图论作业 1

范潇　2254298

2024 年 6 月 10 日

题目 1. **(1)** （1）共 7 个顶点，若能简单图化，则度为 6 的两个顶点均分别与其他所有顶点相邻。特别地，它们与度为 2 的顶点相邻。此时对于两个度为 5 的顶点，它们必须分别再与对方和两个度为 3 的顶点相连。但是这会使得两个度数为 3 的顶点与 4 条边邻接（其中两条与度为 6 的点邻接），从而矛盾。

（2）

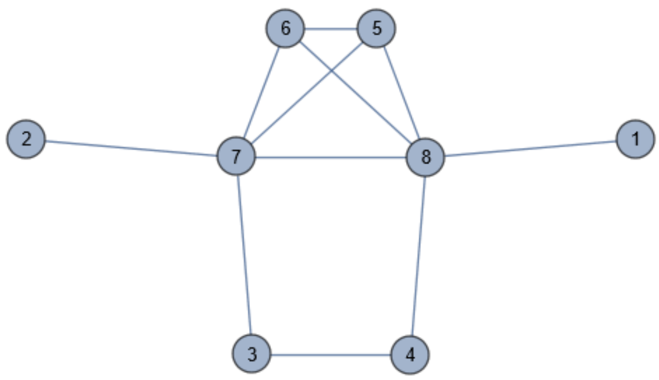


图 1: (2) 第一种简单图

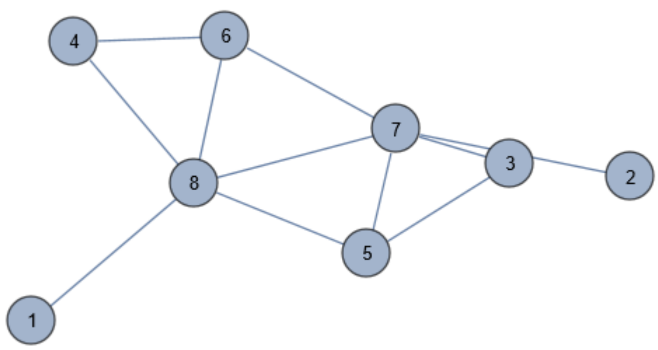


图 2: (2) 第一种简单图

第一张图中，两个度为 3 的顶点相邻，而在第二张图中则不相邻。所以这两张图非同构。

（3）

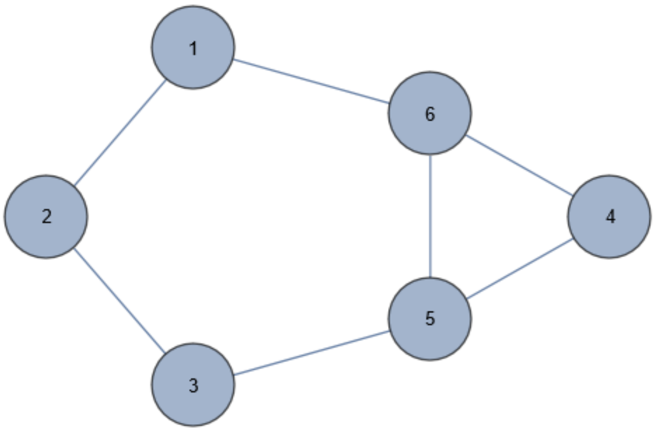


图 3: (3) 第一种简单图

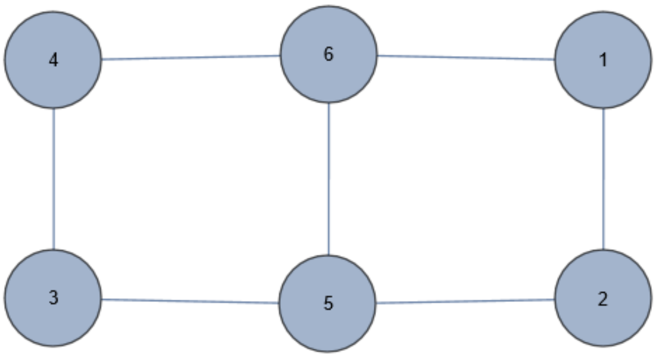


图 4: (3) 第一种简单图

题目 2. (2)

$$\sum_{i=1}^{k} d_i$$

可以视为由两部分组成，一部分由边 $d_i d_j, (i < j \leq k)$ 贡献，另一部分由 $d_i d_j (i \leq k < j)$ 贡献。前者最多贡献 $k(k-1)$，此时 $\{d_1, \cdots, d_k\}$ 对应的诱导子图为完全图，其中的每一条边都对它的两个端点分别贡献了 1。

另一部分，将 $d_i d_j (i \leq k < j)$ 按照 j 的取值划分为集合 $A_k + 1, \cdot, A_n$。对于 $A_r (k+1 \leq r \leq n)$，因为以 v_r 为一端的边的个数小于 d_r，所以 $|A_r| \leq d_r$。又因为另一端互异，且下标小于等于 k，所以 $|A_r| \leq k$。因此 $|A_r| \leq \min\{d_r, k\}$。而 A_r 中的每一条边，都因为它的一段的下标小于 k，所以对合式贡献了 1，所以合在一起第二部分为

$$\sum_{i=k+1}^{n} |A_i| = \min\{k, d_i\}$$

综上

$$\sum_{i=1}^{k} \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, d_i\}$$

题目 3. (3) 因为 G 为自补图，所以它和它的补图的边数相同。又因为它和它的补图之并为完全图，且两

者的边集交集为空，所以

$$\frac{|V|(|V|-1)}{2}=2|E|$$

有

$$|V|(|V|-1)\equiv 0(\mod 4)$$

所以 $|V|=4k$ 或 $|V|=4k+1$，其中 k 为正整数。

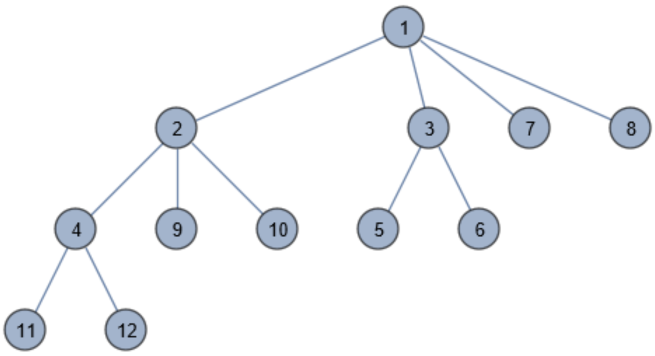
题目 4. **(4)** K_n 有 $\frac{n(n-1)}{2}$ 条边，所以 G 是在 K_n 的基础上至多删去 $\frac{n(n-1)}{2}-\frac{(n-1)(n-2)}{2}-2=n-3$ 条边得到的图。假设有两个不相邻的顶点 u,v，满足 $d(u)+d(v)<n$，则以 u 或 v 为一端的边至多有 $n-1$ 条，而在 K_n 中，这样的边有 $2n-3$ 条，所以需要至少删掉 $n-2$ 条边，与“至多删去 $n-3$ 条边”产生矛盾。所以对任意两个不相邻的顶点 u,v 有 $d(u)+d(v)\geq n$，从而 G 有哈密顿圈，为哈密顿图。

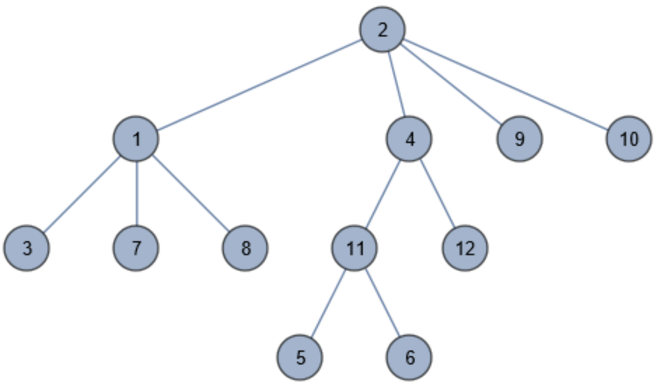
显然，K_{n-1} 加上另外一个叶子顶点组成的 n 阶图为非哈密顿图，且满足 $|E|=\binom{n-1}{2}+1$。

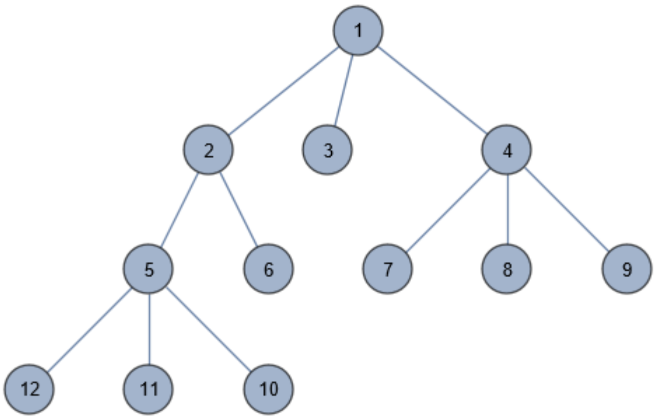
题目 5. **(5)** 设 T 有 n 个顶点，则有 $n-1$ 条边，顶点度数之和由握手定理可知为 $2(n-1)$。因此

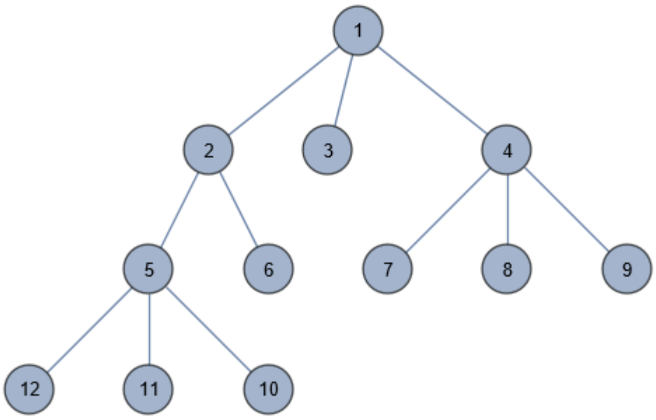
$$8+6+4(n-10)=2(n-1)$$

解得 $n=12$，从而有 2 个 4 度点。









题目 6. **(6)** 任取一个顶点 A，有鸽笼原理可知，在 G 或其补图中，有 3 条边与其关联。不妨设在 G 中，有边 AB, AC, AD。若 $\bar{G}$ 中有三角形 BCD，则命题成立，否则，在 G 中，缺失的边与 A 一起组成了一个圈，从而命题也成立。

题目 7. **(7)** 显然，树的中心一定存在。

下面先证明，如果树的中心中至少有两个顶点，则任意两个顶点均相邻。假设 u, v 为树的中心中的两个互异顶点，若它们不相邻，则以 u, v 为两端的路径中至少还有另外一点 w。设 x 为树中距离 w 最远的点，即 $d(x, w)$ 为 w 对应的 r 值。下面考察以 x, w 为两端的路径，如果 u, v 均不在该路径上，则说明以 x, u 和以 x, v 为两端的路径上都有 w，否则会在树上形成圈。此时 u, v 对应的 r 值均大于 $d(x, w)$，即大于 w 对应的 r 值，而这与 u, v 在树的中心内矛盾；当 u 或 v 在这条路径上时，不妨设 u 在这条路径上，此时 v 必不可能也在这条路径上，否则会在树上形成圈。此时 $d(v, x) > d(w, x)$，与 v 在树的中心内矛盾。

因此，如果树的中心中至少有两个顶点，则任意两个顶点均相邻。当树的中心有两个顶点时，它们相邻，即树的中心为一条边。若树的中心有三个或以上个顶点，则它们之间会有圈，产生矛盾。所以树的中心内不可能有两个以上顶点。即树的中心为一个顶点或一条边。

题目 8. **(9)** 由定义可知，$\forall v, \chi G - v \leq \chi(G) - 1$。若 $\exists v, \chi G - v \leq \chi(G) - 2$，则将 $\chi G - v$ 用至多 $\chi(G) - 2$ 种颜色着色后，再将 v 及其相邻接的边添加回去，得到 G。因为与其相邻的点的颜色至多只有 $\chi(G) - 2$ 个，所以可以将它染为一种新颜色，这样得到的 G 的染色方案只用了 $\chi(G) - 1$ 种颜色，与定义产生矛盾。所以 $\chi G - v = \chi(G) - 1$。

若 G 不为连通图，则它至少有两个联通分量。若 $\exists v, \chi G - v = \chi(G) - 1$，设 v 在联通分量 C_i 内，则

$G-v$ 中，其他连通分量 $C_j(j\neq i)$ 并未发生改变，说明 $\chi C_j\leq\chi(G),(j\neq i)$。显然，$\chi C_i=\chi(G)$，否则可以用至多 $\chi(G)-1$ 中颜色对 G 着色。此时，如果选择 $u\in C_j(j\neq i)$，则 $\chi(G-u)=\chi(G)$，因为 $\chi(C_i)=\chi(G)$。从而与 G 为色临界图产生矛盾。

若 $\exists v\in V,d(v)\leq\chi(G)-2$，则至多 $\chi(G)-1$ 中颜色将 $G-v$ 着色后，再将其复原未 G。由于 $d(v)\leq\chi(G)-2$，所以可以将它着色，使它的颜色与其相邻的顶点都不同，同时总共使用的颜色至多为 $\chi(G)-1$ 种，而这与 $\chi(G)$ 的定义矛盾。

题目 9. (10)

$$|E|=|V|+|F|-2$$
$$2|E|=3f_3+4f_4+\cdots$$
$$2|E|=\sum_{u\in V}d(u)\geq\delta(G)|V|\geq 3|V|$$

可得

$$2|E|\geq 3|E|-3|F|+6$$

若不存在边数小于等于 4 的面，即 $f_3=0,f_4=0$

$$6|F|\geq 2|E|+12\geq 12+3f_3+4f_4+\cdots\geq 5|F|+12$$

所以 $|F|\geq 12$，与面数小于 12 产生矛盾。所以存在边数小于等于 4 的面。