UNIDAD No.

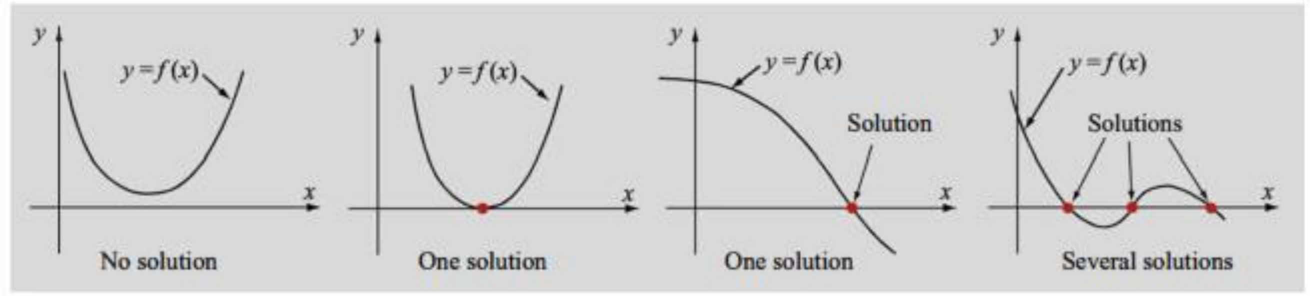
Raices de Ecuaciones No Lineales

INTRODUCCIÓN.

Las ecuaciones no lineales, están presentes en todas las áreas de las ingeniería y las ciencia.

Una ecuación de una variable, puede escribirse de la forma: $f(x)=0$

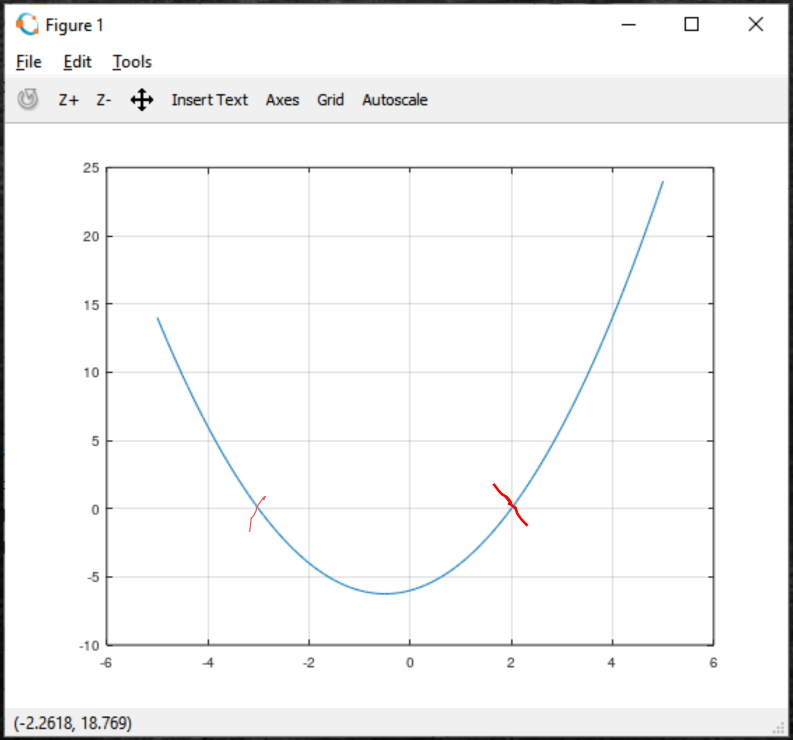
Cuando $f(x) = 0$



Cuando una ecuación es simple, el valor de x (raíz), puede obtenerse *analíticamente*. (factorando o aplicando la fórmula cuadrática)

INTRODUCCIÓN.

Por ejemplo: $x^2 + x - 6 = 0$; $(x+3)(x-2) = 0$, sus raíces serían: $x_1=-3$ y $x_2=2$, que es una solución exacta.

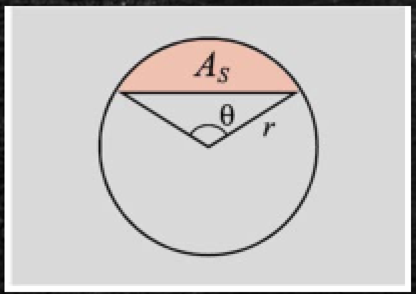


INTRODUCCIÓN.

Pero en muchas ocasiones esto es imposible de determinar una raíz analíticamente, por ejemplo:

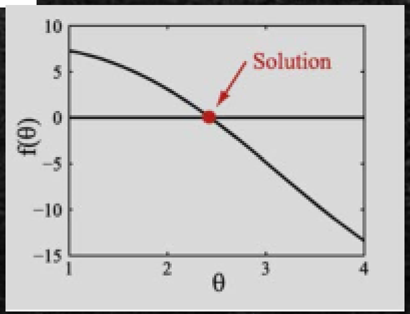
El área de un segmento del circulo A_s, con radio r, esta dado por:

$$A_S = \frac{1}{2}r^2(\theta - \sin\theta)$$



Para determinar Ө, teniedo A_s y r, Ө no puede ser escrito explícitamente en términos de A_s y r, por lo que la ecuación no puede resolverse analíticamente. Por lo que se acude a los métodos numéricos, partiendo del concepto de que "una solución numérica de una ecuación f(x) = 0", es un valor de x que satisface la ecuación aproximadamente, lo que significa que cuando x se sustituye en la ecuación, el valor de f(x) se aproxima a cero (0), pero no exactamente.

Por ejemplo: Si A_s =8 y r= 3, la ecuación quedaría: $f(\theta) = 8 - 4.5(\theta - \sin\theta) = 0$ cuya solución, estaría entre 2 y 3;



si Ө = 2.4, por ejemplo f(Ө) ≈ 0.2396

Y si Ө = 2.43, por ejemplo f(Ө) ≈ 0.003683.

Obviamente este última valor de Ө da una aproximación mas precisa.

Franco Salcedo López
2020

INTRODUCCIÓN.

Sea f(x) una función *no lineal* en *x*. Hallar el valor de *x*, *x**, tal que se cumple $f(x^*) \approx 0$.

*x** se suele denominar el cero o raíz de f(x)
*x** se puede determinar por medios analíticos (solución exacta) o por medios numéricos (solución aproximada)

La elección del método numérico depende del problema a resolver (estructura del problema, tipo de ecuaciones, precisión requerida, rápidez del cálculo, etc.....).

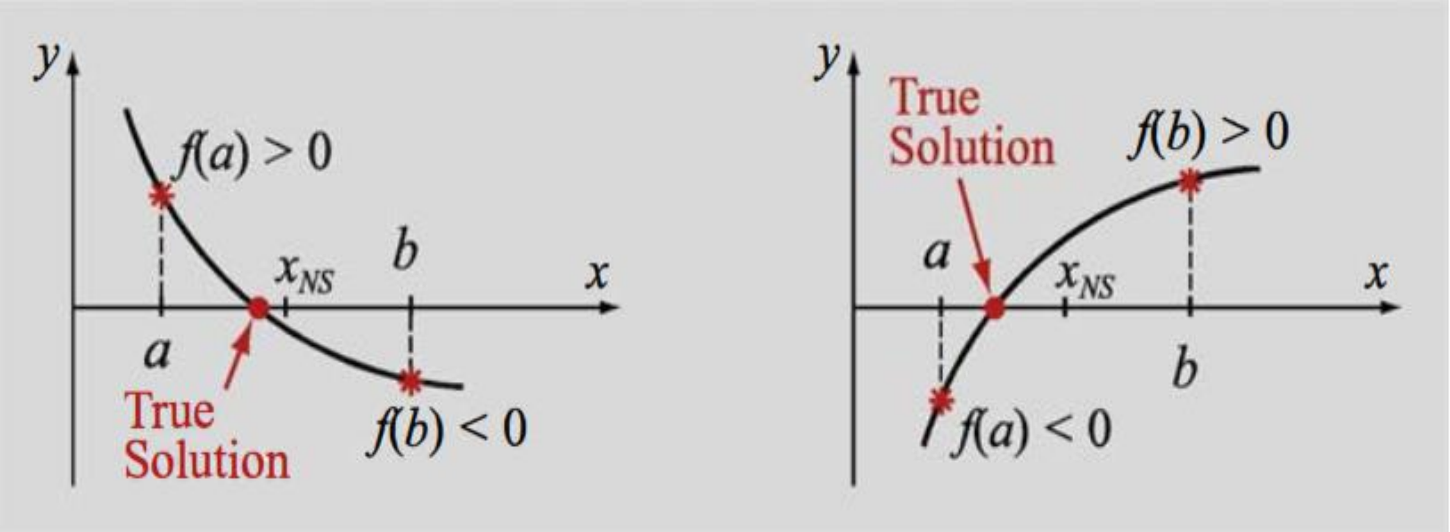
Por tanto no existe un mejor método universalmente aplicable.

Tipos de métodos

Métodos acotados (bracketing methods)

Métodos abiertos (open methods)

MÉTODO BISECCIÓN (método acotado /cerrado)



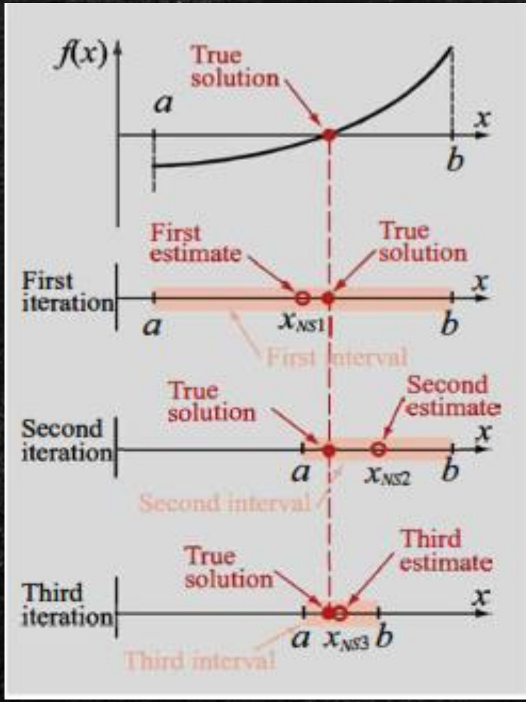
MÉTODO BISECCIÓN

El método de Bisección para la resolución de la ecuación $f(x)=0$ se basa en el Teorema de Bolzano que nos asegura la existencia de, al menos, una raíz de una función $f(x)$ en un cierto intervalo $[a, b]$, bajo ciertas condiciones.

Teorema de Bolzano

Sea $f(x)$ es una función función continua en $[a, b]$ tal que $f(a)f(b) < 0$. Entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

MÉTODO BISECCIÓN



Algoritmo del Método de la Bisección

1. *Elija el primer intervalo encontrando los puntos a y b de manera que una solución exista entre ellos. Esto significa que f (a) y f (b) tienen diferentes signos tales que f (a) f (b) <0.*
2. *Calcule la primera estimación de la solución numérica x_{NS1} por:*
3. $x_{NS1} = \frac{(a+b)}{2}$
4. *Determine si la verdadera solución está entre a y x_{NS1} o Entre x_{NS1} y b. Esto se hace comprobando el signo del producto $f(a) \cdot f(x_{NS1})$:*
5. *Si $f(a) \cdot f(x_{NS1}) < 0$, la verdadera solución está entre a y x_{NS1}*
6. *Entonces -> b = x_{NS1}*
7. *Si $f(a) \cdot f(x_{NS1}) > 0$, la verdadera solución es entre x_{NS1} y b.*
8. *Entonces -> a = x_{NS1}*
9. *Con el nuevo intervalo actualizado [a, b], regrese al paso 2 . El paso 2 al 4 se repiten hasta alcanzar el límite a una tolerancia o error especificado.*

MÉTODO BISECCIÓN

Número de iteraciones:

$$\varepsilon = \frac{[b - a]}{2^n} = \frac{\Delta x^0}{2^n}$$

ε -> *tolerancia*

Algoritmo del Método de la Bisección

$$\varepsilon = \frac{\Delta x^0}{2^n}. \qquad 2^n = \frac{\Delta x^0}{\varepsilon}.$$

$$\ln(2^n) = \ln(\frac{\Delta x^0}{\varepsilon}.)$$

n.ln(2) $= \ln(\frac{\Delta x^0}{\varepsilon}.)$

n $= \ln(\frac{\Delta x^0}{\varepsilon}.)$ / ln(2)

Si $\log_2(2) = 1$

n $= log_2(\frac{\Delta x^0}{\varepsilon}.)$

MÉTODO BISECCIÓN

Algoritmo: Método de la Bisección

Para encontrar una solución a $f(x) = 0$ dada la función continua determinada f en el intervalo $[a, b]$, donde $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos:

ENTRADA puntos finales a, b; tolerancia TOL; número máximo de iteraciones N_0.

SALIDA solución aproximada p o mensaje de falla.

Paso 1 Sea $i = 1$;
$FA = f(a)$.

Paso 2 Mientras $i \leq N_0$ haga los pasos 3–6.

Paso 3 Sea $p = a + (b - a)/2$; (*Calcule* p_i.)
$FP = f(p)$.

Paso 4 Si $FP = 0$ o $(b - a)/2 < TOL$ entonces
SALIDA (p); (*Procedimiento completado exitosamente.*)
PARE.

Paso 5 Sea $i = i + 1$.

Paso 6 Si $FA \cdot FP > 0$ entonces determine $a = p$; (*Calcule* a_i, b_i.)
$FA = FP$
también determine $b = p$. (FA *no cambia.*)

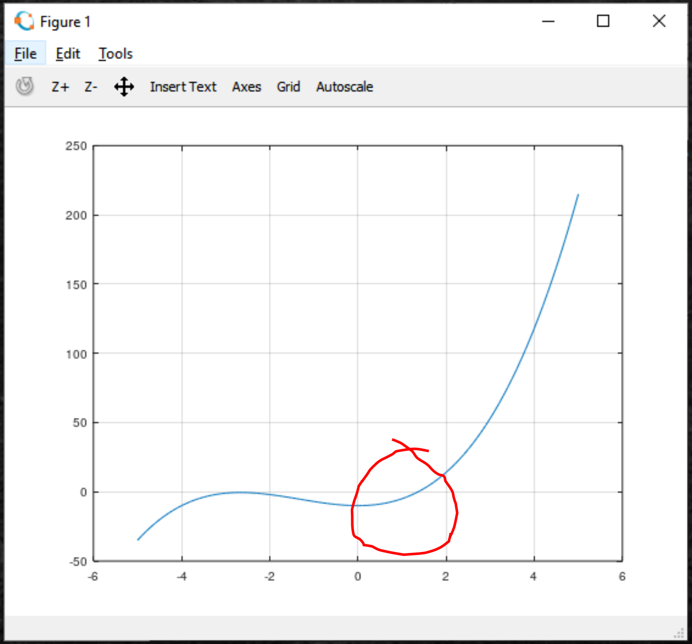
Paso 7 SALIDA ('El método fracasó después de N_0 iteraciones, N_0 =', N_0);
(*El procedimiento no fue exitoso.*)
PARE.

Ejercicio base: Encontrar la raíz aproximada de:

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$$

1. Grafica de la ecuación: Se puede observar las posibles raíces.

```
f=@(x) x.^3 +4*x.^2-10;
x = -5:0.1:5;
y=f(x);
plot (x, y); grid on
```



Ejercicio base: Encontrar la raíz aproximada de:

2. Comprobamos que los puntos encierran la una raíz:

f=@(x) x.^3 +4*x.^2-10;a =1 ; b=2.

f(a)= -5; f(b) 14 ----→ (-5)*14 ---→ signo (negative) ok f(a)*f(b)<0

3. Encontramos el valor medio xm = (a+b)/2 ---→ (1+2)/ 2 ---→ xm = 1.5

4. Determinamos si la solución está entre [a y xm] o [xm y b]

f(a) *f(xm) --→ f(a)=-5 ; f(xm)=f(1.5) = 2.3750; entonces

f(a)*f(xm) < 0 ---→ b=xm; ahora a=1 y b=1.5

Y el proceso se repite

. Encontramos el valor medio xm = (a+b)/2 ---→ (1+1.5)/ 2 ---→ xm = 1.25

……….

Ejercicio base: Encontrar la raíz aproximada de:

n = 13.28771237954945
Fa = -5
Fb = 14

iteration	a	b	(xNS)Solution	f(xNS)	Tolerance
1	1.000000	2.000000	1.500000	2.375000	0.500000
2	1.000000	1.500000	1.250000	-1.796875	0.250000
3	1.250000	1.500000	1.375000	0.162109	0.125000
4	1.250000	1.375000	1.312500	-0.848389	0.062500
5	1.312500	1.375000	1.343750	-0.350983	0.031250
6	1.343750	1.375000	1.359375	-0.096409	0.015625
7	1.359375	1.375000	1.367188	0.032356	0.007812
8	1.359375	1.367188	1.363281	-0.032150	0.003906
9	1.363281	1.367188	1.365234	0.000072	0.001953
10	1.363281	1.365234	1.364258	-0.016047	0.000977
11	1.364258	1.365234	1.364746	-0.007989	0.000488
12	1.364746	1.365234	1.364990	-0.003959	0.000244
13	1.364990	1.365234	1.365112	-0.001944	0.000122
14	1.365112	1.365234	1.365173	-0.000936	0.000061

Ver rutina: biseccion.m