HW3

范潇　2254298

2024 年 5 月 3 日

题目 1. (1) 求下列序列的生成函数。

1. $0, 0, 0, -1, 1, \cdots, (-1)^{n-2}, \cdots;$

2. $0, 1 \cdot 3, 2 \cdot 4, \cdots, n(n+2), \cdots.$

解答.

1. 生成函数为
$$\sum_{i=3}^{\infty}(-1)^{i-2}x^i = x^3\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^{i+1}x^i = -\frac{x^3}{1+x}$$

2. 生成函数为
$$\sum_{i=0}^{\infty} i \cdot (i+2)x^i = \sum_{i=0}^{\infty} i^2x^i + \sum_{i=0}^{\infty} 2ix^i = \frac{3x-x^2}{(1-x)^3}$$

题目 2. (2) 利用生成函数计算下列和式:

1. $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3;$

2. $1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + \cdots + n(n+2);$

解答.

1. 因为
$$G\{k^3\} = \sum_{k=1}^{\infty} k^3x^k = x(\sum_{k=1}^{\infty} k^2x^k)' = x[\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}]' = \frac{x(x^2+4x+1)}{(1-x)^4}$$
所以
$$G\{\sum_{i=1}^{k} i^3\} = \frac{G\{k^3\}}{1-x} = \frac{x(x^2+4x+1)}{(1-x)^5} = x(x^2+4x+1)\sum_{i=0}^{\infty}\binom{i+4}{i}x^i$$
因此
$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \binom{n+1}{n-3} + 4\binom{n+2}{i-2} + \binom{n+3}{n-1} = \frac{1}{4}(n^2+n)^2$$

2.
$$G\{\sum_{i=1}^{k} i(i+2)\} = \frac{3x-x^2}{(1-x)^4} = (3x-x^2)\sum_{i=0}^{\infty}\binom{i+3}{i}x^i$$
所以
$$\sum_{i=1}^{n} i(i+2) = 3\binom{i+2}{i-1} - \binom{i+1}{i-2} = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+7)$$

题目 3. (3) 序列 $\{\frac{1}{n+1}\}$ 的指数型生成函数为 $\frac{1}{x}[e(x)-1]$

1. 证明：序列 $\{\sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{(n-i+1)!(i+1)!}\}$ 的指数型生成函数为 $\frac{1}{x^2}[e(x)-1]^2$;

2. 计算 $\sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{(n-i+1)!(i+1)!}$.

解答.

$$\frac{1}{x^2}[e(x)-1]^2=(\frac{1}{x}[e(x)-1])^2=(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\frac{x^n}{n!})^2=\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{i+j=n}\frac{1}{i+1}\cdot\frac{1}{i!}\cdot\frac{1}{j+1}\cdot\frac{1}{j!})\frac{x^n}{n!}=\sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{(n-i+1)!(i+1)!}\frac{x^n}{n!}$$

$$\sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{(n-i+1)!(i+1)!}=\frac{1}{n(n+1)}(\sum_{i=0}^{n+2}\frac{(n+2)!}{i!(n+2-i)!}-2)=\frac{2^{n+2}-2}{n(n+1)}$$

题目 4. (5) 由字母 a,b,c,d,e 组成的长为 n 的字中，要求 a 与 b 的个数之和为偶数，问这样的字有多少个?

解答. 根据第 n 位是否是 a 或 b 进行分类讨论，如果是，则其余 $n-1$ 位中的 a,b 个数之和仍为偶数，否则需要为奇数，所以有递推公式

$$h_n=3h_{n-1}+2(5^{n-1}-h_{n-1})=h_{n-1}+\frac{2}{5}\cdot 5^n$$

展开后得

$$h_n=\frac{2}{5}(5^n+\cdots+5^2)+h_1=2(5^{n-1}+\cdots+5^1)=\frac{5}{2}(5^{n-1}-1)$$

题目 5. (7) 设多重集合 $S=\{\infty\cdot e_1,\infty\cdot e_2,\infty\cdot e_3,\infty\cdot e_4\}$，$a_n$ 表示集合 S 满足下列条件的 n 组合数，分别求数列 $\{a_n\}$ 的生成函数:

1. 每个 $e_i(i=1,2,3,4)$ 出现奇数次;

2. 每个 $e_i(i=1,2,3,4)$ 至少出现 10 次。

解答.

1. 生成函数为
$$(x+x^3+x^5+\cdots)^4=\frac{1}{16}(\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x})^4=\frac{x^4}{(1-x^2)^4}$$

2. 生成函数为
$$(x^{10}+x^{11}+\cdots)^4=\frac{x^{40}}{(1-x)^4}.$$

题目 6. (8) 用恰好 k 种可能的颜色做旗子，使得每面旗子由 $n(n\geq k)$ 条彩带构成，且相邻两条彩带的颜色不同，求不同的旗子数。

解答. 第一条彩带的颜色可以任选，有 k 种选择，其他彩带只能有 $k-1$ 种选择。然后利用容斥原理排除掉至少有一种颜色没有出现过的情况。设 S 为满足相邻彩带颜色不同的方案的集合，第 i 个性质为第 i 种颜色没有出现，则根据容斥原理可知

$$N=\sum_{i=0}^{k}(-1)^k\binom{k}{i}(k-i)(k-i-1)^{n-1}=\sum_{i=2}^{k}(-1)^k\binom{k}{i}i(i-1)^{n-1}$$

题目 7. (10) 用生成函数法证明下列等式:

1. $\binom{n-1}{r}+\binom{n-1}{r-1}=\binom{n}{r}$

2. $\binom{n+2}{r}-2\binom{n+1}{r}+\binom{n}{r}=\binom{n}{r-2}$

解答.

1.
$$(1+x)^n=(1+x)(1+x)^{n-1}=(1+x)^{n-1}+x(1+x)^{n-1}$$
上式左右两边的 x^r 的系数分别为 $\binom{n}{r}$ 和 $\binom{n-1}{r}+\binom{n-1}{r-1}$

2.

题目 8. (11) 设多重集合 $S=\{\infty\cdot e_1,\infty\cdot e_2,\cdots,\infty\cdot e_k\}$，$a_n$ 表示 S 满足下列条件的 n 排列数，分别求数列 $\{a_n\}$ 的指数型生成函数:

1. S 的每个元素至少出现 4 次;

2. e_i 至多出现 i 次 $(i=1,2,\cdots,k)$.

解答.

1.
$$\begin{aligned}(e(x)-\frac{x^3}{6}-\frac{x^2}{2}-x-1)^k&=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^i e(ix)(\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}+x+1)^{k-i}\\&=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}x^n(\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}+x+1)^{k-i}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^i i^n(\frac{x^3}{6}+\frac{x^2}{2}+x+1)^{k-i}\frac{x^n}{n!}\end{aligned}$$

2.
$$1\cdot(1+x)\cdot(1+x+\frac{x^2}{2!})\cdots(1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^k}{k!})$$

题目 9. (13) 证明：当 $m\equiv 0(\mod 6)$ 时，有
$$B(m,3)=\frac{m^2}{12}.$$

解答. 设划分为 $n_1,n_2,n_3,(n_1\geq n_2\geq n_3)$。显然
$$m-2\geq n_1\geq\frac{m}{3}$$
又因为 $n_1\geq n_2\geq n_3$
$$\frac{m-n_1}{2}\geq n_3\geq(m-n_1)-n_1$$

因此当 n_1 为偶数时，合法的 n_3 个数为

$$\frac{m-n_1}{2}-m+2n_1+1=\frac{3n_1-m}{2}+1$$

当 n_1 为奇数时，合法的 n_3 个数为

$$\frac{m-n_1-1}{2}-m+2n_1+1=\frac{3n_1-m+1}{2}$$

从而拆分总数为

$$\sum_{i=m/6}^{m/2-1}(\frac{6i-m}{2}+1)+\sum_{m/6}^{m/2-2}\frac{3(2i+1)-m+1}{2}=\frac{m^2}{12}$$

题目 10. **(14)** 设将 N 无序分拆成正整数之和且使得这些正整数都小于或等于 m 的方法数为 $B'(N,m)$。证明

$$B'(N,m)=B'(N,m-1)+B'(N-m,m).$$

解答. 显然可以将 N 无序分拆成正整数之和且使得这些正整数都小于或等于 m 的方法按照是否含有等于 m 的分部量划分为两个集合，若有，则属于 A，否则属于 B。显然 $|B|=B'(N,m-1)$。同时任取 A 中的一个方案，通过去掉其中一个等于 m 的分部量，可以得到一个将 $N-m$ 无序分拆成正整数之和且使得这些正整数都小于或等于 m 的方法，显然这构成一个一一映射，因此 $|A|=B'(N-m,m)$. 综上，

$$B'(N,m)=B'(N,m-1)+B'(N-m,m).$$

题目 11. **(15)** 设 (N,n,m) 表示将 N 无序拆分成 n 个分部量且每个分部量都小于或等于 m 的分拆数。证明 (N,n,m) 就是 $(x+x^2+\cdots+x^m)^n$ 的展开式中 x^N 的系数。

解答. (N,n,m) 就是 $(x+x^2+\cdots+x^m)^n$ 的展开式中 x^N 的系数等于将 $x_1+x_2+\cdots+x_n=N$ 的所有满足 $m\geq x_i\geq 1, i=1,\cdots,n$ 的整数解的个数，同时满足该约束的整数解显然和将 N 无序拆分成 n 个分部量且每个分部量都小于或等于 m 的分拆之间存在一一映射，从而 (N,n,m) 就是 $(x+x^2+\cdots+x^m)^n$ 的展开式中 x^N 的系数。

题目 12. **(17)** 假设 $a_{n+1}=(n+1)b_n$，且 $a_0=b_0=1$，如果 $A(x)$ 是序列 $\{a_n\}$ 的指数生成函数，$B(x)$ 是序列 $\{b_n\}$ 的指数生成函数，推导 $A(x)$ 和 $B(x)$ 之间的关系。

解答.

$$\begin{aligned}A(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{x^n}{n!}\\&=1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\frac{x^n}{n!}\\&=1+x\sum_{n=1}^{\infty}b_{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\\&=1+x\sum_{n=0}^{\infty}b_n\frac{x^n}{n!}\\&=1+xB(x)\end{aligned}$$

题目 13. **(18)** 令 h_n 表示具有 $n+2$ 条的凸边形区域被其对角线所分成的区域，假设没有三条对角线共点。定义 $h_0=0$. 证明

$$h_n = h_{n-1} + \binom{n+1}{3} + n \qquad (n \geq 1).$$

然后确定生成函数，并由此得出 h_n 的公式。

解答. 任取其中 $n+2$ 边形中的三个相邻顶点 A, B, C，则整个 $n+2$ 边多边形可以分为一个三角形和一个 $n+1$ 边多边形，其内部由不从 A, B, C 引出的弦所分成的区域数便是 h_{n-1}. 在此基础之上，在 $n+1$ 边多边形中任取三个顶点组成一个三角形，其中有且仅有一个顶点能和 A, B, C 中的一点形成连线并与对边相交。这样形成的交点数是 $\binom{n+1}{3}$。使得 $n+1$ 边多边形中的区域数又增加了 $\binom{n+1}{3}$ 个。假设这个 $n+1$ 边形的顶点包含 B, C，则其余顶点与点 A 的连线必会交于 BC，并分割 ABC，使得 ABC 共被划分为 n 块。因此

$$h_n = h_{n-1} + \binom{n+1}{3} + n \qquad (n \geq 1).$$

设生成函数

$$g(x) = h_0 + h_1 x + h_2 x^2 + \cdots$$

则

$$g(x) - xg(x) = h_0 + (h_1 - x_0)x + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (\binom{n+1}{3} + n)x^n$$

所以

$$g(x) = \frac{1}{1-x} \sum_{n=1}^{\infty} (\binom{n+1}{3} + n)x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} (\binom{i+1}{3} + i)x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (\binom{n+2}{4} + \frac{n(n+1)}{2})x^n$$

题目 14. **(19)** 如果要把棋盘上偶数个方块染成红色，试确定用红色、白色和蓝色对 $1 \times n$ 棋盘的方格染色的方法数。

解答. 如果第一块不染成红色，则剩余红色方块数仍为偶数，否则为奇数，因此有递推公式

$$h_n = 2h_{n-1} + (3^{n-1} - h_{n-1}) = h_{n-1} + 3^{n-1} = (3^{n-1} + \cdots + 3^2) + 2 = \frac{3^n + 1}{2}$$