图论作业 2

范潇　2254298

2024 年 6 月 13 日

题目 1. **(1)** 对 $|V|$ 进行数学归纳。当 $|V| = 0, 1$ 时，显然命题成立。假设当 $|V| \leq k$ 时命题成立，当 $|V| = k + 1$ 时，由于至少有一个叶子结点 v，设它与顶点 u 相邻。若对于该树存在完全匹配 P_V，显然 $P_V = P_{V \setminus \{u,v\}} \cup \{uv\}$ ，且由于归纳假设 $P_{V \setminus \{u,v\}}$ 是唯一的，所以 P_V 也是唯一的。

因此，任何树至多有一个完美匹配。

题目 2. **(2)** 只需证明当 $|E| = \lfloor n^2/4 \rfloor + 1$ 时，$t(G) \geq \lfloor n/2 \rfloor$ 即可。

当 $n \geq 3$ 时，无论 n 的奇偶性，均有 $\lfloor n/2 \rfloor \lceil n/2 \rceil = \lfloor n^2/4 \rfloor$。因此，取完全二部图 $K_{\lfloor n/2 \rfloor, \lceil n/2 \rceil}$，因为此时 $\lceil n/2 \rceil \geq 2$，所以可以在顶点数 $\lceil n/2 \rceil$ 的一侧取两个点，并将它们连接起来，得到一个 $m = \lfloor n^2/4 \rfloor + 1$ 的图，同时，由于该图是在完全二部图的基础上得到的，选取的两个点都与另一侧的顶点相邻，从而有 $t(G) \geq \lfloor n/2 \rfloor$

题目 3. **(3)** 由于图 1中的着色方案的存在，所以 $R(P_3, C_4) \geq 5$。下面证明 $R(P_3, C_4) \leq 5$。只需证明对于任意一个 K_5 的红蓝二着色，必能得到一个蓝色的 P_3 或红色的 C_4。

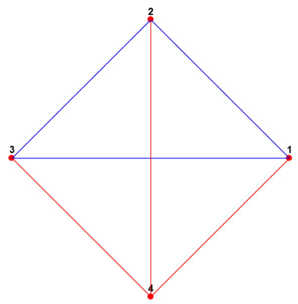

图 1: K_4 的一种二着色方案

K_5 中，必存在一个顶点，有偶数个蓝边与其邻接。事实上，如果不存在，则蓝边与顶点相邻接的次数为奇数，与握手定理矛盾。不妨设这个顶点为 v_1。

当有 4 条蓝边与其邻接时，若不存在蓝色的 P_3，则没有蓝边与 v_2, v_3, v_4, v_5 邻接，从而它们形成一个红色的 $C_4(v_2 \to v_5 \to v_3 \to v_4 \to v_2)$。

当有 2 条蓝边与其邻接时，若不存在蓝色的 P_3，则没有蓝边与 v_2, v_5 邻接，从而它们形成一个红色的 $C_4(v_2 \to v_5 \to v_3 \to v_4 \to v_2)$。

当有 0 条蓝边与其邻接时，若不存在红色的 P_3，显然对于 v_2, v_3, v_4, v_5，在图 4的基础上至多分别新增一条红边与它们邻接。但是如果只与两条红色边邻接，则回到了上一种情况。所以在图 4中，其余边都是蓝边，但是这时显然存在蓝色 P_3。

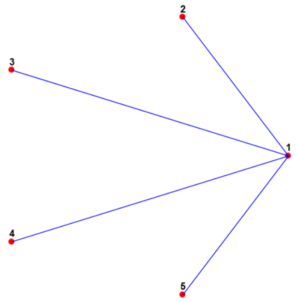

图 2: 有四条蓝边与 v_1 邻接

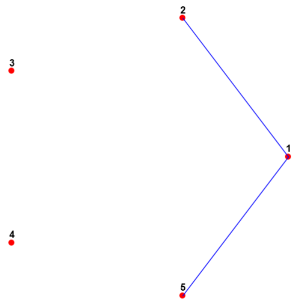

图 3: 有两条蓝边与 v_1 邻接

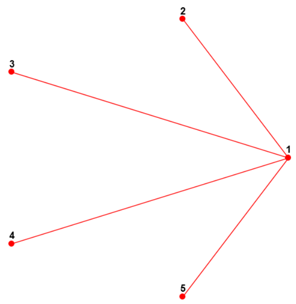

图 4: 有零条蓝边与 v_1 邻接

综上，$R(P_3, C_4) \geq 5$，因此 $R(P_3, C_4) = 5$。

题目 4. (4)

题目 5. (22) 若一条边为某个三角形的最长边，则将其染为红色，剩余边染为蓝色。由于 $R(3,3) = 6$，所以必有一个蓝色三角形或红色三角形。但是因为每个三角形必有一条最长边，即必有一条红边，所以一定能得到一个红色三角形。该红色三角形的最短边便是另一个三角形的最长边。

题目 6. (23) 对于 $K_{n(r_{n-1}-1)+2}$ 中的任一顶点 v，由鸽笼原理可知，至少存在一种颜色 α，有 r_{n-1} 条这种颜色的边与其邻接。记这些边的另一端的顶点为 $v_1, \cdots, v_{r_{n-1}}, \cdots$。若存在 $1 \leq i < j$，使得 $v_i v_j$ 的颜色也为 α，则得到一个同色三角形 $v v_i v_j$。否则，$v_1, \cdots, v_{r_{n-1}}$ 的诱导子图中边的颜色至多有 $n-1$ 种，因此其中必有一个同色三角形。综上，$r_n \leq n(r_{n-1} - 1) + 2$。

因此

$$
\begin{aligned}
r_n &\le n(r_{n-1}-1)+2 \\
&\le n[(n-1)(r_{n-2}-1)+1]+2 \\
&= n(n-1)(r_{n-2}-1)+n+2 \\
&\le \cdots \\
&\le n(n-1)\cdots 2(r_1-1)+n(n-2)\cdots 3+\cdots+n+2 \\
&= 2n!+\frac{n!}{2!}+\cdots+\frac{n!}{(n-1)!}+1 \\
&= n![\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n-1)!}+\cdots+\frac{1}{2!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{0!}]+1 \\
&\le \lfloor en! \rfloor+1=\lceil en! \rceil
\end{aligned}
$$

在三着色的 K_{17} 中，任取一个顶点 v，至少有 6 条与它邻接的边同色，记该颜色为 α，这些边另一端上的顶点为 $v_1,\cdots,v_6,\cdots$。若存在 $1\le i<j$，使得 v_iv_j 的颜色也为 α，则 vv_iv_j 为同色三角形。否则，$v_1,\cdots,v_6$ 的诱导子图中边的颜色至多有 2 种，而 $r(3,3)=6$，所以必有一个同色三角形。综上，三着色的 K_{17} 中必有一个同色三角形，所以 $r_3\le 17$.

题目 7. (25) $\{1,2,\cdots,s_{n-1}-1\}$ 可以划分为 $n-1$ 个子集，各子集中没有 $x+y=z$ 的解。记这些子集为 $A_1,\cdots,A_{n-1}$。

下面把 $\{1,2,\cdots,3s_{n-2}-2\}$ 划分为不满足要求的 n 个子集。

令 $B_i=\{j\mid j\in A_i\vee j-(2s_{n-1}-1)\in A_i\}, i=1,\cdots,n-1; B_n=\{s_{n-1},s_{n-1}+1,\cdots,2s_{n-1}-1\}$.

因为任取 $i,j\in B_n, i+j\ge 2s_{n-1}$，所以 B_n 中没有 $x+y=z$ 的解。对于 $B_i, i\ne n$，任取 $a,b\in B_i$，若 $a,b\in B_i-A_i$，则 $a+b\ge 4s_{n-1}$，所以 $a+b\notin B_i$；若 $a,b\in A_i$，$a+b\le 2s_{n-1}-2$，所以 $a+b\notin B_i-A_i$ 又因为 A_i 中没有 $x+y=z$ 的解，所以 $a+b\notin B_i$；若 a,b 一个属于 A_i，令一个属于 B_i-A_i，不妨设 $x\in B_i-A_i, y\in A_i$ 若存在 $z\in B_i, s.t. x+y=z$，则 $(x-(2s_{n-1}-1))+y=z-(2s_{n-1}-1)$，而 $x-(2s_{n-1}-1)\in A_i$，$z\le 2s_{n-1}-2$，所以 $z\in A_i$，而这与 A_i 的构造相矛盾。

因此，可以把 $\{1,2,\cdots,3s_{n-2}-2\}$ 划分为不满足要求的 n 个子集。从而 $s_n\ge 3s_{n-1}-1$。

当 $n=1$ 时，$s_1=2\ge\frac{1}{2}(3+1)$。假设当 $n=k$ 时不等式成立，则当 $n=k+1$ 时有

$$
s_{k+1}\ge 3s_k-1\ge\frac{3}{2}(3^n+1)-1=\frac{1}{2}(3^{n+1}+1)
$$

因此不等式成立。