4. BÖLÜM

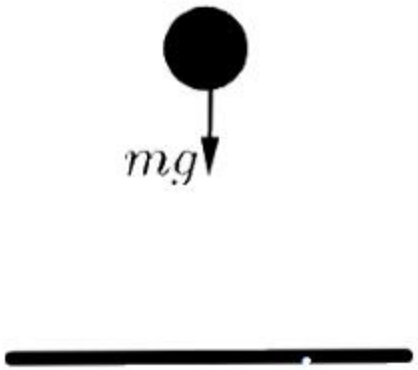
BİRİNCİ MERTEBEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN UYGULAMALARI

Kainatın yasalarının matematik diline çevrilmesine matematiksel modelleme diyebiliriz. Birçok durağan (statik) olayın modellenmesi için cebir yeterlidir. Fakat, kainattaki birçok olay durağan değildir. Değişimler içerir; örneğin bir cismin yere düşmesi, bir telin titreşimi, nüfus artışı, bulaşıcı hastalıkların yayılması,.. vb. Dolayısıyla burada türev kavramı ve türev içeren denklemler karşımız çıkar. Bir fonksiyonu ve onun sonlu mertebeden türevlerini içeren denklemlere diferansiyel denklem denir.

Şimdi bazı fiziksel olayların modellenmesini elde edeceğiz.

4.1. Serbest Düşme

Kütlesi m olan bir cisim yüksek bir yerden aşağı doğru bırakılsın (serbest düşme, yani ilk hız sıfırdır)



bu durumda cisme sadece yerçekimi kuvveti etki etmektedir. Newton'un ikinci kanununa göre kuvvet, kütle ile ivmenin çarpımına eşit olduğundan

$$F = ma$$

dır. Yolun zamana göre türevi hızı ($v = \frac{dy}{dt}$) ve hızın zamana göre türevi de ivmeyi ($a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}$) verdiğinden

$$F = m\frac{d^2y}{dt^2} \tag{22}$$

olur. Ayrıca cisme etki eden tek kuvvet yerçekimi kuvveti olduğundan (mg), (22) denklemi

$$mg = m\frac{dv}{dt},$$

$$\frac{dv}{dt} = g$$

olur. İntegral alınırsa

$$v = gt + c_1$$

bulunur. İlk hız sıfır olduğundan $v(0) = 0$ dan

$$c_1 = 0$$

olur. Böylece cismin t anındaki hızı

$$v = gt$$

olarak bulunur.

Şimdi yolu bulalım, $v = \frac{dy}{dt}$ den

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= gt, \\ dy &= gtdt \end{aligned}$$

integral alınırsa

$$y = \frac{1}{2}gt^2 + c_2$$

olur. Taşın ilk bırakıldığı nokta $y\left(0\right) = 0$ alınırsa

$$c_2 = 0$$

olacağından, cismin t anındaki konumu

$$y\left(t\right) = \frac{1}{2}gt^2$$

bulunur.

Örnek 4.1.1: 10 gram ağırlığındaki bir bilye, 200 metre yükseklikten bırakılıyor. Hava direncinin olmadığını varsayarsak bilye kaç saniye sonra yere düşer? ($g = 9,8$ m/sn^2 alınız)

Çözüm. Alınan yol

$$y\left(t\right) = \frac{1}{2}gt^2$$

olduğundan, $y = 200$ ise

$$200 = \frac{1}{2}\left(9,8\right)t^2,$$

$$t \simeq 6,3 \text{ saniye}$$

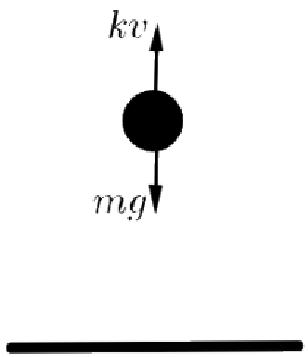
bulunur.

4.2. Gecikmeli Düşme

Şimdi yukarıdaki cismin düşerken hızıyla orantılı olarak hava direncine maruz kaldığını varsayalım. Bu durumda k orantı sabiti olmak üzere, Newton'un ikinci kanunundan

$$F = ma$$

dır ve cisme etki eden kuvvetler



$$F = mg - kv \text{ ve } a = \frac{dv}{dt}$$

olacağından

$$mg - kv = m\frac{dv}{dt},$$
$$\frac{dv}{dt} + \frac{kv}{m} = g$$

birinci merteden lineer diferansiyel denklemi bulunur. Buradan integral çarpanı

$$\begin{aligned} \mu &= e^{\int \frac{k}{m} dt} \\ &= e^{\frac{kt}{m}} \end{aligned}$$

olduğundan

$$\left(ve^{\frac{kt}{m}}\right)' = ge^{\frac{kt}{m}}$$

olur, integral alınırsa

$$ve^{\frac{kt}{m}} = \frac{mg}{k}e^{\frac{kt}{m}} + c_1,$$
$$v = \frac{mg}{k} + c_1 e^{-\frac{kt}{m}}$$

genel çözümü bulunur. Cismin ilk hızı sıfır olduğundan, $v(0) = 0$ dan

$$c_1 = -\frac{mg}{k}$$

bulunur. Böylece cismin t anındaki hızı

$$v(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right)$$

olur. Şimdi cismin t anındaki konumunu bulalım, $v = \frac{dy}{dt}$ den

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right), \\ dy &= \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right) dt \end{aligned}$$

integral alınırsa

$$y = \frac{mg}{k}\left(t + \frac{m}{k}e^{-\frac{kt}{m}}\right) + c_2$$

olur. $y(0) = 0$ başlangıç koşulundan

$$c_2 = -\frac{m^2 g}{k^2}$$

olacağından

$$\begin{aligned} y &= \frac{mg}{k}\left(t + \frac{m}{k}e^{-\frac{kt}{m}}\right) - \frac{m^2 g}{k^2} \\ &= \frac{mgt}{k} - \frac{m^2 g}{k^2}\left(1 - e^{-\frac{kt}{m}}\right) \end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 4.2.1: Kütlesi 10 kg olan bir cisim herhangi bir yükseklikten 20 m/sn başlangıç hızıyla düşey olarak aşağı atılmaktadır. Cismi, ağırlık kuvvetinin ve hızıyla orantılı olarak direnç kuvvetinin (orantı katsayısı $k = 2$) etkilediğini göz önünde bulundurarak hızın değişme yasasını bulunuz.

Çözüm.

$$F = ma$$

dan

$$10g - 2v = 10\frac{dv}{dt},$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{5} = g$$

olur. Bu denklem çözülürse

$$v(t) = 5g + ce^{-\frac{t}{5}}$$

olur. İlk hız

$$v(0) = 20$$

den

$$c = 20 - 5g$$

dır. Böylece

$$v(t) = 5g + (20 - 5g)\, e^{-\frac{t}{5}}$$

bulunur.

4.3. Artma ve Azalma Problemleri

Herhangi bir y büyüklüğünün zamana göre değişme hızının y ile orantılı olduğu problemler, k orantı sabiti olmak üzere

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

şeklindeki birinci mertebeden diferansiyel denklem olarak modellenmektedir. Eğer t_0 anındaki miktar y_0 ise başlangıç koşulu

$$y(t_0) = y_0$$

Örnek 4.3.1: Bir bakteri kültürünün artış hızı, o andaki bakteri sayısı ile orantılıdır. Bu kültürde başlangıçta 10 bakteri ve 2 saniye sonra 40 bakteri varsa, 5 dakika sonra kaç bakteri olur?

Çözüm. $y(t)$, t anındaki bakteri nüfusu ise

$$\frac{dy}{dt} = ky \tag{23}$$

dır. Ayrıca

$$y(0) = 10,$$

$$y(2) = 40$$

verilmiş ve 5 dakika 300 saniye olduğundan

$$y(300)$$

istenmektedir. (23) denklemi düzenlenir ve integral alınırsa

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y} &= kdt, \\ \ln y &= kt + c_1, \\ y &= c_2 e^{kt} \end{aligned}$$

olur. Burada $c_2 = e^{c_1}$ dir. $y(0) = 10$ olduğundan

$$c_2 = 10$$

olur. Böylece

$$y = 10e^{kt}$$

dir. Şimdi $y(2) = 40$ koşulu kullanılırsa

$$40 = 10e^{2k} \Rightarrow k = \frac{\ln 4}{2} = \ln 2$$

bulunur. Böylece herhangi bir t anındaki nüfusu veren formül

$$\begin{aligned} y(t) &= 10e^{t\ln 2} \\ &= 10.2^t \end{aligned}$$

olur. 5 dakika sonraki bakteri sayısı

$$y(300) = 10.2^{300}$$

olur.

Örnek 4.3.2: Bir radyoaktif madde, kalan madde ile orantılı hızla bozunmaktadır. 100 gram radyoaktif madde bir saat sonra 80 grama iniyorsa

a. herhangi bir t anında çözülen madde miktarını,

b. maddenin yarılanma ömrünü bulunuz.

Çözüm.

a. Verilen problem azalma problemidir. Bozunma hızı, o andaki madde miktarı ile orantılı olduğundan

$$\frac{dy}{dt} = -ky \tag{24}$$

olur. Başlangıçtaki madde miktarı 100 gram ve bir saat sonra kalan madde miktarı 80 gram olduğundan

$$\begin{aligned} y(0) &= 100 \\ y(1) &= 80 \end{aligned}$$

koşulları yazılabilir. ($\boxed{24}$) den

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y} &= -kdt, \\ y &= c_1 e^{-kt} \end{aligned}$$

dir. $y(0)=100$ den

$$c_1=100$$

ve $y(1)=80$

$$k=\ln\frac{5}{4}$$

olur. Böylece herhangi bir t anındaki kalan madde miktarı

$$\begin{aligned} y(t) &= 100e^{-t\ln\frac{5}{4}} \\ &= 100.\left(\frac{4}{5}\right)^{t} \end{aligned}$$

olur.

b. Şimdi yarılanma ömrünü, yani başlangıçtaki madde miktarının yarıya indiği zamanı bulalım.

$$y(t_1)=50$$

olacak şekilde t_1 i bulmamız istendiğinden, yarılanma ömrü

$$\begin{aligned} y(t_1) &= 100.\left(\frac{4}{5}\right)^{t_1}, \\ 50 &= 100.\left(\frac{4}{5}\right)^{t_1}, \end{aligned}$$

$$t_1=\log_{\frac{4}{5}}\frac{1}{2}\simeq 3,1 \text{ saat}$$

dir.

Örnek 4.3.3: Bir radyoaktif madde, kalan madde ile orantılı hızla bozunmaktadır. 80 gram radyoaktif madde bir saat sonra 50 grama iniyorsa

a. herhangi bir t anında çözülen madde miktarını,

b. maddenin yarılanma ömrünü bulunuz.

(Cevap: **a.** $y = 80.\left(\frac{5}{8}\right)^t$, **b.** $t_1 = \log_{\frac{8}{5}} 2 \simeq 1,47$)

4.4. Nüfus Problemleri

Bir bölgenin nüfusu doğum ve ölümlerle değişir. Eğer D, t anında doğanları ve $\ddot{O}$ de ölenleri gösteriyorsa, nüfusun değişme hızı o andaki toplam nüfus ile orantılı olacağından

$$\frac{dN}{dt} = \left(D - \ddot{O}\right) N$$

olur. Eğer D ve $\ddot{O}$ sabit ise $D - \ddot{O} = k$ alınırsa

$$\frac{dN}{dt} = kN$$

olur. Burada k nüfus artış oranıdır.

Örnek 4.4.1: Toplam nüfusu 30000 olan bir bölgenin nüfus artış oranı $\%1,2$ olduğuna göre, bölgenin 10 yıl sonraki nüfusu kaç olur?

Çözüm.

$$N(0) = 30000,$$
$$k = \%1,2 = \frac{12}{1000} = \frac{3}{250},$$
$$N(10) = ?$$

Nüfus artışını veren denklem

$$\frac{dN}{dt} = kN$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{dN}{N} &= kdt, \\ N &= c_1 e^{kt} \end{aligned}$$

olur. $N(0) = 30000$ ve $k = \frac{3}{250}$ den

$$N(t) = 30000 e^{\frac{3}{250}t}$$

dır. Buradan 10 yıl sonraki nüfus

$$\begin{aligned} N(10) &= 30000 e^{\frac{3}{25}} \\ &\simeq 33824 \end{aligned}$$

bulunur.

Örnek 4.4.2: Toplam nüfusu 20000 olan bir bölgenin nüfus artış oranı $\%0,8$ olduğuna göre, bölgenin 10 yıl sonraki nüfusu kaç olur?

(Cevap: $N(10) \simeq 23470$)

* Yukarıdaki nüfus problemi için elde ettiğimiz denklemde pek çok şey ihmal edildi, örneğin doğum ve ölüm oranları aynı alındı. Farklı kabullerle daha farklı nüfus modelleri kurulabilir. Örneğin doğumun sabit ve ölümün nüfus ile orantılı olduğu varsayılırsa $\ddot{O} = kN$ olacağından

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= \left(D - \ddot{O}\right) N, \\ &= (D - kN) N \end{aligned}$$

olur. Bu denklem düzenlenirse

$$\frac{dN}{dt} - DN = -kN^2$$

Bernoulli denklemi bulunur. Burada D ve k pozitif sabitler ise bu denkleme *lojistik denklem* de denir.

4.5. Soğuma Problemleri

Newton'un soğuma kanununa göre bir cismin sıcaklığı, ortamın sıcaklığı ile cismin sıcaklığı arasındaki farkla orantılı olarak değiştiğinden, cismin t anındaki sıcaklığı $y\left(t\right)$, ortamın sıcaklığı T ve orantı katsayısı k olmak üzere

$$\frac{dy}{dt}=-k\left(y-T\right)$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Burada cismin sıcaklığı ortamın sıcaklığından daha fazla $(y>T)$ ise cisim zamanla soğuyacağından azalma problemi olur. Dolayısıyla $-k$ yazıldı.

Örnek 4.5.1: Sıcaklığı 90^0C olan bir bardak çay 20^0C bir ortamda bulunuyor. 5 dakika sonra çayın sıcaklığı 80^0C ye indiğine göre 20 dakika sonra çayın sıcaklığı kaç ^0C olur?

Çözüm. Newton'un soğuma denkleminden

$$\frac{dy}{dt} = -k\left(y - T\right),$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y-T} &= -kdt, \\ \ln|y-T| &= -kt + c_1, \end{aligned}$$

$$y = T + c_2 e^{-kt}$$

dır. Ortamın sıcaklığı $T = 20^0C$, çayın başlangıçtaki sıcaklığı

$$y\left(0\right) = 90$$

dan

$$90 = 20 + c_2 e^0,$$

$$c_2 = 70$$

olur. 5 dakika sonra çayın sıcaklığı

$$y(5) = 80$$

olduğundan

$$\begin{aligned} y(5) &= 20 + 70e^{-5k}, \\ 80 &= 20 + 70e^{-5k}, \end{aligned}$$

$$k = -\frac{1}{5} \ln \frac{6}{7}$$

olur. Böylece herhangi bir t anındaki çayın sıcaklığı

$$\begin{aligned} y(t) &= 20 + 70e^{-\left(-\frac{1}{5} \ln \frac{6}{7}\right)t} \\ &= 20 + 70.\left(\frac{6}{7}\right)^{\frac{t}{5}} \end{aligned}$$

olur. 20 dakika sonraki çayın sıcaklığı

$$\begin{aligned} y(20) &= 20 + 70.\left(\frac{6}{7}\right)^{4} \\ &\simeq 57,784^0 C \end{aligned}$$

olur.

Örnek 4.5.2: Sıcaklığı 80^0C olan bir bardak çay 20^0C bir ortamda bulunuyor. 10 dakika sonra çayın sıcaklığı 60^0C ye indiğine göre 30 dakika sonra çayın sıcaklığı kaç ^0C olur?

(Cevap: $37,7^0C$)

Örnek 4.5.3: Normal vücut sıcaklığı 37^0C olan bir kişi, arabasıyla seyahat ederken kaza geçirip ölüyor. Bu kişinin cesedi bulunduğunda sıcaklığı 32^0C ve bulunduktan bir saat sonraki vücut sıcaklığı 30^0C dır. Ayrıca cesedin bulunduğu ortamın sıcaklığı 20^0C ise bu kişi bulunduğundan kaç dakika önce ölmüştür?

Çözüm. Newton'un soğuma denkleminden

$$\frac{dy}{dt} = -k\left(y - T\right),$$

$$y = T + c_2 e^{-kt}$$

dır. Ortamın sıcaklığı

$$T = 20^0 C$$

başlangıçtaki vücut sıcaklığı

$$y\left(0\right) = 37,$$

bulunduğunda vücut sıcaklığı

$$y\left(t\right) = 32$$

ve bulunduktan bir saat sonraki vücut sıcaklığı

$$y\left(t+1\right) = 30$$

dır. $y(0) = 37$ den

$$37 = 20 + c_2 \Rightarrow c_2 = 17$$

dır. $y(t) = 32$ ve $y(t+1) = 30$ dan

$$32 = 20 + 17e^{-kt} \Rightarrow -kt = \ln \frac{12}{17},$$

$$30 = 20 + 17e^{-k(t+1)} \Rightarrow -k(t+1) = \ln \frac{10}{17}$$

dır. Bu denklemler oranlanırsa

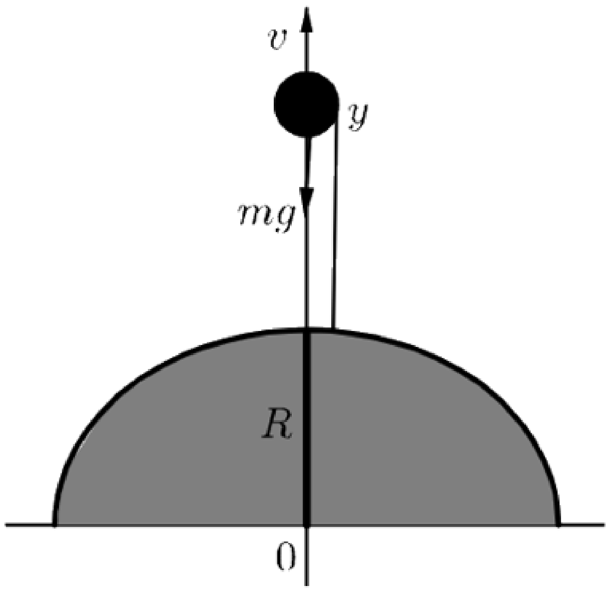
$$\frac{t}{t+1} = \frac{\ln \frac{12}{17}}{\ln \frac{10}{17}},$$

$$\begin{aligned} t &= \frac{\ln \frac{12}{17}}{\ln \frac{10}{12}} \\ &\simeq 1,91 \text{ saat} \end{aligned}$$

bulunur. Yani kaza $(1,91).60 \simeq 114$ dakika önce olmuştur.

4.6. Kurtulma Hızı

Kütlesi m olan bir roket yeryüzünden yukarı doğru bir v_0 ilk hızı ile fırlatılıyor. Hava direncini ihmal ederek sadece yerçekimi etkisi altında hareket eden roketin herhangi bir t anındaki hızını ve roketin bir daha yeryüzüne dönmemesi için v_0 ilk hızının ne olması gerektiğini bulalım.



Newton'un evrensel çekim kuvvetinden; aralarındaki uzaklık R, kütle çekim sabiti G ve kütleleri m ve M olan herhangi iki cisim arasındaki çekim kuvvetinin

$$F = G\frac{mM}{R^2}$$

olduğu biliniyor.

Yerçekim ivmesi g, yerkürenin kütlesi M ve yarıçapı R ise

$$\left.\begin{array}{c} F = G\frac{mM}{R^2} \\ F = mg \end{array}\right\} \text{ ise } mg = G\frac{mM}{R^2},$$

$$G = \frac{gR^2}{M}$$

olur. Herhangi bir t anında cismin yere olan uzaklığı y ve hızı v olsun. Bu durumda roket ile merkez arasındaki uzaklık $y + R$ (R dünyanın yarıçapıdır) olacağından, roketin hareket denklemi

$$ma = -G\frac{mM}{(y+R)^2},$$

$$\begin{aligned} a &= -G\frac{M}{(y+R)^2}, \\ \frac{dv}{dt} &= -G\frac{M}{(y+R)^2} \end{aligned}$$

olur. Yukarıda $G = \frac{gR^2}{M}$ olduğundan

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{gR^2}{(y+R)^2}$$

bulunur. Ayrıca

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dy}\frac{dy}{dt} = v\frac{dv}{dy}$$

olduğundan

$$
\begin{aligned}
v\frac{dv}{dy} &= -\frac{gR^2}{(y+R)^2}, \\
v\,dv &= -\frac{gR^2 dy}{(y+R)^2}
\end{aligned}
$$

birinci mertebeden değişkenlerine ayrılabilen denklem bulunur. Bu denklemin çözümü

$$
\frac{v^2}{2} = \frac{gR^2}{y+R} + c
$$

dır. $t=0$ da $y=0$ (roket ile yer arasındaki mesafe) ve $v(0)=v_0$ olduğundan

$$
c = \frac{v_0^2}{2} - gR
$$

bulunur. Böylece cismin yerden uzaklaşma hızı

$$
\begin{aligned}
\frac{v^2}{2} &= \frac{gR^2}{y+R} + c \\
&= \frac{gR^2}{y+R} + \frac{v_0^2}{2} - gR,
\end{aligned}
$$

$$
v^2 = v_0^2 - 2gR + \frac{2gR^2}{y+R}
$$

olur. Roketin tekrar yeryüzüne geri dönmemesi için hızın daima pozitif olması gerekir. Yani

$$v_0^2 - 2gR \geq 0,$$

$$v_0 \geq \sqrt{2gR}$$

olmalıdır. Bu durumda ilk hız en az

$$v_0 = \sqrt{2gR}$$

olmalıdır. Bu hıza kurtulma hızı da denir. $g = 9,8\ m/sn$ ve $R = 6,3.10^6\ m$ olduğundan kurtulma hızı

$$11100\ m/sn$$

olmalıdır.

4.7. Karışım Problemleri

Bir depo, içinde a gram tuz eritilmiş V_0 litre tuzlu su içermektedir. Litresinde b gram tuz bulunan V_1 litre tuzlu su saniyede s_1 litre sabit hızla depoya akıyor ve iyice karıştırılıp homojen hale getirildikten sonra da saniyede s_2 litre sabit hızla depodan akıtılıyor. Herhangi bir t anında depodaki tuz miktarını bulalım.

Herhangi bir t anında depodaki tuz miktarı $y(t)$ olsun. y nin zamanla değişimi $\frac{dy}{dt}$ olduğundan

$$\frac{dy}{dt} = [\text{depoya giren tuz miktarı}] - [\text{depodan çıkan tuz miktarı}]$$

dır. Depoya saniyede giren tuz miktarı

$$\frac{bs_1}{V_1}$$

dır. Depodan saniyede çıkan tuz miktarı için önce herhangi bir t anındaki depoda bulunan tuzlu su hacmini hesaplayalım. Başlangıçtaki tuzlu su V_0 litre, depoya eklenen tuzlu su $s_1 t$ ve depodan dökülen tuzlu su $s_2 t$ olduğundan, depoda herhangi bir t anında bulunan tuzlu su miktarı

$$V_0 + s_1 t - s_2 t$$

ve tuz miktarı

$$\frac{y}{V_0 + s_1 t - s_2 t}$$

olacağından, depodan çıkan tuz miktarı

$$\frac{y}{V_0 + s_1 t - s_2 t}.s_2$$

olur. Böylece herhangi bir t anında depodaki tuz miktarı

$$\frac{dy}{dt} = \left[\frac{bs_1}{V_1}\right] - \left[\frac{y}{V_0 + (s_1 - s_2)\, t}.s_2\right]$$

birinci merteden lineer diferansiyel denklemi ile hesaplanır.

Örnek 4.7.1: Bir depoda 20 gramı tuz olan 100 litre tuzlu su bulunmaktadır. Bu depoya saniyede 10 litre saf su ilave ediliyor ve oluşan karışımın saniyede 10 litresi depodan dışarı akıtılıyor. Herhangi bir t anında depodaki tuz miktarını bulunuz.

Çözüm.

$$\frac{dy}{dt} = [\text{depoya giren tuz miktarı}] - [\text{depodan çıkan tuz miktarı}]$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= [0] - \left[\frac{10y}{100}\right], \\ \frac{dy}{dt} &= -\frac{y}{10}, \\ \frac{dy}{y} &= -\frac{dt}{10}\end{aligned}$$

integral alınırsa

$$y = c_1 e^{-\frac{t}{10}}$$

olur. $y(0) = 20$ den

$$y = 20e^{-\frac{t}{10}}$$

bulunur. Eğer bu zaman uzarsa depoya saf su eklenip, oluşan karışım döküldüğünden depodaki tuz miktarı azalacaktır. Eğer $t \to \infty$ olursa

$$y \to 0$$

olur. Yani zaman sonsuz olursa tuz miktarı sıfır olur.

4.8. Elektrik Problemleri

Enerji kaynağı (elektromotor kuvvet; jeneratör veya pil gibi) ile enerjiyi kullanan bir rezistör (ampül gibi) bulunan basit bir devre düşünelim.

Eğer düğme kapatılırsa, I akımı ampüle doğru akacak ve voltaj düşmesine sebep olacaktır. Bu voltaj düşüşü Voltmetre ile ölçülür. Bir rezistörün iki ucundaki E_R voltaj düşüşü, ani I akımı ile orantılı olduğundan

$$E_R = RI$$

dır. Burada R orantı sabiti olup rezistörün direncidir.

Daha karışık devrelerde enerji kaynağı ve rezistöre ek olarak indüktör (mekanikte kütlenin oynadığı role benzer bir rol oynar, cereyan akışında herhangi bir değişikliğe karşı koyar) ve kapasitör (enerji depolayan eleman) bulanabilir. Bir indüktörün iki ucundaki E_L voltaj düşüşü I akımının zamana göre ani değişimiyle orantılıdır.

Yani

$$E_L = L\frac{dI}{dt}$$

dır. Burada L orantı sabitine indüktörün indüktansı denir, t saniye ile ölçülür. Bir kapasitörün iki ucundaki E_C voltaj düşüşü, kapasitördeki Q ani elektrik yükü ile orantılıdır. Yani

$$E_C = \frac{1}{C}Q$$

dır. Burada C ye kapasitans denir.

$$I(t) = \frac{dQ}{dt}$$

olduğundan

$$E_C = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} I(\tau)\, d\tau$$

olur.

Burada I akımı amper, R direnci ohm, E_R voltajı volt, L indüktansı henry, C kapasitansı farad ve Q yükü Coulomb ile ölçülür.

Bir devredeki $I(t)$ akımı, "kapalı bir devrede ani voltaj düşüşlerinin cebirsel toplamı sıfırdır" veya "kapalı bir devrede ortaya çıkan voltaj geri kalan voltaj düşüşlerinin toplamına eşittir" olarak ifade edilen *Kirchhoff Voltaj Kanunu* yardımı ile hesaplanabilir.

RL devresi: Direnç, indüktür ve enerji kaynağından oluşan bir devre düşünelim. Bu durumda Kirchhoff Voltaj Kanunundan

$$E = E_R + E_L,$$

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E$$

birinci mertebeden lineer diferansiyel denklemi bulunur.

RC devresi: Direnç, kapasitör ve enerji kaynağından oluşan bir devre düşünelim. Bu durumda Kirchhoff Voltaj Kanunundan

$$E = E_R + E_C,$$

$$\begin{aligned} RI + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} I(\tau)\, d\tau &= E, \\ R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q &= E, \end{aligned}$$

olur. Bu denklemin t ye göre türevi alınırsa

$$R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{dE}{dt}$$

birinci mertebeden lineer diferansiyel denklemi bulunur.

Örnek 4.8.1: Bir RL devresinde 4 volt enerji, 20 ohm direnç ve 1 henry indüktans vardır. İlk akım sıfır ise herhangi bir t anında devredeki akımı bulunuz.

Çözüm. RL devresi

$$L\frac{dI}{dt}+RI=E$$

dır. $E=4,\ R=20$ ve $L=1$ olduğundan

$$\frac{dI}{dt}+20I=4$$

denklemi bulunur. Bu denklemin çözümü

$$I\left(t\right)=\frac{1}{5}+ce^{-20t}$$

dır. İlk akım sıfır olduğundan $I\left(0\right)=0,$

$$c=-\frac{1}{5}$$

olur. Buradan herhangi bir t anındaki akım

$$I\left(t\right)=\frac{1}{5}-\frac{1}{5}e^{-20t}$$

bulunur. $t\rightarrow\infty$ için $-\frac{1}{5}e^{-20t}$ ifadesi sıfır olacağından buna geçici akım denir. $t\rightarrow\infty$ için $I\left(t\right)\rightarrow\frac{1}{5}$ olduğundan buna da durgun durum akımı denir.

Örnek 4.8.2: Bir RC devresinde $40\sin t$ volt enerji, 10 ohm direnç ve kapasitansı 10^{-1} farad olarak veriliyor. İlk akım sıfır ve kapasitans üzerinde hiç yük olmadığına göre herhangi bir t anında devredeki akımı bulunuz.

Çözüm. RC devresi

$$R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C}I = \frac{dE}{dt}$$

dır. $E = 40\sin t$, $R = 10$ ve $C = 10^{-1} = \frac{1}{10}$ olduğundan

$$\begin{aligned} 10\frac{dI}{dt} + 10I &= 40\cos t, \\ \frac{dI}{dt} + I &= 4\cos t \end{aligned}$$

birinci mertebeden lineer denklemi bulunur. Bu denklemin çözümü için önce integral çarpanı bulalım:

$$\begin{aligned} \mu &= e^{\int 1dt} \\ &= e^{t} \end{aligned}$$

dır. Buradan

$$\begin{aligned} d\left(e^t I\right) &= 4e^t \cos t, \\ e^t I &= 4\int e^t \cos t dt, \end{aligned}$$

$$I = 2\left(\cos t + \sin t\right) + ce^{-t}$$

genel çözümü bulunur. İlk akım sıfır olduğundan $I\left(0\right) = 0$

$$c = -2$$

olur. Buradan herhangi bir t anındaki akım

$$I\left(t\right) = 2\left[\cos t + \sin t - e^{-t}\right]$$

bulunur.

Çözümlü Sorular

1. Devamlı bileşik faize yatırılan bir miktar para 4 yıl sonra iki katına çıkıyorsa, kaç yıl sonra 3 katına çıkar?

Çözüm. Herhangi bir t anında hesaptaki para miktarı $y(t)$ olsun. Hesapta oluşacak miktar, hesaptaki miktar ile orantılı olan faiz ödemelerinin birikimi ile artacağından orantı sabiti faiz oranıdır.

$$\begin{aligned} y(0) &= a, \\ y(4) &= 2a, \\ y(t) &= 3a \end{aligned}$$

ise t yi bulmalıyız.

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y} &= kdt, \\ \int \frac{dy}{y} &= \int kdt, \end{aligned}$$

$$y = c.e^{kt}$$

olur. $y(0) = a$ dan

$$c = a$$

dan

$$y = a.e^{kt}$$

olur. $y(4) = 2a$ dan

$$2a = a.e^{4k},$$

$$k = \frac{1}{4}\ln 2,$$

$$y = a.e^{\left(\frac{1}{4}\ln 2\right)t}$$

bulunur. $y(t) = 3a$ istendiğinden

$$3a = a.e^{\left(\frac{1}{4}\ln 2\right)t},$$

$$t = 4\log_2 3$$

bulunur.

2. Yıllık %5 bileşik faiz veren bir bankaya 3000 lira yatıran bir kişinin hesabında 4 yıl sonra ne kadar para birikir?

Çözüm. Herhangi bir t anında hesaptaki para miktarı $y(t)$ olsun. Hesapta oluşacak miktar, hesaptaki miktar ile orantılı olan faiz ödemelerinin birikimi ile artacağından orantı sabiti faiz oranıdır. Bu durumda

$$\frac{dy}{dt} = \frac{5}{100}y$$

olur. Bu denklem çözülürse

$$\begin{aligned} \frac{dy}{y} &= \frac{dt}{20}, \\ \ln y &= \frac{t}{20} + c_1, \\ y &= c_2 e^{\frac{t}{20}} \end{aligned}$$

bulunur. Başlangıçta 3000 lira yatırıldığından, $y(0) = 3000$ den

$$c_2 = 3000$$

olur. Buradan

$$y = 3000e^{\frac{t}{20}}$$

dır. 4 yıl sonra hesapta

$$\begin{aligned} y(4) &= 3000e^{\frac{1}{5}} \\ &\simeq 3664 \end{aligned}$$

lira bara birikir.

3. Bir radyoaktif maddenin değişim hızı

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

dır. Bu radyoaktif maddenin yarı ömrü 20 yıl ise 100 gram maddeden 50 yıl sonra ne kadar kalır?

Çözüm. Başlangıçta 100 gram madde olduğundan

$$y(0) = 100$$

ve yarılanma ömrü 20 yıl ise

$$y(20) = 50$$

dır.

$$y(50)$$

istenmektedir.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= ky, \\ \frac{dy}{y} &= kdt \end{aligned}$$

denkleminde integral alınırsa

$$y = ce^{kt}$$

olur. $y\left(0\right)=100$ den

$$c=100,$$

$$y=100e^{kt}$$

ve $y\left(20\right)=50$ den

$$50=100e^{20k}\Rightarrow k=\frac{1}{20}\ln\frac{1}{2},$$

$$y=100e^{\left(\frac{1}{20}\ln\frac{1}{2}\right)t}$$

olur.

$$\begin{aligned} y\left(50\right) &= 100e^{\left(\frac{1}{20}\ln\frac{1}{2}\right)50} \\ &= 100\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{5}{2}} \\ &\simeq 17,67 \end{aligned}$$

bulunur.

4. Bir salgın hastalık teorisine göre, hasta nüfüsun değişim hızı, hasta birey sayısı ile hasta olmayanların çarpımıyla orantılıdır. 200 kişilik bir köyde 4 kişi hasta olduğuna göre herhangi bir t anındaki hasta birey sayısını bulunuz.

Çözüm. Herhangi bir t anında hastalıklı kişi sayısı $y(t)$ ise hasta olmayan kişi sayısı $200 - y(t)$ olur. Bu durumda, k orantı sabiti olmak üzere

$$\frac{dy}{dt} = ky(200 - y)$$

dir. Buradan

$$\frac{dy}{y(200 - y)} = kdt,$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{dy}{y(200-y)} &= \int kdt, \\
\frac{1}{200} \int \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y-200} \right) dy &= \int kdt, \\
\ln \left| \frac{y}{y-200} \right| &= 200kt + c_1 \\
\left| \frac{y}{y-200} \right| &= c_2 e^{200kt}
\end{aligned}$$

olur. $y\left(0\right)=4$ olduğundan

$$c_2=\frac{4}{196}=\frac{1}{49}$$

ve

$$\left|\frac{y}{y-200}\right|=\frac{1}{49}e^{200kt}$$

bulunur.

5. 10 gram ağırlığındaki bir cisim, 60 m/sn hızla yukarı doğru fırlatılıyor. Cisim hızıyla orantılı ($k = \frac{1}{2}$) olarak hava direncine maruz kaldığına göre,

a. herhangi bir andaki hızını,

b. cismin çıkabileceği maksimum yüksekliği bulunuz ($g = 9,8\ m/sn^2$ alınız).

Çözüm. Cisme etki eden kuvvetleri bulalım: mg yer çekimi kuvveti ve yine yere dogru kv sürtünme kuvveti vardır.

$$F = ma$$

dan

$$-(mg + kv) = m\frac{dv}{dt},$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{kv}{m} = -g,$$

$m = 10,\ k = \frac{1}{2}$ ve $g = 9.8$ olduğundan

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{20} = -9,8$$

bulunur. Bu denklem çözülürse

$$v = -196 + ce^{-\frac{t}{20}}$$

olur. $v(0) = 60$ olduğundan

$$c = 256$$

bulunur.

a. Cismin herhangi bir t anındaki hızı

$$v = -196 + 256e^{-\frac{t}{20}}$$

dır.

b. Cisim maksimum yüksekliğine çıktığında hızı sıfır olacağından, $v = 0$ için t yi bulmalıyız.

$$0 = -196 + 256e^{-\frac{t}{20}},$$

$$\begin{aligned} t &= 20 \ln \frac{256}{196} \\ &\simeq 5,34 \end{aligned}$$

metre yükseğe çıkar.

6. Üzerindeki ekipmanlarla birlikte 130 kilogram ağırlığındaki bir kişi paraşütle oldukça yüksek bir yerden atlıyor. Paraşüt açılmadan önce hava direnci hızın yarısına, paraşüt açıldıktan sonra ise hızın $\frac{5}{6}$ ine eşittir. Paraşüt 10 saniye sonra açıldığına göre, paraşüt açılmadan ve açıldıktan sonraki paraşütçünün hızlarını bulunuz.

Çözüm. Paraşüt açılmadan önce kuvvetler

$$\left.\begin{array}{r} F = mg - \frac{v}{2}, \\ F = ma = m\frac{dv}{dt} \end{array}\right\} \text{ ise } m\frac{dv}{dt} = mg - \frac{v}{2}$$

dır.

$$\begin{aligned} m\frac{dv}{dt} &= mg - \frac{v}{2}, \\ 130\frac{dv}{dt} &= 130g - \frac{v}{2}, \end{aligned}$$

bu denklemin çözümü

$$v = 260g + ce^{-\frac{t}{260}}$$

olur. İlk hız sıfır olduğundan $v(0) = 0$,

$$c = -260g$$

olur. Böylece paraşüt açılmadan önceki hız

$$v = 260g\left(1 - e^{-\frac{t}{260}}\right)$$

dır. 10 saniye sonraki hızı

$$v(10) = 260g\left(1 - e^{-\frac{1}{26}}\right)$$

dır.

10 saniye sonra paraşüt açıldığında ve hava direnci hızın $\frac{5}{6}$ ine eşit olduğuna göre diferansiyel denklem

$$130\frac{dv}{dt} = 130g - \frac{5v}{6}$$

olur. Bu denklemin çözümü

$$v = 156g + ce^{-\frac{t}{156}}$$

dır. Paraşüt açıldığında hızı $v(10) = 260g\left(1 - e^{-\frac{1}{26}}\right)$ olduğundan

$$260g\left(1 - e^{-\frac{1}{26}}\right) = 156g + ce^{-\frac{10}{156}},$$

$$c = \frac{104g - 260ge^{-\frac{1}{26}}}{e^{-\frac{10}{156}}}$$

bulunur. Böylece $t \geq 10$ için parşütçünün hızı

$$\begin{aligned} v(t) &= 156g + \left(\frac{104g - 260ge^{-\frac{1}{26}}}{e^{-\frac{10}{156}}}\right)e^{-\frac{t}{156}}, \\ &= 156g + \left(104g - 260ge^{-\frac{1}{26}}\right)e^{\frac{10-t}{156}} \end{aligned}$$

olur.

5. BÖLÜM

BİRİNCİ MERTEBE VE YÜKSEK DERECEDEN DİFERANSİYEL DENKLEMLER

Bu bölümde

$$f\left(x, y, y'\right) = 0$$

biçimindeki diferansiyel denklemler ele alınacaktır. Bu denklemlerin genel olarak y' üne göre çözülemediği kabul edilir. Bu nedenle bu tür denklemlere kapalı diferansiyel denklemler de denir. Genel halde bu tür denklemleri çözmek oldukça zordur.

5.1. Tekil Çözümler

$y' = p$ olmak üzere

$$f(x, y, p) = 0$$

ve

$$\frac{\partial f(x, y, p)}{\partial p} = 0$$

denklemleri arasında p yok edilerek elde edilen

$$P(x, y) = 0$$

denkleminin gösterdiği eğriye *diskriminant eğrisi* denir. Bu eğri verilen diferansiyel denklemi sağlıyor ise buna *tekil çözüm* veya *tekil integral* denir.

Çözümlü Sorular

1.

$$y = xy' + y'^2$$

diferansiyel denkleminin tekil çözümünü bulunuz.

Çözüm. $y' = p$ olsun.

$$\begin{cases} f(x,y,p) = 0 \Rightarrow y - xp - p^2 = 0 \\ \frac{\partial f(x,y,p)}{\partial p} = 0 \Rightarrow -x - 2p = 0 \end{cases}$$

denklemlerinden p yok edilirse

$$y = -\frac{x^2}{4}$$

bulunur. Bulduğumuz bu ifade verilen denklemi sağladığından tekil çözümdür.

2.

$$y = xy' - \sin y'$$

diferansiyel denkleminin tekil çözümünü bulunuz.

Çözüm. $y' = p$ olsun.

$$\begin{cases} f(x,y,p) = 0 \Rightarrow y - xp + \sin p = 0 \\ \frac{\partial f(x,y,p)}{\partial p} = 0 \Rightarrow -x + \cos p = 0 \end{cases}$$

denklemleri arasından p yok edilirse

$$y = x \arccos x - \sqrt{1 - x^2}$$

bulunur. Bulduğumuz bu ifade verilen denklemi sağladığından tekil çözümdür.

3.

$$y = 2xy' + 2x^2 + \frac{(y')^2}{4}$$

diferansiyel denkleminin tekil çözümünü bulunuz.

Çözüm. $y' = p$ olsun.

$$\begin{cases} f(x,y,p) = 0 \Rightarrow y - 2xp - 2x^2 - \frac{p^2}{4} = 0 \\ \frac{\partial f(x,y,p)}{\partial p} = 0 \Rightarrow -2x - \frac{p}{2} = 0 \end{cases}$$

denklemleri arasından p yok edilirse

$$y = -2x^2$$

bulunur. Bulduğumuz bu ifade verilen denklemi sağladığından tekil çözümdür.

4.

$$y = 2xy' + 3\left(y'\right)^2$$

diferansiyel denkleminin tekil çözümünü bulunuz.

Çözüm. $y' = p$ olsun.

$$\begin{cases} f\left(x, y, p\right) = 0 \Rightarrow y - 2xp - 3p^2 = 0 \\ \frac{\partial f(x,y,p)}{\partial p} = 0 \Rightarrow -2x - 6p = 0 \end{cases}$$

denklemleri arasından p yok edilirse

$$y = -\frac{x^2}{3}$$

bulunur. Bulduğumuz bu ifade verilen denklemi sağlamadığından tekil çözüm değildir. Yani verilen denklemin tekil çözümü yoktur.

5.

$$y = xy' + \cos(y')$$

diferansiyel denkleminin tekil çözümünü bulunuz.

Çözüm. $y' = p$ olsun.

$$\begin{cases} f(x, y, p) = 0 \Rightarrow y - xp - \cos p = 0 \\ \frac{\partial f(x,y,p)}{\partial p} = 0 \Rightarrow -x + \sin p = 0 \end{cases}$$

denklemleri arasından p yok edilirse

$$y = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$$

bulunur. Bulduğumuz bu ifade verilen denklemi sağlamadığından tekil çözüm değildir. Yani verilen denklemin tekil çözümü yoktur.

5.2. Zarf

$$F\left(x,y,c\right)=0$$

eğri ailesini göz önüne alalım. c parametresi değiştikçe $F\left(x,y,c\right)=0$ denklemi ile tanımlanan y fonksiyonları düzlemde farklı eğriler verir. Bu eğrilerin tümüne teğet olan bir z eğrisi varsa buna F eğri ailesinin *zarfı* denir.

Her zarf aynı zamanda bir tekil çözümdür. Fakat her tekil çözüm bir zarf değildir.

5.3. c-tekil yeri

$$f\left(x,y,y'\right)=0$$

denkleminin c-tekil yerleri

$$F\left(x,y,c\right)=0$$

ve

$$\frac{\partial F\left(x,y,c\right)}{\partial c}=0$$

eğrileri arasında c yok ediierek bulunan $C\left(x,y\right)=0$ denklemidir. Eğer $C\left(x,y\right)=0$ eğrisi verilen denklemin bütün üyelerine teğet ise bu aynı zamanda zarftır.

Şimdi zarf için yeter koşul verelim:

Teorem 5.3.1: Türevlenebilir $F(x, y, c) = 0$ eğri ailesinin c-tekil yerlerinin denklemi $C(x, y) = 0$ olsun. Eğer

$$\begin{vmatrix} F_x & F_{xc} \\ F_y & F_{yc} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ ve } F_{cc} \neq 0$$

ise $C(x, y) = 0$ eğrisi $F(x, y, c) = 0$ eğri ailesinin zarfıdır.

Çözümlü Sorular

1.

$$y = (x-c)^2 + 3$$

denklemi ile verilen eğrinin tekil yerlerinin denklemini bularak, bunun bir tekil çözüm olduğunu gösteriniz. Bu tekil çözüm bir zarf mıdır?

Çözüm.

$$\begin{cases} F(x,y,c) = 0 \Rightarrow y - (x-c)^2 - 3 = 0 \\ \frac{\partial F(x,y,c)}{\partial c} = 0 \Rightarrow 2(x-c) = 0 \end{cases}$$

denklemleri arasında c yok edilirse, tekil yerlerin denklemi olarak

$$y = 3$$

doğrusu bulunur. Bunun tekil çözüm olup olmadığını anlayabilmek için önce verilen eğri ailesinin diferansiyel denklemini bulalım. Buradan

$$y'^2 = 4(y-3)$$

diferansiyel denklemi bulunur.

$$y = 3$$

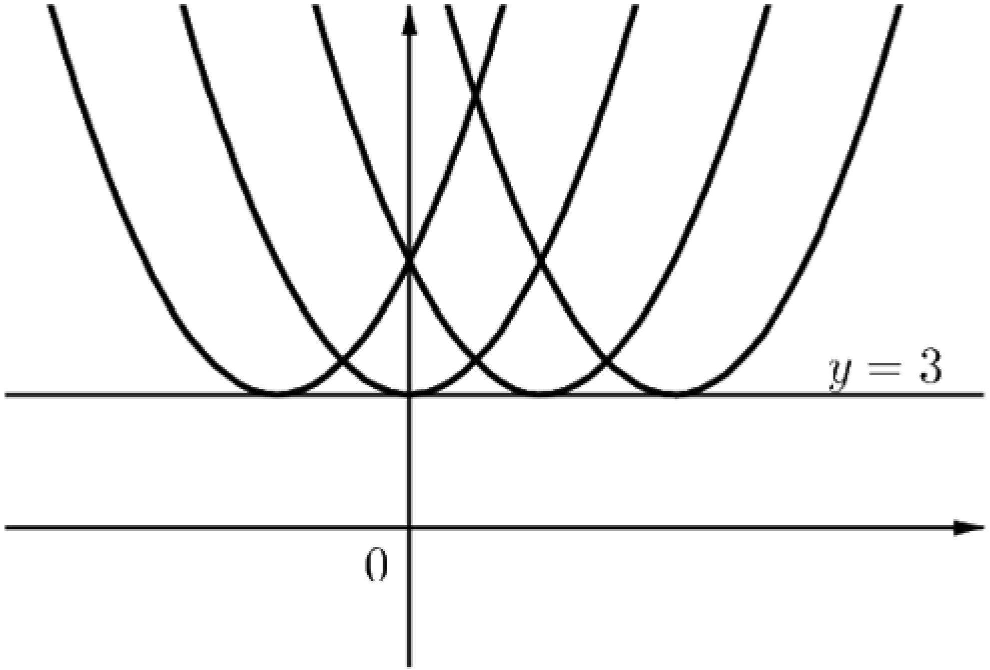
doğrusu bu diferansiyel denklemi sağladığından tekil çözümdür. Bu tekil çözümün zarf olup olmadığını anlayabilmek için bu tekil çözüm ile verilen denklemi ortak çözersek

$$(x-c)^2 = 0$$

denkleminden

$$x_1 = x_2 = c$$

olacağından tekil çözüm bir zarftır.



2.

$$y = cx + c^2$$

denklemi ile verilen eğrinin tekil yerlerinin denklemini bularak, bunun bir tekil çözüm olduğunu gösteriniz. Bu tekil çözüm bir zarf mıdır?

Çözüm. *1. Yol:*

$$\begin{cases} F(x,y,c) = 0 \Rightarrow y - cx - c^2 = 0 \\ \frac{\partial F(x,y,c)}{\partial c} = 0 \Rightarrow -x - 2c = 0 \end{cases}$$

denklemleri arasında c yok edilirse, tekil yerlerin denklemi olarak

$$y = -\frac{x^2}{4}$$

eğrisi bulunur. Bunun tekil çözüm olup olmadığını anlayabilmek için önce verilen eğri ailesinin diferansiyel denklemini bulalım. Buradan

$$y = xy' + y'^2$$

diferansiyel denklemi bulunur.

$$y = -\frac{x^2}{4}$$

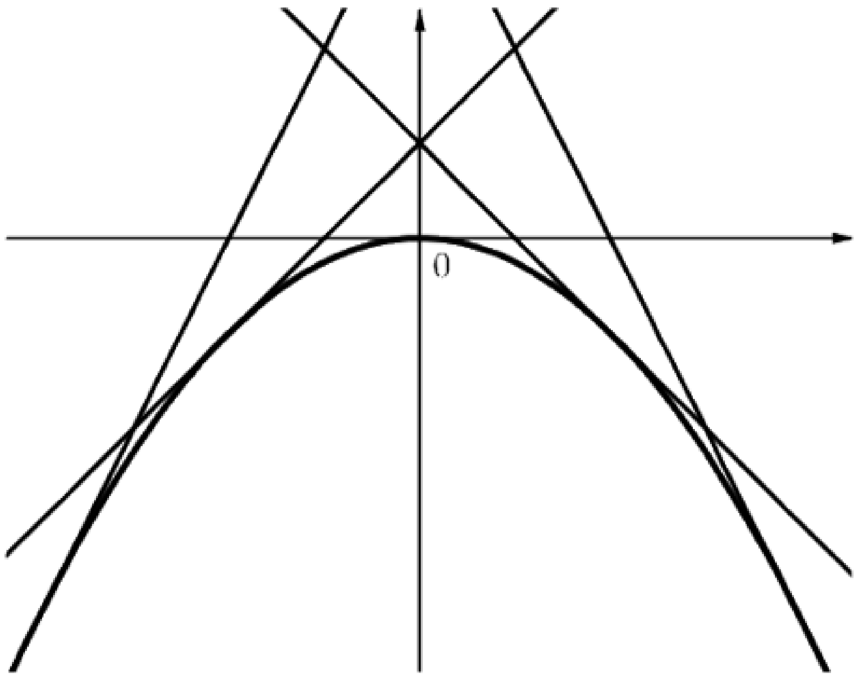
eğrisi bu diferansiyel denklemi sağladığından tekil çözümdür. Bu tekil çözümün zarf olup olmadığını anlayabilmek için bu tekil çözüm ile verilen denklemi ortak çözersek

$$(x+2c)^2 = 0$$

denkleminden

$$x_1 = x_2 = -2c$$

olacağından tekil çözüm bir zarftır.



2. Yol:

$$y = cx + c^2$$

eğri ailesinin c-tekil yerlerinin zarf olup olmadığını Teorem 5.3.1 yardımı ile gösterelim:

$$F(x, y, c) = y - cx - c^2 = 0$$

ve

$$\begin{vmatrix} F_x & F_{xc} \\ F_y & F_{yc} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -c & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \text{ ve } F_{cc} = -2 \neq 0$$

olduğundan

$$y = -\frac{x^2}{4}$$

tekil çözümü zarftır.

3.

$$(x-c)^2+(y-c)^2=1$$

denklemi ile verilen eğrinin tekil yerlerinin denklemini bularak, bunun bir tekil çözüm olduğunu gösteriniz. Bu tekil çözüm bir zarf mıdır?

Çözüm.

$$\begin{cases} F(x,y,c)=0 \Rightarrow (x-c)^2+(y-c)^2-1=0 \\ \frac{\partial F(x,y,c)}{\partial c}=0 \Rightarrow -2(x-c)-2(y-c)=0 \end{cases}$$

denklemleri arasında c yok edilirse, tekil yerlerin denklemi olarak

$$y=x+\sqrt{2} \text{ ve } y=x-\sqrt{2}$$

doğruları bulunur. Bunların tekil çözüm olup olmadıklarını anlayabilmek için önce verilen eğri ailesinin diferansiyel denklemini bulalım. Buradan

$$\left(y'^2+1\right)(x-y)^2=(y'+1)^2$$

diferansiyel denklemi bulunur.

$$y=x+\sqrt{2} \text{ ve } y=x-\sqrt{2}$$

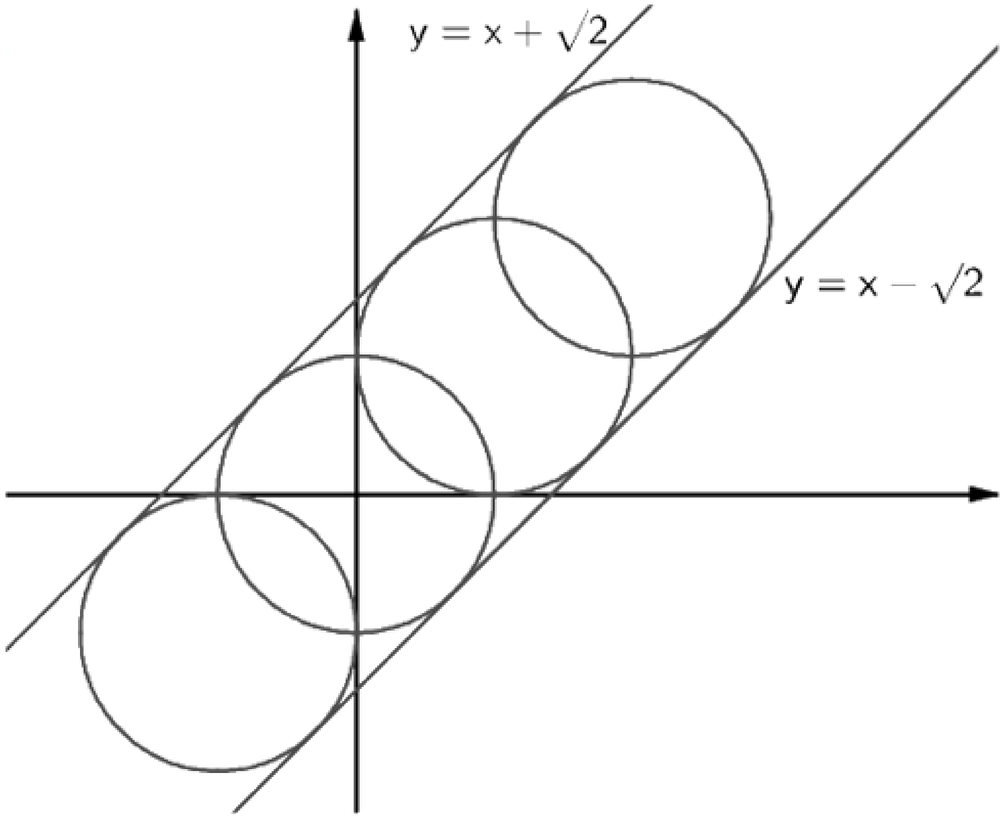
doğruları bu diferansiyel denklemi sağladığından tekil çözümdürler. Bu tekil çözümlerin zarf olup olmadıklarını anlayabilmek için bu tekil çözümler ile verilen denklemi ortak çözersek

$$(x-c)^2+\left(x+\sqrt{2}-c\right)^2=1$$

denkleminden

$$x_1=x_2$$

olacağından tekil çözüm bir zarftır.



4.

$$(x+2c)^2 + y^2 = c^2$$

denklemi ile verilen eğrinin tekil yerlerinin denklemini bularak, bunun bir tekil çözüm olduğunu gösteriniz. Bu tekil çözüm bir zarf mıdır?

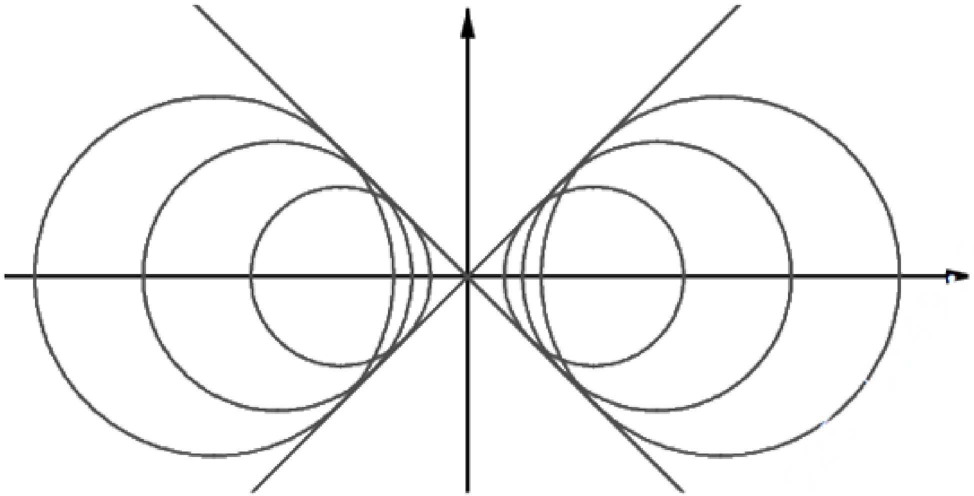
Çözüm.

$$\begin{cases} F(x,y,c) = 0 \Rightarrow (x+2c)^2 + y^2 - c^2 = 0 \\ \frac{\partial F(x,y,c)}{\partial c} = 0 \Rightarrow 4(x+2c) - 2c = 0 \end{cases}$$

denklemleri arasında c yok edilirse, tekil yerlerin denklemi olarak

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}} \text{ ve } y = -\frac{x}{\sqrt{3}}$$

doğruları bulunur. Bu doğruların, verilen eğri ailesinin diferansiyel denklemini sağladığı önceki örneklerde olduğu gibi gösterilebilir.



Alıştırmalar

1. $y = (x-c)^2 + 1$ denklemi ile verilen eğrinin tekil yerlerinin denklemini bularak, bunun bir tekil çözüm olduğunu gösteriniz. Bu tekil çözüm bir zarf mıdır?

(Cevap: $y = 1$, zarftır)

2. $(x-c)^2 + y^2 = 4$ denklemi ile verilen eğrinin tekil yerlerinin denklemini bularak, bunun bir tekil çözüm olduğunu gösteriniz. Bu tekil çözüm bir zarf mıdır?

(Cevap: $y = \pm 2$, zarftır)

3. $y = (2x+c)^3$ denklemi ile verilen eğrinin tekil yerlerinin denklemini bularak, bunun bir tekil çözüm olduğunu gösteriniz. Bu tekil çözüm bir zarf mıdır?

(Cevap: $y = 0$, zarf değil, dönüm noktalarının geometrik yeridir.)

4. $x^2 + c(x-3y) + c^2 = 0$ denklemi ile verilen eğrinin tekil yerlerinin denklemini bularak, bunun bir tekil çözüm olduğunu gösteriniz. Bu tekil çözüm bir zarf mıdır?

(Cevap: $y = x,\ y = -x/3$, zarftır)

5. $(x-c)^2 + y^2 = \frac{c^2}{2}$ denklemi ile verilen eğrinin tekil yerlerinin denklemini bularak, bunun bir tekil çözüm olduğunu gösteriniz. Bu tekil çözüm bir zarf mıdır?

(Cevap: $y = \pm x$, zarftır)

6. $(x-c)^2+(y+c)^2=4$ denklemi ile verilen eğrinin tekil yerlerinin denklemini bularak, bunun bir tekil çözüm olduğunu gösteriniz. Bu tekil çözüm bir zarf mıdır?

(Cevap: $y=-x+2\sqrt{2}$ ve $y=-x-2\sqrt{2}$, zarftır)

7. $x^2+(y-c)^2=9$ denklemi ile verilen eğrinin tekil yerlerinin denklemini bularak, bunun bir tekil çözüm olduğunu gösteriniz. Bu tekil çözüm bir zarf mıdır?

(Cevap: $x=\pm 3$, zarftır)

5.4. Yalnızca Türev İçeren Denklemler

$$f\left(y'\right) = 0$$

denkleminde $y' = p$ olmak üzere

$$f\left(p\right) = 0$$

biçimindeki denklemlerin en az bir tane

$$p = k$$

reel kökü varsa

$$y' = k \Rightarrow y = kx + c$$

olur. Buradan

$$k = \frac{y - c}{x}$$

dolayısıyla

$$f\left(\frac{y - c}{x}\right) = 0$$

Çözümlü Sorular

1.

$$y'^3 + y' + 2 = 0$$

denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. Verilen denklem

$$p^3 + p + 2 = 0$$

şeklinde cebirsel olduğundan en az bir tane reel kökü vardır.

$$p = k \Rightarrow y' = k \Rightarrow y = kx + c$$

buradan

$$k = \frac{y-c}{x}$$

dir. Genel çözüm

$$\left(\frac{y-c}{x}\right)^3 + \left(\frac{y-c}{x}\right) + 2 = 0$$

olur.

2.

$$y'^5 + y'^2 + 1 = 0$$

denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. Verilen denklem

$$p^5 + p^2 + 1 = 0$$

şeklinde cebirsel olduğundan en az bir tane reel kökü vardır.

$$p = k \Rightarrow y' = k \Rightarrow y = kx + c$$

buradan

$$k = \frac{y-c}{x}$$

dir. Genel çözüm

$$\left(\frac{y-c}{x}\right)^5 + \left(\frac{y-c}{x}\right)^2 + 1 = 0$$

olur.

3.

$$y'^9 + y'^2 + 7 = 0$$

denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. Verilen denklem

$$p^9 + p^2 + 7 = 0$$

şeklinde cebirsel olduğundan en az bir tane reel kökü vardır.

$$p = k \Rightarrow y' = k \Rightarrow y = kx + c$$

buradan

$$k = \frac{y-c}{x}$$

dir. Genel çözüm

$$\left(\frac{y-c}{x}\right)^9 + \left(\frac{y-c}{x}\right)^2 + 7 = 0$$

olur.

5.5. y' üne Göre Çözülebilen Denklemler

Çözümlü Sorular

1.

$$y'^2 + 3xy' + 2x^2 = 0$$

denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. $y' = p$ olmak üzere, verilen denklem

$$(p + x)(p + 2x) = 0$$

biçiminde çarpanlarına ayrılır. Her bir çarpan ayrı ayrı sıfıra eşitlenirse

$$y' + x = 0 \text{ ve } y' + 2x = 0$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler çözülürse

$$y + \frac{x^2}{2} + c = 0 \text{ ve } y + x^2 + c = 0$$

olup, genel çözüm

$$\left(y + \frac{x^2}{2} + c\right)(y + x^2 + c) = 0$$

dır.

2.

$$x^2 y'^2 - y^2 = 0$$

denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. $y' = p$ olmak üzere, verilen denklem

$$x^2 p^2 - y^2 = 0 \Rightarrow (xp - y)(xp + y) = 0$$

biçiminde çarpanlarına ayrılır. Her bir çarpan ayrı ayrı sıfıra eşitlenirse

$$xy' - y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0$$

ve

$$xy' + y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler çözülürse

$$y - cx = 0$$

ve

$$xy + c = 0$$

olup, genel çözüm

$$(y - cx)(xy + c) = 0$$

dır.

3.

$$y'^2 + y' \sin x + y' e^x = -e^x \sin x$$

denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. $y' = p$ olmak üzere, verilen denklem

$$p^2 + (\sin x + e^x)\, p + e^x \sin x = 0,$$

$$(p + \sin x)\,(p + e^x) = 0$$

biçiminde çarpanlarına ayrılır. Her bir çarpan ayrı ayrı sıfıra eşitlenirse

$$y' + \sin x = 0 \text{ ve } y' + e^x = 0$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler çözülürse

$$y - \cos x + c = 0 \text{ ve } y + e^x + c = 0$$

olup, genel çözüm

$$(y - \cos x + c)\,(y + e^x + c) = 0$$

dır.

4.

$$y'^3 - y'^2 - x^2 y' = -x^2$$

denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. $y' = p$ olmak üzere, verilen denklem

$$p^3 - p^2 - x^2 p + x^2 = 0,$$

$$p^2 (p-1) - x^2 (p-1) = 0,$$

$$(p-1)\left(p^2 - x^2\right) = 0,$$

$$(p-1)(p-x)(p+x) = 0$$

biçiminde çarpanlarına ayrılır. Her bir çarpan ayrı ayrı sıfıra eşitlenirse

$$y' - 1 = 0,\ y' - x = 0 \text{ ve } y' + x = 0$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler çözülürse

$$y - x + c = 0,\ y - \frac{x^2}{2} + c = 0 \text{ ve } y + \frac{x^2}{2} + c = 0$$

olup, genel çözüm

$$(y - x + c)\left(y - \frac{x^2}{2} + c\right)\left(y + \frac{x^2}{2} + c\right) = 0$$

dır.

5.

$$y'^3 + \left(e^{-x} - xy\right) y'^2 - xe^{-x} yy' = 0$$

denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. $y' = p$ olmak üzere, verilen denklem

$$p^3 + \left(e^{-x} - xy\right) p^2 - xe^{-x} yp = 0,$$

$$p\left[p^2 + \left(e^{-x} - xy\right) p - xe^{-x} y\right] = 0,$$

$$p\left(p + e^{-x}\right)(p - xy) = 0$$

biçiminde çarpanlarına ayrılır. Her bir çarpan ayrı ayrı sıfıra eşitlenirse

$$y' = 0,\ y' + e^{-x} = 0 \text{ ve } y' - xy = 0$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler çözülürse

$$y + c = 0,\ y - e^{-x} + c = 0 \text{ ve } y - e^{\frac{x^2}{2} + c} = 0$$

olup, genel çözüm

$$(y + c)\left(y - e^{--x} + c\right)\left(y - e^{\frac{x^2}{2} + c}\right) = 0$$

dır.

Alıştırmalar

1. $y'^2 + y' - 2 = 0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

(Cevap: $(y + 2x - c)(y - x + c) = 0$)

2. $y'^2 + xy' - 2x^2 = 0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

(Cevap: $\left(y - \frac{x^2}{2} - c\right)\left(y + x^2 - c\right) = 0$)

3. $(y' + 1)\left(y'^2 - 4x^2\right) = 0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

(Cevap: $(y + x - c)\left(y - x^2 - c\right)\left(y + x^2 - c\right) = 0$)

4. $y'^2 + (2x - \sin x)\, y' = 2x \sin x$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

(Cevap: $(y + \cos x - c)\left(y + x^2 - c\right) = 0$)

5. $y'^2 + (e^y - e^x)\, y' - e^{x+y} = 0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

(Cevap: $(e^{-y} - x + c)(y - e^x - c) = 0$)

5.6. x veya y yi İçermeyen Denklemler (Değişkenlerden Birini İçermeyen Denklemler)

$y' = p$ olmak üzere

$$F(x, p) = 0$$

şeklinde y yi içermeyen veya

$$G(y, p) = 0$$

şeklinde x i içermeyen denklemleri ele alalım.

1. Durum: $F(x, p) = 0$ şeklinde y yi içermeyen denklemi göz önüne alalım.

a) Eğer denklem p ye göre çözülebilirse, yani

$$p = f(x)$$

olarak yazılabilirse $y' = p$ yazıp integral alırsak

$$y' = f(x) \Rightarrow y = \int f(x)\, dx + c$$

şeklinde çözülür.

b) Bazı durumlarda denklem x e göre çözülebilirdir. Bu durumda

$$x = f_1(p) \tag{25}$$

dır. $y' = p$ den

$$dy = pdx \tag{26}$$

tir. (25) den $dx = f_1'(p)\,dp$ yazılabilir. Bu ifade (26) da yazılır ve integral alınırsa

$$dy = p f_1'(p)\,dp,$$

$$y = \int p f_1'(p)\,dp + c$$

elde edilir. Bu durumda

$$\begin{cases} x = f_1(p), \\ y = \int p f_1'(p)\,dp + c \end{cases}$$

şeklinde genel çözüm parametrik olarak bulunur. Bu ifadelerden p yi yok edilebilirsek genel çözümün kartezyen koordinatlardaki ifadesini buluruz.

c) Son olarak, $F(x,p)=0$ denkleminin hiç bir değişkene göre çözülemediğini varsayalım. Bu durumda

$$\begin{cases} x=\alpha(t), \\ p=\beta(t) \end{cases}$$

olarak yazalım. Bu ifadeler (26) te yazılırsa

$$dy=\beta(t)\,\alpha'(t)\,dt \Rightarrow y=\int \beta(t)\,\alpha'(t)\,dt+c$$

olur. Bu durumda

$$\begin{cases} x=\alpha(t), \\ y=\int \beta(t)\,\alpha'(t)\,dt+c \end{cases}$$

şeklinde genel çözüm parametrik olarak bulunur.

2. Durum: $G(y,p)=0$ şeklinde x i içermeyen denklemi göz önüne alalım.

a) Eğer denklem y ye göre çözülebilirse, yani

$$y=g(p)$$

olarak yazılabilirse $y'=p$ den

$$dx=\frac{dy}{p}=\frac{g'(p)\,dp}{p}$$

şeklinde yazıp integral alırsak

$$x=\int\frac{g'(p)\,dp}{p}+c$$

olur. Buradan

$$\begin{cases} x=\int\frac{g'(p)dp}{p}+c, \\ y=g(p) \end{cases}$$

şeklinde genel çözüm parametrik olarak bulunur.

b) Bazı durumlarda denklem p ye göre çözülebilirdir. Bu durumda

$$p = g_1(y)$$

dır. Buradan $y' = p$ olduğundan

$$y' = g_1(y),$$

$$\frac{dy}{g_1(y)} = dx,$$

$$x = \int \frac{dy}{g_1(y)} + c$$

genel çözümü bulunur.

c) Son olarak, $G(y,p) = 0$ denkleminin hiçbir değişkene göre çözülemediğini varsayalım. Bu durumda

$$\begin{cases} y = \alpha(t), \\ p = \beta(t) \end{cases}$$

olarak yazalım. Bu ifadeler (26) da yazılırsa

$$\alpha'(t)\,dt = \beta(t)\,dx,$$

$$\frac{\alpha'(t)\,dt}{\beta(t)} = dx,$$

$$x = \int \frac{\alpha'(t)\,dt}{\beta(t)} + c$$

olur. Bu durumda

$$\begin{cases} x = \int \frac{\alpha'(t)dt}{\beta(t)} + c, \\ y = \alpha(t) \end{cases}$$

şeklinde genel çözüm parametrik olarak bulunur.

Çözümlü Sorular

1.

$$x = y' + \sin y'$$

denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. Bu denklem y içermeyen tiptendir. $y' = p$ yazılırsa

$$x = p + \sin p$$

olur. $y' = p \Longrightarrow dy = pdx$ olduğundan

$$dy = p\,(1 + \cos p)\,dp,$$

$$y = \int p\,(1 + \cos p)\,dp + c,$$

$$y = \frac{p^2}{2} + p\sin p + \cos p + c$$

bulunur. Buradan genel çözüm parametrik şekilde

$$\begin{cases} x = p + \sin p, \\ y = \frac{p^2}{2} + p\sin p + \cos p + c \end{cases}$$

olarak bulunur.

2.

$$y'^2 = xy' + x^3$$

denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. Bu denklem y içermeyen tiptendir. $p = tx$ alırsak

$$t^2x^2 = tx^2 + x^3,$$

$$x = t^2 - t$$

olur. $p = tx$ olduğundan

$$p = t^3 - t^2$$

olur. $y' = p \Longrightarrow dy = pdx$ ten

$$dy = \left(t^3 - t^2\right)(2t - 1)\,dt,$$

$$y = \frac{2t^5}{5} - \frac{3t^4}{4} + \frac{t^3}{3} + c$$

bulunur. Buradan genel çözüm parametrik şekilde

$$\begin{cases} x = t^2 - t, \\ y = \frac{2t^5}{5} - \frac{3t^4}{4} + \frac{t^3}{3} + c \end{cases}$$

olarak bulunur.

3.

$$y = y' + y'^3$$

denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. Bu denklem x içermeyen tiptendir. $y' = p$ yazılırsa

$$y = p + p^3$$

olur. $y' = p \Longrightarrow \frac{dy}{p} = dx$ ten

$$\frac{1+3p^2}{p}dp = dx$$

integral alınırsa

$$\int \frac{1+3p^2}{p}dp + c = x,$$

$$x = \ln p + \frac{3p^2}{2} + c$$

bulunur. Buradan genel çözüm parametrik şekilde

$$\begin{cases} x = \ln p + \frac{3p^2}{2} + c, \\ y = p + p^3 \end{cases}$$

olarak bulunur.

4.

$$y'^2 = yy' + y^3$$

denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm. Bu denklem x içermeyen tiptendir. $p = ty$ alırsak

$$t^2y^2 = ty^2 + y^3,$$

$$y = t^2 - t$$

olur. $p = ty$ olduğundan

$$p = t^3 - t^2$$

olur. $y' = p \Longrightarrow dy = pdx$ ten

$$(2t-1)\,dt = \left(t^3 - t^2\right)dx,$$

$$\frac{(2t-1)\,dt}{t^3 - t^2} = dx,$$

$$\begin{aligned} x &= \int \frac{(2t-1)\,dt}{t^3 - t^2} + c \\ &= \int \left(-\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{t-1}\right) dt + c \\ &= -\frac{1}{t} + \ln\left|\frac{t-1}{t}\right| + c \end{aligned}$$

bulunur. Buradan genel çözüm parametrik şekilde

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{t} + \ln\left|\frac{t-1}{t}\right| + c, \\ y = t^2 - t \end{cases}$$

olarak bulunur.