Campo Vectorial

$$F : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \qquad \text{(campo vectorial } \mathbb{R}^n\text{)}$$
$$\bar{x} \longmapsto F(\bar{x})$$

Vamos a considerar ejemplo

Ej 1.3.7

$$F(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} (yz, -xz, xy)$$

es un campo vectorial en $\mathbb{R}^3$

$$\operatorname{div} F = \nabla \cdot F = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{xz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = -\frac{yz}{\cancel{2}(x^2+y^2+z^2)} \frac{\cancel{2}x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -\frac{xyz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

De la misma manera encuentro

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{-xz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{xyz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -\frac{xyz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Finalmente obtenemos

$$\nabla \cdot F = -\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)} F \cdot (x, y, z)$$

Consideramos ahora el campo

$$v(x,y,z) = x\,\hat{i} + 2y\,\hat{j} + 3z\,\hat{n} \quad (\text{Ej } 1.3.8)$$

OTRO CAMPO VECTORIAL en $\mathbb{R}^3$

$$\nabla \cdot v = \frac{\partial x}{\partial x} + 2\frac{\partial y}{\partial y} + 3\frac{\partial z}{\partial z} = 6 > 0$$

$\longrightarrow$ FLUIDO en expansión

(sale fuera pero a diferentes velocidades)

y el ROTOR?

$$\nabla \times F = \det\begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & 2y & 3z \end{pmatrix}$$

$$= \left(3\frac{\partial}{\partial y}z - 2\frac{\partial}{\partial z}y\right)\hat{i} + \left(3\frac{\partial}{\partial x}z - \frac{\partial}{\partial z}x\right)\hat{j}$$

$$+ \left(2\frac{\partial}{\partial x}y - \frac{\partial}{\partial y}x\right)\hat{n} = 0$$

$\nabla \rightarrow$ Tendencia a sviluppare rotazione $\rightarrow 0$

Consideramos ahora

$$\vec{F}(x,y,z) = (yz, xz, xy) \quad (\underline{Ej}\ 1.3.7\ (iii))$$

$$\nabla \cdot \vec{F} = \underbrace{\frac{\partial (yz)}{\partial x}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial (xz)}{\partial y}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial (xy)}{\partial z}}_{=0} = 0$$

$\longrightarrow$ NO EXPANSIÓN, NO COMPRESIÓN

$$\nabla \wedge \vec{F} = \det \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y}(xy) - \frac{\partial}{\partial z}(xz) \right) \hat{x}$$

$$- \left(\frac{\partial}{\partial x}(xy) - \frac{\partial}{\partial z}(yz) \right) \hat{y}$$

$$+ \left(\frac{\partial}{\partial x}(xz) - \frac{\partial}{\partial y}(yz) \right) \hat{z}$$

$$= (x - x)\hat{x} + (y - y)\hat{y} + (z - z)\hat{z} = 0$$

EL campo no tiene tendencia a desarrollar rotación alrededor de un punto

Es conservativo ?

Vamos a repetir la definición

$$F \text{ cons.} \iff \exists\, \varphi : F = \nabla \varphi$$

Hemos demostrado que $\underbrace{\nabla \times \nabla \varphi = 0}_{\text{el rotor de un gradiente es cero}}$

Así que

$$\nabla \times F \begin{cases} \neq 0 & \text{no es conservativo} \\ = 0 & \underbrace{\text{puede ser conservativo}}_{\text{ESTAMOS en este CASO}} \end{cases}$$

$$\varphi = xyz + c$$

$$\nabla \varphi = (yz, xz, xy) = F$$

Qué relación hemos visto más?

$$\nabla \cdot \nabla \times F = 0$$

Se entiende de manera bastante fácil

Producto vector dos vectores da resultado ortogonal

→ LA DIVERGENCIA es Producto escalar

así que $\quad a \cdot \underbrace{(a \wedge b)} = 0$

$$c \perp a \qquad (c = a \wedge b)$$

$$a \cdot c = 0$$

↳ Porque $c \perp a$

OTRAS relaciones

$$\nabla (f g) = ?$$

$$\nabla (f g) = (f_x g + f g_x, f_y g + f g_y, f \ldots)$$

$$= g (f_x, f_y \ldots) + (g_x, g_y \ldots) f$$

$$= g \nabla f + f \nabla g$$

¿Qué operador conocéis más?

LAPLACIANO

$$f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

$$\Delta f = \nabla^2 f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

$$\Delta f = 0 \Rightarrow f \text{ armónica}$$

$$f(x,y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\Delta f(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = -\frac{x^2}{x^2+y^2} \frac{y}{x^2} = -\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{y}{x^2+y^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{x}{x^2+y^2} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

Si sumo obtengo cero

Vamos a demostrarlo para

$$u(x,y) = \log(x^2+y^2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} u(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2}$$ (por simetría)

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,y) = \frac{2(x^2+y^2)-4x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x,y) = \frac{2(x^2+y^2)-2y^2}{(x^2+y^2)} = \frac{2(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

LA SUMA es cero

Se TRATA del ejercicio Ej 2.1.5

Ej 2.1.6 (i)

$$u(x,y) = f(r) \quad , \quad r = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} u = f'(r)\frac{\partial r}{\partial x} = f'(r)\frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{r}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u = f''(r)\left(\frac{x}{r}\right)^2 + f'(r)\left(\frac{r - x r'}{r^2}\right)$$

$$\frac{1}{r^2}\left(r - x r'\right) = \frac{1}{r^2}\left(r - \frac{x^2}{r}\right) = = \frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u = f''(r)\left(\frac{x}{r}\right)^2 + f'(r)\frac{1}{r} - f'(r)\frac{x^2}{r^3}$$

x SIMETRÍA

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} u = f''(r)\left(\frac{y}{r}\right)^2 + f'(r)\frac{1}{r} - f'(r)\frac{y^2}{r^3}$$

sumando $\Delta f(r) = f''(r) + \frac{f'(r)}{r}(2-1)$

$$= \boxed{f''(r) + \frac{f'(r)}{r}}$$

el LAPLACIANO es un objeto que APARECE en la solución de ecuaciones diferenciales

ECUACIÓN de ONDA

$$\Delta f = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} f$$

Soluciones $\rightarrow$ $f(x,t) = \cos(kx - \omega t)$ (1D)

$\rightarrow$ la ecuación impone una relación entre k y ω

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} f(x,t) = -\omega^2 \cos(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,t) = -k^2 \cos(kx - \omega t)$$

La ecuación de onda impone

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad \text{(Relación de dispersión)}$$

ω : Frecuencia Angular

k : número d'onda

c : velocidad propagación

relación entre dispersión temporal y espacial

ECUACIÓN de KG

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \Delta f - h^2 f$$

1D, $f(x,t) = \cos(kx - \omega t)$

$$\Rightarrow \underbrace{\omega^2 = c^2 k^2 - h^2}$$

Relación de onda generalizada.

y este es el ejercicio 2.1.8 (ii)

Vamos a mira la

Ecuación del CALOR

$$\dot{u}(x,t) = \mu \, \Delta u(x,t)$$

$$1D \to \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

$$u(x,t) = e^{-\lambda t} \sin kx$$

$$-\lambda \, \cancel{e^{-\lambda t}} \, \cancel{\sin(kx)} = -\mu k^2 \, \cancel{e^{-\lambda t}} \, \cancel{\sin(kx}$$

$$\lambda = \mu k^2$$