

# MSA

**Una aplicación para cálculo estructural  
con Python**



# V 0.4.0



# Índice

1. MSA.....	3
1.1 Introducción.....	3
1.2 Interfaz .....	3
1.3 Definición de la estructura.....	4
1.4 Cálculo de estructuras.....	4
1.4.1 Introducción.....	4
1.4.2 Cálculo.....	5
1.4.2.1 Cálculo de reacciones.....	5
1.4.2.2 Cálculo de solicitaciones.....	5
1.4.2.3 Cálculo de desplazamientos y giros.....	5
2. Ejemplo.....	6
2.1.1 Definición del problema.....	6
2.1.2 Solución.....	6
3. Método de la rigidez.....	12
3.1 Introducción.....	12
3.2 Método.....	12
3.2.1 Descripción estructural.....	12
3.2.2 Matriz de rigidez de barra y vector de cargas nodales equivalente.....	12
3.2.2.1 Matriz de rigidez de barra.....	12
3.2.2.2 Vector de cargas nodales.....	13
3.2.2.3 Matriz de rotación.....	13
3.2.3 Matriz de rigidez global y vector de cargas global de la estructura.....	13
3.2.3.1 Matriz de rigidez de la estructura.....	13
3.2.3.2 Vector de cargas de la estructura.....	14
3.2.4 Introducción de las condiciones de contorno.....	14
3.2.5 Solución del sistema de ecuaciones.....	14
3.2.6 Cálculo de solicitaciones en los extremos de barras y reacciones.....	14
3.2.7 Comprobación del equilibrio.....	14
3.2.7.1 Equilibrio global.....	14
3.2.7.2 Equilibrio local.....	14
3.3 Barra con carga uniformemente distribuida.....	15
3.3.1 Reacciones de empotramiento perfecto.....	15
3.3.2 Diagramas de esfuerzos.....	15
3.3.3 Deformada.....	16
3.4 Comprobaciones.....	16
3.4.1 Comprobación a resistencia.....	16
3.4.2 Comprobación a deformación.....	16
3.4.3 Comprobación a pandeo.....	17
4. Casos de uso.....	18
4.1 Introducción.....	18
4.2 Viga de dos vanos.....	18
4.2.1 Esquema.....	18
4.2.2 Esfuerzos normales.....	19
4.2.3 Esfuerzos cortantes.....	20

4.2.4 Momentos flectores.....	21
4.3 Viga continua.....	21
4.3.1 Introducción.....	21
4.3.2 Definición de la estructura.....	22
4.3.3 Resultados.....	22
4.4 Pórtico rígido a dos aguas.....	25
4.5 Estructuras reticulares.....	25
4.5.1 Introducción.....	25
4.5.2 Estructura de nudos articulados.....	25
4.5.3 Soporte de tres barras .....	26

## 1. MSA

### 1.1 Introducción

**MSA**, Matrix Stiffness Analysis, es una implementación del método matricial de la rigidez para la resolución de estructuras planas.

Para la implementación del método se utiliza el lenguaje **Python** junto a una serie de paquetes para cálculo matricial (**Numpy**) y representación gráfica (**matplotlib**).

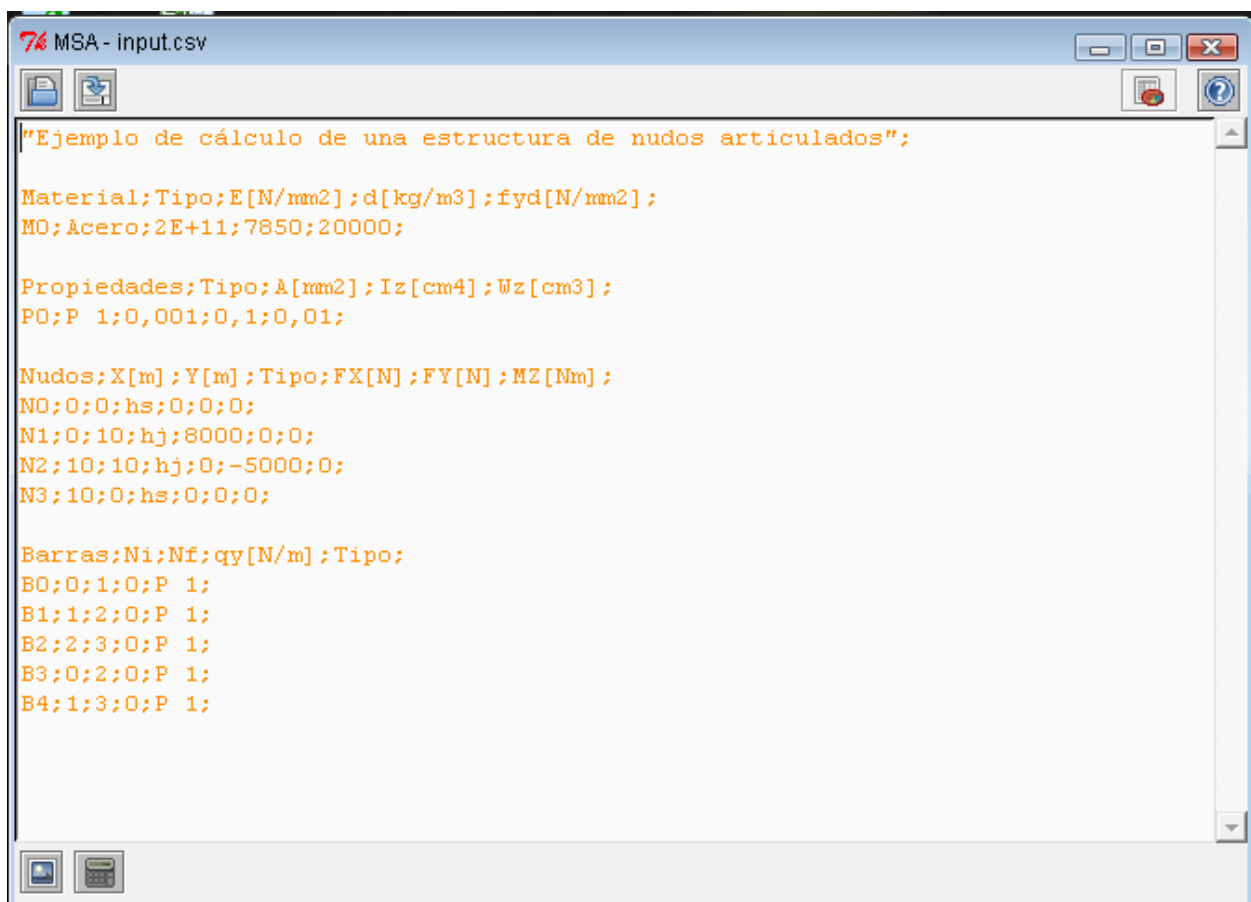
Con la unión de estos “softwares” se tiene una herramienta de programación similar a MATLAB, multiplataforma, open source y con coste cero.

Aunque “MSA” se encuentra en desarrollo, y aún no se pueden resolver estructuras mixtas, con nudos articulados y rígidos, se puede descargar la última versión disponible en la página del proyecto: <http://code.google.com/p/msapy>.

Para su ejecución, como ya se ha dicho, requiere de la instalación de: **Python**, **Numpy** y **matplotlib**.

### 1.2 Interfaz

Una vez lanzada la aplicación, se abre la ventana principal, con una interfaz minimalista, tal que:



```

MSA - input.csv
" Ejemplo de cálculo de una estructura de nudos articulados";

Material;Tipo;E[N/mm2];d[kg/m3];fyd[N/mm2];
M0;Acero;2E+11;7850;20000;

Propiedades;Tipo;A[mm2];Iz[cm4];Wz[cm3];
P0;P 1;0,001;0,1;0,01;

Nudos;X[m];Y[m];Tipo;FX[N];FY[N];MZ[Nm];
N0;0;0;hs;0;0;0;
N1;0;10;hj;8000;0;0;
N2;10;10;hj;0;-5000;0;
N3;10;0;hs;0;0;0;

Barras;Ni;Nf;qy[N/m];Tipo;
B0;0;1;0;P 1;
B1;1;2;0;P 1;
B2;2;3;0;P 1;
B3;0;2;0;P 1;
B4;1;3;0;P 1;
  
```

Esta ventana pretende ofrecer la mayor simplicidad, estando formada por una caja de texto en la que se define el problema y una serie de botones que permiten ejecutar las diferentes

acciones.

### 1.3 Definición de la estructura




La definición de la estructura requiere de tres etapas:

1. Definición de los nudos ("joints"): se definen las posiciones de los diferentes nudos que conforman la estructura, su tipo y las cargas que se le aplican.
2. Definición de las barras ("members"): se definen las barras según su nudo inicial y final, la carga uniformemente distribuida (si existe) y el material empleado.
3. Definición de las propiedades ("properties"): se definen las propiedades de los materiales utilizados.

Para la definición de la estructura se recomienda usar la plantilla "template.xls" desde EXCEL (Office) o CALC (OpenOffice) y guardar el archivo como "\*.csv" (valores separados por comas).

Cada nudo se ha de definir como: nudo rígido (**rj**, "rigid joint") o articulado (**hj**, "hinge joint"), utilizando sus siglas en inglés.

Además, cuando y donde corresponda, se deben definir los apoyos como: empotramiento (**fs**), articulado (**hs**) o rodillo (**rs**), utilizando sus siglas en inglés.

Tipos de apoyos ("supports")	
Empotramiento ( <b>fs</b> , "fixed support")	
Articulado ( <b>hs</b> , "hinge support")	
Rodillo ( <b>rs</b> , "roller support")	

## 1.4 Cálculo de estructuras

### 1.4.1 Introducción

Una estructura es un conjunto mecánico encargado de soportar y transmitir un determinado número de cargas hasta la cimentación, donde serán absorbidas por el terreno.

Para ello, la estructura se encuentra constituida por una serie de barras enlazadas entre sí por medio de nudos.

Estos nudos pueden ser articulados o rígidos según permitan o no el giro entre barras en el punto donde confluyen. Si los nudos son rígidos los ángulos entre barras tras la deformación se conservarán y la flecha será pequeña, mientras que si son articulados no transmitirán los momentos flectores dado que su giro será libre, y por tanto el momento nulo.

Las vigas son generalmente prismáticas, en el caso de ser de hormigón, y sus dimensiones se conocen como luz o largo para la dimensión principal, y base y canto para las de la sección, siendo la base la longitud que define la superficie de apoyo. Cuando son de acero, presentan diferentes perfiles, como los que presentan forma de I o H, donde se busca maximizar el momento de inercia de la sección al alejar de la línea neutra las dos alas que se unen por medio de un alma.

## 1.4.2 Cálculo

El cálculo de una estructura se puede reducir, de forma genérica, a los siguientes tres pasos fundamentales: cálculo de reacciones, cálculo de momentos y cálculo de desplazamientos y giros.

### 1.4.2.1 Cálculo de reacciones

Para el cálculo de reacciones se plantean las ecuaciones de la estática ( $\sum F = 0$ ,  $\sum M = 0$ ), y se resuelven las incógnitas.

Tipos de apoyos		
	Apoyo articulado móvil	Permite desplazamiento y giro
	Apoyo articulado fijo	Permite giro
	Empotramiento	No permite ningún desplazamiento

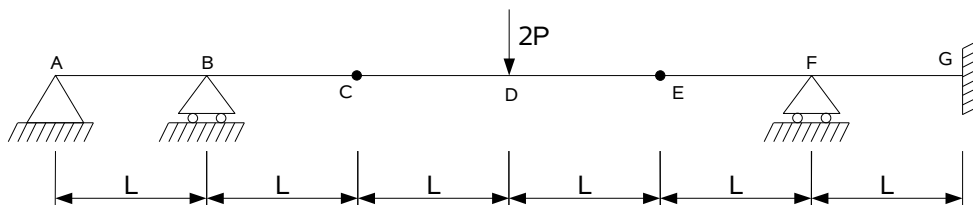
### 1.4.2.2 Cálculo de solicitaciones

Para ello, se secciona la estructura por cada uno de los tramos en que no existen cambios en los estados de carga y se calculan los esfuerzos normales, cortantes, flectores y torsores en cada una de las secciones según el criterio de signos adoptado.

### 1.4.2.3 Cálculo de desplazamientos y giros

Para el cálculo de los desplazamientos se aplican principalmente los teoremas de Mohr y Castigliano, explicados más adelante.

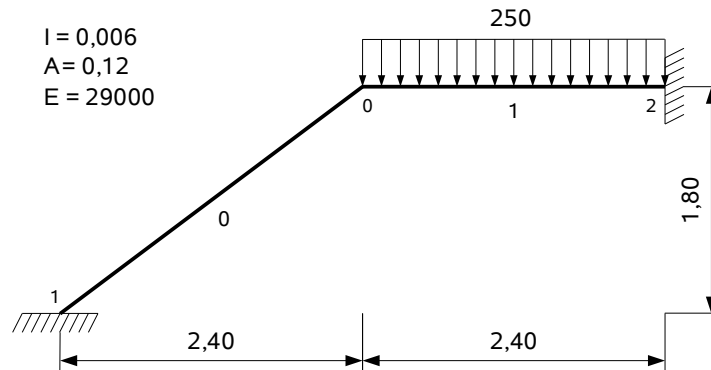
Criterio de signos



El estudio de los esfuerzos y la determinación de aquellos que sean máximos es lo que justifica la determinación de los diagramas de solicitaciones.

## 2. Ejemplo

### 2.1.1 Definición del problema



El problema se define en el archivo “input.csv” como:

```
Material;Tipo;E[N/m2];fyd[N/m2];
M0;MAT;29000;330;

Propiedades;Tipo;A[m2];Iz[m4];Wz[m3];
P0;PROP;0,12;0,006;0,001;

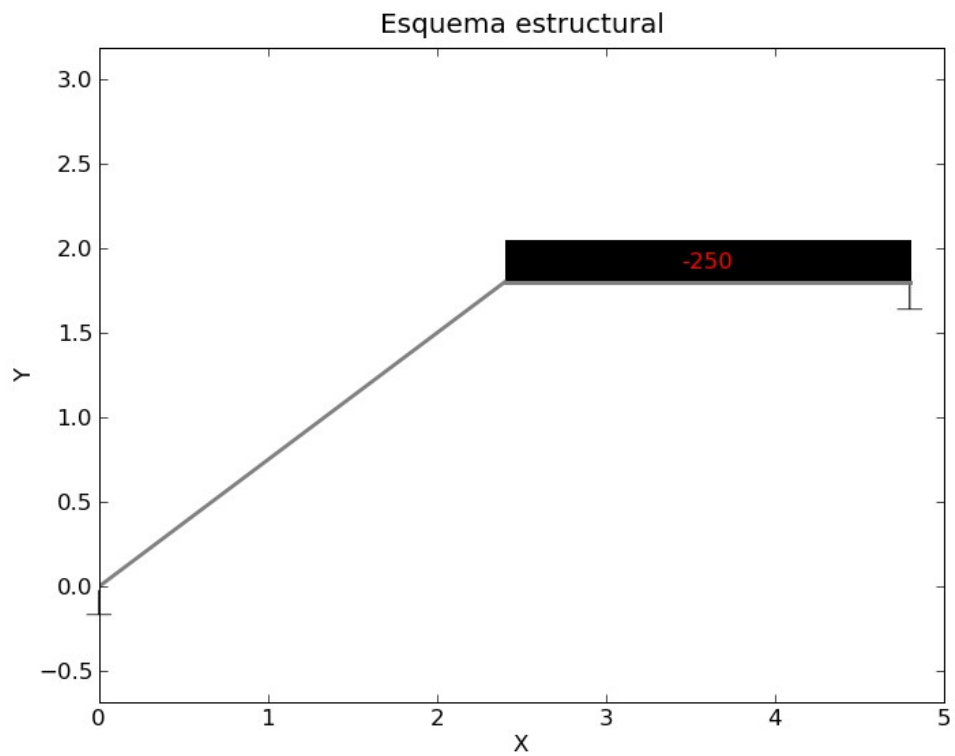
Nudos;X[m];Y[m];Tipo;FX[N];FY[N];MZ[Nm];
N0;2,40;1,80;rj;0;0;0;
N1;0;0;fs;0;0;0;
N2;4,80;1,80;fs;0;0;0;

Barras;Ni;Nf;qy[N/m];Tipo;
B0;1;0;0;PROP;
B1;0;2;-250;PROP;
```

### 2.1.2 Solución

#### Informe de resultados

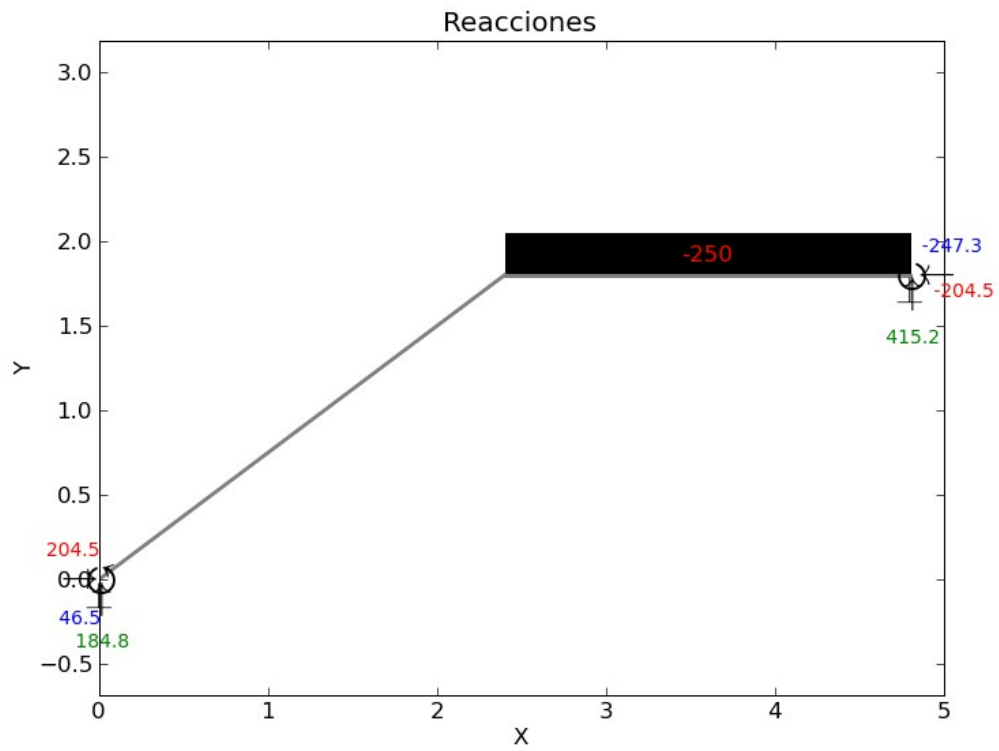




Nodos	Coordenadas		Cargas		
	X [m]	Y [m]	FX [N]	FY [N]	MZ [Nm]
0	2.4	1.8	0	0	0
1	0.0	0.0	0	0	0
2	4.8	1.8	0	0	0

Barras	L [m]	A	Propiedades		Cargas
			E	Iz	qy [N/m]
1/0	3.00000	0.12	29000	0.0060000	0
0/2	2.40000	0.12	29000	0.0060000	-250



Nodos	Reacciones		
	RX [N]	RY [N]	MZ [Nm]
0	0.00	0.00	0.00
1	204.49	184.84	46.47
2	-204.49	415.16	-247.32

### Esfuerzos

Diagrama de esfuerzos normales (N) ← [ ] →

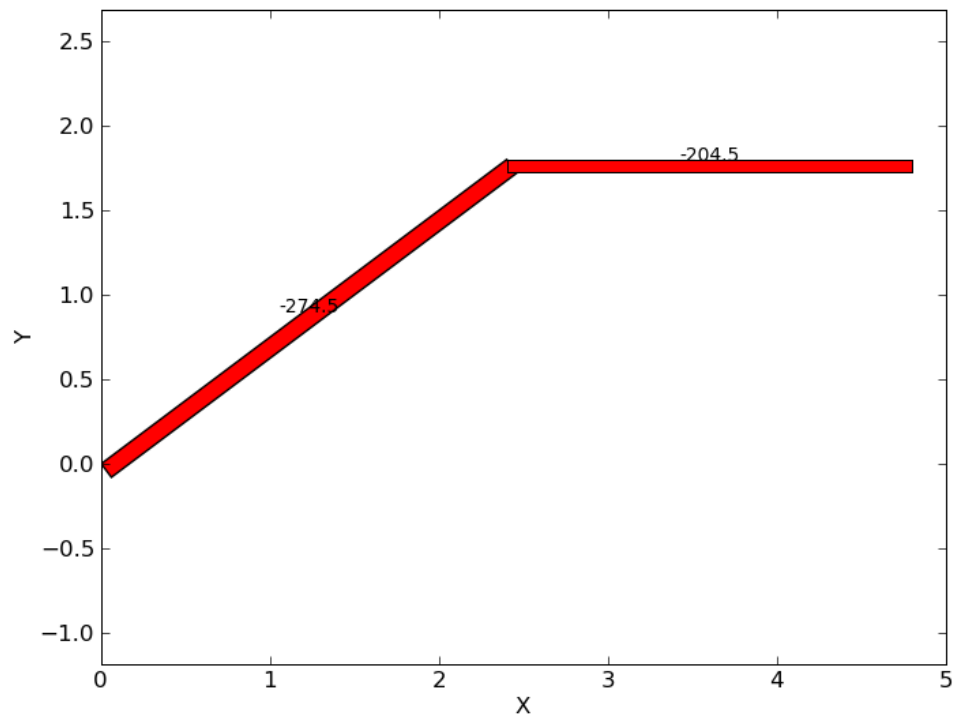
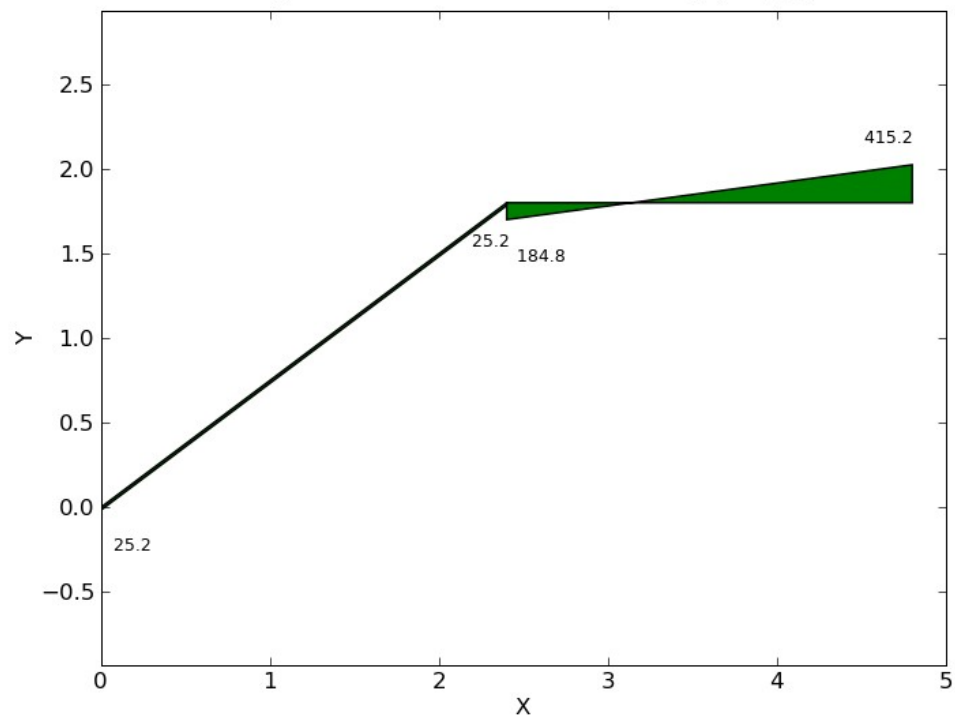
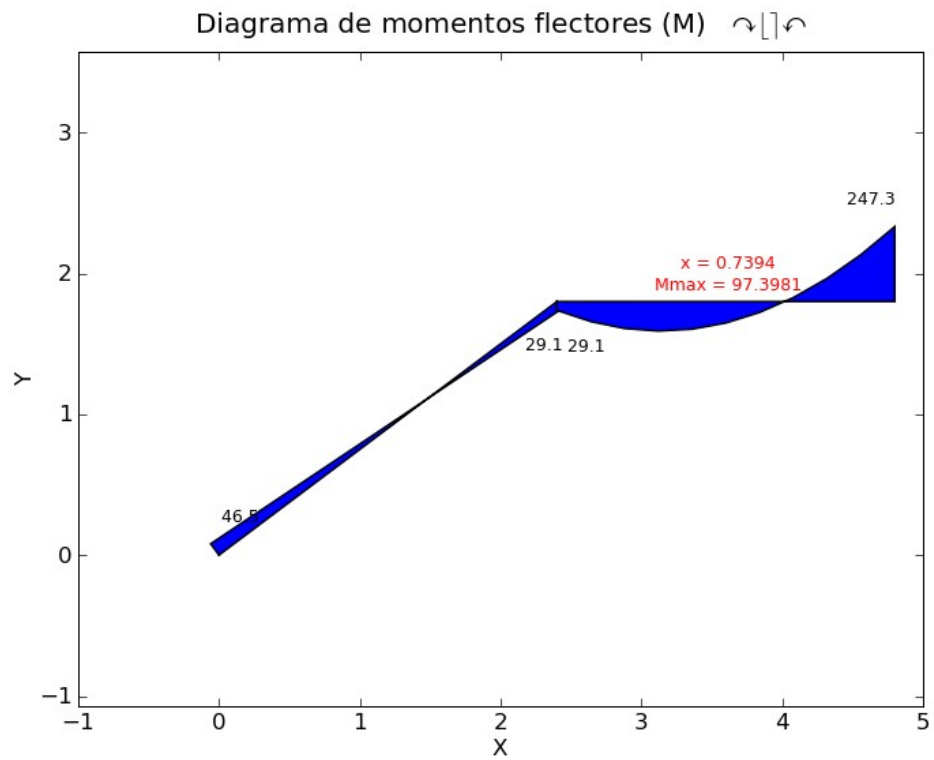


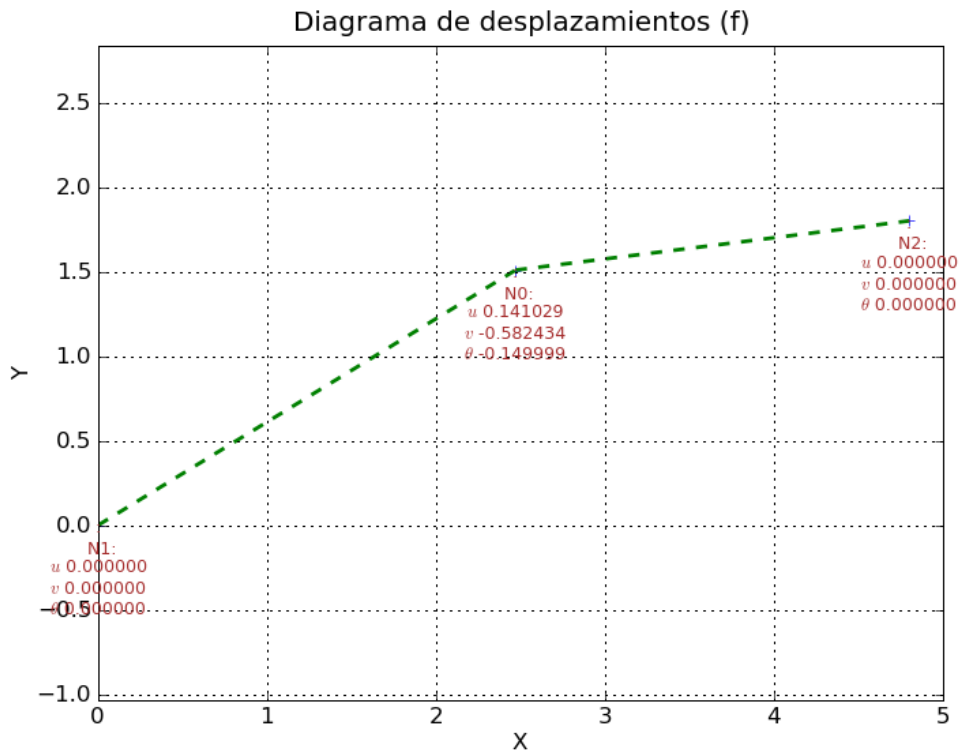
Diagrama de esfuerzos cortantes (V) ↓ [ ] ↑





Barras	N1	V1	M1	N2	V2	M2
1/0	274.50	25.18	46.47	-274.50	-25.18	29.07
0/2	204.49	184.84	-29.07	-204.49	415.16	-247.32

### Desplazamientos



Nodos	Desplazamientos		
	dX [m]	dY [m]	gZ [rad]
0	0.141029	-0.582434	-0.149999
1	0.000000	0.000000	0.000000
2	0.000000	0.000000	0.000000

Informe generado mediante [MSA](#), con la aplicación del método matricial de la rigidez.

[MSA](#) - Copyright 2009, 2010 Jorge Rodríguez Araújo (grrodri@gmail.com).

### 3. Método de la rigidez

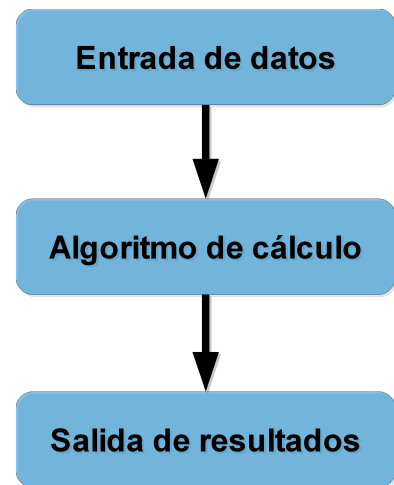
#### 3.1 Introducción

Un sistema estructural, constituido por un entramado de barras rectas de sección constante y que cumplen las hipótesis de pequeñas deformaciones, se puede resolver por medio de la ecuación matricial que relaciona las cargas en los nudos ( $L$ ) y sus desplazamientos ( $D$ ) a través de la matriz de rigidez ( $S$ ) de la estructura.

$$L = S \cdot D$$

La definición de la matriz de rigidez se realiza de forma sistemática, de modo que el método se sintetiza en una serie de etapas mediante las cuales se da solución al sistema estructural.

1. Descripción de la estructura.
2. Cálculo de la matriz de rigidez de cada barra y del vector de cargas nodales equivalente.
3. Cálculo de la matriz de rigidez global (ensamblaje) y del vector de cargas global de la estructura.
4. Introducción de las condiciones de contorno.
5. Cálculo de desplazamientos y giros (solución del sistema de ecuaciones).
6. Cálculo de solicitaciones en los extremos de las barras.
7. Cálculo de reacciones.



#### 3.2 Método

##### 3.2.1 Descripción estructural

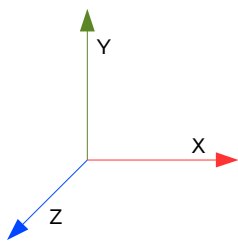


Ilustración 1: Sistema de referencia global

La estructura se define respecto a un sistema de referencia global (X, Y, Z) respecto al que se establecen las coordenadas de los nudos y sus cargas.

Sin embargo, cada barra presenta su propio sistema de referencia local (x, y, z) respecto al cual se definen sus características, así como las acciones aplicadas sobre ella. Este sistema presenta el eje x coincidiendo con el geométrico de la barra, mientras que los ejes y y z lo hacen con los ejes principales de la sección transversal de la barra.

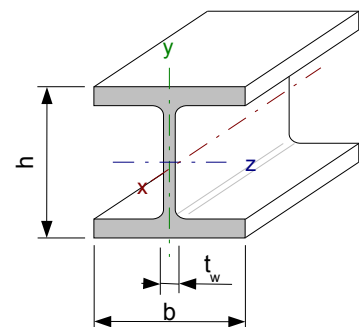


Ilustración 2: Sistema de referencia local

##### 3.2.2 Matriz de rigidez de barra y vector de cargas nodales equivalente

###### 3.2.2.1 Matriz de rigidez de barra

La matriz de rigidez ( $k$ ) de una barra respecto al sistema de referencia local ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ) que sigue la orientación indicada por los nudos inicial ( $1$ ) y final ( $2$ ) de la barra se define de forma única como:

$$k = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

Así, por medio de esta matriz quedan relacionadas las fuerzas en extremo de barra (  $f$  ) con los desplazamientos nodales en ejes locales (  $d$  ).

### 3.2.2.2 Vector de cargas nodales

Las cargas aplicadas sobre las barras deben ser sustituidas por unas equivalentes que, aplicadas en los nudos, produzcan en la estructura los mismos efectos que las originales, siendo estas cargas equivalentes (  $p$  ) las reacciones de empotramiento perfecto cambiadas de signo.

### 3.2.2.3 Matriz de rotación

Dado que una barra puede presentar una orientación arbitraria (  $\alpha$  ), medida en el sentido levógiro, se define la matriz de rotación (  $r = f(\alpha)$  ) para convertir los vectores y matrices entre los sistemas de referencia absoluto y local, de tal modo que:

$$r = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Así, la matriz de rigidez de la barra en el sistema de referencia global (  $K$  ), se define como:

$$K = r^t \cdot k \cdot r$$

Y el vector de cargas global de la barra, como:

$$P = -r^t \cdot p$$

## 3.2.3 Matriz de rigidez global y vector de cargas global de la estructura

### 3.2.3.1 Matriz de rigidez de la estructura

La matriz de rigidez de la estructura (  $S$  ) se construye como la suma de las rigideces correspondientes a cada nudo y aportadas por cada barra. Para ello se identifican las submatrices que componen la matriz de rigidez de la barra y se suman a su posición correspondiente en  $S$ .

$$S = \sum K \quad K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}$$

### 3.2.3.2 Vector de cargas de la estructura

El vector de cargas de la estructura (  $L$  ) se construye como la suma de las cargas aplicadas en cada nudo, incluyendo las producidas por cada barra.

$$L = \sum P \quad P = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

### 3.2.4 Introducción de las condiciones de contorno

Las filas y columnas de cada desplazamiento impedido se ponen a cero, salvo el elemento de la diagonal que se iguala a uno, y se elimina la acción (carga) correspondiente.

Para resolver estructuras reticuladas hay que igualar los momentos de inercia a 0 (  $I_z = 0$  )

### 3.2.5 Solución del sistema de ecuaciones

La resolución del sistema de ecuaciones proporciona el vector de desplazamientos nodales (  $D$  ) en función de sus cargas (  $L$  ), de tal modo que:

$$D = S^{-1} \cdot L$$

### 3.2.6 Cálculo de solicitaciones en los extremos de barras y reacciones

- Las solicitaciones (  $f$  ) en los extremos de cada barra se calculan por medio de la matriz de rigidez de la misma gracias a que los desplazamientos de sus extremos son conocidos, y se aplica una transformación para expresar sus valores en el sistema de coordenadas local de la barra.

$$F = K \cdot D \quad f = r \cdot F$$

- Las reacciones (  $R$  ) se expresan en el sistema de coordenadas global, siendo el resultado de sumar los esfuerzos de extremo de barra que confluyen en el nudo más las cargas que sobre el se encuentran aplicadas.

$$R = \sum F$$

### 3.2.7 Comprobación del equilibrio

#### 3.2.7.1 Equilibrio global

Para comprobar los resultados obtenidos por el método de la rigidez se aplican las ecuaciones de equilibrio global de la estructura, cargas frente a reacciones.

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum M_z = 0$$

#### 3.2.7.2 Equilibrio local

Para verificar la precisión del cálculo se plantean las ecuaciones locales de cada barra.

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum M_z = 0$$

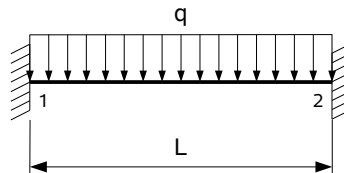
La precisión de la solución final se mide a través del cálculo del error cuadrático medio de los errores determinados a través de las ecuaciones de equilibrio de cada barra.



$$\begin{aligned}\sum F_x &= N_1 + N_2 + F_{x1} + F_{x2} \\ \sum F_y &= V_1 + V_2 + F_{y1} + F_{y2} \\ \sum M_z &= M_1 + M_2 + M_{z1} + M_{z2} + (V_2 - F_{y2}) L\end{aligned}$$

### 3.3 Barra con carga uniformemente distribuida

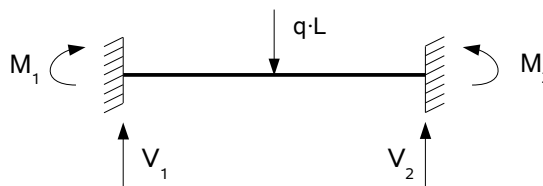
Reacciones de empotramiento perfecto generadas por una carga uniformemente distribuida.



#### 3.3.1 Reacciones de empotramiento perfecto

Las reacciones de empotramiento perfecto son las que aparecen cuando una barra cargada se encuentra empotrada.

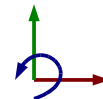
Para el cálculo de las reacciones se expresa la carga distribuida como concentrada aplicada en el centro.



Dado que la carga está aplicada de forma simétrica las reacciones y momentos generados son iguales en ambos extremos, pero dado que los momentos tienen sentidos opuestos, los signos serán distintos según sea levógiro (positivo) o dextrógiro (negativo).

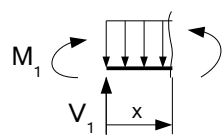
$$V_1 = V_2 = -\frac{q \cdot L}{2}$$

$$M_1 = -M_2 = \frac{q \cdot L^2}{12}$$



#### 3.3.2 Diagramas de esfuerzos

La ley de momentos (  $M(x)$  ) de una barra sometida a la acción de una carga uniformemente distribuida (  $q$  ) viene dada por:



$$M(x) = M_1 + V_1 \cdot x - q \cdot x \cdot \frac{x}{2} \quad x \in [0, L]$$

Y por tanto, el momento flector máximo, que es aquel donde la derivada vale cero:

$$V_1 - q \cdot x = 0 \Rightarrow x = \frac{V_1}{q}$$

$$M_{max} = M_1 + \frac{V_1^2}{2 \cdot q}$$

### 3.3.3 Deformada

La ecuación de la elástica o deformada ( $y(x)$ ) se obtiene a partir de la ecuación diferencial de la línea elástica:

$$y''(x) = \frac{-M(x)}{E \cdot I_z}$$

Integrando:

$$y'(x) = -\frac{1}{E \cdot I_z} \left( M_1 x + V_1 \frac{x^2}{2} + q \frac{x^3}{6} \right) + C_1$$

$$y(x) = -\frac{1}{E \cdot I_z} \left( M_1 \frac{x^2}{2} + V_1 \frac{x^3}{6} + q \frac{x^4}{24} \right) + C_1 x + C_2$$

$$y'(0) = C_1 = \varphi_1 \quad y(0) = C_2 = \delta_1$$

## 3.4 Comprobaciones

Para calcular y dimensionar los elementos de una estructura hay que verificar que se cumplen los criterios de tensión, flecha y esbeltez. Siendo el primero el criterio resistente, que indican que el material soportará la tensión a la que se encontrará sometido en la estructura bajo las condiciones previstas, el segundo el criterio de servicio, que responde a las deformaciones máximas admisibles bajo un determinado uso, y el tercero el de estabilidad.

Así, para el dimensionado de los elementos estructurales habrán de verificarse los estados límite de servicio (ELS) y último (ELU).

- Estado límite último de resistencia.
- Estado límite de servicio de deformación.
- Estado límite último de pandeo.

### 3.4.1 Comprobación a resistencia

Se ha de comprobar que ninguna de las secciones bajo carga mayorada sobrepase la resistencia del material minorada (tensión última del material).

Así, la resistencia de una sección a sollicitación compuesta ( $N + M + V$ ):

$$\frac{N}{A} + \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \leq f_{yd} \quad \text{siempre que} \quad V < \frac{1}{2} A_v \frac{f_{yd}}{\sqrt{3}}$$

$$\text{con} \quad f_{yd} = \frac{f_y}{\gamma} = \sigma_u \quad y \quad A_v = h \cdot t_w$$

Para el acero más típicamente usado en España, S275JR, la tensión de límite elástica:  $f_y = 275 \text{ N/mm}^2$ .

### 3.4.2 Comprobación a deformación

Se ha de comprobar bajo cargas sin mayorar la limitación de flecha, la cual se especifica según servicio en forma de flecha máxima relativa, que es aquella cuyo valor es función de la

longitud del tramo.

$$f < f_{adm}$$

La flecha de un elemento estructural es el desplazamiento en la dirección normal a su directriz, siendo por tanto el valor puntual de la deformación (  $y(x)$  ) que sufre una pieza sometida a flexión (  $M(x)$  ).

### 3.4.3 Comprobación a pandeo

Se ha de comprobar, bajo cargas mayoradas, la resistencia a pandeo en aquellos elementos esbeltos sometidos a compresión como los pilares metálicos. Dado que si se alcanza la carga crítica (  $N_{cr}$  ), el equilibrio del elemento estructural pasará a inestable y cualquier perturbación, por pequeña que sea, provocará una curvatura inicial que irá creciendo hasta llegar al colapso de la pieza, dando lugar al fenómeno de pandeo.

Así, se definen los coeficientes de pandeo (  $\beta$  ) según las condiciones de vínculo en los extremos, con lo que se obtiene la longitud de pandeo (  $L_k = \beta \cdot L$  ), y con ella la carga crítica de Euler:

$$N_{cr} = \left( \frac{\pi}{L_k} \right)^2 \cdot E \cdot I$$

Finalmente, la comprobación a pandeo:  $\sigma \leq \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2}$

$$\lambda = \frac{L_k}{i} \quad [\text{esbeltez mecánica}]$$

$$i = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad [\text{radio de giro}]$$

Para que la teoría de Euler sea aplicable:  $\lambda \geq 103,9$  , aunque hay que tener en cuenta que se recomienda que no supere 200.

En la antigua Norma Básica de la Edificación, la comprobación a pandeo se realiza por medio de la determinación de unos coeficientes de pandeo (  $\omega = \frac{\sigma_u}{\sigma_{cr}}$  ) tabulados, que se determinan en función de la resistencia del material (  $f_y$  ) y de la esbeltez mecánica (  $\lambda$  ) del perfil. Teniéndose:

$$\frac{N \cdot \omega}{A} + \frac{M}{W_z} \leq \sigma_u$$

## 4. Casos de uso

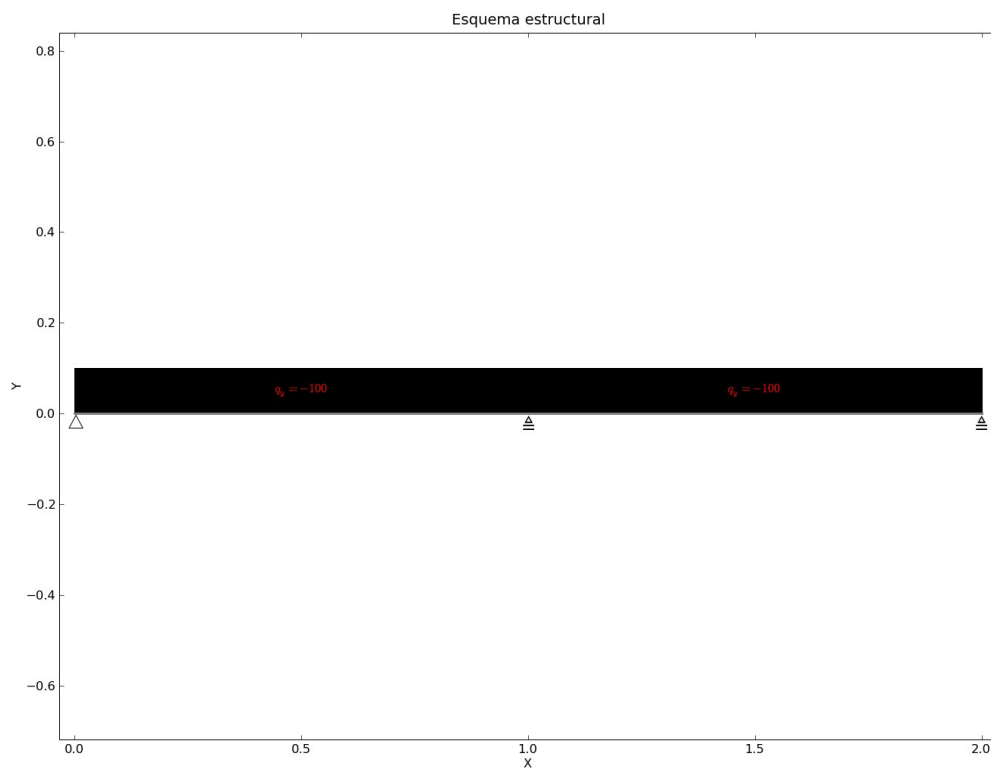
### 4.1 Introducción

Los casos de uso son una recopilación de casos prácticos que se irán definiendo, de tal modo que permitan evaluar y definir las funcionalidades de la aplicación.

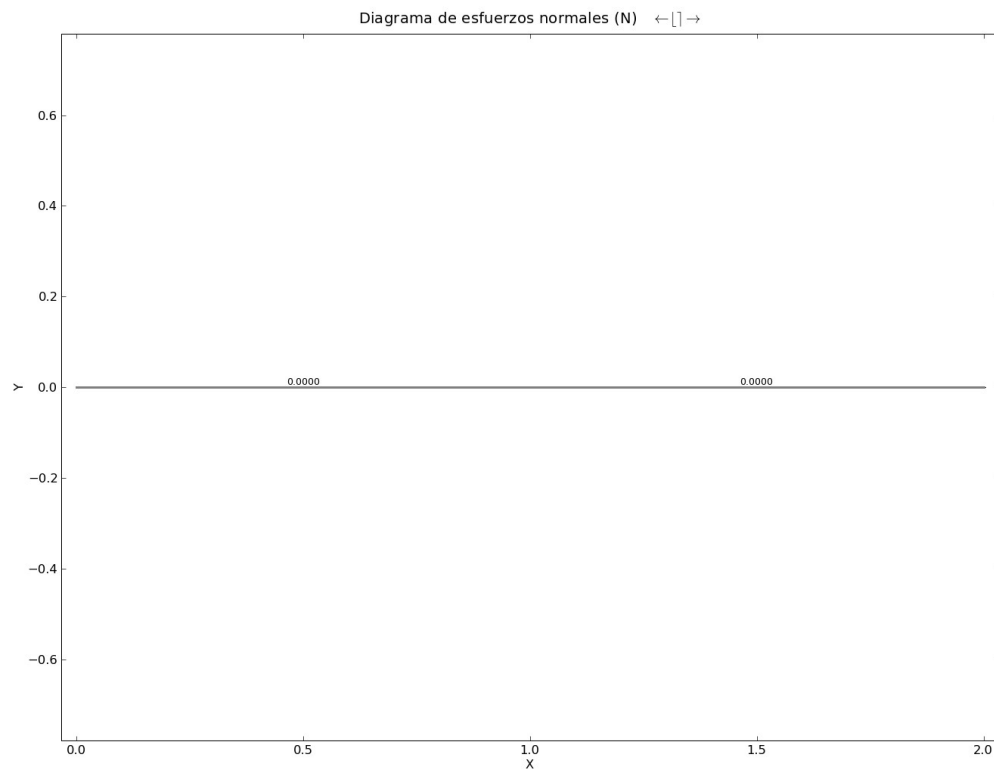
Aunque esta aplicación aún se encuentra en fases tempranas de desarrollo, se pueden resolver estructuras de nudos articulados con cargas en los nudos y estructuras de nudos rígidos que además de cargas en los nudos presenten cargas uniformemente distribuidas en las barras.

### 4.2 Viga de dos vanos

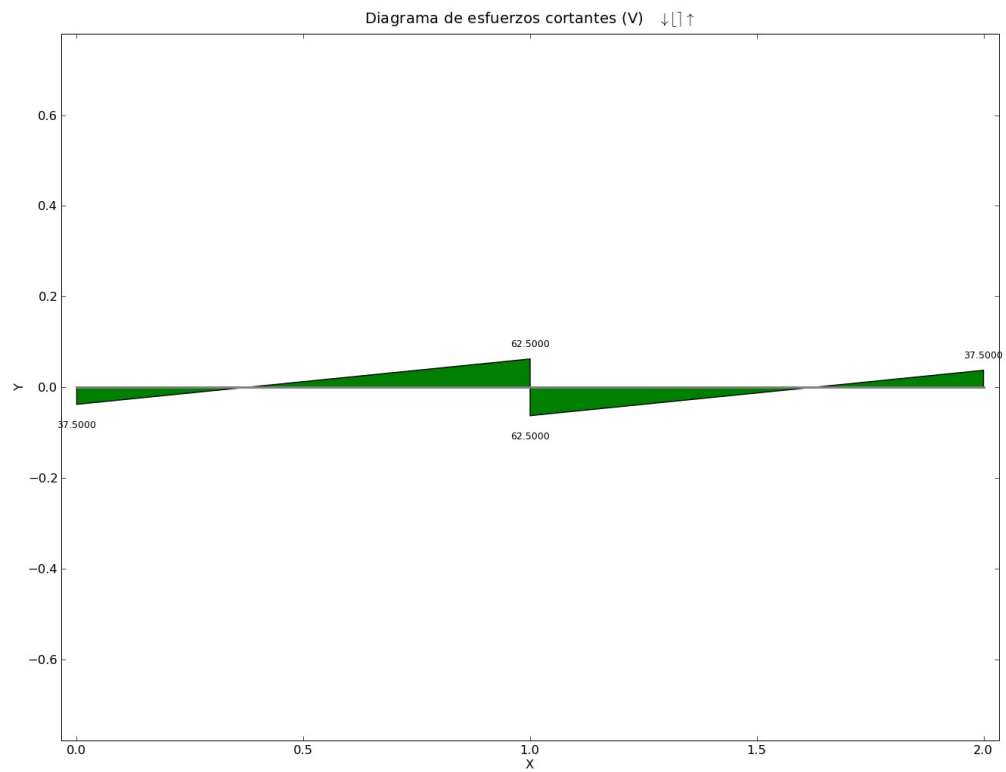
#### 4.2.1 Esquema



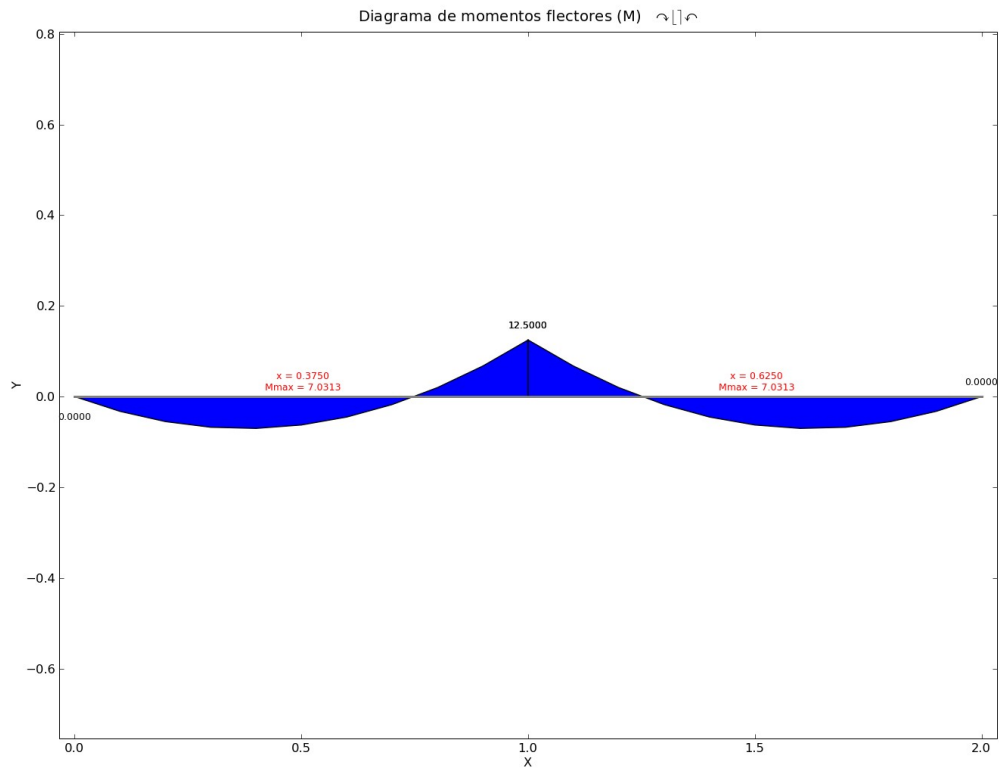
## 4.2.2 Esfuerzos normales



### 4.2.3 Esfuerzos cortantes



## 4.2.4 Momentos flectores

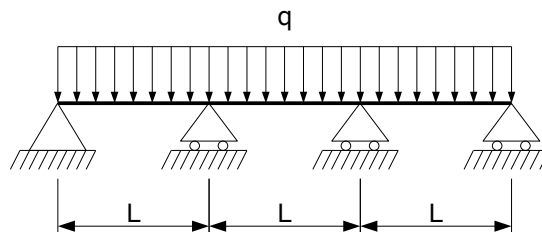


## 4.3 Viga continua

### 4.3.1 Introducción

Una viga continua es aquella que cubre tres o más vanos, o sea, que tiene más de tres apoyos.

Su principal ventaja reside en que presenta una menor flexión, y por tanto una menor flecha, aunque es muy sensible a los asentamientos diferenciales.



$$M_{max} = \frac{q \cdot L^2}{10}$$

### 4.3.2 Definición de la estructura

```

MSA - input.csv

Ejemplo de cálculo (Debes guardar el archivo como "*.csv")

Propiedades;Tipo;A[mm2];E[N/mm2];Iz[cm4];Wz[cm3];fyd[N/mm2];
P0;IPE 160;2010;210000;869;109;240;

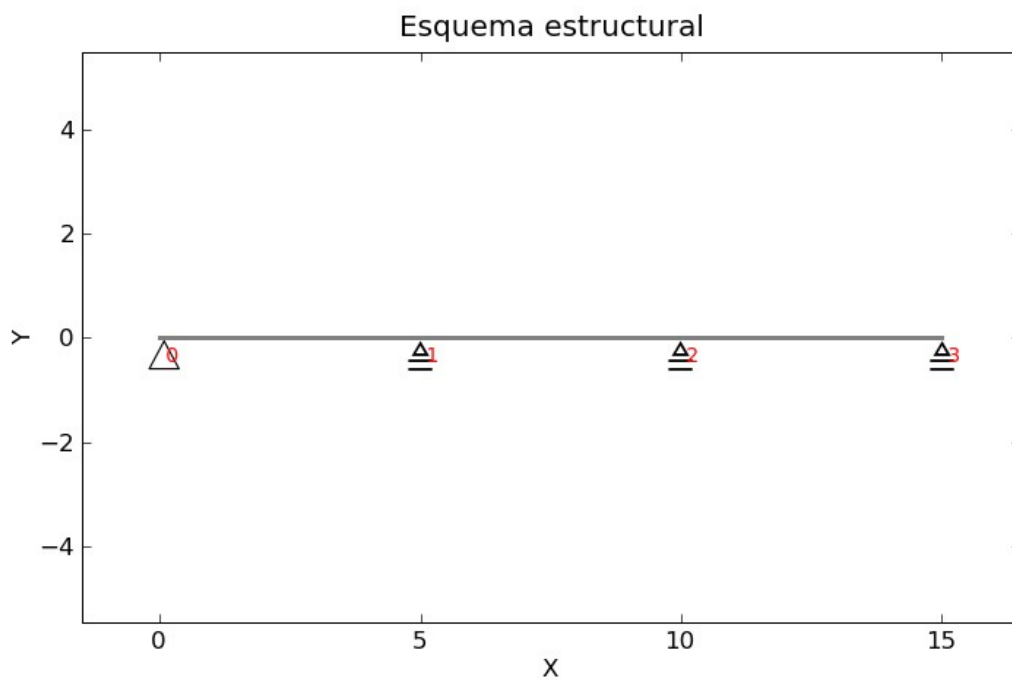
Nudos;X[m];Y[m];Tipo;FX[N];FY[N];MZ[Nm];
N0;0;0;hs;0;0;0;
N1;5;0;rs;0;0;0;
N2;10;0;rs;0;0;0;
N3;15;0;rs;0;0;0;

Barras;Ni;Nf;qy[N/m];Tipo;
B0;0;1;-10000;IPE 160;
B1;1;2;-10000;IPE 160;
B2;2;3;-10000;IPE 160;

El archivo se ha cargado con éxito

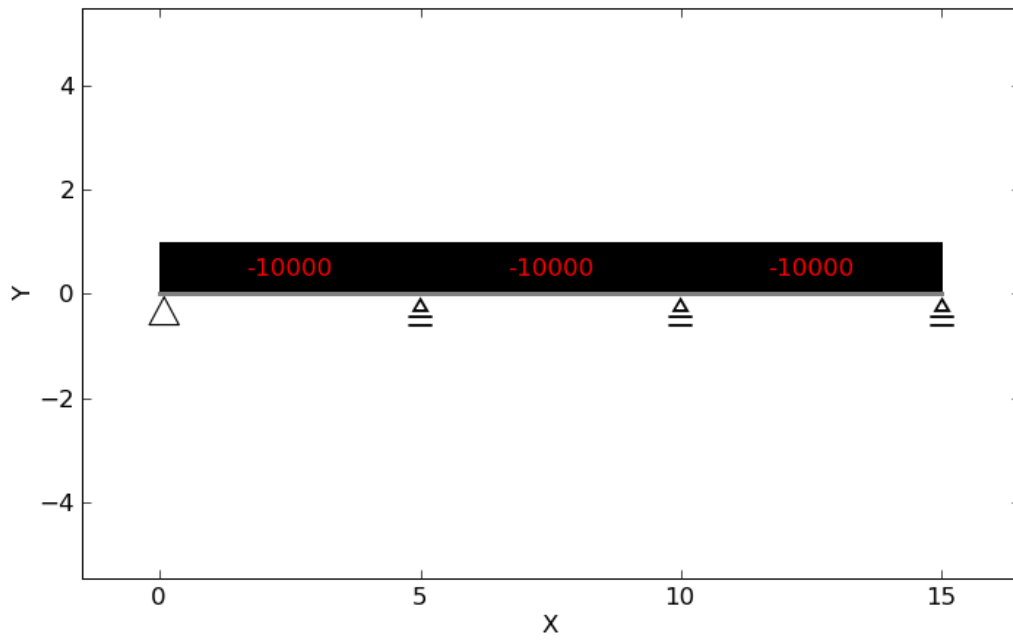
```

### 4.3.3 Resultados





### Hipotesis de carga



### Reacciones

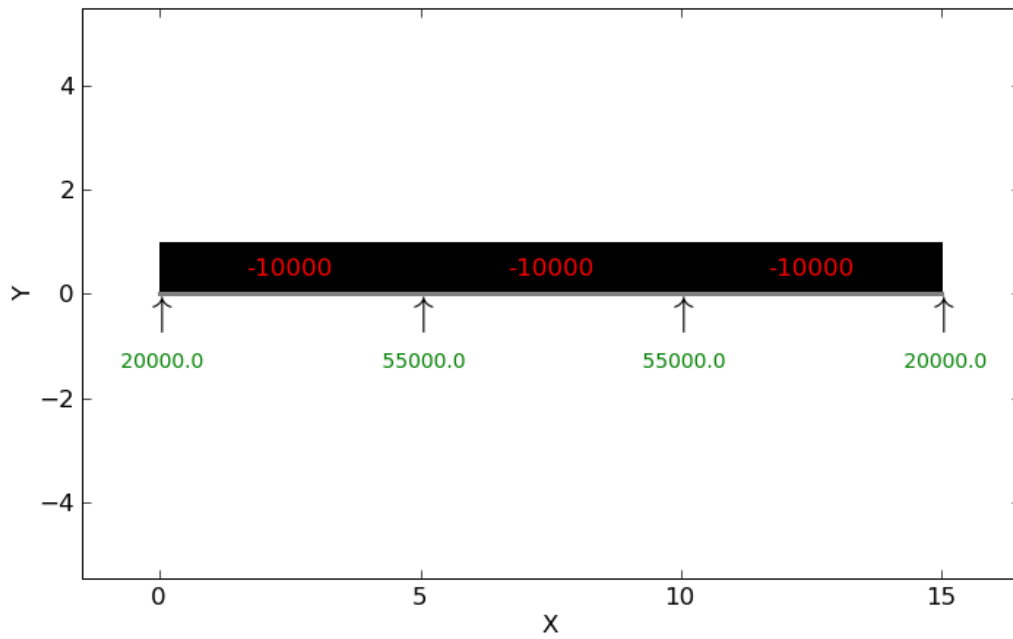


Diagrama de esfuerzos normales (N) ← [ ] →

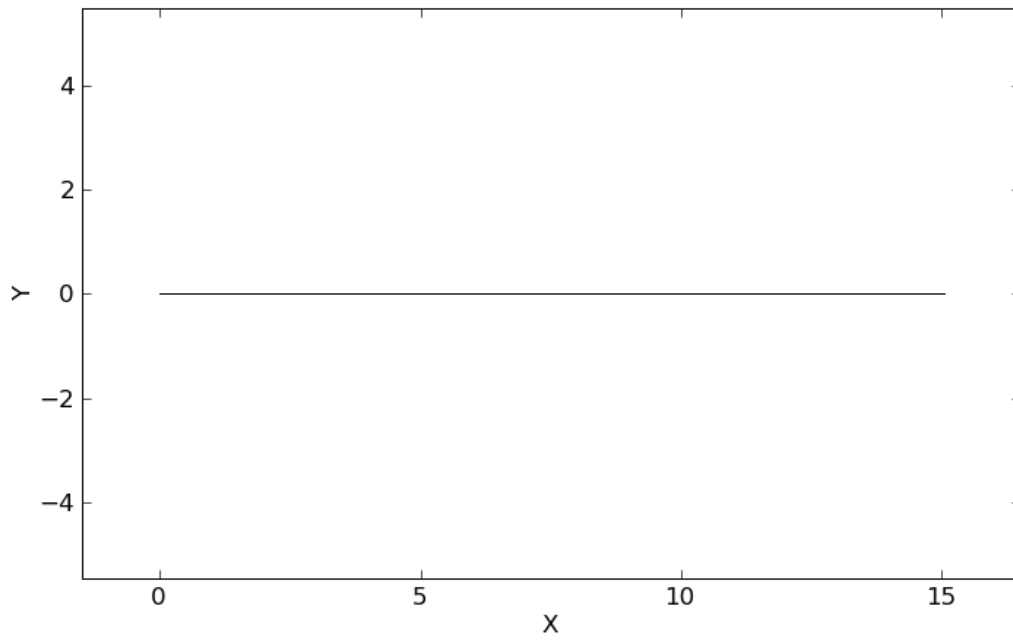
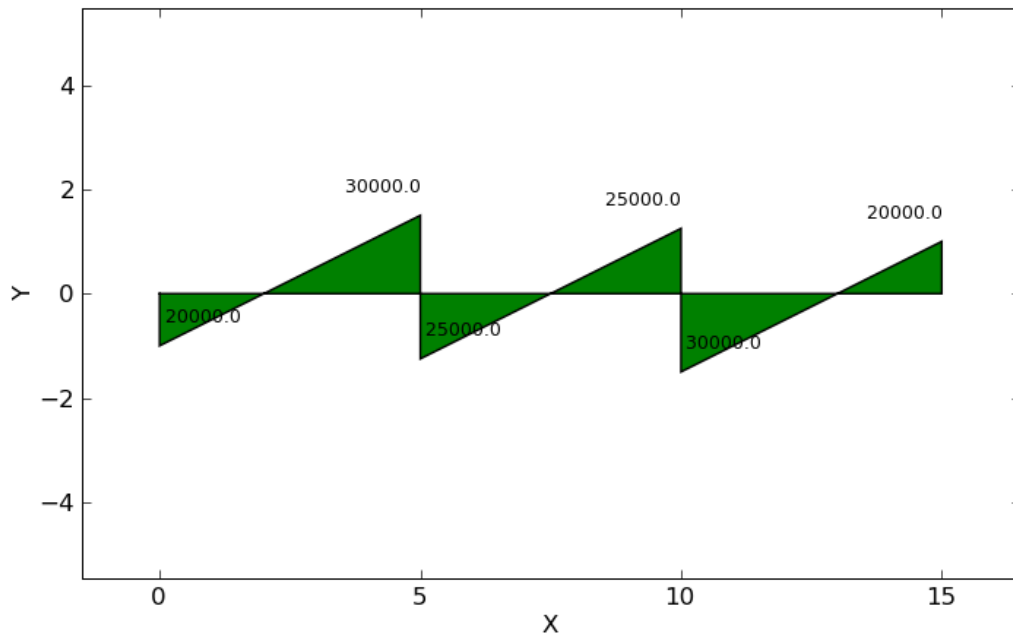
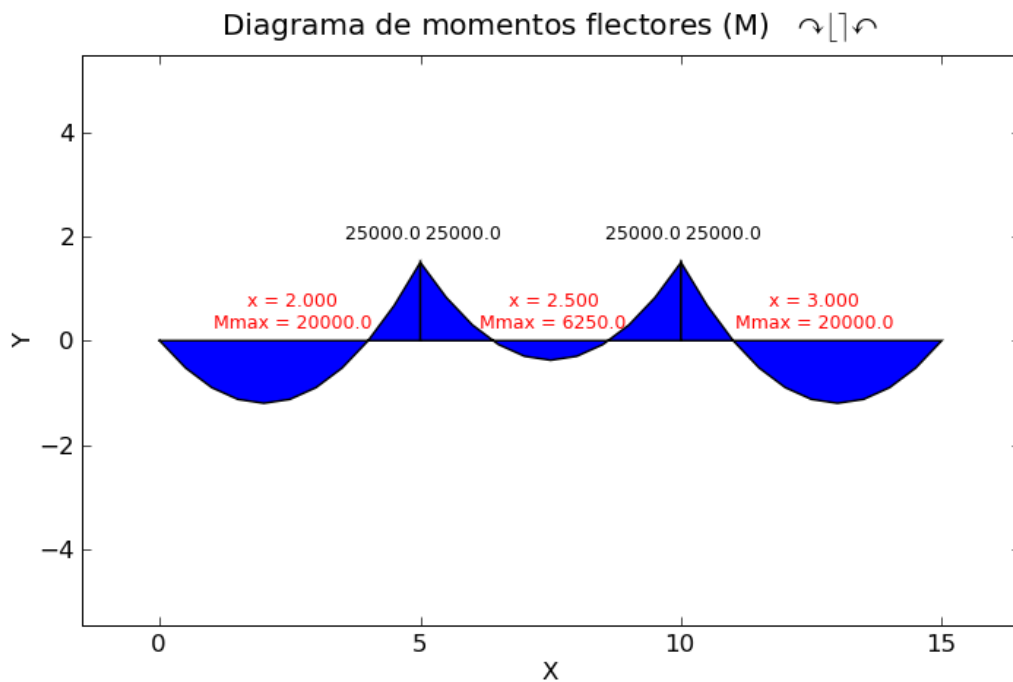


Diagrama de esfuerzos cortantes (V) ↓ [ ] ↑





#### 4.4 Pórtico rígido a dos aguas

#### 4.5 Estructuras reticulares

##### 4.5.1 Introducción

Las estructuras reticuladas o reticulares son aquellas que se encuentran constituidas por entramados de barras unidos por nudos articulados. Debido a esto, si sólo existen cargas sobre los nudos, las barras se encontrarán sometidas únicamente a esfuerzos normales, o sea, sólo trabajarán a tracción o a compresión. Dado que mientras que con un nudo rígido todas las barras que confluyen en él sufrirán desplazamientos y giros iguales, con nudos articulados los giros serán libres, lo que implica que el momento flector en la misma sea nulo, y por tanto no se transmitirá.

Para la resolución de una estructura reticulada todas las cargas deben estar aplicadas en los nudos, para de ese modo considerar que todas las barras se encuentran sometidas a tracción, siendo el signo el que indique si se trata de un esfuerzo de tracción (+) o de compresión (-). Así, cuando alguna barra se encuentre cargada, para resolver la estructura, se trasladará la carga a la correspondiente sobre los nudos, y cuando sea el momento de resolver el desplazamiento o el giro de la barra cargada se tendrán en cuenta los momentos flectores que aparecen sobre dicha barra por el hecho de encontrarse cargada. Además, recordar que cuando la barra está sometida a tracción, el nudo lo está a compresión, y viceversa.

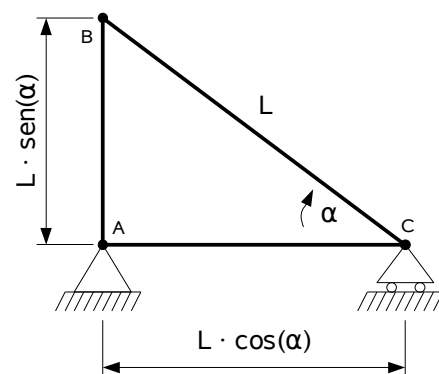
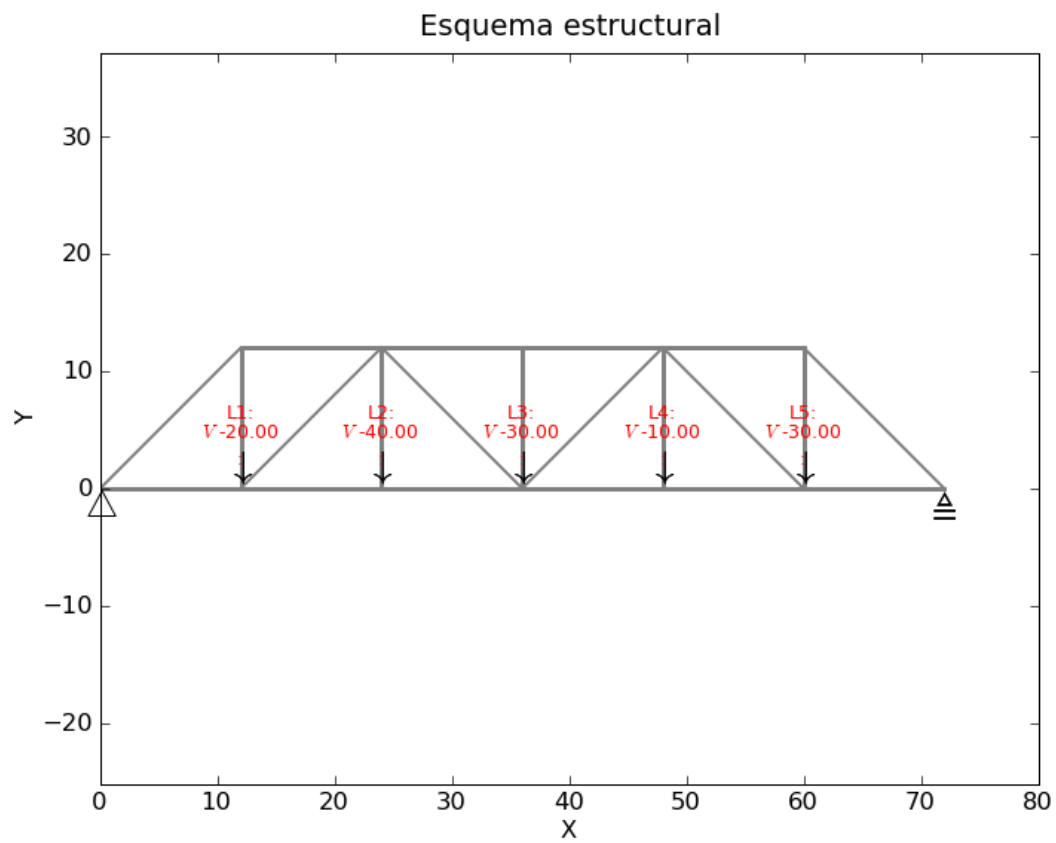


Ilustración 3: Modelo estructural para soporte de colectores solares

##### 4.5.2 Estructura de nudos articulados



#### 4.5.3 Soporte de tres barras

## Referencias

---

### Libros

[L1] Tensiones y deformaciones en materiales elásticos. José Antonio González Taboada.

### Enlaces

[E1] Cálculo de estructuras. Enrique Nieto García.