1}_{g}$

$$\nabla f = (2x, -2y)$$

$$\nabla g = (2x, 2y)$$

$\rightarrow$ 3 EQ en 3 incógnitas

$$\begin{cases} 2x = 2\lambda x & a \\ 2y = -2\lambda y & b \\ x^2 + y^2 = 1 & c \end{cases}$$

- a
  - $x = 0$
    - $y = \pm 1$ c
    - $\lambda = 0$ b
  - $\lambda = 1$
    - $y = 0$ b
    - $x = \pm 1$ c

Posibles extremos $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$

E) $f(x,y,z) = x + z$

MAX en $\underbrace{x^2+y^2+z^2}_{g} = 1$

$\nabla f = (1, 0, 1)$

$\nabla g = (2x, 2y, 2z)$

$$\begin{cases} 1 = 2\lambda x & a \\ 0 = 2\lambda y & b \\ 1 = 2\lambda z & c \\ 1 = x^2+y^2+z^2 & d \end{cases}$$

$a, c \to \lambda \neq 0$

$\to y = 0 \quad (b)$

$\to x = z \quad (a, c)$

$\to 2x^2 = 1 \quad (d)$

$\to x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

POSIBLES EXTREMOS $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

¿Y si tuviera más vínculos?

$$\nabla f(x_0) = \sum_i \lambda_i g(x_0)$$

Ej) $f(x,y,z) = x+y+z$

Extremos con $\begin{cases} x^2+y^2 = 2 & (g_1) \\ x+z = 1 & (g_2) \end{cases}$

$$\nabla f = (1,1,1)$$

$$\nabla g_1 = (2x, 2y, 0)$$

$$\nabla g_2 = (1, 0, 1)$$

$$\begin{cases} x^2+y^2 = 2 & a \\ x+z = 1 & b \\ 1 = 2\lambda_1 x + \lambda_2 & c \\ 1 = 2\lambda_1 y & d \\ 1 = \lambda_2 & e \end{cases}$$

$\underline{\lambda_2 = 1}$

$\to$ c

- $\lambda_1 = 0$ $\to$ NO Puede ser d
- $x = 0$
  - $z = 1$ a
  - $y = \pm 2$ b

Posibles EXTREMOS $(0, \sqrt{2}, 1)$

$(0, -\sqrt{2}, 1)$

MAX o MIN $\to \exists$, porque f cont

S cerrado y AC

$\to$ de los POSIBLES EXTREMOS uno será el MIN. y el otro el MAX.

Reemplazo valores y compruebo quién es el MAYOR

E) $f(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$

MAX / MIN en $D = \frac{x^2}{2} + y^2 \leq 1$

OBSERVACIÓN

- f cont
- D compacto

$\longrightarrow \exists$ MAX / MIN

$\nabla f = (x, y)$

$\longrightarrow \exists!$ Punto crítico en $(0,0)$

$\longrightarrow f \geq 0 \Rightarrow (0,0)$ MIN.

$\longrightarrow$ HAY QUE ESTUDIAR QUÉ PASA en la FRONTERA

$\nabla g = (x, 2y)$

$$\begin{cases} x = \lambda x & a \\ y = 2\lambda y & b \\ \frac{x^2}{2} + y^2 = 1 & c \end{cases}$$

$x = 0 \longrightarrow y = \pm 1 \quad , \quad \lambda = \frac{1}{2}$

$y = 0 \longrightarrow x = \pm\sqrt{2} \quad , \quad \lambda = 1$) MAX

E)

$$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-x+y$$

MAX / MIN en $D = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$

f CONT, D COMPACTO $\Rightarrow \exists$ MAX, MIN

PARTE INTERIOR

$$\nabla f = (2x-1,\ 2y+1,\ 2z)$$

$$\nabla f = 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$$

Frontera

$$\nabla g = (2x, 2y, 2z)$$

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 1 \\ 2x-1 = 2\lambda x \sim 2x(1-\lambda) = 1 \\ 2y+1 = 2\lambda y \sim 2y(\lambda-1) = 1 \\ 2z = 2\lambda z \end{cases}$$

$z = 0 \rightarrow$ ESTUDIAMOS

$\lambda = 1 \rightarrow 2x-1 = 2x \Rightarrow -1 = 0$ ABS

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 & a \\ x = \frac{1}{2}(1-\lambda) & b \\ y = -\frac{1}{2}(1-\lambda) & c \end{cases}$$

Reemplazo b, c en a

$4 = 2(1-\lambda)^2 \Rightarrow \lambda = 1-\sqrt{2}$