对于迭代数列 $x_{n+1} = x_n^2/2 + c/2, x_1 = c/2$ 行为的探究

范潇 陈思同 吴靖阳

摘 要

迭代数列 $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n^2 + \frac{1}{2}c, x_1 = \frac{1}{2}c$ 是一个一维二次映射. 函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}c$ 是一个 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 光滑且连续的函数. 在这样的一个系统中，很多初始值在经过多次迭代后，往往会稳定在某些状态中. 这些状态不一定是稳定在某个不动点，而有可能是持续运动的——x_n 可能会在实数轴上不断“跳跃”. 而这则会导致当控制参数 c 到达一定大小后该迭代数列会产生混沌现象.

1 一些定义和定理

定义 1. 不动点 设函数 $F(x)$ 在区间 I 上有定义，若存在 $x^* \in I$ 满足 $F(x^*) = x^*$，则称 x^* 为 $F(x)$ 在 I 上的不动点.

定理 1. 当 $|dF(x)/dx|_{x^*} < 1$ 我们称 x^* 为一个稳定的不动点，当 x_1 在 x^* 附近时，x_n 最终会收敛于该稳定点 x^*.?

定义 2. 周期点
记

$$F^0(x) = x, F^{n+1}(x) = F(F^n(x))$$

如果 $F^n(x^*) = x^*$ 且 $F^k(x^*) \neq x^*$ $(k < n)$, 则称 x^* 为 n 周期点 $(n = 0, 1, 2, \cdots)$. 如果 m 是某个正整数且 $p = F^m(q)$ 是周期点, 则我们称 q 是为最终周期点.

定义 3. Schwarzian 导数 函数 $F(x)$ 的 Schwarzian 导数被定义为

$$\{F, x\} \equiv \frac{F'''}{F'} - \frac{3}{2}(\frac{F''}{F'})^2.$$

2 迭代数列的大致行为

2.1 $c \in (-\infty, -8) \cup (1, \infty)$ 时的行为

当 $c > 1$ 时，

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}x_n^2 + \frac{1}{2}c - x_n = \frac{1}{2}(x_n - 1)^2 + \frac{1}{2}(c - 1) \geq \frac{1}{2}(c - 1) > 0,$$

易知数列 $\{x_n\}$ 发散至正无穷.

当 $c<-8$ 时，

$$x_2=\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2}c=\frac{(c+2)^2-4}{8}>4>\frac{1}{2},$$

因此 $c<-8$ 的情况可以视为 $c>1$ 时的情况，即数列 $\{x_n\}$ 发散至正无穷.

综上，当 $c\in(-\infty,-8)\cup(1,\infty)$ 时，数列 $\{x_n\}$ 发散至正无穷.

2.2 $c=-8$ 时的行为

由迭代关系可知，

$$x_1=-4,x_2=x_3=...=x_n=4\ \ (n\geq 2),$$

即数列 $\{x_n\}$ 收敛于 4.

2.3 $c=1$ 时的行为

此时

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2}(x_n-1)^2\geq 0,$$

因此数列 $\{x_n\}$ 单调递增. 由数学归纳法易证 1 为数列 $\{x_n\}$ 的一个上界. 由单调有界定理可知，数列 $\{x_n\}$ 存在极限. 对等式

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}x_n^2+\frac{1}{2}c,$$

等号两边同时取极限后可得

$$\lim_{x\to\infty}x_n=1,$$

即数列 $\{x_n\}$ 收敛于 1.

2.4 $c\in(-8,1)$ 时的行为

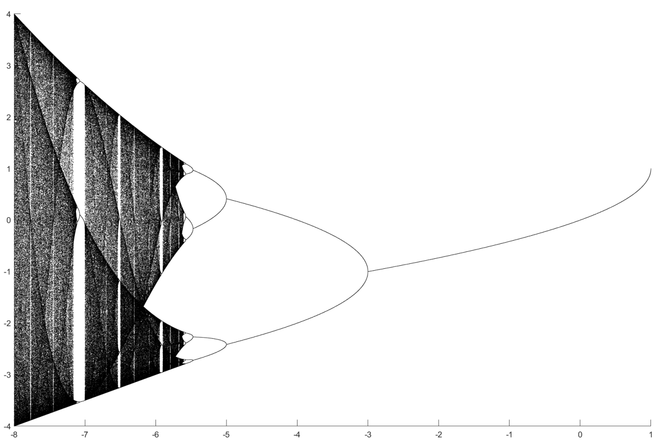

图 1: $c\in(-8,1)$ 时的分岔图

本张图绘制了 90000 个 c 值, 间隔 0.0001. 对于每个 c 值都预先迭代 5000000 次, 再将之后的 25 次迭代结果绘制在图中.

当 $c \in (-3,1)$ 时由方程 $f(x^*) = x^*$ 可解得不动点为 $x^* = 1 - \sqrt{1-c}$
因

$$|df(x)/dx|_{x^*} < 1,$$

由**定理** 1 可知该不动点稳定. 如所示图 2,x_n 最终会收敛于该点.

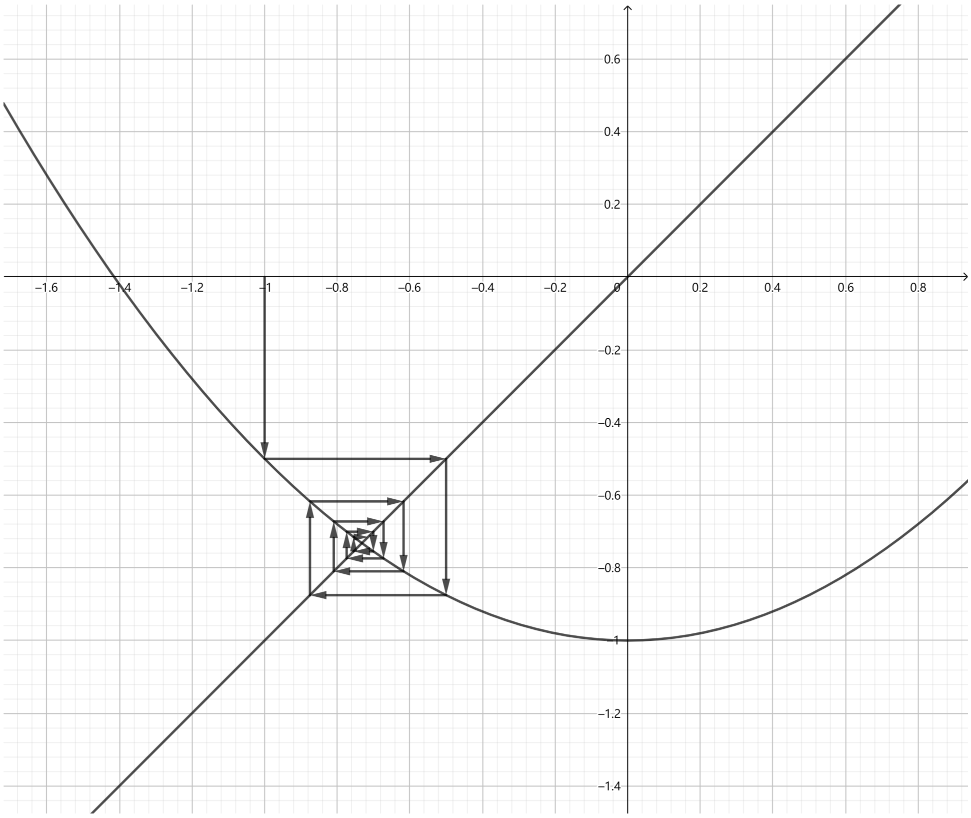

图 2: $c = -2$

当控制参数 c 不断减小直至小于-3 后,

$$|df(x)/dx|_{x^*} \geq 1,$$

该不动点变得不稳定.x_n 经过多次迭代后最终会在 x_1^* 和 x_2^* 两点间不断摆动.
即

$$f(x_1^*) = x_2^*, f(x_2^*) = x_1^*,$$

也就是说这两点迭代两次后会得到原先的值，
即

$$f^2(x_k^*) = f(f(x_k^*)) = x_k^* \ \ (k = 1, 2),$$

这两个点便是 $f^2(x)$ 的不动点. 此时这两个不动点都是稳定的.

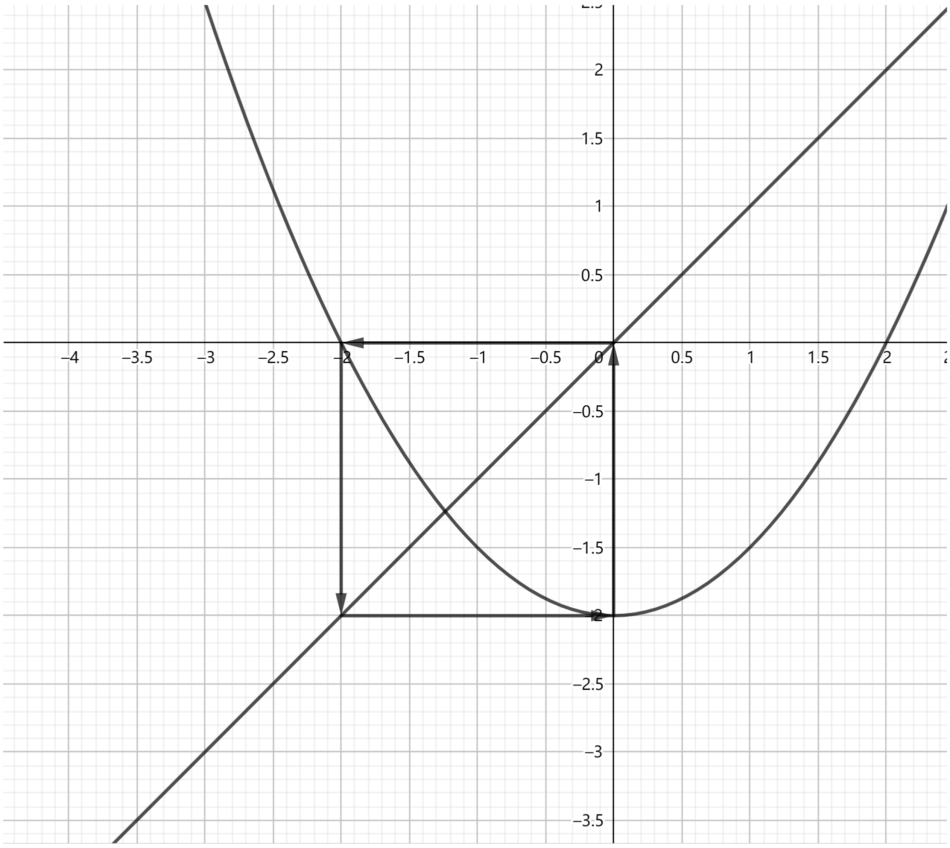

图 3: $c = -4$

控制参数 c 减小并越过-3 前后发生的迭代数列行为上的变化导致了图 1 中在 $c = -3$ 处出现了开口向左的叉形分岔. 我们记 $c_1 = -3$. 当控制参数 c 继续减小, 这两个不动点将变得不稳定, 我们记临界点为 c_2. 在分岔图中，在该点处产生了两处分岔，使迭代数列产生了 $2^2 = 4$ 周期循环. 随着控制参数 c 继续减小, 上述的 4 周期循环又将不稳定, 产生 8 周期循环. 这样的周期不断加倍的过程将不断重复, 表现为分岔图上从右往左，一分二，二分四，四分八，八分十六……不断持续下去的叉形分岔. 有以下结论: 如果 $c_{n+1} \leq c < c_n$, 那么迭代数列会有稳定的 2^n 周期循环同时 $\lim_{x\to\infty} c_n \equiv c_\infty$(有限值) 通过计算可以得到如下数据：

c_1	-3.0000
c_2	-5.0000
c_3	-5.5761
c_4	-5.5985
c_5	-5.6033
c_6	-5.6043
c_∞	-5.6051

有

$$\delta = \lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1} - c_n}{c_{n+2} - c_{n+1}}$$

为一个常数?. 称为 Feigenbaum 常数. 对于所有 Schwarzian 导数为负数的一维映射，Feigenbaum 常数均为 $\delta = 4.669201609102990$.? 因此 $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n^2+\frac{1}{2}c$ 的 Feigenbaum 常数为 $\delta = 4.669201609102990$.

当 $c < c_\infty$ 时，迭代数列 $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n^2 + \frac{1}{2}c$ 不仅会产生无穷多个不稳定的 2^n 周期解，也会产生新的稳定周期解 (如 $3 * x^n, 5 * x^n$ 等)，同时还会产生非周期性的解. 这些情况都由控制参数 c 来决定.

其中非周期的解的含义是一个点被周期性的在 2^n 个不相交的实数轴上的范围之间不断映射，却不是周期点（或最终周期点）. 这种非周期性的数列被称为“半周期”数列? 当 c 小于 c_∞ 时, 这些在实数轴上不相交的范围的数量随着 c 增大而趋向无穷, 也就是说, 在实数轴上不相交的范围的数量会随着 c 减小而较小, 这在分岔图上呈现为开口朝右的逆分岔.

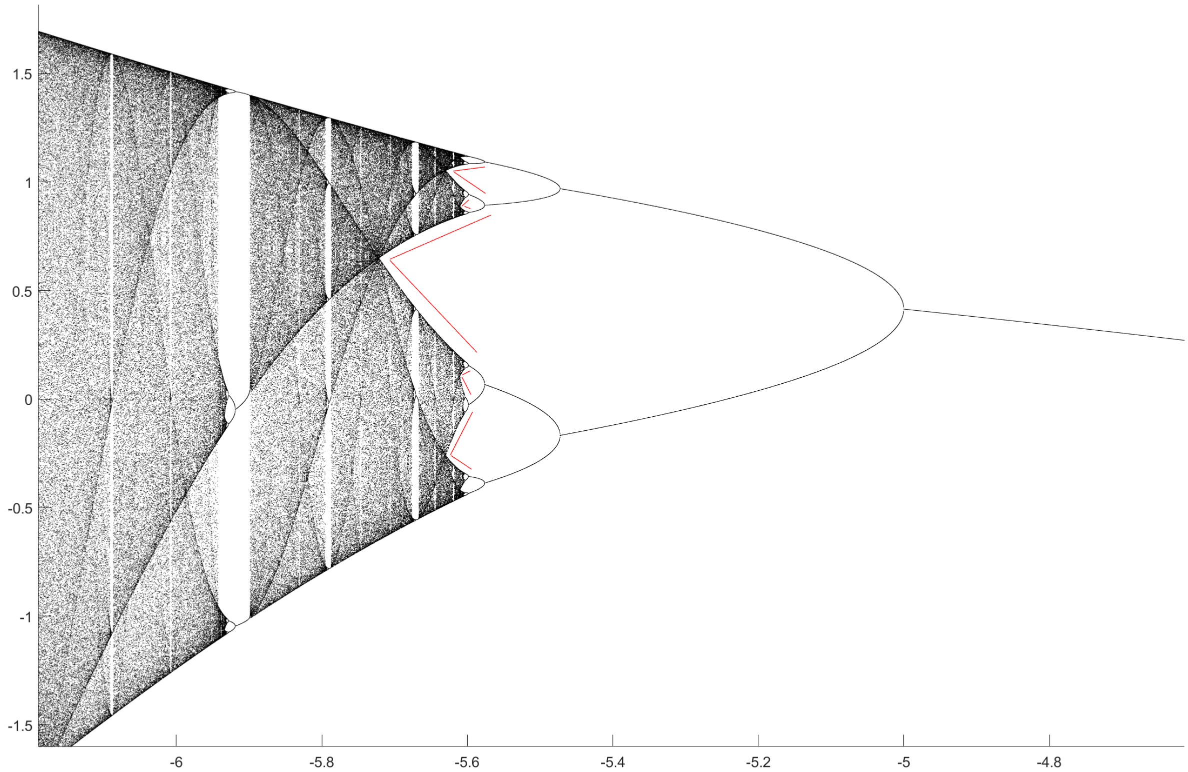

图 4: 形如”<” 的逆分岔

从分岔图中可知, 这些范围随着 c 减小而拓宽, 然后重叠.

当 $c = -6.1746\ldots$ 时，这些范围连接在一起, 当 c 小于这个值时, 即使 x_n 周期性地在这些范围内，但是以一种飘忽不定的方式在这些范围内跳跃，尽管是确定的，但是对于初始值的变化十分敏感. 这种状态称为混沌.?

3 相切分岔现象

当 c=-7 时,$F^3(x)$ 与 $y = x$ 于它的三个极值点相切，

而这会导致迭代数列 $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n^2 + \frac{1}{2}c$ 产生稳定的 3 周期循环, 称为相切分岔现象. 而这也会导致“间歇现象”，在分岔图中体现为 $c = -7$ 左侧类似于收起的帷幕的形状?

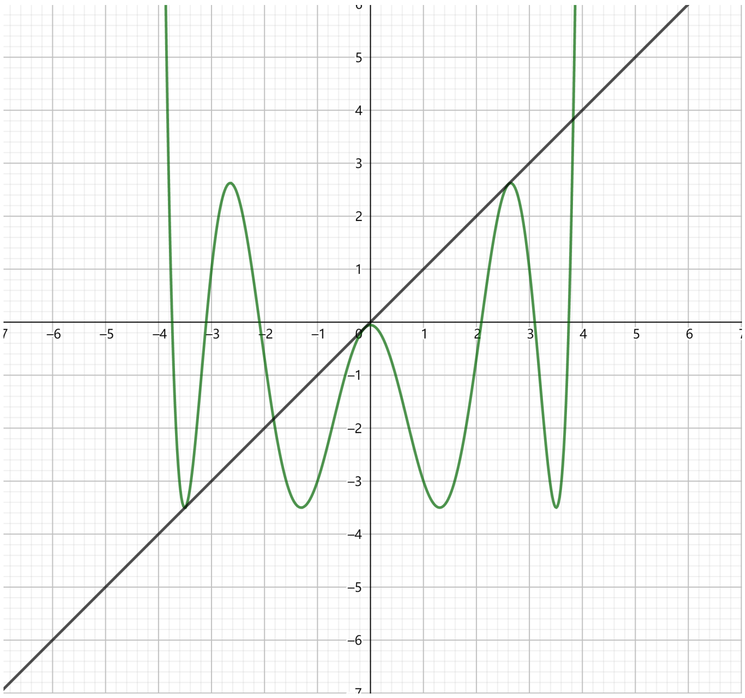

图 5: $c = -7$

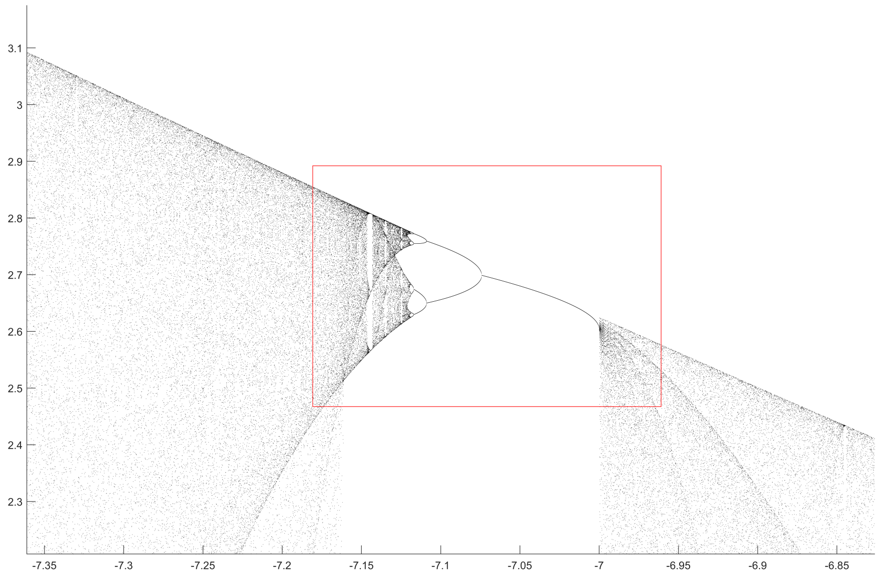

图 6

同时，相切分岔还会产生混沌运动中的“窗口”.“窗口”内的分岔结构像是 $c \in (-8, 1)$ 的分岔图的缩微版本，如图 6 所示对应周期之比为该窗口对应的周期.

定理 2. 对于 $F: J \to J$, 如果 J 中有一个周期为 3 的周期点, 那么对于每个整数 $n = 1, 2, 3, ...$, 存在有周期 n 的周期点, 并且, 有无穷多个 J 的子集, 其中的元素甚至不会“渐进地具有周期性”.?

由此可知迭代数列 $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n^2 + \frac{1}{2}c$ 对于任意的正整数周期都有对应的周期点，同时也有无穷多个不具任何周期性的解. 这种现象也被 Li&Yorke 称为混沌.?

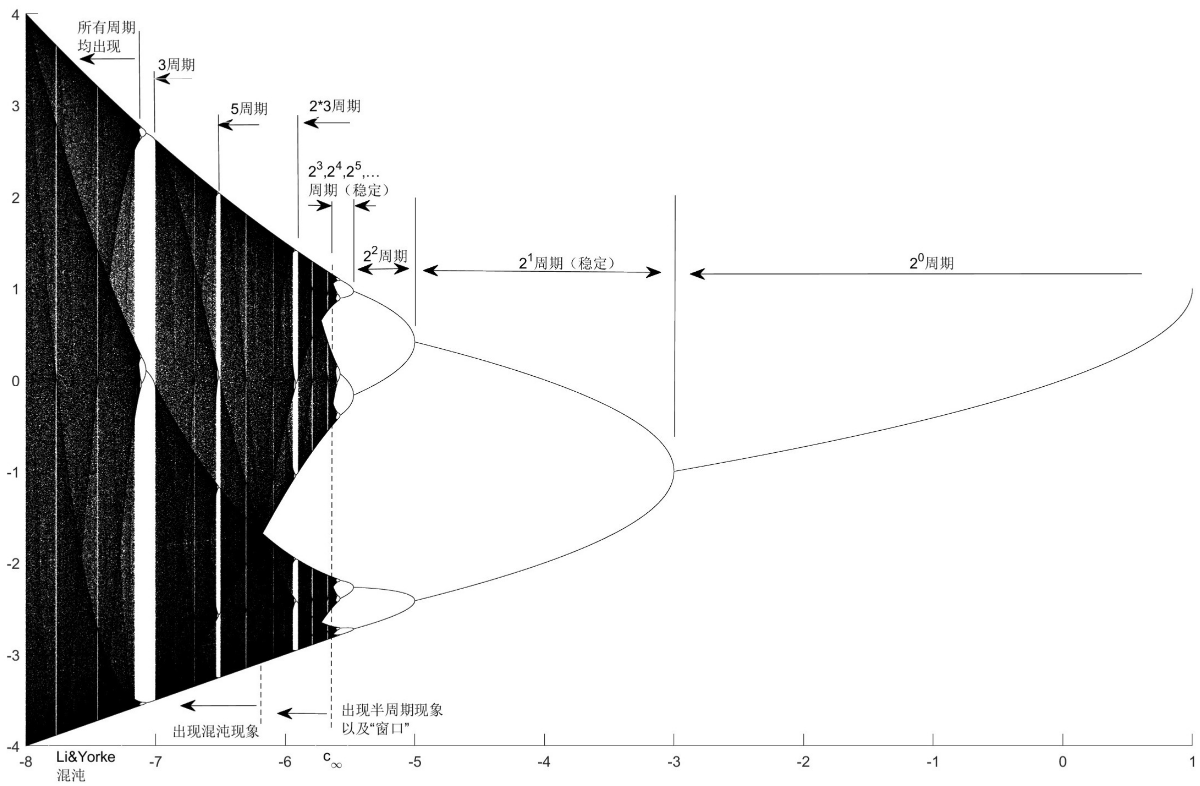

图 7: 总览

参考文献

Robert.M.May. Simple mathematical models with very complicated dynamics. 1976.

S.Neil Rasband. Chaotic Dynamics of Nonlinear Systems. Wiley VCH, 1997.

Michael Tabor. Chaos and Integrability in Nonlinear Dynamics: An Introduction 1 First Edition. Wiley-Interscience, 1989.

E.Atlee Jackson. Perspectives of Nonlinear Dynamics. Cambridge University Press, 1989.

Tien-Yien Li and James A. Yorke. Period Three Implies Chaos. The American Mathematical Monthly, 1975.