第四章作业

范潇　2254298

2024 年 10 月 6 日

题目 1. (4.1.1) 判断下列映射是否是线性变换:

1. 设 V 是 Descartes 平面，φ 把平面上任一向量伸长 n 倍（n 是固定的自然数)。
2. 设 V 是 Descartes 平面，φ 把平面上任一向量逆时针旋转 $60°$，但其长度保持不变。
3. 设 V 是 $[0,1]$ 区间上所有连续函数组成的实线性空间，φ 是 V 上的变换，对于任意的 $f(x) \in V$，定义
$$\varphi(f(x)) = \int_0^x f(t)\,dt;$$
4. 设 V 是 Descartes 平面，φ 为 V 上的变换:
$$\varphi(x,y) = (2x^2, y), \quad (x,y) \in V;$$
5. 设 V 是 Descartes 平面，(a,b) 是平面上固定的一点，φ 是 V 上的变换:
$$\varphi(x,y) = (x+a, y+b);$$

解答.

1. 是，相当于 $(x,y) \longmapsto (nx, ny)$
2. 是
3. 是
4. 不是，因为 $\varphi(1,0) + \varphi(-1,0) = (4,0) \neq \varphi(0,0) = (0,0)$
5. 若 $(a,b) = (0,0)$，则显然是线性变换，否则，因为 $2\varphi(-a,-b) = (0,0) \neq \varphi(-2a,-2b) = (-a,-b)$，不是线性变换。

题目 2. (4.1.4) 设 V 是由几乎处处为零的无穷实数数列 $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$，其中只有有限多个 a_i 不为零，组成的实向量空间，$\mathbb{R}[x]$ 是所有实系数多项式组成的实向量空间，定义 φ 如下:
$$\varphi(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

其中 $a_n \neq 0$，而 $a_s = 0, s > n$，求证：φ 是线性同构。

解答. 显然 $V, \mathbb{R}[x]$ 是线性空间。

记数列 $\alpha \in V$ 的第 i 项为 $\alpha[i]$，多项式 f 的第 i 项系数为 $f[i]$，则 $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in V, \forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$。$\forall i, \varphi(t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2)[i] = (t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2)[i] = t_1\alpha_1[i] + t_2\alpha_2[i] = \varphi(t_1\alpha_1)[i] + \varphi(t_2\alpha_2)[i]$，即

$$\varphi(t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2) = t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2$$

所以 φ 是线性同构。

题目 3. (4.2.1) 设 V 是实系数多项式全体构成的实线性空间，定义 V 上的变换 D, S 如下：

$$D(f(x)) = \frac{d}{dx}f(x), \quad S(f(x)) = \int_0^x f(t)\,dt.$$

证明：D, S 均为 V 上的线性变换且 $DS = I_V$，但 $SD \neq I_V$。

解答. 由求导和积分的线性性可知，变换 D, S 都是 V 上的线性变换。因为

$$DS(f(x)) = \frac{d}{dx}\int_0^x f(x)dx = f(x), \forall f \in V$$

而

$$SD(1) = \int_0^x \frac{d}{dx}1dx = 0 \neq 1$$

所以 $DS = I_V$，但 $SD \neq I_V$。

题目 4. (4.2.5) 设 φ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换，证明：φ 是可逆变换的充分必要条件是 φ 将 V 的基变为基。

解答. 任取 V 的一组基 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$，$\forall \alpha \in V, \exists$唯一一组$k_1, \cdots, k_n, s.t. \sum_i k_i\alpha_i = \alpha$:

$$\begin{aligned}
&\varphi\text{是可逆变换}\\
\Leftrightarrow&\varphi\text{是一一对应}\\
\Leftrightarrow&\forall \alpha \in V, \exists\text{唯一一组}k_1, \cdots, k_n, s.t. \alpha = \sum_i k_i\varphi(\alpha_i)\\
\Leftrightarrow&\varphi(\alpha_i), i = 1, \cdots, n\text{是一组基}
\end{aligned}$$

即 φ 是可逆变换的充分必要条件是 φ 将 V 的基变为基。

题目 5. (4.3.1) 设 V 是实数域上次数小于 4 的一元多项式全体组成的线性空间，φ 为多项式的求导运算。$\{1, x, x^2, x^3\}$ 是 V 的基，试求 φ 在这组基下的表示矩阵。

解答. 表示矩阵为：

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

题目 6. (4.3.3) 设 V 是 Descartes 平面，求绕原点转动 θ 角的旋转在基 $\{(1,0),(0,1)\}$ 下的表示矩阵。

解答. 表示矩阵为:

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

题目 7. (4.3.5) 设 V, U 是域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间，维数分别为 n 与 m，求证：$\mathcal{L}(V, U)$ 是 nm 维线性空间。

解答. 因为 $\mathcal{L}(V, U)$ 与 $M_{m\times n}(\mathbb{K})$ 同构，而显然 $\dim M_{m\times n}(\mathbb{K}) = nm$，所以 $\dim \mathcal{L}(V, U) = nm$，即 $\mathcal{V}$,$\mathcal{U}$ 是 nm 维空间。

题目 8. (4.3.12) 设 φ 是线性空间 $V \to U$ 的线性映射，$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ 及 $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ 是 V 的两组基，$\{e_1', e_2', \ldots, e_m'\}$ 及 $\{f_1', f_2', \ldots, f_m'\}$ 是 U 的两组基。设在 $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ 及 $\{e_1', e_2', \ldots, e_m'\}$ 下，φ 的表示矩阵为 A，在 $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ 及 $\{f_1', f_2', \ldots, f_m'\}$ 下，φ 的表示矩阵为 B,，又 $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ 到 $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ 的过渡矩阵为 P，$\{e_1', e_2', \ldots, e_m'\}$ 到 $\{f_1', f_2', \ldots, f_m'\}$ 的过渡矩阵为 Q，试证：

$$B = Q^{-1}AP.$$

解答. $\forall \alpha \in V$，记 α 在 $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ 和 $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ 下的坐标向量分别为 ξ_e, ξ_f，记 $\varphi(\alpha)$ 在 $\{e_1', e_2', \ldots, e_m'\}$ 和 $\{f_1', f_2', \ldots, f_m'\}$ 下的坐标向量分别为 ζ_e, ζ_f 由题意得:

$$\zeta_e = A\xi_e$$

$$\zeta_f = B\xi_f$$

$$\xi_e = P\xi_f$$

$$\zeta_e = Q\zeta_f$$

从而有:

$$\zeta_e = AP\xi_f$$

$$\zeta_e = QB\xi_f$$

即

$$QB\xi_e = AP\xi_e$$

由于 ζ_e 的任意性，有

$$QB = AP$$

又因为 Q 为过渡矩阵，所以

$$B = Q^{-1}AP$$

题目 9. (4.4.1) 设 φ 是实四维空间 V 上的线性变换，φ 在 V 的一组基 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ 下的表示矩阵为:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

求 φ 的核空间与像空间（用基的线性组合来表示）。

解答. 题中矩阵经过初等行变换后可得:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以像空间为 $k_1(e_1 - e_2 + e_3 + 2e_4) + k_2(2e_2 + 2e_3 - 2e_4), k_1, k_2 \in \mathbb{R}$。核空间为 $k_1(-4e_1 - 3e_2 + 2e_3) + k_2(-e_1 - 2e_2 + e_4), k_1, k_2 \in \mathbb{R}$。

题目 10. **(4.4.5)** 设 $V = M_n(\mathbb{K})$，若 $A \in V$，令 $\varphi(A) = \mathrm{tr} A$，求证：$\varphi$ 是 $V \to \mathbb{K}$ 的线性映射，并求 $\dim \ker \varphi$ 以及 $\ker \varphi$ 的一组基。

解答. $\forall A, B \in V, l\forall t_1, t_2 \in \mathbb{K}$，有

$$\begin{aligned} \varphi(t_1 A + t_2 B) &= \sum_i (t_1 A + t_2 B)(i,i) \\ &= \sum_i (t_1 A(i,i) + t_2 B(i,i)) \\ &= \sum_i t_1 A(i,i) + \sum_i t_2 B(i,i) \\ &= t_1 \sum_i A(i,i) + t_2 \sum_i B(i,i) \\ &= t_1 \varphi(A) + t_2 \varphi(B) \end{aligned}$$

所以 φ 是 $V \to \mathbb{K}$ 的线性映射。记 E_{ij} 为只有 (i,j) 元为 1，其余都为 0 的 n 阶矩阵。下面证明 $E_{ij}, i = 1, \cdots, n, j = 1, \cdots, n, i \neq j$ 和 $E_{ii} - E_{nn}, i = 1, \cdots, n-1$ 构成 $ker\varphi$ 的一组基。显然它们都属于 $ker\varphi$，且线性无关。

$\forall A \in ker\varphi$, 因为 $trA = 0$，所以 $\sum_i A(i,i) = 0$，即 $A(n,n) = -\sum_{i \neq n} A(i,i)$。从而有:

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i \neq j} A(i,j) E_{i,j} + \sum_i A(i,i) E_{ii} \\ &= \sum_{i \neq j} A(i,j) E_{i,j} + \sum_{i \neq n} A(i,i) E_{ii} - \sum_{i \neq n} A(i,i) E_{nn} \\ &= \sum_{i \neq j} A(i,j) E_{i,j} + \sum_{i \neq n} A(i,i)(E_{ii} - E_{nn}) \end{aligned}$$

从而 $E_{ij}, i = 1, \cdots, n, j = 1, \cdots, n, i \neq j$ 和 $E_{ii} - E_{nn}, i = 1, \cdots, n-1$ 构成 $ker\varphi$ 的一组基。因此 $\dim ker\varphi = n^2 - 1$。

题目 11. **(4.4.6)** 设 U 是有限维线性空间 V 的子空间，φ 是 V 上线性变换，求证:

(1) $\dim U - \dim \ker \varphi \leq \dim \varphi(U) \leq \dim U$;

(2) $\dim \varphi^{-1}(U) \leq \dim U + \dim \ker \varphi$。

解答.

1. 因为 $\forall n > \dim U, \forall k_i \in \mathbb{K}, \alpha_i \in V, i = 1, \cdots, n : \sum_{i=1}^n k_i\alpha_i = 0$，即 $\sum_{i=1}^n k_i\varphi(\alpha_i) = 0$，所以 $\dim\varphi(U) \le \dim U$。

   因为 $\dim U = \dim Im\varphi|_U + \dim\ker\varphi|_U = \dim\varphi(U) + \dim\ker\varphi|_U \le \dim\varphi(U) + \dim\ker\varphi$，从而 $\dim U - \dim\ker\varphi \le \dim\varphi(U)$。

2. $$\dim\varphi^{-1}(U) = \dim Im\varphi|_{\varphi^{-1}(U)} + \dim\ker\varphi|_{\varphi^{-1}(U)} \le \dim U + \dim\ker\varphi$$

题目 12. (4.4.7) 利用上题，证明关于两个 n 阶方阵 A 与 B 之积秩的 Sylvester（西尔维斯特）不等式：

$$r(A) + r(B) - n \le r(AB) \le \min\{r(A), r(B)\}$$

解答. 不等式右侧显然成立，下面证明不等式左侧。

设 V 是 n 维欧氏空间，记 $A = (a_1, \cdots, a_n), B = (b_1, \cdots, b_n), U = L(b_1, \cdots, b_n), \varphi : \alpha \to A\alpha$。则 $\dim U - \dim\ker\varphi = r(B) - (n - r(A)) = r(A) + r(B) - n \le \dim\varphi(U) = r(AB)$

题目 13. (4.5.1) 在实四维空间 V 中，设线性变换 φ 在基 $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ 下的表示矩阵为：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

求证：由向量 $e_1 + 2e_2$ 及 $e_2 + e_3 + 2e_4$ 生成的子空间 U 是 φ 的不变子空间。

解答. $\varphi(e_1 + 2e_2) = e_1 + 2e_2 \in U, \varphi(e_2 + e_3 + 2e_4) = e_2 + e_3 + 2e_4 \in U$。从而 U 是 φ 的不变子空间。

题目 14. (4.5.2) 设 φ, ψ 都是线性空间 V 上的线性变换且 $\varphi\psi = \psi\varphi$，求证：$\mathrm{Im}\,\varphi$ 及 $\ker\varphi$ 都是 ψ 不变子空间。

解答. $\forall\alpha \in Im\varphi, \exists\beta s.t.\varphi(\beta) = \alpha$，所以 $\psi(\alpha) = \psi\phi(\alpha) = \phi\psi(\alpha) \in Im\phi$，即 $Im\varphi$ 是 ψ 不变子空间。

$\forall\alpha \in \ker\varphi, \varphi(\alpha) = 0$，从而 $\psi\varphi(\alpha) = \varphi\psi(\alpha) = \psi(0) = 0$，即 $\psi(\alpha) \in \ker\varphi$，因此 $\ker\varphi$ 也是 ψ 不变子空间。

题目 15. (4.5.3) 设 φ 是 n 维线性空间 V 上的自同构，若 W 是 φ 不变子空间，求证：W 也是 φ^{-1} 不变子空间。

解答. 取 W 的一组基 $\{e_1, \cdots, e_n\}$, 由于 φ 是自同构, 且 W 是 φ 的不变子空间, 所以 $\{\varphi(e_1), \cdots, \varphi(e_n)\}$ 线性无关, 且仍为 W 的一组基。$\forall\alpha \in W, \exists k_i, i = 1, \cdots, n, s.t. \sum_i k_i\varphi(e_i) = \alpha$, 从而 $\varphi^{-1}(\alpha) = \sum_i k_ie_i \in W$, 即 W 也是 φ^{-1} 不变子空间。

题目 16. (4.5.6) 设 φ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换，φ 在 V 的一组基下的表示矩阵为对角矩阵且主对角线上的元素互不相同，求所有一维的 φ 不变子空间并确定它们的个数。

解答. 以题中提到的一组基中的每个基作为基的一维子空间都是 φ 不变子空间，共 n 个。

题目 17. (总复习.1) 设 V 是实数域上次数不超过 n 的多项式全体组成的线性空间，D 是求导变换，求证：

1. D 是 V 上的线性变换，并求 D 在基 $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ 下的表示矩阵；

2. 对任意的 $1 \leq r \leq n+1$，D 的 r 维不变子空间必是由 $\{1, x, \ldots, x^{r-1}\}$ 生成的子空间；

3. $\operatorname{Im} D \cap \ker D \neq 0$。

解答.

1. 由于求导的线性性，可知 D 是 V 上的线性变换，所求表示矩阵为:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. 若 U 为 r 维不变子空间 $(1 \leq r \leq n+1)$，则 $0 \in U$，对于任意非零多项式 $f \in U$，若它的次数大于 0，则在多次求导变换后，将得到一个零次多项式，又因为 U 是 D 不变子空间，所以 $1 \in D$。类似的可以证明 $x, \cdots, x^{r-1}$ 都在 U 中，而 $\{1, x, \cdots, x^{r-1}\}$ 线性无关，构成 U 的一组基，从而 U 是 $\{1, x, \cdots, x^{r-1}\}$ 生成的子空间。

3. $1 \in \mathrm{Im} D \cap \ker D$

题目 18. (总复习.2) 设 V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的向量空间，φ 是 V 上线性变换，若 φ 在基 $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ 下的表示矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

求证:

1. V 中包含 e_1 的 φ-不变子空间只有 V 自身；

2. V 任一非零 φ-不变子空间必包含 e_n；

3. V 不能分解为两个非平凡 φ-不变子空间的直和。

解答.

1. 有表示矩阵可知,$\varphi^k(e_1) = e_{k+1}, k = 0, \cdots, n-1,$若 U 维包含 e_1 的不变子空间,则 $\{e_1, \cdots, e_n\} \in U$，为 U 的一组基，从而 $U = V$，即 V 中包含 e_1 的 φ-不变子空间只有 V 自身。

2. 若 U 为 V 的一个非零 φ 不变子空间，任取其中的一个非零向量 $\alpha=\sum_i k_ie_i, \exists i, s.t. \forall j<i, k_j=0, k_i\neq 0$，则 $\varphi^{n-i}(\alpha)=k_ie_n$，从而 $\varphi^{n-i}(\frac{1}{k_i}\alpha)=e_n\in U$，即 V 任一非零 φ-不变子空间必包含 e_n。

3. 因为 V 任一非零 φ-不变子空间必包含 e_n，所以 V 不能分解为两个非平凡 φ-不变子空间的直和。

题目 19. (总复习.4) 设 φ 是线性空间 V 上的线性变换，若它在 V 的任一组基下的表示矩阵都相同，求证：φ 是纯量变换，即存在常数 k，使得 $\varphi(a)=ka$ 对一切 $a\in V$ 都成立。

解答. 只需证明 φ 的表示矩阵 $A=kI$，其中 k 为常数即可。

由于 φ 在 V 的任一组基下的表示矩阵不变，所以对于任何非异阵 X，有

$$A=X^{-1}AX$$

取 $X=P_{ij}, i\neq j, i,j=1,\cdots,n$，可得 $A(i,i)=A(j,j)$。取 $X=P_i(-1), i=1,\cdots,n$，可得 $A(i,j)=-A(i,j)$，因此 $A=kI$，其中 k 为常数。

题目 20. (总复习.18) 设 $V=M_n(\mathbb{K})$，A,B 是两个 n 阶矩阵，定义 V 上的变换:

$$\varphi(X)=AXB,$$

求证：φ 是 V 上的线性变换，φ 是线性同构的充分必要条件是 A,B 都是非奇异矩阵。

解答. 由矩阵乘法满足分配律易知 φ 是 V 上的线性变换。

充分性:

若 A,B 都是非奇异矩阵，$\forall Y\in V$，$\varphi(A^{-1}VB^{-1})=Y$，若 $\varphi(X_1)=\varphi(X_2)$，则 $A^{-1}\varphi(X_1)B^{-1}=A^{-1}\varphi(X_2)B^{-1}$，即 $X_1=X_2$，从而 φ 为双射，因此 φ 为线性同构。

必要性:

若 φ 是线性同构，则 $\exists X, s.t. AXB=I$，从而 $r(A)\geq n, r(B)\geq n$，即 A,B 都是非奇异矩阵。

题目 21. (总复习.20) 设 U,W 是 n 维线性空间 V 的子空间且 $\dim U+\dim W=\dim V$，求证：存在 V 上的线性变换 φ，使得 $\ker\varphi=U$，$\operatorname{Im}\varphi=W$。

解答. 由于 $\dim U+\dim W=\dim V$，所以 $U+W$ 为直和。取 U 的一组基 $e_1,\cdots,e_{\dim U}$，取 W 的一组基 $f_1,\cdots,f_{\dim W}$，则 $e_1,\cdots,e_{\dim U},f_1,\cdots,f_{\dim W}$ 是 V 的一组基。定义 $\varphi:\sum_i k_ie_i+\sum_i t_ij_i\to\sum_i t_ij_i$，则 $\ker\varphi=U$,$\mathrm{Im}\varphi=W$。

题目 22. (总复习.34) 设 $\varphi,\varphi_1,\ldots,\varphi_m\,(m\geq 2)$ 是 n 维线性空间 V 上的线性变换且适合条件:

$$\varphi^2=\varphi,\quad \varphi=\varphi_1+\cdots+\varphi_m,\quad r(\varphi)=r(\varphi_1)+\cdots+r(\varphi_m).$$

求证：$\varphi_i\varphi_j=0\,(i\neq j)$，$\varphi_i^2=\varphi_i$，$i=1,\ldots,m$。

解答. 因为

$$r(\varphi)=r(\varphi_1)+\cdots+r(\varphi_m)$$

所以

$$\dim\varphi(V)=\sum_i\dim\varphi_i(V)$$

因此 $\sum_i\varphi(V)=\varphi(V)$ 是直和，且 $\varphi_i(V)\cap\varphi_j(V)=0, i\neq j$，从而 $\varphi_i\varphi_j=0(i\neq j)$。

因此有

$$\varphi^2 = \varphi = \sum_i \varphi_i^2$$

又因为 $\varphi_i^2(V) \subseteq \varphi_i(V)$，所以 $\varphi_i^2(V) \cap \varphi_j^2(V) = 0, i \neq j$，即 $\varphi = \sum_i \varphi_i^2$ 也是直和。由于对于直和，分解方式唯一，$\forall \alpha \in V$，$\varphi(\alpha) = \sum_i \varphi_i(\alpha) = \sum_i \varphi^2(\alpha)$，因为 $\varphi_i^2(V) \subseteq \varphi(V)$，所以 $\varphi_i^2(\alpha) = \varphi_i(\alpha)$，由于 α 的任意性，所以有 $\varphi_i^2 = \varphi_i, i = 1, \cdots, m$

题目 23. (总复习.35) 设 A 是 n 阶方阵，求证：$r(A^n) = r(A^{n+1}) = r(A^{n+2}) = \cdots$。

解答. 若 A 为非奇异阵，则 $r(A^i) = n, i = 1, \cdots$。若 A 为奇异阵，则：

$$n > r(A) \geq r(A^2) \geq \cdots \geq r(A^{n+1})$$

由于 $r(A^{n+1}) \geq 0$，所以其中至少有一个等号成立，不妨设 $r(A^i) = r(A^{i+1}), 1 \leq i \leq n$。则线性方程组 $A^i X = 0$ 的解空间 V_1 与线性方程组 $A^{i+1} X = 0$ 的解空间 V_2 维度相同，又因为 $V_1 \subseteq V_2$，所以 $V_1 = V_2$。从而 $A^j A^i X = 0, A^j A^{i+1} X = 0, j = 0, \cdots$ 的解空间的维度相同，从而 $r(A^n) = r(A^{n+1}) = \cdots$。