

HW13

范潇 2254298

2024 年 5 月 22 日

题目 1. (9.3.4) 设

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1^\top \\ \alpha_2^\top \\ \vdots \\ \alpha_m^\top \end{pmatrix}$$

则

$$W(A) = \text{span}\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$$

记方程 $AX = 0$ 的基础解系为

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$$

则

$$N(A) = \text{span}\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r\}$$

$$(\xi_i, \alpha_j) = 0, \forall 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq m$$

所以 $\forall \alpha \in W(A), \xi \in N(A)$

$$(\alpha, \xi) = \left(\sum_i k_i \alpha_i, \sum_j t_j \xi_j \right) = \sum_i \sum_j k_i t_j (\alpha_i, \xi_j) = 0$$

即

$$W(A) \perp N(A)$$

从而 $\mathbf{W}(\mathbf{A}), N(A)$ 之和为直和。又因为 $\dim(W(A)) + \dim(N(A)) = n$, 所以

$$\mathbb{R}^n = \mathbf{W}(\mathbf{A}) \oplus N(\mathbf{A})$$