HW4

范潇 2254298

2024 年 5 月 5 日

题目 1. **(1)** 在平面上花 n 条直线，每对直线都在不同的点相交，它们构成的无限区间数记为 $f(n)$，求 $f(n)$ 满足的递推关系。

解答. 由平面几何知识可知:

$$\begin{cases} f(n) = f(n-1) + 2(n \geq 2) \\ f(0) = 1, f(1) = 2 \end{cases}$$

题目 2. **(3)** n 位四进制数中，若:

1. 有偶数个 0 的序列共有 $f(n)$ 个;
2. 有偶数个 0 且有偶数个 1 的序列共有 $g(n)$ 个。

求 $f(n), g(n)$ 满足的递推关系。

解答. 显然 $f(0) = 1, f(1) = 3$, (空串视为合法序列)。当 $n \geq 2$ 时，按照第 n 位上是否为 0 进行讨论。如果为 0，那么前 $n-1$ 位上只能有奇数个 0，由减法法则可知，方案数为 $4^{n-1} - f(n-1)$；否则，前 $n-1$ 位上仍有偶数个 0，由乘法法则可知，方案数为 $3f(n-1)$。综上

$$f(n) = \begin{cases} 4^{n-1} + 2f(n-1), n \geq 2 \\ 1, n = 0, 1 \end{cases}$$

题目 3. **(6)** 求解下列递推关系:

1. $$\begin{cases} f(n) = f(n-1) + 9f(n-2) - 9f(n-3)(n \geq 3) \\ f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = 2 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} f(n) = 4f(n-1) - 3f(n-2) + 3^n \\ f(0) = 1, f(1) = 2 \end{cases}$$

解答.

1. 特征方程为

$$(x^2-9)(x-1)=0$$

所以设通解为

$$f(n)=a_1 3^n+a_2(-3)^n+a_3$$

将初值带入后可解得

$$f(n)=3^{n-1}+\frac{(-3)^{n-1}}{4}-\frac{1}{4}$$

2. 特征方程为

$$(x-3)(x-1)=0$$

3 为一个根，所以设特解为

$$an3^n$$

带入递推式解得 $a=\frac{3}{2}$.

设解为

$$f(n)=a_1 3^n+a_2+\frac{n3^{n+1}}{2}$$

解得

$$f(n)=-\frac{7}{4}3^n+\frac{11}{4}+\frac{n3^{n+1}}{2}$$

题目 4. (7) 求解下列递推关系：

1.

$$\begin{cases} f^2(n)-2f(n-1)=0(n\geq 1) \\ f(0)=4 \end{cases}$$

2.

$$f(n)=nf(n-1)+n!(n\geq 1)f(0)=2$$

解答.

1. 设 $g(n)=\ln f(n)$，则有

$$\begin{cases} 2g(n)=\ln 2+g(n-1) \quad n\geq 1 \\ g(0)=2\ln 2 \end{cases}$$

从而

$$2(g(n)-\ln 2)=g(n-1)-\ln 2$$

因此

$$g(n)=(2^n+1)\ln 2$$

$$f(n)=2^{2^n+1}$$

2. 设 $g(n) = f(n)/n!$，则有

$$\begin{cases} g(n) = g(n-1) + 1 \quad n \geq 1 \\ g(0) = 2\ln 2 \end{cases}$$

从而

$$g(n) = 2 + n$$

$$f(n) = (2+n)n!$$

题目 5. (8) 求解下列递推关系:

1. $$\begin{cases} f(n) = f(n-1) + \frac{1}{n(n+1)}(n \geq 1) \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} f(n+2) - f(n) = 3 \cdot 2^n + 4 \cdot (-1)^n \\ f(0) = 0, f(1) = 1 \end{cases}$$

解答.

1. 设 $g(n) = f(n) + \frac{1}{n+1}$，则有

$$g(n) = g(0) = 2$$

$$f(n) = 2 - \frac{1}{n+1}$$

2. 特征方程为

$$x^2 - 1 = 0$$

根为 $x = \pm 1$。因此设 $3 \cdot 2^n$ 对应的特解为 $a2^n$,$4 \cdot (-1)^n$ 对应的特解为 $bn(-1)^n$. 令

$$f(n) = a2^n + bn(-1)^n$$

得

$$3a \cdot 2^n + 2b(-1)^n = 3 \cdot 2^n + 4(-1)^n$$

比较系数后得 $a = 1, b = 2$。设通解为

$$f(n) = 2^n + 2n(-1)^n + a_1 + a_2(-1)^n$$

带入初值后可得

$$f(n) = 2^n + 2n(-1)^n + (-1)^{n+1}$$

题目 6. **(11)** $1 \times n$ 棋盘用红、白、蓝三种颜色着色，不允许相邻两个都着红色，求着色方案数满足的递推关系，并求出着色方案数。

解答. 记方案数为 $f(n)$，显然 $f(0)=1, f(1)=3$，当 $n \geq 2$ 时，按照第 n 块的颜色进行讨论。若为红色，那么第 $n-1$ 块只能选择白色或蓝色，对应 $2f(n-2)$ 种方案；否则，第 n 块为蓝色或白色，又乘法原理可知，对应 $2f(n-1)$ 种方案。所以得到递推关系

$$f(n)=\begin{cases} 2f(n-1)+2f(n-2) & n \geq 2 \\ 1 & n=0 \\ 3 & n=1 \end{cases}$$

特征方程为

$$x^2-2x-2=0$$

根为 $x=1\pm\sqrt{3}$. 令

$$f(n)=a(1+\sqrt{3}^n)+b(1-\sqrt{3})^n$$

带入初值后可得

$$f(n)=(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3})(1+\sqrt{3}^n)+(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3})(1-\sqrt{3})^n$$

题目 7. **(14)**

$$\begin{cases} f(n)=f(n-1)+9f(n-2)-9f(n-3) \\ f(0)=0, f(1)=1, f(2)=2 \end{cases}$$

解答. 令

$$G(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f(n)x^n$$

则

$$(1-x-9x^2+9x^3)G(x)=\sum_{n=3}^{\infty}9f(n-3)x^n-\sum_{n=2}^{\infty}2f(n-2)x^n-\sum_{n=1}^{\infty}f(n-1)x^n+\sum_{n=0}^{\infty}f(n)x^n$$

$$(9x^2-1)(x-1)G(x)=x^2+x$$

$$G(x)=\frac{x^2+x}{(9x^2-1)(x-1)}=(x^2+x)(-\frac{3}{4}\frac{1}{3x-1}+\frac{3}{8}\frac{1}{3x+1}+\frac{1}{8}\frac{1}{x-1})=(x^2+x)(\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n+\frac{3}{8}\sum_{n=0}^{\infty}(-3x)^n-\frac{1}{8}\sum_{n=0}^{\infty}x^n)$$

整理后比较系数可得

$$f(n)=3^{n-1}+\frac{(-3)^{n-1}}{4}-\frac{1}{4}$$

题目 8. **(17)** 在圆周上任取 n 个不相同的点，过每两点作一条弦。假设这些弦中没有三条在圆内相交于一点，令 a_n 表示这些弦将圆分成的区域数。证明

$$a_n=\binom{n}{4}+\binom{n}{2}+1$$

解答. 由上一章的第 18 题可知，令 h_n 表示具有 $n+2$ 条的凸边形区域被其对角线所分成的区域，假设没有三条对角线共点。定义 $h_0=0$. 则

$$h_n=\binom{n+2}{4}+\binom{n+1}{2}$$

而 a_n 在 h_{n-2} 的基础上增加了由弦和弧围成的区域，即

$$a_n = h_{n-2}+n = \binom{n}{4}+\binom{n-1}{2}+n = \binom{n}{4}+\frac{(n-1)(n-2)}{2}+n = \binom{n}{4}+\frac{n^2-3n+2}{2}+n = \binom{n}{4}+\binom{n}{2}+1$$

题目 9. **(19)** 确定 $f(n)$ 的一个递推关系式，$f(n)$ 是一个平面被 n 个圆划分的区域数量，期中每一对圆正好相交于两点，且没有三个圆相交于一点。

解答. 对于第 n 个圆，它和前 $n-1$ 个圆产生 $2(n-1)$ 个交点，将其划分为 $2(n-1)$ 条弧，而每对弧又会将原本的一个区域一分为二，从而有

$$f(n) = 2(n-1) + f(n-1), n \geq 2$$

显然 $f(1) = 2$，展开递推关系式后解得

$$f(n) = n^2 - n + 2$$