方法与技巧

非线性递推数列极限的不动点解法

郑华盛

（南昌航空大学 数学与信息科学学院，江西 南昌 330063）

摘　要　给出几类非线性分式递推数列及二次函数递推数列极限的不动点解法，并通过例题进行说明.

关键词　非线性；递推数列；不动点；极限

中图分类号　O172.1　　**文献标识码**　A　　**文章编号**　1008-1399(2012)05-0001-03

具有递推关系数列极限的求解问题是数学分析中的一类重要问题. 文[1-9]给出了多种求解方法，但大多是从不同的角度给出线性分式递推数列极限的解法，而对非线性递推数列极限的解法涉及较少. 本文利用不动点的思想，讨论非线性分式和二次函数递推数列极限的求法，给出几个结论，并结合实例加以说明.

定义 1　设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若存在 $x_0 \in I$，使 $f(x_0) = x_0$，则称 x_0 为 $f(x)$ 在 I 上的不动点，简称 x_0 为 $f(x)$ 的不动点.

定理 1　设数列 $\{x_n\}$ 满足

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad x_1 \neq f(x_1),$$

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}(ad \neq 0)$$

且 $f(x)$ 有两个互异的不动点 λ_1 和 λ_2，则当且仅当

$$b = 0, \quad d = 2a, \quad e^2 + 4ac > 0$$

时有

$$\frac{x_{n+1} - \lambda_1}{x_{n+1} - \lambda_2} = \left(\frac{x_n - \lambda_1}{x_n - x_2}\right)^2,$$

而且当 $\left|\frac{x_1 - \lambda_1}{x_1 - \lambda_2}\right| < 1$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lambda_1,$$

而当 $\left|\frac{x_1 - \lambda_2}{x_1 - \lambda_1}\right| < 1$ 时，有

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lambda_2.$$

证明　由已知 λ_1 和 λ_2 为 $f(x)$ 的两个互异的不动点，得

$$f(\lambda_i) = \lambda_i \quad (i = 1, 2),$$

也即

$$(a - d)\lambda_i^2 + (b - e)\lambda_I + c = 0,$$

$$(b - e)^2 - 4c(a - d) > 0.$$

又因为当 $i = 1, 2$ 时有

$$x_{n+1} - \lambda_i = \frac{ax_n^2 + bx_n + c}{dx_n + e} - \lambda_i =$$

$$\frac{a(x_n - \lambda_i)^2 + [(2a - d)\lambda_i + b](x_n - \lambda_i)}{dx_n + e},$$

所以

$$\frac{x_{n+1} - \lambda_1}{x_{n+1} - \lambda_2} = \left(\frac{x_n - \lambda_1}{x_n - \lambda_2}\right)^2$$

当且仅当

$$(2a - d)\lambda_i + b = 0,$$

当且仅当

$$2a - d = 0, \quad b = 0,$$

也即

$$b = 0, \quad d = 2a,$$

此时有

$$e^2 + 4ac > 0,$$

于是得

$$\frac{x_n - \lambda_1}{x_n - \lambda_2} = \left(\frac{x_{n-1} - \lambda_1}{x_{n-1} - \lambda_2}\right)^2 = \left(\frac{x_1 - \lambda_1}{x_1 - \lambda_2}\right)^{2^{n-1}}.$$

由此可知，若 $x_1 = \lambda_1$，则有 $x_n = \lambda_1$，从而 $\lim_{n\to\infty} x_n = \lambda_1$. 若 $x_1 = \lambda_2$，则有 $x_n = \lambda_2$，从而 $\lim_{n\to\infty} x_n = \lambda_2$. 若 $x_1 \neq \lambda_1, \lambda_2$，则当 $\left|\frac{x_1 - \lambda_1}{x_1 - \lambda_2}\right| < 1$ 时，$\lim_{n\to\infty} x_n = \lambda_1$，而当 $\left|\frac{x_1 - \lambda_2}{x_1 - \lambda_1}\right| < 1$ 时，$\lim_{n\to\infty} x_n = \lambda_2$. 综上即得定理成立.

例 1[1-3]　设数列 $\{x_n\}$ 满足

$$x_1 > 0, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right),$$

其中 $a > 0$，$n = 1, 2, \cdots$，求极限 $\lim_{n\to\infty} x_n$.

解　记函数

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right) = \frac{x^2 + a}{2x},$$

由 $f(x) = x$ 解得不动点

$$\lambda_1 = \sqrt{a}, \quad \lambda_2 = -\sqrt{a}.$$

收稿日期：2010-11-03；修改日期：2012-09-29
基金项目：江西省教育厅教学改革项目(JxJG-09-7-28)；南昌航空大学研究生优质课程建设项目(YYZ201203)
作者简介：郑华盛(1966－)，男，江西景德镇人，博士，教授，主要从事数值计算方法研究. Email：nj_zhs@163.com

又因为 $x_1>0$,所以

$$\left|\frac{x_1-\lambda_1}{x_1-\lambda_2}\right|=\left|\frac{x_1-\sqrt{a}}{x_1+\sqrt{a}}\right|<1,$$

故由定理1得

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lambda_1=\sqrt{a}.$$

例2 设数列$\{x_n\}$满足

$$x_1=3,\quad x_{n+1}=\frac{x_n^2+2}{2x_n-1}\ (n=1,2,\cdots),$$

求极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解 记函数

$$f(x)=\frac{x^2+2}{2x-1},$$

由 $f(x)=x$ 解得不动点

$$\lambda_1=2,\quad \lambda_2=-1.$$

又因为

$$\left|\frac{x_1-\lambda_1}{x_1-\lambda_2}\right|=\frac{1}{4}<1,$$

故由定理1可得

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lambda_1=2.$$

类似地,可推广求解具有形如

$$x_{n+1}=\frac{2ax_n}{cx_n^2+a}\ (ac>0),$$

$$x_{n+1}=\frac{x_n(a_n^2+3e)}{3ax_n^2+e}\ (ae>0)$$

的递推关系的数列的极限.

例3 设数列$\{x_n\}$满足

$$x_1=\frac{1}{2},\quad x_{n+1}=\frac{2x_n}{1+x_n^2}\ (n=1,2,\cdots),$$

求极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解 记函数

$$f(x)=\frac{2x}{1+x^2},$$

由 $f(x)=x$ 解得不动点

$$\lambda_1=1,\quad \lambda_2=-1,\quad \lambda_3=0,$$

且有

$$\frac{x_{n+1}-\lambda_1}{x_{n+1}-\lambda_2}=-\left(\frac{x_n-\lambda_1}{x_n-\lambda_2}\right)^2=$$

$$\cdots=-\left(\frac{x_1-\lambda_1}{x_1-\lambda_2}\right)^{2^n},$$

又因为

$$\left|\frac{x_1-\lambda_1}{x_1-\lambda_2}\right|=\frac{1}{3}<1,$$

故由上式可得

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lambda_1=1.$$

例4[1,9] 设数列$\{x_n\}$满足

$$x_0>0,\quad x_{n+1}=\frac{x_n(x_n^2+3a)}{3x_n^2+a},$$

其中$a>0$,$n=0,1,2,\cdots$,证明数列$\{x_n\}$收敛,并求极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解 记函数

$$f(x)=\frac{x(x^2+3a)}{3x^2+a},$$

由 $f(x)=x$ 解得不动点

$$\lambda_1=\sqrt{a},\quad \lambda_2=-\sqrt{a},\quad \lambda_3=0,$$

且有

$$\frac{x_{n+1}-\lambda_1}{x_{n+1}-\lambda_2}=\left(\frac{x_n-\lambda_1}{x_n-\lambda_2}\right)^2=$$

$$\cdots=\left(\frac{x_0-\lambda_1}{x_0-\lambda_2}\right)^{3^{n+1}}.$$

又因为

$$\left|\frac{x_0-\lambda_1}{x_0-\lambda_2}\right|=\left|\frac{x_0-\sqrt{a}}{x_0+\sqrt{a}}\right|<1,$$

所以得极限

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lambda_1=\sqrt{a}.$$

定理2 设数列$\{x_n\}$满足

$$x_{n+1}=f(x_n),\quad x_1\neq f(x_1),$$

$$f(x)=ax^2+bx+c,$$

$$(b-1)^2-4ac>0,\ a\neq 0,$$

且 $f(x)$ 有两个互异的不动点 λ_1 和 λ_2.

(ⅰ)若 $\lambda=\lambda_1$ 或 λ_2 时,有

$$|x_{n+1}-\lambda|<L|x_n-\lambda|\ (0<L<1),$$

则有极限

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lambda.$$

(ⅱ)记$\tilde{\lambda}$为λ_1和λ_2中非零的不动点.若

$$c=0,b=2,\ |a|\leqslant 1,\ |x_1-\tilde{\lambda}|<1,$$

则有极限

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\tilde{\lambda}.$$

证明 (ⅰ)由已知条件可得

$$|x_n-\lambda|<L|x_{n-1}-\lambda|<$$

$$\cdots<L^{n-1}|x_1-\lambda|,$$

因为 $0<L<1$,所以有

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lambda.$$

(ⅱ)由已知 $c=0,b=2$,得 λ_1 和 λ_2 中必有一个非零,即 $\tilde{\lambda}$ 存在,且有

$$x_{n+1}-\tilde{\lambda}=a(x_n-\tilde{\lambda})^2=$$

$$\cdots=a^{2^{n+1}-1}(x_1-\tilde{\lambda})^{2^n}.$$

又因为 $|a|\leqslant 1$ 且 $|x_1-\tilde{\lambda}|<1$,所以必有极限

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\tilde{\lambda}.$$

例5[1-2,8] 设数列$\{x_n\}$满足

$$x_1 = \frac{d}{2},\ x_{n+1} = \frac{d - x_n^2}{2}\ (n = 1,2,\cdots),$$

其中 $0 < d \leqslant 1$,证明数列$\{x_n\}$ 收敛并求$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

解　记函数

$$f(x) = \frac{d - x^2}{2}\ (0 < d \leqslant 1),$$

由 $f(x) = x$ 解得不动点

$$\lambda_1 = -1 + \sqrt{1+d} > 0,$$
$$\lambda_2 = -1 - \sqrt{1+d} < 0,$$

且有

$$|x_{n+1} - \lambda_1| = \frac{|x_n - \lambda_1|\,|x_n + \lambda_1|}{2}.$$

又由已知易得 $0 < x_n < \dfrac{d}{2}$,于是有

$$0 < \frac{|x_n + \lambda_1|}{2} = \frac{x_n - 1 + \sqrt{1+d}}{2} < 1,$$

故由定理 2(ⅰ)可得

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lambda_1 = -1 + \sqrt{1+d}.$$

例 6(武汉大学、华中师范大学研究生入学试题)[1-2]　设数列$\{a_n\}$ 满足

$$a_1 = \frac{c}{2},\ a_{n+1} = \frac{c}{2} + \frac{a_n^2}{2}\ (n = 1,2,\cdots),$$

其中 $0 < c \leqslant 1$,证明数列$\{a_n\}$ 收敛,求$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

解　此题类似于例 5,从略.

例 7(武汉大学、湘潭大学、内蒙古大学研究生入学试题)[1-2]　设 $0 < x_0 < 1$,且

$$x_{n+1} = -x_n^2 + 2x_n \quad (n = 1,2,\cdots),$$

求极限$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

解　记函数

$$f(x) = -x^2 + 2x,$$

由 $f(x) = x$ 解得不动点

$$\lambda_1 = 1,\quad \lambda_2 = 0,$$

且有

$$|x_{n+1} - 1| = -(x_n - 1)^2 = \cdots = -(x_0 - 1)^{2^{n+1}}.$$

又因 $0 < x_0 < 1$,故由定理 2(ⅱ)可得

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lambda_1 = 1.$$

例 8(华东师范大学研究生入学试题)[1,3]　设有 $a > 0$,$0 < x_1 < a$,且

$$x_{n+1} = x_n\left(2 - \frac{x_n}{a}\right) \quad (n = 1,2,\cdots),$$

证明数列$\{x_n\}$ 收敛并求$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

解　此题类似于例 7,从略.

上述几例也可用其它方法求解,但对于上述几类问题,本文不动点方法是一种较好且实用的方法.特别是对于例 2、例 4 及例 5 中的数列$\{x_n\}$,其单调性不易判别,用常规方法求解时较繁,而用本文方法求解较为简洁且直接.

参考文献

[1] 裴礼文. 数学分析中的典型问题与方法[M]. 2版. 北京:高等教育出版社,2006:69-96.

[2] 张杰恒. 极限十大求法[M]. 武汉:华中工学院出版社,1986:1-30.

[3] 徐新亚,夏海峰. 数学分析选讲[M]. 上海:同济大学出版社,2008:6-22.

[4] 潘杰,苏化明. 一道极限题的解法及应用[J]. 高等数学研究,2003,6(3):20-23.

[5] 胡付高,蔡运舫. 一道极限题的多种解法[J]. 高等数学研究,2004,7(5):33,36.

[6] 张乾,陈之兵. 一类递推数列极限的求法[J]. 高等数学研究,2006,9(5):30-31.

[7] 郑华盛,徐伟. 矩阵对角化方法的应用[J]. 高等数学研究,2008,11(3):58-64.

[8] 苏化明,黄有度. 一类数列极限的级数解法[J]. 高等数学研究,2007,10(3):36-39.

[9] 綦建刚,刘衍胜,吕永敬. 函数的不动点与数列的极限研究[J]. 山东师范大学学报:自然科学版,1997,12(1):87-90.

Fixed Point Method for Nonlinear Recurrent Sequences

ZHENG Huasheng

(School of Mathematics and Information Science, Nanchang Hangkong University, Nanchang 330063, PRC)

Abstract: This paper uses the fixed point method for solving limits of fractional nonlinear function recurrent sequences and quadratic function recurrent sequences. Several examples are given to illustrate the method.

Keywords: nonlinear, recurrent sequence, fixed point, limit