3. BÖLÜM

BİRİNCİ MERTEBE VE BİRİNCİ DERECEDEN DENKLEMLER İÇİN VARLIK VE TEKLİK TEOREMLERİ

- Şimdiye kadar birinci mertebe, birinci dereceden

$$y' = f(x, y)$$

diferansiyel denklemi için bazı çözüm yöntemleri verdik.

- Fakat pek çok problemin açık çözümünü bulmak mümkün olmayabilir.
- Bu nedenle bu bölümde diferansiyel denklemlerin çözümlerinin varlık ve tekliklerini ifade eden teoremleri vereceğiz.

3.1. Çözümün Lokal Varlığı

- Çözümün küçük bir aralıkta varlığı **lokal (yerel) varlık** olarak tanımlanmaktadır.
- Aşağıdaki teoremlerin ifadelerinde de görüleceği üzere çözümün varlığı

$$[x_0 - h,\, x_0 + h]$$

aralığında verilmiştir.

Teorem (Varlık Teoremi)

- $f(x, y)$ fonksiyonu

$$D = \{(x, y) : |x - x_0| \leq a,\ |y - y_0| \leq b\}$$

bölgesinde sürekli (kapalı aralıkta sürekli fonksiyonlar sınırlı olduğundan $|f(x, y)| \leq M$ olur.) ise

- $h = \min\left\{a,\ \frac{b}{M}\right\}$ olmak üzere

başlangıç değer problemine bakalım:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

Bu başlangıç değer probleminin

$$[x_0 - h,\ x_0 + h]$$

aralığında **en az bir çözümü vardır**.

Örnek 3.1.1

Verilen problem:

$$y' = 2\sqrt{y}; \quad y(4) = 0$$

Bu problemin çözümü var mıdır?

Çözüm:

- $f(x, y) = 2\sqrt{y}$ fonksiyonu, $(4, 0)$ noktasını içeren D bölgesinde sürekli ve sınırlıdır.
- Bu nedenle verilen problemin **en az bir çözümü vardır**.

Gerçekten de:

$$y = (x - 4)^2$$

fonksiyonu, verilen problemin bir çözümüdür.

Ayrıca:

$$y = 0$$

fonksiyonu da verilen problemin bir diğer çözümüdür.

Sonuç olarak:

- **Verilen problemin birden fazla çözümü vardır**.

Teorem (Varlık ve Teklik Teoremi) (Cauchy-Picard Teoremi)

- $f(x,y)$ ve $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ fonksiyonları,

$$D = \{(x,y) : |x - x_0| \leq a,\ |y - y_0| \leq b\}$$

bölgesinde sürekli ise
(kapalı aralıkta sürekli fonksiyonlar sınırlı olduğundan $|f(x,y)| \leq M$ ve $\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| \leq N$ olur.)

- Burada:

$$M = \max_D |f(x,y)|, \quad N = \max_D \left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|$$

olarak alınır.

- Ayrıca:

$$h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$$

olarak seçilirse,

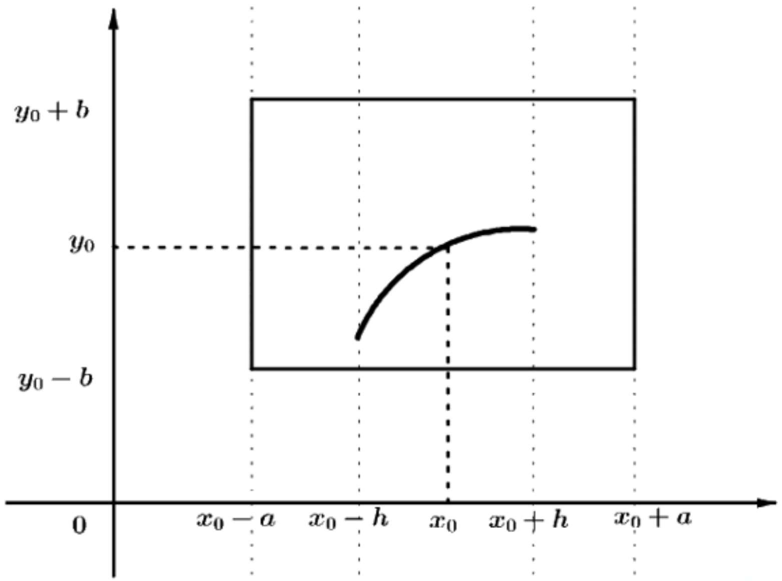
Başlangıç değer problemi:

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

için

$$[x_0 - h,\ x_0 + h]$$

aralığında **bir tek çözüm** vardır.



Açıklama:

- Varlık ve teklik teoremini dikkate aldığımızda, yukarıda verdiğimiz

$$\begin{cases} y' = 2\sqrt{y} \\ y(4) = 0 \end{cases}$$

probleminin çözümünün **tek olmamasının** sebebi:

- $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{y}}$ türevinin
- $(4,0)$ noktasını içeren D bölgesinde **sürekli olmamasıdır**.

Not 3.1.1

(i) Varlık ve teklik teoreminde

$$\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| \le N$$

koşulu yerine, tüm

$$(x, y_1), (x, y_2) \in D$$

için ve $N > 0$ olmak üzere:

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \le N|y_2 - y_1|$$

şeklinde ifade edilen **Lipschitz koşulu** konulabilir.

Aslında,

$$\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right| \le N$$

koşulu, Lipschitz koşulundan **daha ağır bir koşuldur**.

Çünkü:

- Lipschitz koşulunu sağlayan,
- Ancak türevi olmayan fonksiyonlar da vardır.

Ek Açıklamalar ve Örnekler

Örneğin,
$f(x, y) = |y|$ fonksiyonu,
$y = 0$ noktasında türevli olmadığı halde, $N = 1$ için:

$$||y_2| - |y_1|| \leq |y_2 - y_1|$$

eşitsizliği sağlandığından **Lipschitz koşulunu** sağlar.

(ii) Fonksiyonun sınırlı türeve sahip olması, Lipschitz koşulunu sağlaması için yeterlidir.

(iii) Bu teorem Cauchy'ye aittir; ancak ispatında kullanılan **ardışık yaklaşımlar yöntemi** Picard'a aittir.

(iv) Bu teorem, çözümün **varlık ve teklik** için **yeterli koşul** sunar.
Ancak, bu koşullar **gerekli koşullar değildir**.
Yani teoremdeki şartlar sağlanmasa da çözüm olabilir.

Örneğin, verilen problem:

$$y' = \frac{x}{y}, \quad y(0) = 0$$

bu probleme ait fonksiyon:

$$f(x, y) = \frac{x}{y}$$

$(0, 0)$ noktasını içeren D bölgesinde sürekli olmadığı halde, çözümler:

$$y = x \quad \text{ve} \quad y = -x$$

şeklindedir.

3.2. Çözümün Global Varlığı

Teorem

- $f(x, y)$ fonksiyonu

$$D = \{(x, y) : x \in [a, b],\ y \in (-\infty, \infty)\}$$

bölgesinde sürekli ise ve

- y değişkenine göre, tüm

$$(x, y_1), (x, y_2) \in D$$

ve $N > 0$ için

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq N|y_2 - y_1|$$

eşitsizliği sağlanıyorsa (yani **global Lipschitz koşulu** sağlanıyorsa),

o zaman

başlangıç değer problemi:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

için $x_0 \in (a, b)$ olmak üzere, $[a, b]$ aralığında tanımlanmış **bir tek çözüm** vardır.

Örnek 3.2.1

Verilen Cauchy problemi:

$$y' = 4y, \quad y(2) = 3$$

Bu problemin çözümünün **varlık ve teklik** durumunu inceleyelim.

Çözüm:

Fonksiyon:

$$f(x, y) = 4y$$

Bu fonksiyon, $(2, 3)$ noktasını içeren:

$$D = \{(x, y) : |x - 2| \leq a,\ |y - 3| \leq b\}$$

veya açık yazımıyla:

$$D = \{(x, y) : 2 - a \leq x \leq 2 + a, \quad 3 - b \leq y \leq 3 + b\}$$

bölgesinde sürekli ve sınırlıdır.

Bu yüzden verilen problemin **en az bir çözümü vardır**.

Ayrıca:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 4$$

fonksiyonu da D bölgesinde sürekli ve sınırlıdır. (Yani Lipschitz koşulu sağlanır.)

Dolayısıyla bu çözüm **tektir**.

Verilen diferansiyel denklem çözülür ve $y(2) = 3$ başlangıç koşulu kullanılırsa:

$$y = 3e^{4(x-2)}$$

çözümü bulunur.

Bu çözüm D bölgesinde olduğundan **lokal çözümdür**.

Global Çözüm İncelemesi:

Fonksiyon yine:

$$f(x, y) = 4y$$

Bu fonksiyon:

$$D = \{(x, y) : x \in [a, b], \quad y \in (-\infty, \infty)\}$$

bölgesinde sürekli ve tüm:

$$(x, y_1), (x, y_2) \in D$$

için

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| = |4y_2 - 4y_1| = 4|y_2 - y_1|$$

eşitsizliği sağlanır.

Dolayısıyla **global Lipschitz koşulu** sağlanır.

Böylece **global çözüm** vardır.

Denklemin genel çözümü:

$$y = ce^{4x}$$

şeklindedir ve bütün bölgede tanımlıdır.

Örnek 3.2.2

Verilen Cauchy problemi:

$$y' = y^2, \quad y(2) = 1$$

Bu problemin çözümünün **varlık ve teklik** durumunu inceleyelim.

Çözüm:

Fonksiyon:

$$f(x, y) = y^2$$

Bu fonksiyon, $(2, 1)$ noktasını içeren:

$$D = \{(x, y) : |x - 2| \leq a, \quad |y - 1| \leq b\}$$

yani açık yazımıyla:

$$D = \{(x, y) : 2 - a \leq x \leq 2 + a, \quad 1 - b \leq y \leq 1 + b\}$$

bölgesinde sürekli ve sınırlıdır.

Bu yüzden verilen problemin **en az bir çözümü vardır**.

Ayrıca:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2y$$

Bu türev fonksiyonu da D bölgesinde sürekli ve sınırlıdır. (Lipschitz koşulu sağlanır.)

Dolayısıyla bu çözüm **tektir**.

Denklem çözülüp, başlangıç koşulu $y(2) = 1$ kullanılırsa:

$$y = \frac{1}{3 - x}$$

çözümü elde edilir.

Bu çözüm D bölgesinde olduğundan **lokal çözümdür**.

Global Çözüm İncelemesi:

Fonksiyon yine:

$$f(x,y) = y^2$$

Bölge:

$$D = \{(x,y) : x \in [a,b], \quad y \in (-\infty, \infty)\}$$

Bu fonksiyon burada sürekli olmasına rağmen,
Lipschitz koşulu şu şekilde incelenir:

$$|f(x,y_2) - f(x,y_1)| = |y_2^2 - y_1^2| = |y_2 + y_1| \cdot |y_2 - y_1|$$

Burada:

$$N = |y_2 + y_1|$$

sınırlı değildir.

Çünkü $(-\infty, \infty)$ aralığında N sonsuza gidebilir.

Bu nedenle **global Lipschitz koşulu sağlanmaz**.

Gerçekten de, çözüm:

$$y = \frac{1}{3-x}$$

ve bu çözüm $x = 3$ noktasında **tekil hale** gelir.

Yani:

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{1}{3-x} = +\infty$$

Bu olaya **çözümün patlaması (blow up)** denir.

3.3. Picard Ardışık Yaklaşımlar Yöntemi

Başlangıç değer problemi:

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

için x_0 noktasından x noktasına kadar integral alınırsa:

$$dy = f(x, y)dx$$

her iki tarafın integrali:

$$\int_{x_0}^{x} dy = \int_{x_0}^{x} f(x, y)\, dx$$

olur. Bu da şu şekilde yazılır:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))\, dx$$

Burada integralin üst sınırı x olduğundan, integrali t değişkenine göre yazarsak:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\, dt$$

Bu integral denklemi, integralin üst sınırı değişken olduğu için bir **Volterra integral denklemi** olarak adlandırılır.

Bundan yola çıkarak çözüm bulmak için bir **iterasyon** tanımlanır:

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\, dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

İlk birkaç adım şöyle yazılır:

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0(t))\, dt$$

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))\, dt$$

$$y_3 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_2(t))\, dt$$

Genel olarak:

$$y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\, dt$$

Sonuç olarak:

- $n \to \infty$ iken $\{y_n(x)\}$ dizisi gerçek çözüme yaklaşır.
- Bu diziye **Picard yaklaşımlar dizisi** denir.
- Yöntemin adı da **Picard ardışık yaklaşımlar yöntemi**dir.

Örnek 3.3.1

Başlangıç değer problemi:

$$y' = y, \quad y(0) = 1$$

bu problemi **ardışık yaklaşımlar yöntemi** ile çözünüz.

Çözüm:

Burada:

- $y(0) = 1$
- $x_0 = 0$
- $y_0 = 1$
- $f(x, y) = y$

İlk iterasyon:

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0(t))\,dt$$

$$= 1 + \int_0^x 1\,dt$$

$$= 1 + x$$

İkinci iterasyon:

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))\,dt$$

$$= 1 + \int_0^x (1 + t)\,dt$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

Üçüncü iterasyon:

$$y_3 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_2(t))\,dt$$

$$= 1 + \int_0^x \left(1 + t + \frac{t^2}{2}\right)\,dt$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

Bu işlemi devam ettirirsek:

$$y_n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

bulunur.

Son olarak:

$$y = \lim_{n \to \infty} y_n$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} \right)$$

$$= e^x$$

çözümüne ulaşılır.

Çözümlü Sorular

1.

Verilen Cauchy problemi:

$$y' = x^2 + y^2, \quad y(0) = 0$$

Bu problemin çözümünün **varlık ve teklik** durumunu inceleyiniz.

Çözüm:

Fonksiyon:

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

Bu fonksiyon, $(0, 0)$ noktasını içeren:

$$D = \{(x, y) : |x| \le a, \ |y| \le b\}$$

bölgesinde **sürekli** ve **sınırlıdır**.

Bu yüzden, verilen problemin **en az bir çözümü vardır**.

Ayrıca, türev fonksiyon:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 2y$$

D bölgesinde **sürekli** ve **sınırlıdır** (yani **Lipschitz koşulu** sağlanır).

Bundan dolayı, çözüm **tektir**.

2.

Verilen Cauchy problemi:

$$y' = x \sin y, \quad y(1) = 2$$

Bu problemin çözümünün **varlık ve teklik** durumunu inceleyiniz.

Çözüm:

Fonksiyon:

$$f(x, y) = x \sin y$$

Bu fonksiyon, $(1, 2)$ noktasını içeren:

$$D = \{(x, y) : |x - 1| \leq a, \ |y - 2| \leq b\}$$

bölgesinde **sürekli** ve **sınırlıdır**.

Bu yüzden, verilen problemin **en az bir çözümü vardır**.

Ayrıca, türev fonksiyon:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = x \cos y$$

D bölgesinde **sürekli** ve **sınırlıdır** (yani **Lipschitz koşulu** sağlanır).

Dolayısıyla çözüm **tektir**.

3.

Verilen Cauchy problemi:

$$y' = \sqrt{y-3}, \quad y(1) = 3$$

Bu problemin çözümü var mıdır?

Çözüm:

Fonksiyon:

$$f(x, y) = \sqrt{y-3}$$

Bu fonksiyon, $(1, 3)$ noktasını içeren D bölgesinde **sürekli** ve **sınırlıdır**.

Bu yüzden, verilen problemin **en az bir çözümü vardır**.

Ayrıca, türev fonksiyon:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y-3}}$$

Ancak bu türev, $(1,3)$ noktasını içeren D bölgesinde **sürekli değildir**.

Bu nedenle çözüm **tek değildir**.

Gerçekten de, verilen problemin iki çözümü vardır:

- Birincisi:

$$y = \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 3$$

- İkincisi:

$$y = 3$$

Sonuç olarak:

> **Verilen problemin birden fazla çözümü vardır.**

4.

Verilen başlangıç değer problemi:

$$y' = 2xy, \quad y(0) = 3$$

bu problemi **ardışık yaklaşımlar yöntemi** ile çözünüz.

Çözüm:

Burada:

- $y(0) = 3$
- $x_0 = 0$
- $y_0 = 3$
- $f(x, y) = 2xy$

İlk iterasyon:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0(t))\, dt \\
&= 3 + \int_0^x 6t\, dt \\
&= 3 + 3x^2
\end{aligned}
$$

İkinci iterasyon:

$$
\begin{aligned}
y_2 &= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))\, dt \\
&= 3 + \int_0^x 2t(3 + 3t^2)\, dt \\
&= 3 + \int_0^x (6t + 6t^3)\, dt \\
&= 3 + 3x^2 + \frac{3x^4}{2}
\end{aligned}
$$

Üçüncü iterasyon:

$$y_3 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_2(t))\, dt$$

$$= 3 + \int_0^x 2t \left(3 + 3t^2 + \frac{3t^4}{2}\right) dt$$

$$= 3 + \int_0^x (6t + 6t^3 + 3t^5)\, dt$$

$$= 3 + 3x^2 + \frac{3x^4}{2} + \frac{3x^6}{6}$$

Bu işlemi devam ettirirsek:

$$y_n = 3 + 3x^2 + \frac{3x^4}{2} + \frac{3x^6}{6} + \cdots + \frac{3x^{2n}}{n!}$$

yani:

$$y_n = 3\left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{n!}\right)$$

Son olarak:

$$y = \lim_{n\to\infty} y_n$$

$$= 3\left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots\right)$$

$$= 3e^{x^2}$$

çözümüne ulaşılır.

5.

Verilen başlangıç değer problemi:

$$y' = y^2, \quad y(1) = -1$$

a. Bir tek çözümü olduğunu gösteriniz.

b. Varlık ve teklik teoremine göre çözümün olduğu en geniş aralığı bulunuz.

c. Çözümü ardışık yaklaşımlar yöntemi ile bulunuz.

Çözüm

---

a.

Fonksiyon:

$$f(x, y) = y^2$$

Bu fonksiyon, $(1, -1)$ noktasını içeren:

$$D = \{(x, y) : |x - 1| \le a, \quad |y + 1| \le b\}$$

bölgesinde **sürekli** ve **sınırlıdır**.

Dolayısıyla problemin **en az bir çözümü vardır**.

Ayrıca:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2y$$

türevi de D bölgesinde **sürekli** ve **sınırlıdır** (Lipschitz koşulu sağlanır).

Bu nedenle çözüm **tektir**.

---

b.

D bölgesi:

$$D = \{(x,y) : 1-a \le x \le 1+a, \quad -1-b \le y \le -1+b\}$$

bir dikdörtgendir.

Fonksiyonun maksimum değeri:

$$M = \max_D |f(x,y)| = \max_D |y^2| = (b+1)^2$$

olur.

Aradaki h değeri:

$$h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\} = \min\left\{a, \frac{b}{(b+1)^2}\right\}$$

şeklindedir.

Burada:

- $\frac{b}{(b+1)^2}$ ifadesi maksimum değerini $b = 1$ için alır ve:

$$\frac{b}{(b+1)^2} = \frac{1}{4}$$

olur.

Dolayısıyla:

- Eğer $a \geq \frac{1}{4}$ ise:

$$h = \frac{1}{4}$$

- Eğer $a < \frac{1}{4}$ ise:

$$h = a$$

Sonuçta her iki durumda da:

$$h \leq \frac{1}{4}$$

En geniş aralık:

$$|x-1| \leq h$$

Yani:

$$\frac{3}{4} \leq x \leq \frac{5}{4}$$

bulunur.

---

c.

Başlangıç değerlerimiz:

- $x_0 = 1$
- $y_0 = -1$
- $f(x,y) = y^2$

İlk iterasyon:

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0(t))\, dt$$

$$= -1 + \int_{1}^{x} 1\, dt$$

$$= -1 + (x-1)$$

İkinci iterasyon:

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))\, dt$$

$$= -1 + \int_{1}^{x} (-1 + (t-1))^2\, dt$$

$$= -1 + (x-1) - (x-1)^2 + \frac{(x-1)^3}{3}$$

Bu işlem devam ettirilirse:

$$y_n = -1 + (x-1) - (x-1)^2 + \frac{(x-1)^3}{3} - \cdots$$

elde edilir.

Limit alınırsa:

$$y = \lim_{n\to\infty} y_n = \frac{-1}{x}$$

sonucuna ulaşılır.

6.

$p \in \mathbb{R}$ olmak üzere verilen Cauchy problemi:

$$y' = y^p, \quad y(4) = 1$$

Çözümün varlık ve teklik durumunu inceleyiniz.

Çözüm

Fonksiyon:

$$f(x, y) = y^p$$

Bu fonksiyon, $(4, 1)$ noktasını içeren:

$$D = \{(x, y) : |x - 4| \leq a, \quad |y - 1| \leq b\}$$

bölgesinde **sürekli** ve **sınırlıdır**.

Dolayısıyla problemin **en az bir çözümü vardır**.

Ayrıca türev:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = py^{p-1}$$

D bölgesinde **sürekli** ve **sınırlıdır** (Lipschitz koşulu sağlanır).

Bu nedenle çözüm **tektir**.

Şimdi çözümü bulalım:

Denklem değişkenlerine ayrılır:

$$\frac{dy}{dx} = y^p \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y^p} = \int dx$$

Durum 1: $p = 1$ ise

$$\ln y = x + c$$

Başlangıç koşulu $y(4) = 1$ uygulanırsa:

$$\ln 1 = 4 + c \quad \Rightarrow \quad c = -4$$

Bu durumda:

$$y = e^{x-4}$$

Bu çözüm **globaldir**.

Durum 2: $p \neq 1$ ise

$$\frac{y^{-p+1}}{-p+1} = x + c$$

Başlangıç koşulu $y(4) = 1$ uygulanınca:

$$\frac{1}{-p+1} = 4 + c \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{-p+1} - 4$$

Çözüm:

$$y^{-p+1} = x(1-p) + (4p-3)$$

Global Olup Olmama Durumu:

- $p < 1$ ise $-p + 1 > 0$ olur, çözüm **global** olur.
- $p > 1$ ise $-p + 1 < 0$ olur, çözüm **global değildir**, **patlama (blow-up)** olur.

Çünkü:

$$\lim_{x \to \frac{4p-3}{p-1}^-} \left(\frac{1}{x(1-p) + (4p-3)} \right) = +\infty$$

olur.

Sonuç

Verilen denklem için:

$$y' = y^p$$

- $p \leq 1$ ise **global çözüm** vardır.
- $p > 1$ ise **çözüm patlar (blow-up olur)**.

Alıştırmalar

1.

Verilen başlangıç değer problemi:

$$y' = x + y, \quad y(0) = 1$$

Bu problemi **ardışık yaklaşımlar yöntemi** ile çözünüz.

(Cevap: $y = 2e^x - x - 1$)

2.

Verilen başlangıç değer problemi:

$$y' = 2x - y, \quad y(0) = 1$$

Bu problemi **ardışık yaklaşımlar yöntemi** ile çözünüz.

(Cevap: $y = 3e^{-x} + 2x - 2$)

3.

Verilen başlangıç değer problemi:

$$y' = x + y^2, \quad y(0) = 1$$

Bu problemi **ardışık yaklaşımlar yöntemi ile ikinci basamağa kadar** hesaplayınız.

(Cevap:

$$y_2(x) = 1 + x + \frac{3x^2}{2} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{20}$$

)

4.

Verilen başlangıç değer problemi:

$$y' = 2xy - 2x, \quad y(0) = 2$$

Bu problemi **ardışık yaklaşımlar yöntemi** ile çözünüz.

(Cevap: $y = e^{x^2} + 1$)