

Resumen de algoritmos para torneos de programación

Andrés Mejía

24 de febrero de 2012

Índice

1. Plantilla	2	6. Strings	13
2. Teoría de números	2	6.1. Algoritmo de Knuth-Morris-Pratt (KMP)	13
2.1. Big mod	2	6.2. Algoritmo Z	14
2.2. Criba de Eratóstenes	3	6.3. Algoritmo de Aho-Corasick	14
2.3. Divisores de un número	3	6.4. Suffix arrays y longest common prefix	16
2.4. Propiedades modulares	3	7. Geometría	18
3. Combinatoria	3	7.1. Identidades trigonométricas	18
3.1. Cuadro resumen	3	7.2. Área de un polígono	18
3.2. Combinaciones, coeficientes binomiales, triángulo de Pascal	4	7.3. Centro de masa de un polígono	18
3.3. Permutaciones con elementos indistinguibles	4	7.4. Convex hull: Graham Scan	18
3.4. Desordenes, desarreglos o permutaciones completas	4	7.5. Convex hull: Andrew's monotone chain	19
4. Grafos	4	7.6. Mínima distancia entre un punto y un segmento	20
4.1. Algoritmo de Dijkstra	4	7.7. Mínima distancia entre un punto y una recta	20
4.2. Minimum spanning tree: Algoritmo de Prim	5	7.8. Determinar si un polígono es convexo	20
4.3. Minimum spanning tree: Algoritmo de Kruskal + Union-Find	5	7.9. Determinar si un punto está dentro de un polígono convexo	21
4.4. Algoritmo de Floyd-Warshall	6	7.10. Determinar si un punto está dentro de un polígono cualquiera	21
4.5. Algoritmo de Bellman-Ford	6	7.11. Hallar la intersección de dos rectas	22
4.6. Puntos de articulación	7	7.12. Hallar la intersección de dos segmentos de recta	22
4.7. Máximo flujo: Método de Ford-Fulkerson, algoritmo de Edmonds-Karp	8	7.13. Determinar si dos segmentos de recta se intersectan o no	23
4.8. Máximo flujo para grafos dispersos usando Ford-Fulkerson	9	7.14. Centro del círculo que pasa por 3 puntos	24
4.9. Componentes fuertemente conexas: Algoritmo de Tarjan	11	8. Estructuras de datos	24
4.10. 2-Satisfiability	11	8.1. Árboles de Fenwick ó Binary indexed trees	24
5. Programación dinámica	11	8.2. Segment tree	25
5.1. Longest common subsequence	11	9. Misceláneo	26
5.2. Partición de troncos	12	9.1. Problema de Josephus	26
		9.2. Trucos con bits	27
		9.2.1. Iterar sobre los subconjuntos de una máscara	27
		9.3. El <i>parser</i> más rápido del mundo	27
		9.4. Checklist para corregir un Wrong Answer	27
		9.5. Redondeo de dobles	28

9.5.1. Convertir un doble al entero más cercano	28
9.5.2. Redondear un doble a cierto número de cifras de precisión	29
10.Java	29
10.1. Entrada desde entrada estándar	29
10.2. Entrada desde archivo	30
10.3. Mapas y sets	30
10.4. Colas de prioridad	31
11.C++	32
11.1. Entrada desde archivo	32
11.2. Strings con caracteres especiales	32
11.3. Imprimir un doble con cout con cierto número de cifras de precisión	33

1. Plantilla

```
using namespace std;
#include <algorithm>
#include <iostream>
#include <iterator>
#include <sstream>
#include <fstream>
#include <cassert>
#include <climits>
#include <cstdlib>
#include <cstring>
#include <string>
#include <cstdio>
#include <vector>
#include <cmath>
#include <queue>
#include <deque>
#include <stack>
#include <list>
#include <map>
#include <set>

template <class T> string toStr(const T &x)
{ stringstream s; s << x; return s.str(); }
template <class T> int toInt(const T &x)
{ stringstream s; s << x; int r; s >> r; return r; }
```

```
#define For(i, a, b) for (int i=(a); i<(b); ++i)
#define foreach(x, v) for (typeof (v).begin() x = (v).begin(); \
                           x != (v).end(); ++x)
#define D(x) cout << #x " = " << (x) << endl

const double EPS = 1e-9;
int cmp(double x, double y = 0, double tol = EPS){
    return( x <= y + tol) ? (x + tol < y) ? -1 : 0 : 1;
}

#define INPUT_FILE "problemname"

int main(){
    freopen(INPUT_FILE ".in", "r", stdin); // Read from file

    return 0;
}

.....
```

2. Teoría de números

2.1. Big mod

```
//retorna (b^p)mod(m)
// 0 <= b,p <= 2147483647
// 1 <= m <= 46340
int bigmod(int b, int p, int m){
    int mask = 1;
    int pow2 = b % m;
    int r = 1;
    while (mask){
        if (p & mask) r = (r * pow2) % m;
        pow2 = (pow2 * pow2) % m;
        mask <<= 1;
    }
    return r;
}

// Si se cambian los int por long longs los
// valores de entrada deben cumplir:
// 0 <= b,p <= 9223372036854775807
// 1 <= m <= 3037000499
// Si se cambian por unsigned long longs:
```

```
// 0 <= b,p <= 18446744073709551615
// 1 <= m <= 4294967295
```

2.2. Criba de Eratóstenes

Field-testing:

- *SPOJ* - 2912 - Super Primes
- *Live Archive* - 3639 - Prime Path

Marca los números primos en un arreglo. Algunos tiempos de ejecución:

SIZE	Tiempo (s)
100000	0.007
1000000	0.032
10000000	0.253
100000000	2.749

```
// Complejidad: O(n)

const int LIMIT = 31622779;

int sieve[LIMIT + 1]; // Inicializar con 0's.
int primes[LIMIT + 1];

int primeCount = 1;
for (int i = 2; i <= LIMIT; ++i) {
    if (!sieve[i]) {
        primes[primeCount] = i;
        sieve[i] = primeCount;
        primeCount++;
    }

    for (int j = 1; j <= sieve[i] && i * primes[j] <= LIMIT; j++){
        sieve[ i * primes[j] ] = j;
    }
}

// primes contiene la lista de primos <= LIMIT, en los índices
// 1 a primeCount.
// ¡El primer primo está en la posición 1 y no 0!
```

```
// sieve[i] contiene el índice en el arreglo primes del primo
// más pequeño que divide a i. Con esta información se puede
// saber si un número es primo o descomponerlo en primos si es
// compuesto.
```

```
// i es primo si primes[sieve[i]] == i, y compuesto si no.
```

2.3. Divisores de un número

Imprime todos los divisores de un número (en desorden) en $O(\sqrt{n})$. Hasta 4294967295 (máximo *unsigned int*) responde instantáneamente. Se puede forzar un poco más usando *unsigned long long* pero más allá de 10^{12} empieza a responder muy lento.

```
for (int i=1; i*i<=n; i++) {
    if (n%i == 0) {
        cout << i << endl;
        if (i*i<n) cout << (n/i) << endl;
    }
}
```

2.4. Propiedades modulares

- $a \mid c \wedge b \mid c \wedge \gcd(a, b) = 1 \rightarrow ab \mid c$
- **Euclid's Lemma:** $a \mid bc \wedge \gcd(a, b) = 1 \rightarrow a \mid c$

3. Combinatoria

3.1. Cuadro resumen

Fórmulas para combinaciones y permutaciones:

<i>Tipo</i>	<i>¿Se permite la repetición?</i>	<i>Fórmula</i>
<i>r</i> -permutaciones	No	$\frac{n!}{(n-r)!}$
<i>r</i> -combinaciones	No	$\frac{n!}{r!(n-r)!}$
<i>r</i> -permutaciones	Sí	n^r
<i>r</i> -combinaciones	Sí	$\frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$

Tomado de *Matemática discreta y sus aplicaciones*, Kenneth Rosen, 5^{ta} edición, McGraw-Hill, página 315.

3.2. Combinaciones, coeficientes binomiales, triángulo de Pascal

Complejidad: $O(n^2)$

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 1 & n = k \\ \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

```
const int N = 30;
long long choose[N+1][N+1];
/* Binomial coefficients */
for (int i=0; i<=N; ++i) choose[i][0] = choose[i][i] = 1;
for (int i=1; i<=N; ++i)
    for (int j=1; j<i; ++j)
        choose[i][j] = choose[i-1][j-1] + choose[i-1][j];
```

Nota: $\binom{n}{k}$ está indefinido en el código anterior si $n > k$. ¡La tabla puede estar llena con cualquier basura del compilador!

3.3. Permutaciones con elementos indistinguibles

El número de permutaciones diferentes de n objetos, donde hay n_1 objetos indistinguibles de tipo 1, n_2 objetos indistinguibles de tipo 2, ..., y n_k objetos

indistinguibles de tipo k , es

$$\frac{n!}{n_1!n_2! \cdots n_k!}$$

Ejemplo: Con las letras de la palabra PROGRAMAR se pueden formar $\frac{9!}{2! \cdot 3!} = 30240$ permutaciones diferentes.

3.4. Desordenes, desarreglos o permutaciones completas

Un desarreglo es una permutación donde ningún elemento i está en la posición i -ésima. Por ejemplo, 4213 es un desarreglo de 4 elementos pero 3241 no lo es porque el 2 aparece en la posición 2.

Sea D_n el número de desarreglos de n elementos, entonces:

$$D_n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n = 1 \\ (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}) & n \geq 2 \end{cases}$$

Usando el principio de inclusión-exclusión, también se puede encontrar la fórmula

$$D_n = n! \left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right] = n! \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!}$$

4. Grafos

4.1. Algoritmo de Dijkstra

El peso de todas las aristas debe ser no negativo.

```
// //Complejidad: O(E log V)
// ¡Si hay ciclos de peso negativo, el algoritmo se queda
// en un ciclo infinito!
// Usar Bellman-Ford en ese caso.
struct edge{
    int to, weight;
    edge() {}
    edge(int t, int w) : to(t), weight(w) {}
    bool operator < (const edge &that) const {
        return weight > that.weight;
    }
};
```

```
vector<edge> g[MAXNODES];
// g[i] es la lista de aristas salientes del nodo i. Cada una
```

```

// indica hacia que nodo va (to) y su peso (weight). Para
// aristas bidireccionales se deben crear 2 aristas dirigidas.

// encuentra el camino más corto entre s y todos los demás
// nodos.
int d[MAXNODES]; //d[i] = distancia más corta desde s hasta i
int p[MAXNODES]; //p[i] = predecesor de i en la ruta más corta
int dijkstra(int s, int n){
    //s = nodo inicial, n = número de nodos
    for (int i=0; i<n; ++i){
        d[i] = INT_MAX;
        p[i] = -1;
    }
    d[s] = 0;
    priority_queue<edge> q;
    q.push(edge(s, 0));
    while (!q.empty()){
        int node = q.top().to;
        int dist = q.top().weight;
        q.pop();

        if (dist > d[node]) continue;
        if (node == t){
            //dist es la distancia más corta hasta t.
            //Para reconstruir la ruta se pueden seguir
            //los p[i] hasta que sea -1.
            return dist;
        }

        for (int i=0; i<g[node].size(); ++i){
            int to = g[node][i].to;
            int w_extra = g[node][i].weight;

            if (dist + w_extra < d[to]){
                d[to] = dist + w_extra;
                p[to] = node;
                q.push(edge(to, d[to]));
            }
        }
    }
    return INT_MAX;
}

```

4.2. Minimum spanning tree: Algoritmo de Prim

```

//Complejidad:  $O(E \log V)$ 
//¡El grafo debe ser no digirido!
typedef string node;
typedef pair<double, node> edge;
//edge.first = peso de la arista, edge.second = nodo al que se
//dirige
typedef map<node, vector<edge> > graph;

double prim(const graph &g){
    double total = 0.0;
    priority_queue<edge, vector<edge>, greater<edge> > q;
    q.push(edge(0.0, g.begin()->first));
    set<node> visited;
    while (q.size()){
        node u = q.top().second;
        double w = q.top().first;
        q.pop(); //!!
        if (visited.count(u)) continue;
        visited.insert(u);
        total += w;
        vector<edge> &vecinos = g[u];
        for (int i=0; i<vecinos.size(); ++i){
            node v = vecinos[i].second;
            double w_extra = vecinos[i].first;
            if (visited.count(v) == 0){
                q.push(edge(w_extra, v));
            }
        }
    }
    return total; //suma de todas las aristas del MST
}

```

4.3. Minimum spanning tree: Algoritmo de Kruskal + Union-Find

```

//Complejidad:  $O(E \log V)$ 
struct edge{

```

```

int start, end, weight;
bool operator < (const edge &that) const {
    //Si se desea encontrar el árbol de recubrimiento de
    //máxima suma, cambiar el < por un >
    return weight < that.weight;
}
};

////////// Empieza Union find //////////
//Complejidad:  $O(m \log n)$ , donde m es el número de operaciones
//y n es el número de objetos. En la práctica la complejidad
//es casi que  $O(m)$ .
int p[MAXNODES], rank[MAXNODES];
void make_set(int x){ p[x] = x, rank[x] = 0; }
void link(int x, int y){
    if (rank[x] > rank[y]) p[y] = x;
    else{ p[x] = y; if (rank[x] == rank[y]) rank[y]++; }
}
int find_set(int x){
    return x != p[x] ? p[x] = find_set(p[x]) : p[x];
}
void merge(int x, int y){ link(find_set(x), find_set(y)); }
////////// Termina Union find //////////

//e es un vector con todas las aristas del grafo ¡El grafo
//debe ser no digirido!
long long kruskal(const vector<edge> &e){
    long long total = 0;
    sort(e.begin(), e.end());
    for (int i=0; i<=n; ++i){
        make_set(i);
    }
    for (int i=0; i<e.size(); ++i){
        int u = e[i].start, v = e[i].end, w = e[i].weight;
        if (find_set(u) != find_set(v)){
            total += w;
            merge(u, v);
        }
    }
    return total;
}

```

4.4. Algoritmo de Floyd-Warshall

```

//Complejidad:  $O(V^3)$ 
//No funciona si hay ciclos de peso negativo
// g[i][j] = Distancia entre el nodo i y el j.
unsigned long long g[MAXNODES][MAXNODES];
void floyd(int n){
    //Llenar g antes
    for (int k=0; k<n; ++k){
        for (int i=0; i<n; ++i){
            for (int j=0; j<n; ++j){
                g[i][j] = min(g[i][j], g[i][k] + g[k][j]);
            }
        }
    }
    //Acá se cumple que g[i][j] = Longitud de la ruta más corta
    //de i a j.
}

```

4.5. Algoritmo de Bellman-Ford

Si no hay ciclos de coste negativo, encuentra la distancia más corta entre un nodo y todos los demás. Si sí hay, permite saberlo. El coste de las aristas sí puede ser negativo (*Debería*, si no es así se puede usar Dijkstra o Floyd).

```

//Complejidad:  $O(V * E)$ 

const int oo = 1000000000;
struct edge{
    int v, w; edge(){} edge(int v, int w) : v(v), w(w) {}
};
vector<edge> g[MAXNODES];

int d[MAXNODES];
int p[MAXNODES];
// Retorna falso si hay un ciclo de costo negativo alcanzable
// desde s. Si retorna verdadero, entonces d[i] contiene la
// distancia más corta para ir de s a i. Si se quiere
// determinar la existencia de un costo negativo que no

```

```

// necesariamente sea alcanzable desde s, se crea un nuevo
// nodo A y nuevo nodo B. Para todo nodo original u se crean
// las aristas dirigidas (A, u) con peso 1 y (u, B) con peso
// 1. Luego se corre el algoritmo de Bellman-Ford iniciando en
// A.
bool bellman(int s, int n){
    for (int i=0; i<n; ++i){
        d[i] = oo;
        p[i] = -1;
    }

    d[s] = 0;
    for (int i=0, changed = true; i<n-1 && changed; ++i){
        changed = false;
        for (int u=0; u<n; ++u){
            for (int k=0; k<g[u].size(); ++k){
                int v = g[u][k].v, w = g[u][k].w;
                if (d[u] + w < d[v]){
                    d[v] = d[u] + w;
                    p[v] = u;
                    changed = true;
                }
            }
        }
    }

    for (int u=0; u<n; ++u){
        for (int k=0; k<g[u].size(); ++k){
            int v = g[u][k].v, w = g[u][k].w;
            if (d[u] + w < d[v]){
                //Negative weight cycle!

                //Finding the actual negative cycle. If not needed
                //return false immediately.
                vector<bool> seen(n, false);
                deque<int> cycle;
                int cur = v;
                for (; !seen[cur]; cur = p[cur]){
                    seen[cur] = true;
                    cycle.push_front(cur);
                }
                cycle.push_front(cur);
                //there's a negative cycle that goes from

```

```

//cycle.front() until it reaches itself again
printf("Negative weight cycle reachable from s:\n");
int i = 0;
do{
    printf("%d ", cycle[i]);
    i++;
}while(cycle[i] != cycle[0]);
printf("\n");
// Negative weight cycle found

    return false;
}
}
return true;
}
.....

```

4.6. Puntos de articulación

// Complejidad: $O(E + V)$

```

typedef string node;
typedef map<node, vector<node> > graph;
typedef char color;
const color WHITE = 0, GRAY = 1, BLACK = 2;
graph g;
map<node, color> colors;
map<node, int> d, low;

set<node> cameras; //contendrá los puntos de articulación
int timeCount;

// Uso: Para cada nodo u:
// colors[u] = WHITE, g[u] = Aristas salientes de u.
// Funciona para grafos no dirigidos.

void dfs(node v, bool isRoot = true){
    colors[v] = GRAY;
    d[v] = low[v] = ++timeCount;
    const vector<node> &neighbors = g[v];
    int count = 0;

```

```

for (int i=0; i<neighbors.size(); ++i){
    if (colors[neighbors[i]] == WHITE){
        //(v, neighbors[i]) is a tree edge
        dfs(neighbors[i], false);
        if (!isRoot && low[neighbors[i]] >= d[v]){
            //current node is an articulation point
            cameras.insert(v);
        }
        low[v] = min(low[v], low[neighbors[i]]);
        ++count;
    }else{ //(v, neighbors[i]) is a back edge
        low[v] = min(low[v], d[neighbors[i]]);
    }
}
if (isRoot && count > 1){
    //Is root and has two neighbors in the DFS-tree
    cameras.insert(v);
}
colors[v] = BLACK;
}

```

4.7. Máximo flujo: Método de Ford-Fulkerson, algoritmo de Edmonds-Karp

El algoritmo de Edmonds-Karp es una modificación al método de Ford-Fulkerson. Este último utiliza DFS para hallar un camino de aumentación, pero la sugerencia de Edmonds-Karp es utilizar BFS que lo hace más eficiente en algunos grafos.

```

/*
    cap[i][j] = Capacidad de la arista (i, j).
    prev[i] = Predecesor del nodo i en un camino de aumentación.
*/
int cap[MAXN+1][MAXN+1], prev[MAXN+1];

vector<int> g[MAXN+1]; //Vecinos de cada nodo.
inline void link(int u, int v, int c)
{ cap[u][v] = c; g[u].push_back(v), g[v].push_back(u); }
/*
    Notar que link crea las aristas (u, v) && (v, u) en el grafo

```

g. Esto es necesario porque el algoritmo de Edmonds-Karp necesita mirar el "back-edge" (j, i) que se crea al bombear flujo a través de (i, j). Sin embargo, no modifica $cap[v][u]$, porque se asume que el grafo es dirigido. Si es no-dirigido, hacer $cap[u][v] = cap[v][u] = c$.

*/

/*

Método 1:

Mantener la red residual, donde $residual[i][j]$ = cuánto flujo extra puedo inyectar a través de la arista (i, j).

Si empujo k unidades de i a j, entonces $residual[i][j] -= k$ y $residual[j][i] += k$ (Puedo "desempujar" las k unidades de j a i).

Se puede modificar para que no utilice extra memoria en la tabla residual, sino que modifique directamente la tabla cap.

*/

```

int residual[MAXN+1][MAXN+1];
int fordFulkerson(int n, int s, int t){
    memcpy(residual, cap, sizeof cap);

    int ans = 0;
    while (true){
        fill(prev, prev+n, -1);
        queue<int> q;
        q.push(s);
        while (q.size() && prev[t] == -1){
            int u = q.front();
            q.pop();
            vector<int> &out = g[u];
            for (int k = 0, m = out.size(); k<m; ++k){
                int v = out[k];
                if (v != s && prev[v] == -1 && residual[u][v] > 0)
                    prev[v] = u, q.push(v);
            }
        }
    }
}

```



```

    if (prev[t] == -1) break;

    int bottleneck = INT_MAX;
    for (int v = t, u = prev[v]; u != -1; v = u, u = prev[v]){
        bottleneck = min(bottleneck, residual[u][v]);
    }
    for (int v = t, u = prev[v]; u != -1; v = u, u = prev[v]){
        residual[u][v] -= bottleneck;
        residual[v][u] += bottleneck;
    }
    ans += bottleneck;
}
return ans;
}

```

/*
Método 2:

Mantener la red de flujos, donde $\text{flow}[i][j]$ = Flujo que, err, fluye de i a j . Notar que $\text{flow}[i][j]$ puede ser negativo. Si esto pasa, es lo equivalente a decir que i "absorbe" flujo de j , o lo que es lo mismo, que hay flujo positivo de j a i .

En cualquier momento se cumple la propiedad de skew symmetry, es decir, $\text{flow}[i][j] = -\text{flow}[j][i]$. El flujo neto de i a j es entonces $\text{flow}[i][j]$.

*/

```

int flow[MAXN+1][MAXN+1];
int fordFulkerson(int n, int s, int t){
    //memset(flow, 0, sizeof flow);
    for (int i=0; i<n; ++i) fill(flow[i], flow[i]+n, 0);
    int ans = 0;
    while (true){
        fill(prev, prev+n, -1);
        queue<int> q;
        q.push(s);
        while (q.size() && prev[t] == -1){
            int u = q.front();
            q.pop();

```

```

        vector<int> &out = g[u];
        for (int k = 0, m = out.size(); k<m; ++k){
            int v = out[k];
            if (v != s && prev[v] == -1 && cap[u][v] > flow[u][v])
                prev[v] = u, q.push(v);
        }
    }

    if (prev[t] == -1) break;

    int bottleneck = INT_MAX;
    for (int v = t, u = prev[v]; u != -1; v = u, u = prev[v]){
        bottleneck = min(bottleneck, cap[u][v] - flow[u][v]);
    }
    for (int v = t, u = prev[v]; u != -1; v = u, u = prev[v]){
        flow[u][v] += bottleneck;
        flow[v][u] = -flow[u][v];
    }
    ans += bottleneck;
}
return ans;
}

```

4.8. Máximo flujo para grafos dispersos usando Ford-Fulkerson

Field-testing:

- UVa - 563 - Crimewave

```

////////// Maximum flow for sparse graphs //////////
////////// Complexity: O(V * E^2) //////////

```

```

/*
Usage:
Call initialize_max_flow();
Create graph using add_edge(u, v, c);
max_flow(source, sink);

```

WARNING: The algorithm writes on the cap array. The capacity is not the same after having run the algorithm. If you need

```

to run the algorithm several times on the same graph, backup
the cap array.
*/

namespace Flow {
    // Maximum number of nodes
    const int MAXN = 100;
    // Maximum number of edges
    // IMPORTANT: Remember to consider the backedges. For
    // every edge we actually need two! That's why we have
    // to multiply by two at the end.
    const int MAXE = MAXN * (MAXN + 1) / 2 * 2;
    const int oo = INT_MAX / 4;
    int first[MAXN];
    int next[MAXE];
    int adj[MAXE];
    int cap[MAXE];
    int current_edge;

    /*
    Builds a directed edge (u, v) with capacity c.
    Note that actually two edges are added, the edge
    and its complementary edge for the backflow.
    */
    int add_edge(int u, int v, int c){
        adj[current_edge] = v;
        cap[current_edge] = c;
        next[current_edge] = first[u];
        first[u] = current_edge++;

        adj[current_edge] = u;
        cap[current_edge] = 0;
        next[current_edge] = first[v];
        first[v] = current_edge++;
    }

    void initialize_max_flow(){
        current_edge = 0;
        memset(next, -1, sizeof next);
        memset(first, -1, sizeof first);
    }

    int q[MAXN];

```

```

int incr[MAXN];
int arrived_by[MAXN];
//arrived_by[i] = The last edge used to reach node i
int find_augmenting_path(int src, int snk){
    /*
    Make a BFS to find an augmenting path from the source
    to the sink. Then pump flow through this path, and
    return the amount that was pumped.
    */
    memset(arrived_by, -1, sizeof arrived_by);
    int h = 0, t = 0;
    q[t++] = src;
    arrived_by[src] = -2;
    incr[src] = oo;
    while (h < t && arrived_by[snk] == -1){ //BFS
        int u = q[h++];
        for (int e = first[u]; e != -1; e = next[e]){
            int v = adj[e];
            if (arrived_by[v] == -1 && cap[e] > 0){
                arrived_by[v] = e;
                incr[v] = min(incr[u], cap[e]);
                q[t++] = v;
            }
        }
    }

    if (arrived_by[snk] == -1) return 0;

    int cur = snk;
    int neck = incr[snk];
    while (cur != src){
        //Remove capacity from the edge used to reach
        //node "cur", and add capacity to the backedge
        cap[arrived_by[cur]] -= neck;
        cap[arrived_by[cur] ^ 1] += neck;
        //move backwards in the path
        cur = adj[arrived_by[cur] ^ 1];
    }
    return neck;
}

int max_flow(int src, int snk){
    int ans = 0, neck;

```

```

    while ((neck = find_augmenting_path(src, snk)) != 0){
        ans += neck;
    }
    return ans;
}
}

```

4.9. Componentes fuertemente conexas: Algoritmo de Tarjan

/* Complexity: $O(E + V)$

Tarjan's algorithm for finding strongly connected components.

```

*d[i] = Discovery time of node i. (Initialize to -1)
*low[i] = Lowest discovery time reachable from node
i. (Doesn't need to be initialized)
*scc[i] = Strongly connected component of node i. (Doesn't
need to be initialized)
*s = Stack used by the algorithm (Initialize to an empty
stack)
*stacked[i] = True if i was pushed into s. (Initialize to
false)
*ticks = Clock used for discovery times (Initialize to 0)
*current_scc = ID of the current_scc being discovered
(Initialize to 0)
*/
vector<int> g[MAXN];
int d[MAXN], low[MAXN], scc[MAXN];
bool stacked[MAXN];
stack<int> s;
int ticks, current_scc;
void tarjan(int u){
    d[u] = low[u] = ticks++;
    s.push(u);
    stacked[u] = true;
    const vector<int> &out = g[u];
    for (int k=0, m=out.size(); k<m; ++k){
        const int &v = out[k];
        if (d[v] == -1){
            tarjan(v);

```

```

        low[u] = min(low[u], low[v]);
    }else if (stacked[v]){
        low[u] = min(low[u], low[v]);
    }
}
if (d[u] == low[u]){
    int v;
    do{
        v = s.top();
        s.pop();
        stacked[v] = false;
        scc[v] = current_scc;
    }while (u != v);
    current_scc++;
}
}

```

4.10. 2-Satisfiability

Dada una ecuación lógica de conjunciones de disyunciones de 2 términos, se pretende decidir si existen valores de verdad que puedan asignarse a las variables para hacer cierta la ecuación.

Por ejemplo, $(b_1 \vee \neg b_2) \wedge (b_2 \vee b_3) \wedge (\neg b_1 \vee \neg b_2)$ es verdadero cuando b_1 y b_3 son verdaderos y b_2 es falso.

Solución: Se sabe que $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$. Entonces se traduce cada disyunción en una implicación y se crea un grafo donde los nodos son cada variable y su negación. Cada implicación es una arista en este grafo. Existe solución si nunca se cumple que una variable y su negación están en la misma componenete fuertemente conexa (Se usa el algoritmo de Tarjan, 4.9).

5. Programación dinámica

5.1. Longest common subsequence

```

#define MAX(a,b) ((a>b)?(a):(b))
int dp[1001][1001];

```

```

int lcs(const string &s, const string &t){
    int m = s.size(), n = t.size();
    if (m == 0 || n == 0) return 0;
    for (int i=0; i<=m; ++i)

```

```

    dp[i][0] = 0;
    for (int j=1; j<=n; ++j)
        dp[0][j] = 0;
    for (int i=0; i<m; ++i)
        for (int j=0; j<n; ++j)
            if (s[i] == t[j])
                dp[i+1][j+1] = dp[i][j]+1;
            else
                dp[i+1][j+1] = MAX(dp[i+1][j], dp[i][j+1]);
    return dp[m][n];
}

.....

```

5.2. Partición de troncos

Este problema es similar al problema de *Matrix Chain Multiplication*. Se tiene un tronco de longitud n , y m puntos de corte en el tronco. Se puede hacer un corte a la vez, cuyo costo es igual a la longitud del tronco. ¿Cuál es el mínimo costo para partir todo el tronco en pedacitos individuales?

Ejemplo: Se tiene un tronco de longitud 10. Los puntos de corte son 2, 4, y 7.

El mínimo costo para partirlo es 20, y se obtiene así:

- Partir el tronco (0, 10) por 4. Vale 10 y quedan los troncos (0, 4) y (4, 10).
- Partir el tronco (0, 4) por 2. Vale 4 y quedan los troncos (0, 2), (2, 4) y (4, 10).
- No hay que partir el tronco (0, 2).
- No hay que partir el tronco (2, 4).
- Partir el tronco (4, 10) por 7. Vale 6 y quedan los troncos (4, 7) y (7, 10).
- No hay que partir el tronco (4, 7).
- No hay que partir el tronco (7, 10).
- El costo total es $10 + 4 + 6 = 20$.

El algoritmo es $O(n^3)$, pero optimizable a $O(n^2)$ con una tabla adicional:

```

/*
    O(n^3)
    dp[i][j] = Mínimo costo de partir la cadena entre las
    particiones i e j, ambas incluidas.

```

```

*/
int dp[1005][1005];
int p[1005];

int cubic(){
    int n, m;
    while (scanf("%d %d", &n, &m)==2){
        p[0] = 0;
        for (int i=1; i<=m; ++i){
            scanf("%d", &p[i]);
        }
        p[m+1] = n;
        m += 2;

        for (int i=0; i<m; ++i){
            dp[i][i+1] = 0;
        }

        for (int i=m-2; i>=0; --i){
            for (int j=i+2; j<m; ++j){
                dp[i][j] = p[j]-p[i];
                int t = INT_MAX;
                for (int k=i+1; k<j; ++k){
                    t = min(t, dp[i][k] + dp[k][j]);
                }
                dp[i][j] += t;
            }
        }

        printf("%d\n", dp[0][m-1]);
    }
    return 0;
}

/*
    O(n^2)

    dp[i][j] = Mínimo costo de partir la cadena entre las
    particiones i e j, ambas incluidas. pivot[i][j] = Índice de
    la partición que usé para lograr dp[i][j].
*/
int dp[1005][1005], pivot[1005][1005];

```

```

int p[1005];

int quadratic(){
    int n, m;
    while (scanf("%d %d", &n, &m)==2){
        p[0] = 0;
        for (int i=1; i<=m; ++i){
            scanf("%d", &p[i]);
        }
        p[m+1] = n;
        m += 2;

        for (int i=0; i<m-1; ++i){
            dp[i][i+1] = 0;
        }
        for (int i=0; i<m-2; ++i){
            dp[i][i+2] = p[i+2] - p[i];
            pivot[i][i+2] = i+1;
        }

        for (int d=3; d<m; ++d){ //d = longitud
            for (int j, i=0; (j = i + d) < m; ++i){
                dp[i][j] = p[j] - p[i];
                int t = INT_MAX, s;
                for (int k=pivot[i][j-1]; k<=pivot[i+1][j]; ++k){
                    int x = dp[i][k] + dp[k][j];
                    if (x < t) t = x, s = k;
                }
                dp[i][j] += t, pivot[i][j] = s;
            }
        }

        printf("%d\n", dp[0][m-1]);
    }
    return 0;
}

```

6. Strings

6.1. Algoritmo de Knuth-Morris-Pratt (KMP)

Computa el arreglo *border* que contiene la longitud del borde más largo de todos los prefijos de una cadena.

Un borde de una cadena es otra cadena más corta que es a la vez prefijo y sufijo de la original (por ejemplo, *aba* es un borde de *abacaba* porque es más corta que *abacaba* y es al mismo tiempo prefijo y sufijo de *abacaba*. *a* también es un borde de *abacaba*. *abac* no es un borde de *abacaba* porque no es un sufijo).

En el código, `border[i]` contiene el borde más grande del prefijo de *needle* que termina en la posición *i* (*needle* es el patrón que se quiere buscar en la otra cadena). Una ejemplo del arreglo `border` es:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
<i>needle</i>	a	b	a	c	a	b	a	c	a	b	a	d	a	b
<i>border</i>	0	0	1	0	1	2	3	4	5	6	7	0	1	2

```

// Knuth-Morris-Pratt algorithm for string matching
// Complexity: O(n + m)

```

```

// Reports all occurrences of 'needle' in 'haystack'.

```

```

void kmp(const string &needle, const string &haystack) {
    // Precompute border function
    int m = needle.size();
    vector<int> border(m);
    border[0] = 0;
    for (int i = 1; i < m; ++i) {
        border[i] = border[i - 1];
        while (border[i] > 0 and needle[i] != needle[border[i]]) {
            border[i] = border[border[i] - 1];
        }
        if (needle[i] == needle[border[i]]) border[i]++;
    }
}

```

```

// Now the actual matching

```

```

int n = haystack.size();
int seen = 0;
for (int i = 0; i < n; ++i){
    while (seen > 0 and haystack[i] != needle[seen]) {
        seen = border[seen - 1];
    }
    if (haystack[i] == needle[seen]) seen++;
}

```

```

    if (seen == m) {
        printf("Needle occurs from %d to %d\n", i - m + 1, i);
        seen = border[m - 1];
    }
}
}

```

6.2. Algoritmo Z

$Z[i]$ = longitud del prefijo propio más largo de $S[i, n)$ que también es prefijo de $S[0, n)$.

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
<i>string</i>	a	b	a	c	a	b	a	c	a	d	a	b	a
Z_i	0	0	1	0	5	0	1	0	1	0	3	0	1

```

// Find z function
int n = s.size();
vector<int> z(n);
z[0] = 0;
for (int i = 1, l = 0, r = 0; i < n; ++i) {
    z[i] = 0;
    if (i <= r) z[i] = min(z[i - l], r - i + 1);
    while (i + z[i] < n && s[z[i]] == s[i + z[i]]) ++z[i];
    if (i + z[i] - 1 > r) {
        l = i;
        r = i + z[i] - 1;
    }
}

```

6.3. Algoritmo de Aho-Corasick

Sirve para buscar muchos patrones en una cadena. Por ejemplo, dada la cadena *ahishers* y los patrones $\{he, she, hers, his\}$, encuentra que *his* aparece en la posición 1, *he* aparece en la posición 4, *she* aparece en la posición 3 y *hers* aparece en la posición 4.

Complejidad: $O(n + m)$ donde n es la longitud de la cadena en la que hay que buscar y m es la suma de las longitudes de todos los patrones.

```

////////////////////////////////////
//      Aho-Corasick's algorithm, as explained in      //
//      http://dx.doi.org/10.1145/360825.360855          //
////////////////////////////////////

// Max number of states in the matching machine.
// Should be equal to the sum of the length of all keywords.
const int MAXS = 6 * 50 + 10;

// Number of characters in the alphabet.
const int MAXC = 26;

// Output for each state, as a bitwise mask.
// Bit i in this mask is on if the keyword with index i
// appears when the machine enters this state.
int out[MAXS];

// Used internally in the algorithm.
int f[MAXS]; // Failure function
int g[MAXS][MAXC]; // Goto function, or -1 if fail.

// Builds the string matching machine.
//
// words - Vector of keywords. The index of each keyword is
//         important:
//         "out[state] & (1 << i)" is > 0 if we just found
//         word[i] in the text.
// lowestChar - The lowest char in the alphabet.
//              Defaults to 'a'.
// highestChar - The highest char in the alphabet.
//               Defaults to 'z'.
// "highestChar - lowestChar" must be <= MAXC,
// otherwise we will access the g matrix outside
// its bounds and things will go wrong.
//
// Returns the number of states that the new machine has.
// States are numbered 0 up to the return value - 1, inclusive.
int buildMatchingMachine(const vector<string> &words,
                        char lowestChar = 'a',
                        char highestChar = 'z') {
    memset(out, 0, sizeof out);
    memset(f, -1, sizeof f);
    memset(g, -1, sizeof g);

```

```

int states = 1; // Initially, we just have the 0 state

for (int i = 0; i < words.size(); ++i) {
    const string &keyword = words[i];
    int currentState = 0;
    for (int j = 0; j < keyword.size(); ++j) {
        int c = keyword[j] - lowestChar;
        if (g[currentState][c] == -1) {
            // Allocate a new node
            g[currentState][c] = states++;
        }
        currentState = g[currentState][c];
    }
    // There's a match of keywords[i] at node currentState.
    out[currentState] |= (1 << i);
}

// State 0 should have an outgoing edge for all characters.
for (int c = 0; c < MAXC; ++c) {
    if (g[0][c] == -1) {
        g[0][c] = 0;
    }
}

// Now, let's build the failure function
queue<int> q;
// Iterate over every possible input
for (int c = 0; c <= highestChar - lowestChar; ++c) {
    // All nodes s of depth 1 have f[s] = 0
    if (g[0][c] != -1 and g[0][c] != 0) {
        f[g[0][c]] = 0;
        q.push(g[0][c]);
    }
}

while (q.size()) {
    int state = q.front();
    q.pop();
    for (int c = 0; c <= highestChar - lowestChar; ++c) {
        if (g[state][c] != -1) {
            int failure = f[state];
            while (g[failure][c] == -1) {
                failure = f[failure];
            }
        }
    }
}

```

```

    }
    failure = g[failure][c];
    f[g[state][c]] = failure;

    // Merge out values
    out[g[state][c]] |= out[failure];
    q.push(g[state][c]);
}

}

return states;
}

// Finds the next state the machine will transition to.
//
// currentState - The current state of the machine. Must be
//                 between 0 and the number of states - 1,
//                 inclusive.
// nextInput - The next character that enters into the machine.
//              Should be between lowestChar and highestChar,
//              inclusive.
// lowestChar - Should be the same lowestChar that was passed
//              to "buildMatchingMachine".

// Returns the next state the machine will transition to.
// This is an integer between 0 and the number of states - 1,
// inclusive.
int findNextState(int currentState, char nextInput,
                  char lowestChar = 'a') {
    int answer = currentState;
    int c = nextInput - lowestChar;
    while (g[answer][c] == -1) answer = f[answer];
    return g[answer][c];
}

// How to use this algorithm:
//
// 1. Modify the MAXS and MAXC constants as appropriate.
// 2. Call buildMatchingMachine with the set of keywords to
//    search for.
// 3. Start at state 0. Call findNextState to incrementally

```



```

sort(pos, pos + n, smaller_first_char);
//{pos contains the list of suffixes sorted by their first
//character}

for (int i=0; i<n; ++i){
    bh[i] = i == 0 || str[pos[i]] != str[pos[i-1]];
    b2h[i] = false;
}

for (int h = 1; h < n; h <= 1){
    //{bh[i] == false if the first h characters of pos[i-1] ==
    // the first h characters of pos[i]}
    int buckets = 0;
    for (int i=0, j; i < n; i = j){
        j = i + 1;
        while (j < n && !bh[j]) j++;
        next[i] = j;
        buckets++;
    }
    if (buckets == n) break; // We are done! Lucky bastards!
    //{suffixes are separated in buckets containing strings
    // starting with the same h characters}

    for (int i = 0; i < n; i = next[i]){
        cnt[i] = 0;
        for (int j = i; j < next[i]; ++j){
            rank[pos[j]] = i;
        }
    }

    cnt[rank[n - h]]++;
    b2h[rank[n - h]] = true;
    for (int i = 0; i < n; i = next[i]){
        for (int j = i; j < next[i]; ++j){
            int s = pos[j] - h;
            if (s >= 0){
                int head = rank[s];
                rank[s] = head + cnt[head]++;
                b2h[rank[s]] = true;
            }
        }
    }
    for (int j = i; j < next[i]; ++j){
        int s = pos[j] - h;

```

```

        if (s >= 0 && b2h[rank[s]]){
            for (int k = rank[s]+1; !bh[k] && b2h[k]; k++){
                b2h[k] = false;
            }
        }
    }
    for (int i=0; i<n; ++i){
        pos[rank[i]] = i;
        bh[i] |= b2h[i];
    }
    for (int i=0; i<n; ++i){
        rank[pos[i]] = i;
    }
}

/////////////////////////////////////////////////////////////////
//                                     End of Suffix Arrays implementation    //
/////////////////////////////////////////////////////////////////

/////////////////////////////////////////////////////////////////
//                                     Begin of Longest Common Prefix implementation    //
/////////////////////////////////////////////////////////////////
//                                     O(n)                                     //
//   Refer to "Linear-Time Longest-Common-Prefix Computation    //
//   in Suffix Arrays and Its Applications" by Toru Kasai,    //
//   Gunho Lee, Hiroki Arimura, Setsuo Arikawa, and Kunsoo Park.//
/////////////////////////////////////////////////////////////////

int height[N];
// - height[i] = length of the longest common prefix of suffix
//   pos[i] and suffix pos[i-1]
// - height[0] = 0
void getHeight(int n){
    for (int i=0; i<n; ++i) rank[pos[i]] = i;
    height[0] = 0;
    for (int i=0, h=0; i<n; ++i){
        if (rank[i] > 0){
            int j = pos[rank[i]-1];
            while (i + h < n && j + h < n && str[i+h] == str[j+h]){
                h++;
            }

```

```

        height[rank[i]] = h;
        if (h > 0) h--;
    }
}
}
////////////////////////////////////
//          End of Longest Common Prefix implementation          //
////////////////////////////////////
.....

```

7. Geometría

7.1. Identidades trigonométricas

$$\begin{aligned}\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \\ \tan(\alpha \pm \beta) &= \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}\end{aligned}$$

7.2. Área de un polígono

Si P es un polígono simple (no se intersecta a sí mismo) su área está dada por:

$$A(P) = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{n-1} (x_i \cdot y_{i+1} - x_{i+1} \cdot y_i)$$

```

//P es un polígono ordenado anticlockwise.
//Si es clockwise, retorna el area negativa.
//Si no esta ordenado retorna pura mierda.
//P[0] != P[n-1]
double PolygonArea(const vector<point> &p){
    double r = 0.0;
    for (int i=0; i<p.size(); ++i){
        int j = (i+1) % p.size();
        r += p[i].x*p[j].y - p[j].x*p[i].y;
    }
    return r/2.0;
}
.....

```

7.3. Centro de masa de un polígono

Si P es un polígono simple (no se intersecta a sí mismo) su centro de masa está dado por:

$$\bar{C}_x = \frac{\iint_R x dA}{M} = \frac{1}{6M} \sum_{i=1}^n (y_{i+1} - y_i)(x_{i+1}^2 + x_{i+1} \cdot x_i + x_i^2)$$

$$\bar{C}_y = \frac{\iint_R y dA}{M} = \frac{1}{6M} \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i+1})(y_{i+1}^2 + y_{i+1} \cdot y_i + y_i^2)$$

Donde M es el área del polígono.

Otra posible fórmula equivalente:

$$\bar{C}_x = \frac{1}{6A} \sum_{i=0}^{n-1} (x_i + x_{i+1})(x_i \cdot y_{i+1} - x_{i+1} \cdot y_i)$$

$$\bar{C}_y = \frac{1}{6A} \sum_{i=0}^{n-1} (y_i + y_{i+1})(x_i \cdot y_{i+1} - x_{i+1} \cdot y_i)$$

7.4. Convex hull: Graham Scan

Complejidad: $O(n \log_2 n)$

```

//Graham scan: Complexity: O(n log n)
struct point{
    int x,y;
    point() {}
    point(int X, int Y) : x(X), y(Y) {}
};

point pivot;

inline int distsqr(const point &a, const point &b){
    return (a.x - b.x)*(a.x - b.x) + (a.y - b.y)*(a.y - b.y);
}

inline double dist(const point &a, const point &b){
    return sqrt(distsqr(a, b));
}

```

```

//retorna > 0 si c esta a la izquierda del segmento AB
//retorna < 0 si c esta a la derecha del segmento AB
//retorna == 0 si c es colineal con el segmento AB
inline
int cross(const point &a, const point &b, const point &c){
    return (b.x-a.x)*(c.y-a.y) - (c.x-a.x)*(b.y-a.y);
}

//Self < that si esta a la derecha del segmento Pivot-That
bool angleCmp(const point &self, const point &that){
    int t = cross(pivot, that, self);
    if (t < 0) return true;
    if (t == 0){
        //Self < that si está más cerquita
        return (distsqr(pivot, self) < distsqr(pivot, that));
    }
    return false;
}

vector<point> graham(vector<point> p){
    //Metemos el más abajo más a la izquierda en la posición 0
    for (int i=1; i<p.size(); ++i){
        if (p[i].y < p[0].y ||
            (p[i].y == p[0].y && p[i].x < p[0].x))
            swap(p[0], p[i]);
    }

    pivot = p[0];
    sort(p.begin(), p.end(), angleCmp);

    //Ordenar por ángulo y eliminar repetidos.
    //Si varios puntos tienen el mismo angulo el más lejano
    //queda después en la lista
    vector<point> hull(p.begin(), p.begin()+3);

    //Ahora sí!!!
    for (int i=3; i<p.size(); ++i){
        while (hull.size() >= 2 &&
            cross(hull[hull.size()-2],
                hull[hull.size()-1],
                p[i]) <= 0){
            hull.erase(hull.end() - 1);
        }
    }
}

```

```

    }
    hull.push_back(p[i]);
}
//hull contiene los puntos del convex hull ordenados
//anti-clockwise. No contiene ningún punto repetido. El
//primer punto no es el mismo que el último, i.e, la última
//arista va de hull[hull.size()-1] a hull[0]
return hull;
}

```

7.5. Convex hull: Andrew's monotone chain

Complejidad: $O(n \log_2 n)$

// Convex Hull: Andrew's Monotone Chain Convex Hull
// Complexity: $O(n \log n)$ (But lower constant than Graham Scan)

```
typedef long long CoordType;
```

```

struct Point {
    CoordType x, y;
    bool operator <(const Point &p) const {
        return x < p.x || (x == p.x && y < p.y);
    }
};

```

// 2D cross product. Returns a positive value, if OAB makes a
// counter-clockwise turn, negative for clockwise turn, and zero
// if the points are collinear.

```

CoordType cross(const Point &O, const Point &A, const Point &B){
    return (A.x - O.x) * (B.y - O.y) - (A.y - O.y) * (B.x - O.x);
}

```

// Returns a list of points on the convex hull in
// counter-clockwise order. Note: the last point in the returned
// list is the same as the first one.

```

vector<Point> convexHull(vector<Point> P){
    int n = P.size(), k = 0;
    vector<Point> H(2*n);
    // Sort points lexicographically
    sort(P.begin(), P.end());
    // Build lower hull

```

```

for (int i = 0; i < n; i++) {
    while (k >= 2 && cross(H[k-2], H[k-1], P[i]) <= 0) k--;
    H[k++] = P[i];
}
// Build upper hull
for (int i = n-2, t = k+1; i >= 0; i--) {
    while (k >= t && cross(H[k-2], H[k-1], P[i]) <= 0) k--;
    H[k++] = P[i];
}
H.resize(k);
return H;
}

```

7.6. Mínima distancia entre un punto y un segmento

```

/*
Returns the closest distance between point pnt and the segment
that goes from point a to b
Idea by:
http://local.wasp.uwa.edu.au/~pbourke/geometry/pointline/
*/
double distance_point_to_segment(const point &a, const point &b,
                                const point &pnt){
    double u =
        ((pnt.x - a.x)*(b.x - a.x) + (pnt.y - a.y)*(b.y - a.y))
        /distsqr(a, b);
    point intersection;
    intersection.x = a.x + u*(b.x - a.x);
    intersection.y = a.y + u*(b.y - a.y);
    if (u < 0.0 || u > 1.0){
        return min(dist(a, pnt), dist(b, pnt));
    }
    return dist(pnt, intersection);
}

```

7.7. Mínima distancia entre un punto y una recta

```

/*
Returns the closest distance between point pnt and the line
that passes through points a and b

```

```

Idea by:
http://local.wasp.uwa.edu.au/~pbourke/geometry/pointline/
*/
double distance_point_to_line(const point &a, const point &b,
                              const point &pnt){
    double u =
        ((pnt.x - a.x)*(b.x - a.x) + (pnt.y - a.y)*(b.y - a.y))
        /distsqr(a, b);
    point intersection;
    intersection.x = a.x + u*(b.x - a.x);
    intersection.y = a.y + u*(b.y - a.y);
    return dist(pnt, intersection);
}

```

7.8. Determinar si un polígono es convexo

```

/*
Returns positive if a-b-c makes a left turn.
Returns negative if a-b-c makes a right turn.
Returns 0.0 if a-b-c are colinear.
*/
double turn(const point &a, const point &b, const point &c){
    double z = (b.x - a.x)*(c.y - a.y) - (b.y - a.y)*(c.x - a.x);
    if (fabs(z) < 1e-9) return 0.0;
    return z;
}

/*
Returns true if polygon p is convex.
False if it's concave or it can't be determined
(For example, if all points are colinear we can't
make a choice).
*/
bool isConvexPolygon(const vector<point> &p){
    int mask = 0;
    int n = p.size();
    for (int i=0; i<n; ++i){
        int j=(i+1)%n;
        int k=(i+2)%n;
        double z = turn(p[i], p[j], p[k]);
        if (z < 0.0){

```

```

    mask |= 1;
} else if (z > 0.0){
    mask |= 2;
}
if (mask == 3) return false;
}
return mask != 0;
}

```

.....

7.9. Determinar si un punto está dentro de un polígono convexo

```

/*
Returns true if point a is inside convex polygon p. Note
that if point a lies on the border of p it is considered
outside.

We assume p is convex! The result is useless if p is
concave.
*/
bool insideConvexPolygon(const vector<point> &p,
                        const point &a){

    int mask = 0;
    int n = p.size();
    for (int i=0; i<n; ++i){
        int j = (i+1)%n;
        double z = turn(p[i], p[j], a);
        if (z < 0.0){
            mask |= 1;
        } else if (z > 0.0){
            mask |= 2;
        } else if (z == 0.0) return false;
        if (mask == 3) return false;
    }
    return mask != 0;
}

```

.....

7.10. Determinar si un punto está dentro de un polígono cualquiera

Field-testing:

- *TopCoder* - SRM 187 - Division 2 Hard - PointInPolygon
- *UVa* - 11665 - Chinese Ink

```

//Point
//Choose one of these two:
struct P {
    double x, y; P(){}; P(double q, double w) : x(q), y(w){}
};
struct P {
    int x, y; P(){}; P(int q, int w) : x(q), y(w){}
};

// Polar angle
// Returns an angle in the range [0, 2*Pi) of a given
// Cartesian point. If the point is (0,0), -1.0 is returned.

// REQUIRES:
// include math.h
// define EPS 0.000000001, or your choice
// P has members x and y.
double polarAngle( P p )
{
    if(fabs(p.x) <= EPS && fabs(p.y) <= EPS) return -1.0;
    if(fabs(p.x) <= EPS) return (p.y > EPS ? 1.0 : 3.0) * acos(0);
    double theta = atan(1.0 * p.y / p.x);
    if(p.x > EPS)
        return (p.y >= -EPS ? theta : (4*acos(0) + theta));
    else
        return(2 * acos( 0 ) + theta);
}

//Point inside polygon
// Returns true iff p is inside poly.
// PRE: The vertices of poly are ordered (either clockwise or
//      counter-clockwise.
// POST: Modify code inside to handle the special case of "on
// an edge".
// REQUIRES:
// polarAngle()

```

```

// include math.h
// include vector
// define EPS 0.000000001, or your choice
bool pointInPoly( P p, vector< P > &poly )
{
    int n = poly.size();
    double ang = 0.0;
    for(int i = n - 1, j = 0; j < n; i = j++){
        P v( poly[i].x - p.x, poly[i].y - p.y );
        P w( poly[j].x - p.x, poly[j].y - p.y );
        double va = polarAngle(v);
        double wa = polarAngle(w);
        double xx = wa - va;
        if(va < -0.5 || wa < -0.5 || fabs(fabs(xx)-2*acos(0)) < EPS){
            // POINT IS ON THE EDGE
            assert( false );
            ang += 2 * acos( 0 );
            continue;
        }
        if( xx < -2 * acos( 0 ) ) ang += xx + 4 * acos( 0 );
        else if( xx > 2 * acos( 0 ) ) ang += xx - 4 * acos( 0 );
        else ang += xx;
    }
    return( ang * ang > 1.0 );
}

```

7.11. Hallar la intersección de dos rectas

```

/*
    Finds the intersection between two lines (Not segments!
    Infinite lines)
    Line 1 passes through points (x0, y0) and (x1, y1).
    Line 2 passes through points (x2, y2) and (x3, y3).

    Handles the case when the 2 lines are the same (infinite
    intersections),
    parallel (no intersection) or only one intersection.
*/
void line_line_intersection(double x0, double y0,
                           double x1, double y1,

```

```

                           double x2, double y2,
                           double x3, double y3){
#ifdef EPS
#define EPS 1e-9
#endif

    double t0 = (y3-y2)*(x0-x2)-(x3-x2)*(y0-y2);
    double t1 = (x1-x0)*(y2-y0)-(y1-y0)*(x2-x0);
    double det = (y1-y0)*(x3-x2)-(y3-y2)*(x1-x0);
    if (fabs(det) < EPS){
        //parallel
        if (fabs(t0) < EPS || fabs(t1) < EPS){
            //same line
            printf("LINE\n");
        }else{
            //just parallel
            printf("NONE\n");
        }
    }else{
        t0 /= det;
        t1 /= det;
        double x = x0 + t0*(x1-x0);
        double y = y0 + t0*(y1-y0);
        //intersection is point (x, y)
        printf("POINT %.21f %.21f\n", x, y);
    }
}

```

7.12. Hallar la intersección de dos segmentos de recta

Field-testing:

- UVa - 11665 - Chinese Ink

```

/*
    Returns true if point (x, y) lies inside (or in the border)
    of box defined by points (x0, y0) and (x1, y1).
*/
bool point_in_box(double x, double y,
                  double x0, double y0,
                  double x1, double y1){
    return

```


(Can be modified to find the intersection between a segment and a line)

Handles the case when the 2 segments are:

- *Parallel but don't lie on the same line (No intersection)
- *Parallel and both lie on the same line (Infinite intersections or no intersections)
- *Not parallel (One intersection or no intersections)

Returns true if the segments do intersect in any case.

```

*/
bool segment_segment_intersection(int x1, int y1,
                                int x2, int y2,
                                int x3, int y3,
                                int x4, int y4){

    int d1 = direction(x3, y3, x4, y4, x1, y1);
    int d2 = direction(x3, y3, x4, y4, x2, y2);
    int d3 = direction(x1, y1, x2, y2, x3, y3);
    int d4 = direction(x1, y1, x2, y2, x4, y4);
    bool b1 = d1 > 0 and d2 < 0 or d1 < 0 and d2 > 0;
    bool b2 = d3 > 0 and d4 < 0 or d3 < 0 and d4 > 0;
    if (b1 and b2) return true;
    if (d1 == 0 and point_in_box(x1, y1, x3, y3, x4, y4))
        return true;

    if (d2 == 0 and point_in_box(x2, y2, x3, y3, x4, y4))
        return true;

    if (d3 == 0 and point_in_box(x3, y3, x1, y1, x2, y2))
        return true;

    if (d4 == 0 and point_in_box(x4, y4, x1, y1, x2, y2))
        return true;

    return false;
}

```

7.14. Centro del círculo que pasa por 3 puntos

Field-testing:

- *Live Archive* - 4807 - Cocircular Points

```

point center(const point &p, const point &q, const point &r) {
    double ax = q.x - p.x;
    double ay = q.y - p.y;
    double bx = r.x - p.x;
    double by = r.y - p.y;
    double d = ax*by - bx*ay;

    if (cmp(d, 0) == 0) {
        printf("Points are collinear!\n");
        assert(false);
    }

    double cx = (q.x + p.x) / 2;
    double cy = (q.y + p.y) / 2;
    double dx = (r.x + p.x) / 2;
    double dy = (r.y + p.y) / 2;

    double t1 = bx*dx + by*dy;
    double t2 = ax*cx + ay*cy;

    double x = (by*t2 - ay*t1) / d;
    double y = (ax*t1 - bx*t2) / d;

    return point(x, y);
}

```

8. Estructuras de datos

8.1. Árboles de Fenwick ó Binary indexed trees

Se tiene un arreglo $\{a_0, a_1, \dots, a_{n-1}\}$. Los árboles de Fenwick permiten encontrar $\sum_{k=i}^j a_k$ en orden $O(\log_2 n)$ para parejas de (i, j) con $i \leq j$. De la misma manera, permiten sumarle una cantidad a un a_i también en tiempo $O(\log_2 n)$.


```

class FenwickTree{
    vector<long long> v;
    int maxSize;

public:
    FenwickTree(int _maxSize) : maxSize(_maxSize+1) {
        v = vector<long long>(maxSize, 0LL);
    }

    void add(int where, long long what){
        for (where++; where <= maxSize; where += where & -where){
            v[where] += what;
        }
    }

    long long query(int where){
        long long sum = v[0];
        for (where++; where > 0; where -= where & -where){
            sum += v[where];
        }
        return sum;
    }

    long long query(int from, int to){
        return query(to) - query(from-1);
    }
};

```

8.2. Segment tree

```

class SegmentTree{
public:
    vector<int> arr, tree;
    int n;

    SegmentTree(){
    }
    SegmentTree(const vector<int> &arr) : arr(arr) {
        initialize();
    }
};

```

```

//must be called after assigning a new arr.
void initialize(){
    n = arr.size();
    tree.resize(4*n + 1);
    initialize(0, 0, n-1);
}

int query(int query_left, int query_right) const{
    return query(0, 0, n-1, query_left, query_right);
}

void update(int where, int what){
    update(0, 0, n-1, where, what);
}

private:
    int initialize(int node, int node_left, int node_right);
    int query(int node, int node_left, int node_right,
               int query_left, int query_right) const;
    void update(int node, int node_left, int node_right,
                int where, int what);
};

int SegmentTree::initialize(int node,
                             int node_left, int node_right){
    if (node_left == node_right){
        tree[node] = arr[node_left];
        return tree[node];
    }
    int half = (node_left + node_right) / 2;
    int ans_left = initialize(2*node+1, node_left, half);
    int ans_right = initialize(2*node+2, half+1, node_right);

    if (arr[ans_left] <= arr[ans_right]){
        tree[node] = ans_left;
    }else{
        tree[node] = ans_right;
    }
    return tree[node];
}

int SegmentTree::query(int node, int node_left, int node_right,
                        int query_left, int query_right) const{

```

```

if (node_right < query_left || query_right < node_left)
    return -1;
if (query_left <= node_left && node_right <= query_right)
    return tree[node];

int half = (node_left + node_right) / 2;
int ans_left = query(2*node+1, node_left, half,
                    query_left, query_right);
int ans_right = query(2*node+2, half+1, node_right,
                    query_left, query_right);

if (ans_left == -1) return ans_right;
if (ans_right == -1) return ans_left;

return(arr[ans_left] <= arr[ans_right] ? ans_left : ans_right);
}

void SegmentTree::update(int node, int node_left, int node_right,
                        int where, int what){
    if (where < node_left || node_right < where) return;
    if (node_left == where && where == node_right){
        arr[where] = what;
        tree[node] = where;
        return;
    }
    int half = (node_left + node_right) / 2;
    if (where <= half){
        update(2*node+1, node_left, half, where, what);
    }else{
        update(2*node+2, half+1, node_right, where, what);
    }
    if (arr[tree[2*node+1]] <= arr[tree[2*node+2]]){
        tree[node] = tree[2*node+1];
    }else{
        tree[node] = tree[2*node+2];
    }
}
}

```

9. Misceláneo

9.1. Problema de Josephus

Hay n personas enumeradas de 0 a $n - 1$ paradas en un círculo. Un verdugo empieza a contar personas en sentido horario, empezando en la persona 0. Cuando la cuenta llega a k , el verdugo mata a la última persona contada y vuelve a empezar a contar a partir siguiente persona. ¿Quién es el sobreviviente?

Por ejemplo, si $n = 7$ y $k = 3$, el orden en que se eliminan las personas es 2, 5, 1, 6, 4, 0 y 3. El sobreviviente es 3.

```

// Recursivo:
// n <= 2500
// Es O(n), pero mejor usar la versión iterativa
// para evitar stack overflows.
int joseph(int n, int k) {
    assert(n >= 1);
    if (n == 1) return 0;
    return (joseph(n - 1, k) + k) % n;
}

// Iterativo:
// n <= 10^6, k <= 2^31 - 1
int joseph(int n, int k) {
    int ans = 0;
    for (int i = 2; i <= n; ++i) {
        ans = (ans + k) % i;
    }
    return ans;
}

// Más rápido:
// n <= 10^18, k <= 2500
// Posiblemente se puede incrementar k un poco más
// si se cambia la línea marcada con *** por la versión
// iterativa, para evitar stack overflows.
long long joseph(long long n, int k) {
    assert(n >= 1);
    if (n == 1) return 0LL;
    if (k == 1) return n - 1;
    if (n < k) return (joseph(n - 1, k) + k) % n; // ***
    long long w = joseph(n - n / k, k) - n % k;
    if (w < 0) return w + n;
    return w + w / (k - 1);
}

```

```
}
```

9.2. Trucos con bits

9.2.1. Iterar sobre los subconjuntos de una máscara

```
for(int m = mask; m > 0; m = (m-1) & mask){
    // m tiene un subconjunto de mask
}
```

9.3. El *parser* más rápido del mundo

- Cada no-terminal: un método
- Cada lado derecho:
 - invocar los métodos de los no-terminales o
 - Cada terminal: invocar proceso *match*
- Alternativas en una producción: se hace un *if*

No funciona con gramáticas recursivas por izquierda ó en las que en algún momento haya varias posibles escogencias que empiezan por el mismo caracter (En ambos casos la gramática se puede factorizar).

Ejemplo: Para la gramática:

$$A \rightarrow (A)A$$

$$A \rightarrow \epsilon$$

```
//A -> (A)A | Epsilon
```

```
#include <iostream>
#include <string>
```

```
using namespace std;
```

```
bool ok;
char sgte;
int i;
string s;
```

```
bool match(char c){
    if (sgte != c){
        ok = false;
    }
    sgte = s[++i];
}

void A(){
    if (sgte == '('){
        match('(');
        A(); match(')'); A();
    }else if (sgte == '$' || sgte == ')'){
        //nada
    }else{
        ok = false;
    }
}
```

```
int main(){
    while(getline(cin, s) && s != ""){
        ok = true;
        s += '$';
        sgte = s[(i = 0)];
        A();
        if (i < s.length()-1) ok=false; //No consumí toda la cadena
        if (ok){
            cout << "Accepted\n";
        }else{
            cout << "Not accepted\n";
        }
    }
}
```

9.4. Checklist para corregir un Wrong Answer

Consideraciones que podrían ser causa de un Wrong Answer:

- Overflow.
- El programa termina anticipadamente por la condición en el ciclo de lectura. Por ejemplo, se tiene `while (cin >> n >> k && n && k)` y un caso válido de entrada es `n = 1` y `k = 0`.

- El grafo no es conexo.
- Puede haber varias aristas entre el mismo par de nodos.
- Las aristas pueden tener costos negativos.
- El grafo tiene un sólo nodo.
- La cadena puede ser vacía.
- Las líneas pueden tener espacios en blanco al principio o al final (Cuidado al usar `getline` o `fgets`).
- El arreglo no se limpia entre caso y caso.
- Estás imprimiendo una línea en blanco con un espacio (`printf(" \n")` en vez de `printf("\n")` ó `puts(" ")` en vez de `puts("")`).
- Hay pérdida de precisión al leer variables como `double` y convertirlas a enteros. Por ejemplo, en C++, `floor(0.29 * 100) == 28`.
- La rana se puede quedar quieta.
- El producto cruz está invertido. Realmente es $|\langle a_x, a_y \rangle \times \langle b_x, b_y \rangle| = a_x \mathbf{b}_y - a_y \mathbf{b}_x \neq a_x \mathbf{b}_x - a_y \mathbf{b}_y$.

9.5. Redondeo de dobles

Para redondear un doble a k cifras, usar:

$$\frac{\lfloor 10^k \cdot x + 0,5 \rfloor}{10^k}$$

Ejemplo:

```
double d = 1.2345;
d = floor(1000 * d + 0.5) / 1000;
```

Al final, `d` es 1.235.

9.5.1. Convertir un doble al entero más cercano

Código	Valores originales (d)	Nuevos valores (k)
<pre>int k = floor(d + 0.5 + EPS); (con EPS = 1e-9)</pre>	0.0	0
	0.1	0
	0.5	1
	0.4999999999999999	1
	<code>cos(1e-7) * 0.5 =</code> 0.49999999999999975	1
	0.9	1
	1.0	1
	1.4	1
	1.5	2
	1.6	2
	1.9	2
	2.0	2
	2.1	2
	-0.0	0
	-0.1	0
	-0.5	0
	-0.4999999999999999	0
	<code>-cos(1e-7) * 0.5 =</code> -0.49999999999999975	0
	-0.9	-1
	-1.0	-1
	-1.4	-1
	-1.5	-1
	-1.6	-2
	-1.9	-2
	-2.0	-2
	-2.1	-2

Código	Valores originales (d)	Nuevos valores (k)
<code>int k = floor(d + 0.5);</code>	0.0	0
	0.1	0
	0.5	1
	0.499999999999999	0
	<code>cos(1e-7) * 0.5 =</code>	
	0.4999999999999975	0
	0.9	1
	1.0	1
	1.4	1
	1.5	2
	1.6	2
	1.9	2
	2.0	2
	2.1	2
	-0.0	0
	-0.1	0
	-0.5	0
	-0.499999999999999	0
	<code>-cos(1e-7) * 0.5 =</code>	
	-0.4999999999999975	0
	-0.9	-1
	-1.0	-1
	-1.4	-1
	-1.5	-1
	-1.6	-2
	-1.9	-2
	-2.0	-2
	-2.1	-2

9.5.2. Redondear un doble a cierto número de cifras de precisión

10. Java

10.1. Entrada desde entrada estándar

Este primer método es muy fácil pero es mucho más ineficiente porque utiliza Scanner en vez de BufferedReader:

```
import java.io.*;
import java.util.*;
```

```
class Main{
    public static void main(String[] args){
        Scanner sc = new Scanner(System.in);
        while (sc.hasNextLine()){
            String s= sc.nextLine();
            System.out.println("Leí: " + s);
        }
    }
}
```

.....

Este segundo es más rápido:

```
import java.util.*;
import java.io.*;
import java.math.*;
```

```
class Main {
    public static void main(String[] args) throws IOException {
        BufferedReader reader =
            new BufferedReader(new InputStreamReader(System.in));
        String line = reader.readLine();
        StringTokenizer tokenizer = new StringTokenizer(line);
        int N = Integer.valueOf(tokenizer.nextToken());
        while (N-- > 0){
            String a, b;
            a = reader.readLine();
            b = reader.readLine();

            int A = a.length(), B = b.length();
            if (B > A){
```



```

System.out.println(m.get("Objeto inexistente"));

/*
 * Sets
 * La misma diferencia entre TreeSet y HashSet.
 */
System.out.println("\nSets");
/*
 * *OJO: El HashSet no está en orden, el TreeSet sí.
 */
//HashSet<Integer> s = new HashSet<Integer>();
TreeSet < Integer > s = new TreeSet < Integer > ();
s.add(3576);
s.add(new Integer("54"));
s.add(new Integer(1000000007));

if (s.contains(54)) {
    System.out.println("54 presente.");
}

if (s.isEmpty() == false) {
    System.out.println("s.size() = " + s.size());
    Iterator < Integer > i = s.iterator();
    while (i.hasNext()) {
        System.out.println(i.next());
        i.remove();
    }
    System.out.println("s.size() = " + s.size());
}
}
}
}

```

.....
La salida de este programa es:

```

Maps
m.size() = 1
465
null

Sets
54 presente.
s.size() = 3
54
3576
1000000007
s.size() = 0

```

Si quiere usarse una clase propia como llave del mapa o como elemento del set, la clase debe implementar algunos métodos especiales: Si va a usarse un TreeMap ó TreeSet hay que implementar los métodos `compareTo` y `equals` de la interfaz `Comparable` como en la sección 10.4. Si va a usarse un HashMap ó HashSet hay más complicaciones.

Sugerencia: Inventar una manera de codificar y decodificar la clase en una String o un Integer y meter esa representación en el mapa o set: esas clases ya tienen los métodos implementados.

10.4. Colas de prioridad

Hay que implementar unos métodos. Veamos un ejemplo:

```

import java.util.*;

class Item implements Comparable<Item>{
    int destino, peso;

    Item(int destino, int peso){
        this.peso = peso;
        this.destino = destino;
    }
    /*
     * Implementamos toda la javazofia.
     */
    public int compareTo(Item otro){
        // Return < 0 si this < otro
        // Return 0 si this == otro
    }
}

```

```

        // Return > 0 si this > otro
        /* Un nodo es menor que otro si tiene menos peso */
        return peso - otro.peso;
    }
    public boolean equals(Object otro){
        if (otro instanceof Item){
            Item ese = (Item)otro;
            return destino == ese.destino && peso == ese.peso;
        }
        return false;
    }
    public String toString(){
        return "peso = " + peso + ", destino = " + destino;
    }
}

class Ejemplo {
    public static void main(String[] args) {
        PriorityQueue<Item> q = new PriorityQueue<Item>();
        q.add(new Item(12, 0));
        q.add(new Item(4, 1876));
        q.add(new Item(13, 0));
        q.add(new Item(8, 0));
        q.add(new Item(7, 3));
        while (!q.isEmpty()){
            System.out.println(q.poll());
        }
    }
}

```

.....

La salida de este programa es:

peso = 0, destino = 12
peso = 0, destino = 8
peso = 0, destino = 13
peso = 3, destino = 7
peso = 1876, destino = 4

Vemos que la función de comparación que definimos no tiene en cuenta destino, por eso no desempata cuando dos Items tienen el mismo peso si no que escoge cualquiera de manera arbitraria.

11. C++

11.1. Entrada desde archivo

```

#include <iostream>
#include <fstream>

using namespace std;

int _main(){
    freopen("entrada.in", "r", stdin);
    freopen("entrada.out", "w", stdout);

    string s;
    while (cin >> s){
        cout << "Leí " << s << endl;
    }
    return 0;
}

int main(){
    ifstream fin("entrada.in");
    ofstream fout("entrada.out");

    string s;
    while (fin >> s){
        fout << "Leí " << s << endl;
    }
    return 0;
}

```

11.2. Strings con caracteres especiales

```

#include <iostream>
#include <cassert>
#include <stdio.h>
#include <assert.h>
#include <wchar.h>
#include <wctype.h>
#include <locale.h>

```



```
using namespace std;

int main(){
    assert(setlocale(LC_ALL, "en_US.UTF-8") != NULL);
    wchar_t c;

    wstring s;
    while (getline(wcin, s)){
        wcout << L"Leí : " << s << endl;
        for (int i=0; i<s.size(); ++i){
            c = s[i];
            wprintf(L"%lc %lc\n", tolower(s[i]), toupper(s[i]));
        }
    }

    return 0;
}
```

.....

Nota: Como alternativa a la función `getline`, se pueden utilizar las funciones `fgetws` y `fputws`, y más adelante `swscanf` y `wprintf`:

```
#include <iostream>
#include <cassert>
#include <stdio.h>
#include <assert.h>
#include <wchar.h>
#include <wctype.h>
#include <locale.h>
using namespace std;
int main(){
    assert(setlocale(LC_ALL, "en_US.UTF-8") != NULL);
    wchar_t in_buf[512], out_buf[512];
    swprintf(out_buf, 512,
        L"¿Podrías escribir un número?, Por ejemplo %d. "
        L"¡Gracias, pinguino español!\n", 3);
    fputws(out_buf, stdout);
    fgetws(in_buf, 512, stdin);
    int n;
    swscanf(in_buf, L"%d", &n);
    swprintf(out_buf, 512,
        L"Escribiste %d, yo escribo ¿0ïàÜÑ~\n", n);
```

```
fputws(out_buf, stdout);
return 0;
}
```

11.3. Imprimir un doble con `cout` con cierto número de cifras de precisión

Tener cuidado con números negativos, porque el comportamiento es diferente.

```
#include <iomanip>
```

```
cout << fixed << setprecision(3) << 1.1225 << endl;
```

.....