HW1

范潇　2254298

2024 年 3 月 18 日

题目 1. (1.3) 任取 $n+1$ 个整数，求证其中至少有两个数，它们的差是 n 的倍数。

解答. 记这 $n+1$ 个整数按升序排列为 $a_i, i=0,\cdots,n$，令 $d_i = a_i - a_0 \mod n, i=1,\cdots,n$，若 $\exists i, s.t. d_i = 0$，则 a_i, a_0 之差为 n 的倍数。否则，因为 $\forall i, 0 < d_i < n$，由鸽笼原理可知，$d_1,\cdots,d_n$ 这 n 个数中，必有两个数 $d_s, d_t (s \neq t)$ 取值相同，则 a_s, a_t 的差为 n 的倍数。 □

题目 2. (1.6) 从 $1, 2, \cdots, 200$ 中任取 100 个整数，其中之一小于 16，那么必有两个数，一个能被另一个整除。

题目 3. (1.8) 任意给定 52 个数，它们之中有两个数，其和或差是 100 的倍数。

解答. 记这 52 个整数按升序排列为 $a_i, i=1,\cdots,52$，令 $d_i = a_i \mod 100, i=1,\cdots,52$。其中每个数恰好属于下列 51 个集合中的一个

$$\{0\}, \{1,99\}, \{2,98\}, \cdots, \{50\}$$

由鸽笼原理可知，必有两个数 d_i, d_j 属于同一集合。若 $i=j$，则 a_i, a_j 之差为 100 的倍数，否则它们之和为 100 的倍数。 □

题目 4. (1.10) 在坐标平面上任意给定 9 个整点，是否必有一个以它们中的三个点为顶点的三角形，其重心也是整点?

解答. 只需证明任给 9 个整数，其中必有三个数之和为 3 的倍数即可。

任取 9 个整数 $a_1,\cdots,a_9$，令 $d_i = a_1 \mod 3$，则 $d_i \in \{0,1,2\}$。由鸽笼原理可知，必有 $d_1,\cdots,d_9$ 中必有三个数相同，它们对应的 a_i 之和便是 3 的倍数。

题目 5. (1.12) 对任意的整数 N，存在着 N 的一个倍数，使得它仅由数字 0 和 7 组成。

解答. 令 $a_i = \sum_{j=0}^{i} 7 \times 10^j, i=0,\cdots,N-1$, 令 $d_i = a_i \mod N, i=0,\cdots,N-1$。若存在 i s.t. $d_i = 0$, 则已经找到了所要求的数 a_i。否则 $d_i \in \{1,\cdots,N-1\}, i=0,\cdots,N-1$，由鸽笼原理可知，必有两个数 d_s, d_t 相同，则 $|a_s - a_t|$ 便是所要求的数。

题目 6. (2.2) 比 5400 大的四位整数中，数字 $2, 7$ 不出现，且各位数字不同的整数由多少个?

解答. 在 $6000-9999$ 中，符合条件的整数的个数为

$$3 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$$

各因子代表各位上能取的数字个数。

在 $5500-5999$ 中，符合条件的整数的个数为

$$1 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 5$$

各因子代表各位上能取的数字个数。

在 $5401 - 5499$ 中，符合条件的整数的个数为

$$5 + 5 \cdot 5$$

根据十位是否为 0 使用加法原理。

综上，共有 780 种。

题目 7. (2.5) 现有 100 件产品，从其中任意抽出 3 件。

1. 共有多少种抽法?
2. 如果 100 件产品中有 2 件次品，那么抽出的产品中至少有 1 件次品的概率是多少?
3. 如果 100 件产品中有 2 件次品，那么抽出的产品中恰好有 1 件是次品的概率是多少?

解答.

1. $\binom{100}{3}$
2. $1 - \binom{98}{3} / \binom{100}{3}$
3. $2\binom{98}{2} / \binom{100}{3}$

题目 8. (2.7) 8 个棋子大小相同，其中 5 个红的，3 个蓝的。把它们放在 8×8 的棋盘上，每行、每列只放一个，问有多少种方法? 若在 12×12 的棋盘上，结果如何?

解答.

1. $8!\binom{8}{3}$，先确定各个放置棋的位置，再确定哪些列放蓝棋
2. $\binom{12}{8}^2 8!\binom{8}{3}$，先缩小棋盘范围

题目 9. (2.8) 有纪念章 4 枚、纪念册 6 本，赠送给 10 位同学，每人得一件，共有多少种不同的送法?

解答. $\binom{10}{4}$

题目 10. (2.9)

1. 从整数 $1, 2, \cdots, 100$ 中选出两个数，使得它们的差正好是 7, 有多少种不同的选法?
2. 如果要求选出的两个数之差小于等于 7，又有多少种不同的选法?

解答.

1. 93
2. $93 + 94 + \cdots + 99 = 672$

题目 11. (2.14) 有 n 个不同的整数，从中取出两组来，要求第一组里的最小数大于第二组里的最大数，问有多少种方案?

解答.

$$\sum_{i=1}^{n} 2^{i-1}(2^{n-i}-1) = \sum_{i=1}^{n} 2^{n-1} - 2^{i-1} = n2^{n-1} - 2^{n-1} + 1$$

按照第二组的最大数的取值分类，此时要求第一组非空。

题目 12. (2.16) 凸 10 边形的任意 3 条对角线不共点，试求该凸 10 边形的对角线交于多少个点? 又把所有的对角线分割成多少段?

解答. 记满足题中条件的凸 $n+2$ 边形中，由所有对角线交点个数记为 h_n。则 h_n 满足以下递推关系式:

$$\begin{cases} h_n = h_{n-1} + \binom{n+1}{3} + n - 1 & n \geq 2 \\ h_1 = 0 \end{cases}$$

下面在该 $n+2$ 边形中任取一个顶点进行分析:

第一项显然，第三项是由所取顶点的两侧的顶点的连线上的交点个数（被由所选顶点所引出的 $n-1$ 条弦相交）。

第二项的解释如下:

在其余 $n+1$ 个顶点中任取三个组成三角形，在其中，必有且仅有一边，能被其所对的顶点与所选顶点的连线相交，从而形成一个新的交点。由此，新的交点数等于由 $n+1$ 个顶点组成的三角形的个数，也就是第二项。而新增的块数又等于新增交点数，从而得证。

类似地，对角线被分割的段的数量 f_n 满足的递推关系式为:

$$\begin{cases} f_n = f_{n-1} + 3\binom{n+1}{3} + 2*(n-1) & n \geq 2 \\ f_1 = 0 \end{cases}$$

由此，得出凸 10 边形的对角线交点个数和对角线被分割的个数分别为 $238, 686$。

题目 13. (2.20) 考虑集合 $\{1, 2, \cdots, n+1\}$ 的非空子集

1. 证明最大元素恰好是 j 的子集数为 2^{j-1}
2. 利用（1）的结论证明

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$$

解答.

1. 显然，$\{1, 2, \cdots, n+1\}$ 的最大元素恰好为 j 的非空子集与 $\{1, 2, \cdots, j-1\}$ 的子集之间形成一一映射 $S \longmapsto S \backslash \{j\}$
2. 等式右边为 $\{1, 2, \cdots, n+1\}$ 的非空子集数, 而这些非空子集可以按照最大元素大小 $j, 1 \leq j \leq n+1$ 进行分类，由加法定理便可得到等式左边。

题目 14. (2.22)

1. 在由 5 个 0 和 4 个 1 组成的字符串中，出现 01 或 10 的总次数为 4 的字符串有多少个?

2. 在由 m 个 0 和 n 个 1 组成的字符串中，出现 01 或 10 的总次数为 k 的字符串有多少个?

解答. 使用插空法，即将 1 插入一排 0 中。

1. 当 k 为奇数时，由于插入给定两个 0 之间的所有 1 对于出现次数的总贡献为 2，字符串一端的 1 串的总贡献为 1，所以此时，有且只有一端以 1 结尾。剩余的 $k-1$ 次出现需要由 $(k-1)/2$ 处 0 之间的 1 串贡献。所以总个数为 $2\binom{m-1}{(k-1)/2}\binom{n-1}{(k-1)/2}$，其中各因子的含义为：从两端中选取一端；从 $m-1$ 个位置中选取 $(k-1)/2$ 个；将 n 个 1 放入上述两步挑选的 $(k+1)/2$ 个位置上，使得每个位置至少有一个 1.

2. 当 k 为偶数时，显然，要么左右两端要么均以 1 结尾，要么均以 0 结尾

   (a) 如果左右两端均以 1 为结尾，类似的有 $1\cdot\binom{m-1}{(k-2)/2}\binom{n-1}{k/2}$

   (b) 如果左右两端均以 0 为结尾，类似的有 $1\cdot\binom{m-1}{k/2}\binom{n-1}{((k-2)/2)}$

   由加法定理可知，总方案数为 $\binom{m-1}{(k-2)/2}\binom{n-1}{k/2}+\binom{m-1}{k/2}\binom{n-1}{((k-2)/2)}$。

因此，第一小问所求个数为 30。

题目 15. (2.25) 从 1 至 100 的整数中不重复地选取两个数组成有序对 (x,y)，使得 x 与 y 的乘积 xy 不能被 3 整除，共可组成多少对?

解答. 因为

$$\begin{aligned}(3a+1)(3b+1) &= 9ab+3(a+b)+1\\(3a+1)(3b+2) &= 9ab+3(2a+b)+2\\(3a+2)(3b+2) &= 9ab+3(2a+2b)+4\end{aligned}$$

所以

$$xy\equiv 0 \mod 3 \Leftrightarrow x\equiv 0 \mod 3 \vee y\equiv 0 \mod 3$$

所以所求对数为 $100\cdot 99-(33\cdot 67+67\cdot 33+33\cdot 32)=4422$。

题目 16. (2.28) 证明下列组合恒等式:

1. $$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cdot k^2\cdot\binom{n}{k}=0;$$

2. $$\sum_{k=0}^{n}\frac{k+2}{k+1}\binom{n}{k}=\frac{(n+3)\cdot 2^n-1}{n+1};$$

3. $$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+2}\binom{n}{k}=\frac{n\cdot 2^{n+1}+1}{(n+1)(n+2)};$$

解答. 令

$$f(x) = (1-x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \cdot (-1)^k$$

1.

$$(xf')'(1) = (f' + xf'')(1) = 0 = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot k^2 \cdot \binom{n}{k}, n \geq 3$$

$n = 0, 1, 2$ 时显然也成立。

2.

$$(x\int_0^x f)'(1) = \frac{(n+3) \cdot 2^n - 1}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{k+2}{k+1} \binom{n}{k}$$

3.

$$(\int_0^x xf)(1) = \frac{n \cdot 2^{n+1} + 1}{(n+1)(n+2)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+2} \binom{n}{k}$$

题目 17. (3.4) 给出

$$\binom{n}{m}\binom{r}{0} + \binom{n-1}{m-1}\binom{r+1}{1} + \cdot + \binom{n-m}{0}\binom{r+m}{m} = \binom{n+r+1}{m}$$

的组合意义。

解答. 等号右边的含义便是从 $\{1, 2, \cdot, n+r+1\}$ 中取 m 个元素的取法个数。

等号左边则是根据不包含在所取的 m 个元素中的第 $n-m+1$ 个元素的取值的不同情况使用加法定理。这个元素的可能取值为 $n-m+1, \cdots, n+1$。当取值为 j 时，$\{1, \cdots, j-1\}$ 中有 $j-1-(n-m)$ 个元素被选中，而 $\{j+1, \cdots, n+r+1\}$ 中有 $m-(j-1-n+m) = m-j+n+1$ 个元素被选中。从而有等式左侧。

题目 18. (3.6) 证明

$$\binom{m}{0}\binom{m}{n} + \binom{m}{1}\binom{m-1}{n-1} + \cdots + \binom{m}{n}\binom{m-n}{0} = 2^n\binom{m}{n}.$$

解答.

$$\binom{m}{i}\binom{m-i}{n-i} = \frac{m!}{i!(m-i)!} \cdot \frac{(m-i)!}{(n-i)!(m-n)!} = \frac{n!}{i!(n-i)!} \cdot \frac{m!}{n!(m-n)!} = \binom{n}{i}\binom{m}{n}$$

所以

$$LHS = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{m}{n} = 2^n\binom{m}{n}$$

题目 19. (3.8) 求整数 a, b, c，使得

$$m^3 = a\binom{m}{3} + b\binom{m}{2} + c\binom{m}{1},$$

并计算 $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$ 的值。

解答.

$$m^3 = (a/6)m^3 + (-a/2 + b/2)m^2 + (a/3 - b/2 + c)m$$

比较系数后可得

$$a=6 \quad b=-6 \quad c=-5$$

所以

$$\sum_{i=1}^{n} i^3=\sum_{i=1}^{n} 6\binom{i}{3}-6\binom{i}{2}-5\binom{i}{1}=6\binom{n+1}{4}-6\binom{n+1}{3}-5\binom{n+1}{2}=(\frac{n(n+1)}{2})^2$$

题目 20. (3.15) 用组合学方法证明恒等式

$$\binom{n}{k}-\binom{n-3}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-2}{k-1}+\binom{n-3}{k-1}.$$

解答. 左右两侧描述的都是从 $\{1,\cdots,n\}$ 中挑选至少包含 $1,2,3$ 中的一个的 k 组合的方法数。左侧是运用减法法则。右侧则是根据组合中的最小值使用加法法则。

题目 21. (3.18) 令 n 和 k 为正整数，给出以下恒等式的组合学证明:

$$n(n+1)2^{n-2}=\sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}.$$

解答. 等式两边是“从一个 n 元集合中取一个子集，然后取一个由子集中的元素构成的有序对“这一个行为的方案数。

等式左边是先取有序对，当有序对中的元素相同时，这个元素有 n 种可能，所取子集便是从剩下的 $n-1$ 个元素组成的集合的子集并上有序对中的元素，个数为 2^{n-1}，当有序对中的元素不同时，有 $n\left(n-1\right)$ 种可能，子集数则是 2^{n-2}，从而有

$$n2^{n-1}+n\left(n-1\right)2^{n-2}=n\left(n+1\right)2^{n-2}$$

种可能。

而等号右边则是先取子集，然后在子集中取有序对。根据所取子集中的元素个数使用加法法则。