HW2

范潇　2254298

2024 年 3 月 28 日

题目 1. (2) 求从 1 到 500 的整数中能被 3 和 5 整除，但不能被 7 整除的数的个数。

解答.

$$\lfloor 500/3 \rfloor = 166, \lfloor 500/5 \rfloor = 100, \lfloor 500/7 \rfloor = 71, \lfloor 500/15 \rfloor = 33, \lfloor 500/15 \rfloor = 21, \lfloor 500/35 \rfloor = 14, \lfloor 500/105 \rfloor = 4$$

从韦恩图中可知:

$$N = \lfloor 500/3 \rfloor + \lfloor 500/5 \rfloor - \lfloor 500/15 \rfloor - \lfloor 500/105 \rfloor = 229$$

题目 2. (4) 求多重集合 $S = \{\infty \cdot a, 3 \cdot b, 5 \cdot c, 7 \cdot d\}$ 的 10 组合数。

解答. 记不定方程 $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$ 的非负整数解组成的集合为 S，由其中满足 $x_i > a_i$ 的解组成的子集为 A_i，$(i = 1, 2, 3; a_1 = 3, a_2 = 5, a_3 = 7)$

则所求个数为

$$\begin{aligned} N &= |S| - \textstyle\sum_i |A_i| + \sum_{i \neq j} |A_i \cap A_j| + |\bigcap_i A_i| \\ &= \tbinom{10+3}{3} - (\tbinom{10-4+3}{3} + \tbinom{10-6+3}{3} + \tbinom{10-8+3}{3}) + (\tbinom{10-10+3}{3} + 0 + 0) - 0 \\ &= 158 \end{aligned}$$

题目 3. (8) 求多重集合 $S = \{3 \cdot a, 4 \cdot b, 2 \cdot c\}$ 的全排列数，使得在这些排列中同一个字母的全体不能相邻。

解答. 记由 S 的全排列组成的集合为 P，记由其中出现了 a、b、c 的全体均相邻的情况的元素组成的子集分别为 A_i，则由容斥原理可知，所求个数为

$$\begin{aligned} N &= |P| - \textstyle\sum_i |A_i| + \sum_{i \neq j} |A_i \cap A_j| + |\bigcap_i A_i| \\ &= \tfrac{9!}{3!4!2!} - (\tfrac{7!}{1!4!2!} + \tfrac{6!}{3!1!2!} + \tfrac{8!}{3!4!1!}) + (\tfrac{4!}{2!} + \tfrac{6!}{4!} + \tfrac{5!}{3!}) - 3! \\ &= 871 \end{aligned}$$

其中在计算 A_i 时，将对应的相邻字母全体视为一个整体来计算全排列。

题目 4. (11) 定义 $D_0 = 1$，用组合分析的方法证明

$$n! = \binom{n}{0} D_n + \binom{n}{1} D_{n-1} + \binom{n}{2} D_{n-2} + \cdots + \binom{n}{n} D_0.$$

解答. 左右两边都是集合 $\{1, \cdots, n\}$ 的全排列的个数。

左侧是根据第 $1, 2 \cdots, n$ 位上的可能取值个数，使用乘法法则计算。

右侧是根据排列中的错位的数字个数进行加法法则，$\binom{n}{i}$ 为错位的 i 的数字的可能组合，确定好错位的数字后，D_i 为使得这 i 个数字错位的排列个数，即错排数 D_i，然后使用乘法法则得到 $\binom{n}{i}D_i$

题目 5. (12) 计算机系中有三个运动队，每人一套运动服。现计算机系中有足球服 38 套，篮球服 15 套，排球服 20 套。三个运动队共有 58 人，其中只有 3 人同时是三个队的队员，问恰好参加两个队的人数以及至少参加两个队的人数。

解答. 设由这三个运动队中的队员组成的集合为 S，其中由足球队、篮球队、排球队队员组成的子集分别为 A_1, A_2, A_3。

设 $|A_iA_{i+1}| = x_i, i = 1, 2, |A_1A_3| = x_3.$

则

$$|S| = 38 + 15 + 20 - (x_1 + x_2 + x_3) + 3 = 58$$

从而恰好参加两个队的人数为

$$x_1 + x_2 + x_3 - 3 \cdot 3 = 9$$

至少参加两队的人数为

$$9 + 3 = 12$$

题目 6. (17) 一书架有 m 层，分别放置 m 类不同种类的书，每层 n 册。现将书架上的图书全部取出清理，清理过程中要求不打乱图书所在的类别，试问:

1. m 类图书全不再各自原来层次上的方案数有多少?
2. 每层的 n 本书都不在原来位置上的方案数有多少?

解答.

1. 将每一类书视为整体，则有 D_m
2. 先将各类书视为整体，按照不在原来各自层次上的类数使用加法法则。确定好每类所在层后，如果某一类的书不在原来层次，则该类图书在该层的放置方法无限制，可取全排列；否则，要满足错排要求。所以有:
$$N = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} D_i (n!)^i D_n^{m-i}$$

题目 7. (19) 试求由 $\sum_{d|n} g(d) = 5$ 所定义的数论函数 $g(n)$.

解答. 令 $f(n) = 5$，则

$$g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f(\frac{n}{d}) = 5 \sum_{d|n} \mu(d)$$

所以

$$g(n) = \begin{cases} 5 & n = 1, \\ 0 & n > 1 \end{cases}$$

题目 8. (25) 5 名旅客 $P_1, \cdots, P_5$ 要去 5 个地方 $C_1, \cdots, C_5$，其中，P_1 不愿意去 C_1, C_3；P_2 不愿意去 C_4；P_3 不愿意去 C_2, C_5；P_4 不愿意去 C_2；P_5 不愿意去 C_1, C_3。问 P_1 去 C_5 的概率有多少?

题目 9. (28) 利用容斥原理证明

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}\binom{n+m-k-1}{n}=\binom{n-1}{m-1}\quad(n\geq 1,m\geq 1).$$

解答. 右侧 $\binom{n-m+(m-1)}{m-1}=\binom{n-1}{m-1}$ 即不定方程 $x_1+\cdots+x_m=n$ 的正整数解的个数。

左边则是运用容斥原理。记该不定方程的非负整数解集为 S，由其中满足 $x_i=0$ 的解组成的子集为 $A_i,i=1,\cdots,m$. 下面求 $|\bigcap_i \bar{A}_i|$，即不定方程 $x_1+\cdots+x_m=n$ 的正整数解的个数。

令 $\bigcap_{i\in\varnothing}A_i=S$. 当指标集 $I\subseteq\{1,\cdots,m\},|I|=k$ 时，$|\bigcap_{i\in I}A_i|$ 为 $y_1+\cdots+y_m=n-k$ 的非负整数解的个数 $\binom{n-k+m-1}{m-1}$，其中 $y_i=x_i-1,i\in I,y_j=x_j,j\notin I$. 而 $\binom{m}{k}$ 即为满足上述要求的指标集个数。所以结合容斥原理有左式

$$|\bigcap_i\bar{A}_i|=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\sum_{|I|=k}|\bigcap_{i\in I}A_i|=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}\binom{n+m-k-1}{n}$$

题目 10. (30) 利用容斥原理证明

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}\binom{n-k}{r}=\binom{n-m}{r-m}\quad(n\geq r\geq m\geq 0).$$

解答. 等式右侧是集合 $\{1,\cdots,n\}$ 的包含 $\{1,\cdots,m\}$ 的 r 元子集的个数。

左侧是根据 $\{1,\cdots,r\}$ 中的各个元素是否在所挑选的子集中使用容斥原理。

记由集合 $\{1,\cdots,n\}$ 的 r 元子集组成的集合为 S，由其中满足性质“不包含 $\{i\}$ ”的元素所组成的子集为 $A_i,i=1,\cdots,m$. 令 $\bigcap_{i\in\varnothing}A_i=S$. 从而等式右边也等于

$$|\bigcap_i\bar{A}_i|=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\sum_{|I|=k}|\bigcap_{i\in I}A_i|=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}|\bigcap_{i\in I}A_i|$$

其中

$$|\bigcap_{i\in I}A_i|=\binom{n-k}{r}$$

这是因为 n 个元素中已经有 k 个元素被确定不包含在 r 元子集中，所以等于从 $n-k$ 个元素中取 r 元子集的个数。从而等式成立。