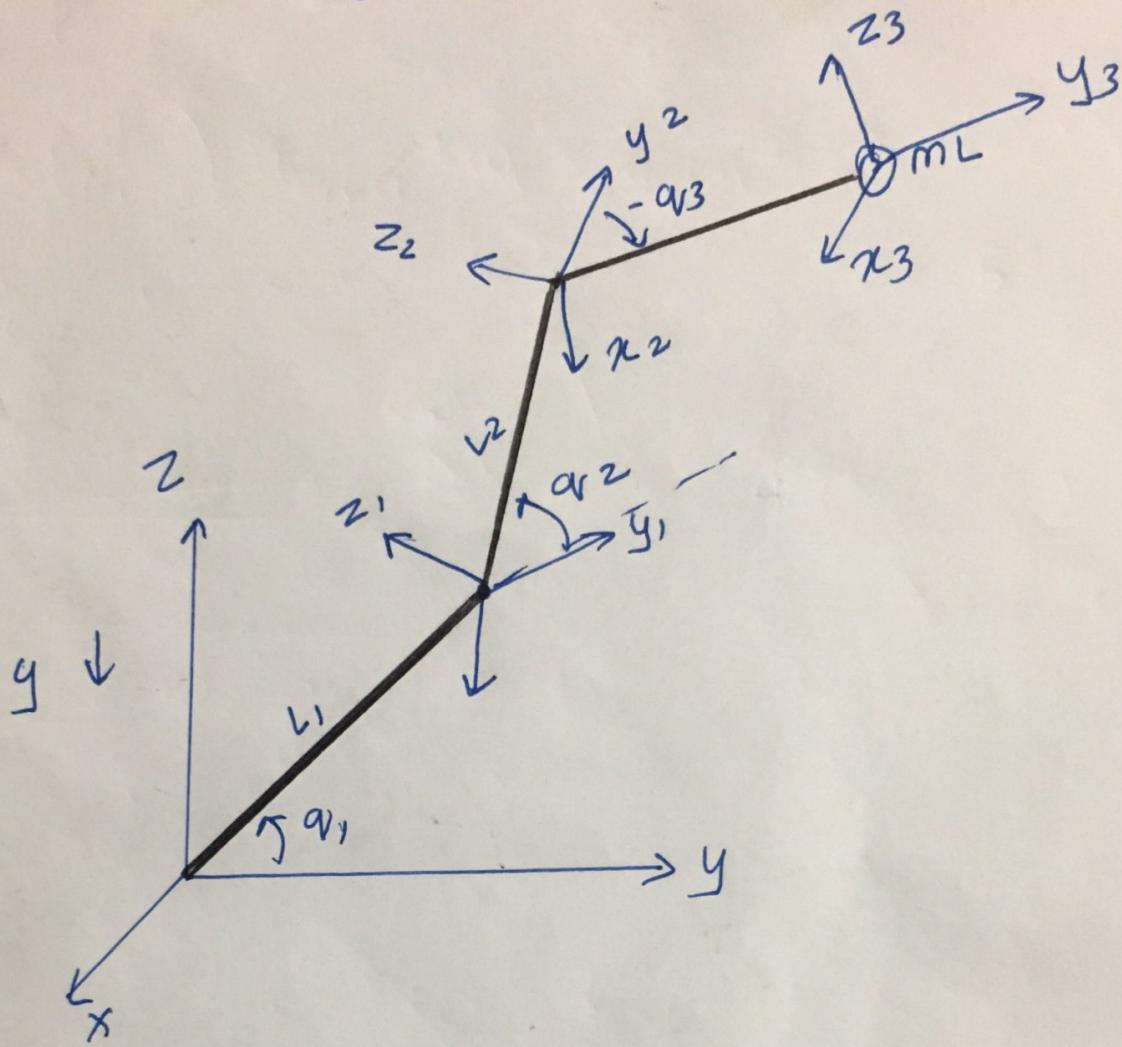


ANIMESH NEMA  
DYNAMICS HW4

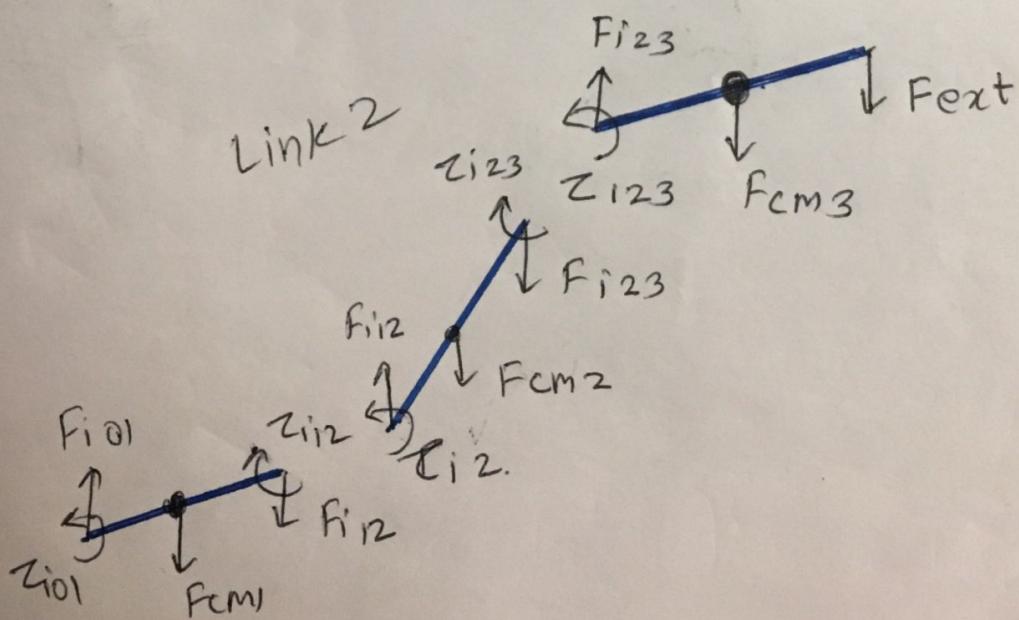
1]



Q6]

FREE BODY DIAGRAM.

Link 3



## Contents

---

- [ANS-1 - POSITION KINEMATICS](#)
- [ANS-2 VELOCITY KINEMATICS](#)
- [ANS-4 JOINT TORQUE CALCULATION](#)
- [ANS-5 Lagrangian equation](#)
- [ANS 6 Newton Euler Dynamics](#)

```
clc; clear all;
syms L1 L2 L3 m1 m2 m3 mL q1 q2 q3 q1_dot q2_dot q3_dot q1_acc q2_acc q3_acc g
%g = 9.8;
old = digits(4);
```

## ANS-1 - POSITION KINEMATICS

---

```
%Rotation is about x-axis
% Rotation from frame 0 to frame 1
R_0_1 = [1, 0, 0; 0, cos(q1), -sin(q1); 0, sin(q1), cos(q1)];
% Rotation from frame 1 to frame 2
R_1_2 = [1, 0, 0; 0, cos(q2), -sin(q2); 0, sin(q2), cos(q2)];
% Rotation from frame 2 to frame 3
R_2_3 = [1, 0, 0; 0, cos(q3), -sin(q3); 0, sin(q3), cos(q3)];

%displacement along y-axis
%(projection of point with respect to the previous frame)
P_0_1 = [0 ; L1*cos(q1) ; L1*sin(q1)];
P_1_2 = [0 ; L2*cos(q2) ; L2*sin(q2)];
P_2_3 = [0 ; L3*cos(q3) ; L3*sin(q3)];

%Transformation matrix
T_0_1 = [R_0_1 , P_0_1 ; 0,0,0,1];
T_1_2 = [R_1_2 , P_1_2 ; 0,0,0,1];
T_2_3 = [R_2_3 , P_2_3 ; 0,0,0,1];
T_0_2 = simplify(T_0_1*T_1_2);

%Homogeneous Transformation matrix from base to tip frame
T_0_3 = simplify(T_0_1*T_1_2*T_2_3)
```

```
T_0_3 =
```

```
[ 1, 0, 0,
 0]
[ 0, cos(q1 + q2 + q3), -sin(q1 + q2 + q3), L2*cos(q1 + q2) + L1*cos(q1) + L3*cos(q1 + q2 + q3)]
[ 0, sin(q1 + q2 + q3), cos(q1 + q2 + q3), L2*sin(q1 + q2) + L1*sin(q1) + L3*sin(q1 + q2 + q3)]
[ 0, 0, 0,
 1]
```

## ANS-2 VELOCITY KINEMATICS

```
%position vector for T_0_3 matrix.
P_0_3 = T_0_3(1:3,4);

T_0_2 = T_0_1*T_1_2;

% The rotation component of x-axis (Since, Rotation is about x-axis)
R_0_X1= T_0_1(1:3,1);
R_0_X2= T_0_2(1:3,1);
R_0_X3= T_0_3(1:3,1);

% Differentiating the position with respect to the joint angles
d_P_0_3_1 = diff(P_0_3 , q1);
d_P_0_3_2 = diff(P_0_3 , q2);
d_P_0_3_3 = diff(P_0_3 , q3);

% JACOBIAN FOR FORWARD VELOCITY KINEMATICS
J = simplify([d_P_0_3_1 , d_P_0_3_2, d_P_0_3_3 ; R_0_X1, R_0_X2, R_0_X3])

%Eliminating linear velocity of x-axis and angular velocity of y & z axis)
Reduced_J = [J(2,:);J(3,:);J(4,:)];

% VELOCITY KINEMATICS EQUATION - (x_dot = J(q) * q_dot)
q_dot = [q1_dot ; q2_dot ; q3_dot];
x_dot = simplify((J)*q_dot)

% ANS 3 - NUMERIC SOLUTION
% L1= 60cm, L2= 40cm, L3= 15cm, q1= 30deg, q2= 20deg, q3= -25deg

%Ans 3a
T_0_3_ans3a = vpa(simplify(subs(T_0_3, [q1,q2,q3,L1,L2,L3], [(pi/180)*30,(pi/180)*20,-(pi/180)*25,0.6,0.4,0.15])))
Tip_Position = [T_0_3_ans3a(1:3,4)]
disp('units: m')
rot_angle = vpa(converttoEuler(T_0_3_ans3a))
disp('units: degrees')

%Ans 3b
J_ans3b = vpa(simplify(subs(J, [q1,q2,q3,L1,L2,L3], [(pi/180)*30,(pi/180)*20,-(pi/180)*25,0.6,0.4,0.15)))

%Ans 3c
x_dot_ans3c = vpa(simplify(subs(x_dot, [q1,q2,q3,L1,L2,L3,q1_dot,q2_dot,q3_dot], [(pi/180)*30,(pi/180)*20,-(pi/180)*25,0.6,0.4,0.15,0.785398,0.785398,0.785398]))
disp('units : m/sec')
```

J =

```
[ 0,
  0,
  0]
[ - L2*sin(q1 + q2) - L1*sin(q1) - L3*sin(q1 + q2 + q3), - L2*sin(q1 + q2) - L3*sin(q1 + q2 + q3), -L3*sin(q1 + q2 + q3) ]
[ L2*cos(q1 + q2) + L1*cos(q1) + L3*cos(q1 + q2 + q3), L2*cos(q1 + q2) + L3*cos(q1 + q2 + q3), L3*cos(q1 + q2 + q3) ]
```

```

[
    1,           1,
[   0,           0]
[   0,           0]

```

x\_dot =

$$\begin{aligned}
 & 0 \\
 & -q2_{dot}*(L2*\sin(q1 + q2) + L3*\sin(q1 + q2 + q3)) - q1_{dot}*(L2*\sin(q1 + q2) + L1*\sin(q1) + L \\
 & 3*\sin(q1 + q2 + q3)) - L3*q3_{dot}*\sin(q1 + q2 + q3) \\
 & q2_{dot}*(L2*\cos(q1 + q2) + L3*\cos(q1 + q2 + q3)) + q1_{dot}*(L2*\cos(q1 + q2) + L1*\cos(q1) + L \\
 & 3*\cos(q1 + q2 + q3)) + L3*q3_{dot}*\cos(q1 + q2 + q3) \\
 & q1_{dot} + q2_{dot} + q3_{dot}
 \end{aligned}$$

0

0

T\_0\_3\_ans3a =

```

[ 1.0,      0,      0,      0]
[  0,  0.9063, -0.4226,  0.9127]
[  0,  0.4226,  0.9063,  0.6698]
[  0,      0,      0,     1.0]

```

Tip\_Position =

```

0
0.9127
0.6698

```

units: m

rot\_angle =

```
[ 25.0, 0, 0]
```

units: degrees

J\_ans3b =

```

[      0,      0,      0]
[ -0.6698, -0.3698, -0.06339]
[  0.9127,  0.3931,  0.1359]
[      1.0,      1.0,      1.0]
[      0,      0,      0]
[      0,      0,      0]

```

x\_dot\_ans3c =

```

0
-0.8663
1.132
2.356
0
0

```

units : m/sec

## ANS-4 JOINT TORQUE CALCULATION

---

Torque = Transpose(J) \* Force\_at\_tip

```

%Tau = Torque
%mL = mass at tip
%Ftip = Force at tip
Ftip = [0;0;-mL*9.8;0;0;0];

%Ans 4a Symbolic torque matrix
Tau = transpose(J_ans3b)*Ftip

%Ans 4b Numeric torque values
Tau_ans4b = vpa(simplify(subs(Tau, [q1,q2,q3,L1,L2,L3,q1_dot,q2_dot,q3_dot,mL], [(pi/180)*30,
(pi/180)*20,-(pi/180)*25,0.6,0.4,0.15,0.785398,0.785398,0.785398,1.5])))
disp('units : N-m ')

```

Tau =

```

-8.944*mL
-3.852*mL
-1.332*mL

```

Tau\_ans4b =

```

-13.42
-5.778
-1.998

```

units : N-m

## ANS-5 Lagrangian equation

---

```

syms Q1(t) Q2(t) Q3(t) t
% Mass 1,2 and 3 are at center of each link and mass mL at end of link3
%Coordinates for mass1
y1 = (L1/2)*cos(Q1);
z1 = (L1/2)*sin(Q1);
%Coordinates for mass2
y2 = (L2/2)*cos(Q1 + Q2) + L1*cos(Q1);

```

```

z2 = (L2/2)*sin(Q1 + Q2) + L1*sin(Q1);
%Coordinates for mass3
y3 = L2*cos(Q1 + Q2) + L1*cos(Q1) + (L3/2)*cos(Q1 + Q2 + Q3);
z3 = L2*sin(Q1 + Q2) + L1*sin(Q1) + (L3/2)*sin(Q1 + Q2 + Q3);
%Coordinates for massL
y4 = L2*cos(Q1 + Q2) + L1*cos(Q1) + L3*cos(Q1 + Q2 + Q3);
z4 = L2*sin(Q1 + Q2) + L1*sin(Q1) + L3*sin(Q1 + Q2 + Q3);

%finding velocity (derivate yn,zn with respect to time)
y1_d = diff(y1,t);
z1_d = diff(z1,t);
y2_d = diff(y2,t);
z2_d = diff(z2,t);
y3_d = diff(y3,t);
z3_d = diff(z3,t);
y4_d = diff(y4,t);
z4_d = diff(z4,t);

%square of velocity
v1sq = ((y1_d)^2 + (z1_d)^2);
v2sq = ((y2_d)^2 + (z2_d)^2);
v3sq = ((y3_d)^2 + (z3_d)^2);
v4sq = ((y4_d)^2 + (z4_d)^2);

% Answer 5a
%Total kinetic Energy = (1/2)*m1*(v1*v1) + (1/2)*m2*(v2*v2) + (1/2)*m3*(v3*v3) + (1/2)*mL*(v4*v4)
)
K = simplify((1/2)*m1*v1sq + (1/2)*m2*v2sq + (1/2)*m3*v3sq + (1/2)*mL*v4sq)

%Total Potential Energy = m1*g*z1 + m2*g*z2 + m3*g*z3 + mL*g*z4
P = simplify(m1*g*z1 + m2*g*z2 + m3*g*z3 + mL*g*z4)

% Answer 5b
% Lagrangian = total kinetic energy - total potential energy (L = K - P)
L = vpa(simplify(K - P));
Lagrangian = vpa(simplify(subs(L,[L1,L2,L3,m1,m2,m3,mL,g], [0.6,0.4,0.15,3,2,0.5,2,9.8])))

% Answer 5c
%Euler Lagrangian Equation: (d/dt)*(dL/d(q_dot)) - dL/dq = Tau
L_ = subs(L,[Q1(t),Q2(t),Q3(t),diff(Q1(t), t),diff(Q2(t), t),diff(Q3(t), t)], [q1, q2, q3, q1_dot, q2_dot, q3_dot]);

%dL/dq
dL_dq1 = diff(L_, q1);
dL_dq2 = diff(L_, q2);
dL_dq3 = diff(L_, q3);

%(dL/d(q_dot))
dL_dqdot1 = diff(L_, q1_dot);
dL_dqdot2 = diff(L_, q2_dot);
dL_dqdot3 = diff(L_, q3_dot);

dL_1dq = subs(dL_dq1, [q1, q2, q3, q1_dot, q2_dot, q3_dot], [Q1(t),Q2(t),Q3(t),diff(Q1(t), t),diff(Q2(t), t),diff(Q3(t), t)]);
dL_2dq = subs(dL_dq2, [q1, q2, q3, q1_dot, q2_dot, q3_dot], [Q1(t),Q2(t),Q3(t),diff(Q1(t), t),diff(Q2(t), t),diff(Q3(t), t)]);
dL_3dq = subs(dL_dq3, [q1, q2, q3, q1_dot, q2_dot, q3_dot], [Q1(t),Q2(t),Q3(t),diff(Q1(t), t),diff(Q2(t), t),diff(Q3(t), t)]);

```

```

,diff(Q2(t), t),diff(Q3(t), t))];

dL_dq1dot = subs(dL_dqdot1, [q1, q2, q3, q1_dot, q2_dot, q3_dot], [Q1(t),Q2(t),Q3(t),diff(Q1(t), t),diff(Q2(t), t),diff(Q3(t), t)]);
dL_dq2dot = subs(dL_dqdot2, [q1, q2, q3, q1_dot, q2_dot, q3_dot], [Q1(t),Q2(t),Q3(t),diff(Q1(t), t),diff(Q2(t), t),diff(Q3(t), t)]);
dL_dq3dot = subs(dL_dqdot3, [q1, q2, q3, q1_dot, q2_dot, q3_dot], [Q1(t),Q2(t),Q3(t),diff(Q1(t), t),diff(Q2(t), t),diff(Q3(t), t)]);

%(d/dt)*(dL/d(q_dot))
d_dt_dL_dq1dot = diff(dL_dq1dot, t);
d_dt_dL_dq2dot = diff(dL_dq2dot, t);
d_dt_dL_dq3dot = diff(dL_dq3dot, t);

Tau1_ = simplify(d_dt_dL_dq1dot - dL_1dq);
Tau2_ = simplify(d_dt_dL_dq2dot - dL_2dq);
Tau3_ = simplify(d_dt_dL_dq3dot - dL_3dq);
%Tau_ = [Tau1_, Tau2_, Tau3_];

%Torque Values
Tau1 = simplify(subs(Tau1_,[Q1(t),Q2(t),Q3(t),diff(Q1(t), t),diff(Q2(t), t),diff(Q3(t), t), diff(Q1(t), t, t), diff(Q2(t), t, t), diff(Q3(t), t, t)], [q1, q2, q3, q1_dot, q2_dot, q3_dot, q1_acc, q2_acc, q3_acc]));
Tau2 = simplify(subs(Tau2_,[Q1(t),Q2(t),Q3(t),diff(Q1(t), t),diff(Q2(t), t),diff(Q3(t), t), diff(Q1(t), t, t), diff(Q2(t), t, t), diff(Q3(t), t, t)], [q1, q2, q3, q1_dot, q2_dot, q3_dot, q1_acc, q2_acc, q3_acc]));
Tau3 = simplify(subs(Tau3_,[Q1(t),Q2(t),Q3(t),diff(Q1(t), t),diff(Q2(t), t),diff(Q3(t), t), diff(Q1(t), t, t), diff(Q2(t), t, t), diff(Q3(t), t, t)], [q1, q2, q3, q1_dot, q2_dot, q3_dot, q1_acc, q2_acc, q3_acc]));

%Tau Matrix
Tau = [Tau1; Tau2; Tau3];
Tau = Tau(t);
%Numerical Tau Matrix
Tau_numerical = vpa(simplify(subs(Tau, [L1,L2,L3,m1,m2,m3,mL,g], [0.6,0.4,0.15,3,2,0.5,2,9.8])));
);

%Intermediate calculations to calculate M, C and G matrix
M11 = simplify((Tau1 - subs(Tau1, q1_acc,0)) / q1_acc);
M12 = simplify((Tau1 - subs(Tau1, q2_acc,0)) / q2_acc);
M13 = simplify((Tau1 - subs(Tau1, q3_acc,0)) / q3_acc);
M21 = simplify((Tau2 - subs(Tau2, q1_acc,0)) / q1_acc);
M22 = simplify((Tau2 - subs(Tau2, q2_acc,0)) / q2_acc);
M23 = simplify((Tau2 - subs(Tau2, q3_acc,0)) / q3_acc);
M31 = simplify((Tau3 - subs(Tau3, q1_acc,0)) / q1_acc);
M32 = simplify((Tau3 - subs(Tau3, q2_acc,0)) / q2_acc);
M33 = simplify((Tau3 - subs(Tau3, q3_acc,0)) / q3_acc);

%C11 = simplify((Tau1 - subs(Tau1, q1_dot,0)) / q1_dot);
%C12 = simplify((Tau1 - subs(Tau1, q2_dot,0)) / q2_dot);
%C13 = simplify((Tau1 - subs(Tau1, q3_dot,0)) / q3_dot);
%C21 = simplify((Tau2 - subs(Tau2, q1_dot,0)) / q1_dot);
%C22 = simplify((Tau2 - subs(Tau2, q2_dot,0)) / q2_dot);
%C23 = simplify((Tau2 - subs(Tau2, q3_dot,0)) / q3_dot);
%C31 = simplify((Tau3 - subs(Tau3, q1_dot,0)) / q1_dot);
%C32 = simplify((Tau3 - subs(Tau3, q2_dot,0)) / q2_dot);

```

```

%C33 = simplify((Tau3 - subs(Tau3, q3_dot,0)) / q3_dot);

G1 = simplify(subs(Tau1, [q1_acc, q2_acc, q3_acc, q1_dot, q2_dot, q3_dot],[0,0,0,0,0,0]));
G2 = simplify(subs(Tau2, [q1_acc, q2_acc, q3_acc, q1_dot, q2_dot, q3_dot],[0,0,0,0,0,0]));
G3 = simplify(subs(Tau3, [q1_acc, q2_acc, q3_acc, q1_dot, q2_dot, q3_dot],[0,0,0,0,0,0]));

%Inertia Matrix
M = simplify([M11,M12,M13; M21,M22,M23; M31,M32,M33])
M = M(t);
%Numerical Inertia Matrix
M_numerical = vpa(simplify(subs(M, [L1,L2,L3,m1,m2,m3,mL,g],[0.6,0.4,0.15,3,2,0.5,2,9.8])))

%Gravity Matrix
G = simplify([G1; G2; G3])
G = G(t);
%Numerical Gravity Matrix
G_numerical = vpa(simplify(subs(G, [L1,L2,L3,m1,m2,m3,mL,g],[0.6,0.4,0.15,3,2,0.5,2,9.8])))

% Coriolis force matrix
q_acc = [q1_acc; q2_acc; q3_acc];
Cq = [Tau - M*q_acc - G];
C11 = simplify(Cq(1)/q1_dot);
C12 = simplify(Cq(1)/q2_dot);
C13 = simplify(Cq(1)/q3_dot);
C21 = simplify(Cq(2)/q1_dot);
C22 = simplify(Cq(2)/q2_dot);
C23 = simplify(Cq(2)/q3_dot);
C31 = simplify(Cq(3)/q1_dot);
C32 = simplify(Cq(3)/q2_dot);
C33 = simplify(Cq(3)/q3_dot);

C = simplify([C11,C12,C13; C21,C22,C23; C31,C32,C33])
%Numerical Coriolis force Matrix
C_numerical = vpa(simplify(subs(C, [L1,L2,L3,m1,m2,m3,mL,g],[0.6,0.4,0.15,3,2,0.5,2,9.8])))

% Matrix-Vector Relationship: M(q)q_acc + C(q,q_dot)q_dot + G(q) = Tau
Matrix_Vector_Relationship = M*q_acc + C*q_dot + G == Tau

%Numerical Relation
Numerical_Matrix_Vector_Relationship = M_numerical*q_acc + C_numerical*q_dot + G_numerical ==
Tau_numerical

```

K(t) =

$$\begin{aligned}
& \left( m1 * ((L1^2 * \cos(Q1(t)))^2 * \text{diff}(Q1(t), t)^2 / 4 + (L1^2 * \sin(Q1(t)))^2 * \text{diff}(Q1(t), t)^2 / 4) \right) / 2 + (m \\ 
& 3 * ((L1 * \cos(Q1(t))) * \text{diff}(Q1(t), t) + L2 * \cos(Q1(t) + Q2(t)) * (\text{diff}(Q1(t), t) + \text{diff}(Q2(t), t)) + \\ 
& (L3 * \cos(Q1(t) + Q2(t) + Q3(t))) * (\text{diff}(Q1(t), t) + \text{diff}(Q2(t), t) + \text{diff}(Q3(t), t))) / 2)^2 + ((L \\ 
& 3 * \sin(Q1(t) + Q2(t) + Q3(t))) * (\text{diff}(Q1(t), t) + \text{diff}(Q2(t), t) + \text{diff}(Q3(t), t))) / 2 + L1 * \sin(Q \\ 
& 1(t)) * \text{diff}(Q1(t), t) + L2 * \sin(Q1(t) + Q2(t)) * (\text{diff}(Q1(t), t) + \text{diff}(Q2(t), t))^2) / 2 + (mL * ( \\ 
& (L1 * \cos(Q1(t))) * \text{diff}(Q1(t), t) + L2 * \cos(Q1(t) + Q2(t)) * (\text{diff}(Q1(t), t) + \text{diff}(Q2(t), t)) + L3 * \\ 
& \cos(Q1(t) + Q2(t) + Q3(t))) * (\text{diff}(Q1(t), t) + \text{diff}(Q2(t), t) + \text{diff}(Q3(t), t)))^2 + (L3 * \sin(Q1 \\ 
& (t) + Q2(t) + Q3(t))) * (\text{diff}(Q1(t), t) + \text{diff}(Q2(t), t) + \text{diff}(Q3(t), t)) + L1 * \sin(Q1(t)) * \text{diff}( \\ 
& Q1(t), t) + L2 * \sin(Q1(t) + Q2(t)) * (\text{diff}(Q1(t), t) + \text{diff}(Q2(t), t))^2) / 2 + (m2 * ((L1 * \cos(Q1 \\ 
& (t))) * \text{diff}(Q1(t), t) + (L2 * \cos(Q1(t) + Q2(t))) * (\text{diff}(Q1(t), t) + \text{diff}(Q2(t), t)))) / 2 + (L1 * \sin
\end{aligned}$$

$(Q1(t)) * \text{diff}(Q1(t), t) + (L2 * \sin(Q1(t) + Q2(t)) * (\text{diff}(Q1(t), t) + \text{diff}(Q2(t), t))) / 2) ^ 2) / 2$

$P(t) =$

$g * m3 * (L2 * \sin(Q1(t) + Q2(t)) + (L3 * \sin(Q1(t) + Q2(t) + Q3(t))) / 2 + L1 * \sin(Q1(t))) + g * mL * (L2 * \sin(Q1(t) + Q2(t)) + L3 * \sin(Q1(t) + Q2(t) + Q3(t)) + L1 * \sin(Q1(t))) + g * m2 * ((L2 * \sin(Q1(t) + Q2(t))) / 2 + L1 * \sin(Q1(t))) + (L1 * g * m1 * \sin(Q1(t))) / 2$

$\text{Lagrangian}(t) =$

$0.84 * \cos(Q2(t)) * \text{diff}(Q1(t), t) ^ 2 - 35.28 * \sin(Q1(t)) - 13.72 * \sin(Q1(t) + Q2(t)) - 3.308 * \sin(Q1(t) + Q2(t) + Q3(t)) + 0.135 * \cos(Q3(t)) * \text{diff}(Q1(t), t) ^ 2 + 0.135 * \cos(Q3(t)) * \text{diff}(Q2(t), t) ^ 2 + 0.5278 * \text{diff}(Q1(t), t) * \text{diff}(Q2(t), t) + 0.04781 * \text{diff}(Q1(t), t) * \text{diff}(Q3(t), t) + 0.04781 * \text{diff}(Q2(t), t) * \text{diff}(Q3(t), t) + 0.2025 * \cos(Q2(t) + Q3(t)) * \text{diff}(Q1(t), t) ^ 2 + 1.209 * \text{diff}(Q1(t), t) ^ 2 + 0.2639 * \text{diff}(Q2(t), t) ^ 2 + 0.02391 * \text{diff}(Q3(t), t) ^ 2 + 0.84 * \cos(Q2(t)) * \text{diff}(Q1(t), t) * \text{diff}(Q2(t), t) + 0.27 * \cos(Q3(t)) * \text{diff}(Q1(t), t) * \text{diff}(Q2(t), t) + 0.135 * \cos(Q3(t)) * \text{diff}(Q2(t), t) * \text{diff}(Q3(t), t) + 0.2025 * \cos(Q2(t) + Q3(t)) * \text{diff}(Q1(t), t) * \text{diff}(Q2(t), t) + 0.2025 * \cos(Q2(t) + Q3(t)) * \text{diff}(Q1(t), t) * \text{diff}(Q3(t), t)$

$\text{Tau\_numerical} =$

$2.418 * q1\_acc + 0.5278 * q2\_acc + 0.04781 * q3\_acc + 3.308 * \cos(q1 + q2 + q3) + 13.72 * \cos(q1 + q2) + 35.28 * \cos(q1) - 0.84 * q2\_dot ^ 2 * \sin(q2) - 0.135 * q3\_dot ^ 2 * \sin(q3) + 0.405 * q1\_acc * \cos(q2 + q3) + 0.2025 * q2\_acc * \cos(q2 + q3) + 0.2025 * q3\_acc * \cos(q2 + q3) + 1.68 * q1\_acc * \cos(q2) + 0.27 * q1\_acc * \cos(q3) + 0.84 * q2\_acc * \cos(q2) + 0.27 * q2\_acc * \cos(q3) + 0.135 * q3\_acc * \cos(q3) - 0.2025 * q2\_dot ^ 2 * \sin(q2 + q3) - 0.2025 * q3\_dot ^ 2 * \sin(q2 + q3) - 1.68 * q1\_dot * q2\_dot * \sin(q2) - 0.27 * q1\_dot * q3\_dot * \sin(q3) - 0.27 * q2\_dot * q3\_dot * \sin(q3) - 0.405 * q1\_dot * q2\_dot * \sin(q2 + q3) - 0.405 * q1\_dot * q3\_dot * \sin(q2 + q3)$

$0.5278 * q1\_acc + 0.5278 * q2\_acc + 0.04781 * q3\_acc + 3.308 * \cos(q1 + q2 + q3) + 13.72 * \cos(q1 + q2) + 0.84 * q1\_dot ^ 2 * \sin(q2) - 0.135 * q3\_dot ^ 2 * \sin(q3) + 0.2025 * q1\_acc * \cos(q2 + q3) + 0.84 * q1\_acc * \cos(q2) + 0.27 * q1\_acc * \cos(q3) + 0.27 * q2\_acc * \cos(q3) + 0.135 * q3\_acc * \cos(q3) + 0.2025 * q1\_dot ^ 2 * \sin(q2 + q3) - 0.27 * q1\_dot * q3\_dot * \sin(q3) - 0.27 * q2\_dot * q3\_dot * \sin(q3)$

$0.04781 * q1\_acc + 0.04781 * q2\_acc + 0.04781 * q3\_acc + 3.307 * \cos(q1 + q2 + q3) + 0.135 * q1\_dot ^ 2 * \sin(q3) + 0.135 * q2\_dot ^ 2 * \sin(q3) + 0.2025 * q1\_acc * \cos(q2 + q3) + 0.135 * q1\_acc * \cos(q3) + 0.135 * q2\_acc * \cos(q3) + 0.2025 * q1\_dot ^ 2 * \sin(q2 + q3) + 0.27 * q1\_dot * q2\_dot * \sin(q3)$

$M(t) =$

$[ 0.25 * L1 ^ 2 * m1 + L1 ^ 2 * m2 + L1 ^ 2 * m3 + 0.25 * L2 ^ 2 * m2 + L2 ^ 2 * m3 + 0.25 * L3 ^ 2 * m3 + L1 ^ 2 * mL + L2 ^ 2 * mL + L3 ^ 2 * mL + L1 * L3 * m3 * \cos(q2 + q3) + 2.0 * L1 * L3 * mL * \cos(q2 + q3) + L1 * L2 * m2 * \cos(q2) + 2.0 * L1 * L2 * m3 * \cos(q2) + L2 * L3 * m3 * \cos(q2) + 2.0 * L2 * L3 * mL * \cos(q3), 0.25 * L2 ^ 2 * m2 + L2 ^ 2 * m3 + 0.25 * L3 ^ 2 * m3 + L2 ^ 2 * mL + L3 ^ 2 * mL + 0.5 * L1 * L3 * m3 * \cos(q2 + q3) + L1 * L3 * mL * \cos(q2 + q3) + 0.5 * L1 * L2 * m2 * \cos(q2) + L1 * L2 * m3 * \cos(q2) + L2 * L3 * m3 * \cos(q3) + L1 * L2 * mL * \cos(q2) + 2.0 * L2 * L3 * mL * \cos(q3), (L3 * (L3 * m3 + 4.0 * L3 * mL + 2.0 * L1 * m3 * \cos(q2 + q3) + 4.0 * L1 * mL * \cos(q2 + q3) + 2.0 * L2 * m3 * \cos(q3) + 4.0 * L2 * mL * \cos(q3)) / 4]$

$[ 0.25 * L2 ^ 2 * m2 + L2 ^ 2 * m3 + 0.25 * L3 ^ 2 * m3 + L2 ^ 2 * mL + L3 ^ 2 * mL + 0.5 * L1 * L3 * m3 * \cos(q2 + q3) + L1 * L3 * mL * \cos(q2 + q3) + 0.5 * L1 * L2 * m2 * \cos(q2) + L1 * L2 * m3 * \cos(q2) + L2 * L3 * m3 * \cos(q3) + L1 * L2 * mL * \cos(q2) + 2.0 * L2 * L3 * mL * \cos(q3), (L3 * (L3 * m3 + 4.0 * L3 * mL + 2.0 * L1 * m3 * \cos(q2 + q3) + 4.0 * L1 * mL * \cos(q2 + q3) + 2.0 * L2 * m3 * \cos(q3) + 4.0 * L2 * mL * \cos(q3)) / 4]$

```

^2*mL + L3^2*mL + 0.5*L1*L3*m3*cos(q2 + q3) + L1*L3*mL*cos(q2 + q3) + 0.5*L1*L2*m2*cos(q2) +
L1*L2*m3*cos(q2) + L2*L3*m3*cos(q3) + L1*L2*mL*cos(q2) + 2.0*L2*L3*mL*cos(q3) ,
0.25*L2^2*m2 + L2^2*m3 + 0.25*L3^2*m3 + L2^2*mL + L3^2*mL + L2*L3*m3*cos(q3) + 2.0*L2*L
3*mL*cos(q3) ,
(L3*(L3*m3 + 4.0*L3*mL + 2.0*L1*m3*cos(q2 + q3) + 4.0*L1*mL*cos(q2 + q3) + 2.0*L2*m3*cos(q3) + 4.0*L2*mL*cos(q3)))/4]
[

(L3*(L3*m3 + 4.0*L3*mL + 2.0*L2*m3*cos(q3) + 4.0*L2*mL*cos(q3)))/4,
(L3^2*(m3 + 4.0*mL))/4]

```

M\_numerical =

```

[ 0.405*cos(q2 + q3) + 1.68*cos(q2) + 0.27*cos(q3) + 2.418, 0.2025*cos(q2 + q3) + 0.84*cos(
q2) + 0.27*cos(q3) + 0.5278, 0.2025*cos(q2 + q3) + 0.135*cos(q3) + 0.04781]
[ 0.2025*cos(q2 + q3) + 0.84*cos(q2) + 0.27*cos(q3) + 0.5278,
0.27*cos(q3) + 0.5278, 0.135*cos(q3) + 0.04781]
[ 0.2025*cos(q2 + q3) + 0.135*cos(q3) + 0.04781,
0.135*cos(q3) + 0.04781, 0.04781]

```

G(t) =

```

(g*(L3*m3*cos(q1 + q2 + q3) + 2.0*L3*mL*cos(q1 + q2 + q3) + L2*m2*cos(q1 + q2) + 2.0*L2*m3*c
os(q1 + q2) + 2.0*L2*mL*cos(q1 + q2) + L1*m1*cos(q1) + 2.0*L1*m2*cos(q1) + 2.0*L1*m3*cos(q1)
+ 2.0*L1*mL*cos(q1))/2
0.5*L2*g*m2*co
s(q1 + q2) + L2*g*m3*cos(q1 + q2) + L2*g*mL*cos(q1 + q2) + 0.5*L3*g*m3*cos(q1 + q2 + q3) + L3
*g*mL*cos(q1 + q2 + q3)
(L3*g*cos(q1 + q2
+ q3)*(m3 + 2.0*mL))/2

```

G\_numerical =

```

3.308*cos(q1 + q2 + q3) + 13.72*cos(q1 + q2) + 35.28*cos(q1)
3.308*cos(q1 + q2 + q3) + 13.72*cos(q1 + q2)
3.308*cos(q1 + q2 + q3)

```

C =

```

[-(0.5*L1*L2*m2*q2_dot^2*sin(q2) + L1*L2*m3*q2_dot^2*sin(q2) + 0.5*L2*L3*m3*q3_dot^2*sin(q3)
+ L1*L2*mL*q2_dot^2*sin(q2) + L2*L3*mL*q3_dot^2*sin(q3) + 0.5*L1*L3*m3*q2_dot^2*sin(q2 + q3)
+ 0.5*L1*L3*m3*q3_dot^2*sin(q2 + q3) + L1*L3*mL*q2_dot^2*sin(q2 + q3) + L1*L3*mL*q3_dot^2*si
n(q2 + q3) + L1*L2*m2*q1_dot*q2_dot*sin(q2) + 2.0*L1*L2*m3*q1_dot*q2_dot*sin(q2) + L2*L3*m3*q
1_dot*q3_dot*sin(q3) + L2*L3*m3*q2_dot*q3_dot*sin(q3) + 2.0*L1*L2*mL*q1_dot*q2_dot*sin(q2) +
2.0*L2*L3*mL*q1_dot*q3_dot*sin(q3) + 2.0*L2*L3*mL*q2_dot*q3_dot*sin(q3) + L1*L3*m3*q1_dot*q2_
dot*sin(q2 + q3) + L1*L3*m3*q1_dot*q3_dot*sin(q2 + q3) + L1*L3*m3*q2_dot*q3_dot*sin(q2 + q3)
+ 2.0*L1*L3*mL*q1_dot*q2_dot*sin(q2 + q3) + 2.0*L1*L3*mL*q1_dot*q3_dot*sin(q2 + q3) + 2.0*L1*
L3*mL*q2_dot*q3_dot*sin(q2 + q3))/q1_dot, -(0.5*L1*L2*m2*q2_dot^2*sin(q2) + L1*L2*m3*q2_dot^2
*sin(q2) + 0.5*L2*L3*m3*q3_dot^2*sin(q3) + L1*L2*mL*q2_dot^2*sin(q2) + L2*L3*mL*q3_dot^2*sin(
q2) + L1*L2*mL*q3_dot^2*sin(q3))/q1_dot]

```

$q_3) + 0.5*L1*L3*m3*q2\_dot^2*\sin(q2 + q3) + 0.5*L1*L3*m3*q3\_dot^2*\sin(q2 + q3) + L1*L3*mL*q2\_dot^2*\sin(q2 + q3) + L1*L3*mL*q3\_dot^2*\sin(q2 + q3) + L1*L2*m2*q1\_dot*q2\_dot*\sin(q2) + 2.0*L1*L2*m3*q1\_dot*q2\_dot*\sin(q2) + L2*L3*m3*q1\_dot*q3\_dot*\sin(q3) + L2*L3*m3*q2\_dot*q3\_dot*\sin(q3) + 2.0*L1*L2*mL*q1\_dot*q2\_dot*\sin(q2) + 2.0*L2*L3*mL*q1\_dot*q3\_dot*\sin(q3) + 2.0*L2*L3*mL*q2\_dot*q3\_dot*\sin(q3) + L1*L3*m3*q1\_dot*q2\_dot*\sin(q2 + q3) + L1*L3*m3*q1\_dot*q3\_dot*\sin(q2 + q3) + L1*L3*m3*q2\_dot*q3\_dot*\sin(q2 + q3) + 2.0*L1*L3*mL*q1\_dot*q2\_dot*\sin(q2 + q3) + 2.0*L1*L3*mL*q2\_dot*q3\_dot*\sin(q2 + q3))/q2\_dot, -(0.5*L1*L2*m2*q2\_dot^2*\sin(q2) + L1*L2*m3*q2\_dot^2*\sin(q2) + 0.5*L2*L3*m3*q3\_dot^2*\sin(q3) + L1*L2*mL*q2\_dot^2*\sin(q2) + L2*L3*mL*q3\_dot^2*\sin(q3) + 0.5*L1*L3*m3*q2\_dot^2*\sin(q2 + q3) + 0.5*L1*L3*m3*q3\_dot^2*\sin(q2 + q3) + L1*L3*mL*q2\_dot^2*\sin(q2 + q3) + L1*L3*mL*q3\_dot^2*\sin(q2 + q3) + L1*L2*m2*q1\_dot*q2\_dot*\sin(q2) + 2.0*L1*L2*m3*q1\_dot*q2\_dot*\sin(q2) + L2*L3*m3*q1\_dot*q3\_dot*\sin(q3) + L2*L3*m3*q2\_dot*q3\_dot*\sin(q3) + 2.0*L1*L2*mL*q1\_dot*q2\_dot*\sin(q2) + 2.0*L2*L3*mL*q1\_dot*q3\_dot*\sin(q3) + L1*L3*m3*q1\_dot*q2\_dot*\sin(q2 + q3) + L1*L3*m3*q2\_dot*q3\_dot*\sin(q2 + q3) + 2.0*L1*L3*mL*q1\_dot*q3\_dot*\sin(q2 + q3) + 2.0*L1*L3*mL*q2\_dot*q3\_dot*\sin(q2 + q3))/q3\_dot]$   
[ ]

$-(0.5*L2*L3*m3*q3\_dot^2*\sin(q3) - 1.0*L1*L2*m3*q1\_dot^2*\sin(q2) - 0.5*L1*L2*m2*q1\_dot^2*\sin(q2) - 1.0*L1*L2*mL*q1\_dot^2*\sin(q2) + L2*L3*mL*q3\_dot^2*\sin(q3) - 0.5*L1*L3*m3*q1\_dot^2*\sin(q2 + q3) - 1.0*L1*L3*mL*q1\_dot^2*\sin(q2 + q3) + L2*L3*m3*q1\_dot*q3\_dot*\sin(q3) + L2*L3*m3*q2\_dot*q3\_dot*\sin(q3) + 2.0*L2*L3*mL*q1\_dot*q3\_dot*\sin(q3) + 2.0*L2*L3*mL*q2\_dot*q3\_dot*\sin(q3))/q1\_dot,$

$-(0.5*L2*L3*m3*q3\_dot^2*\sin(q3) - 1.0*L1*L2*m3*q1\_dot^2*\sin(q2) - 0.5*L1*L2*m2*q1\_dot^2*\sin(q2) - 1.0*L1*L2*mL*q1\_dot^2*\sin(q2) + L2*L3*mL*q3\_dot^2*\sin(q3) - 0.5*L1*L3*m3*q1\_dot^2*\sin(q2 + q3) - 1.0*L1*L3*mL*q1\_dot^2*\sin(q2 + q3) + L2*L3*m3*q1\_dot*q3\_dot*\sin(q3) + L2*L3*m3*q2\_dot*q3\_dot*\sin(q3) + 2.0*L2*L3*mL*q1\_dot*q3\_dot*\sin(q3) + 2.0*L2*L3*mL*q2\_dot*q3\_dot*\sin(q3))/q2\_dot,$

$-(0.5*L2*L3*m3*q3\_dot^2*\sin(q3) - 1.0*L1*L2*m3*q1\_dot^2*\sin(q2) - 0.5*L1*L2*m2*q1\_dot^2*\sin(q2) - 1.0*L1*L2*mL*q1\_dot^2*\sin(q2) + L2*L3*mL*q3\_dot^2*\sin(q3) - 0.5*L1*L3*m3*q1\_dot^2*\sin(q2 + q3) - 1.0*L1*L3*mL*q1\_dot^2*\sin(q2 + q3) + L2*L3*m3*q1\_dot*q3\_dot*\sin(q3) + L2*L3*m3*q2\_dot*q3\_dot*\sin(q3) + 2.0*L2*L3*mL*q1\_dot*q3\_dot*\sin(q3) + 2.0*L2*L3*mL*q2\_dot*q3\_dot*\sin(q3))/q3\_dot]$   
[ ]

$(L3*(m3 + 2.0*mL)*(L1*q1\_dot^2*\sin(q2 + q3) + L2*q1\_dot^2*\sin(q3) + L2*q2\_dot^2*\sin(q3) + 2.0*L2*q1\_dot*q2\_dot*\sin(q3)))/(2*q1\_dot),$

```

(L3*(m3 + 2.0*mL)*(L1*q1_dot^2*sin(q2 + q3) + L2*q1_
_dot^2*sin(q3) + L2*q2_dot^2*sin(q3) + 2.0*L2*q1_dot*q2_dot*sin(q3)))/(2*q2_dot),
(L3*(m3 + 2
.0*mL)*(L1*q1_dot^2*sin(q2 + q3) + L2*q1_dot^2*sin(q3) + L2*q2_dot^2*sin(q3) + 2.0*L2*q1_dot*
q2_dot*sin(q3)))/(2*q3_dot)]
C_numerical =
[ -(0.0025*(336.0*q2_dot^2*sin(q2) + 54.0*q3_dot^2*sin(q3) + 81.0*q2_dot^2*sin(q2 + q3) + 81.
0*q3_dot^2*sin(q2 + q3) + 672.0*q1_dot*q2_dot*sin(q2) + 108.0*q1_dot*q3_dot*sin(q3) + 108.0*q
2_dot*q3_dot*sin(q3) + 162.0*q1_dot*q2_dot*sin(q2 + q3) + 162.0*q1_dot*q3_dot*sin(q2 + q3) +
162.0*q2_dot*q3_dot*sin(q2 + q3)))/q1_dot, -(0.0025*(336.0*q2_dot^2*sin(q2) + 54.0*q3_dot^2*s
in(q3) + 81.0*q2_dot^2*sin(q2 + q3) + 81.0*q3_dot^2*sin(q2 + q3) + 672.0*q1_dot*q2_dot*sin(q2
) + 108.0*q1_dot*q3_dot*sin(q3) + 108.0*q2_dot*q3_dot*sin(q3) + 162.0*q1_dot*q2_dot*sin(q2 +
q3) + 162.0*q1_dot*q3_dot*sin(q2 + q3) + 162.0*q2_dot*q3_dot*sin(q2 + q3)))/q2_dot, -(0.0025*
(336.0*q2_dot^2*sin(q2) + 54.0*q3_dot^2*sin(q3) + 81.0*q2_dot^2*sin(q2 + q3) + 81.0*q3_dot^2*
sin(q2 + q3) + 672.0*q1_dot*q2_dot*sin(q2) + 108.0*q1_dot*q3_dot*sin(q3) + 108.0*q2_dot*q3_d
ot*sin(q3) + 162.0*q1_dot*q2_dot*sin(q2 + q3) + 162.0*q1_dot*q3_dot*sin(q2 + q3) + 162.0*q2_d
ot*q3_dot*sin(q2 + q3)))/q3_dot]
[
-(0.0025*(54.0*q3_d
o
t^2*sin(q3) - 336.0*q1_dot^2*sin(q2) - 81.0*q1_dot^2*sin(q2 + q3) + 108.0*q1_dot*q3_dot*sin(q
3) + 108.0*q2_dot*q3_dot*sin(q3)))/q1_dot,
-(0.0025*(54.0*q3_dot^2*sin(q3) - 336.0*q1_dot^2*sin(q2) - 81.0*q1_dot^2*
sin(q2 + q3) + 108.0*q1_dot*q3_dot*sin(q3) + 108.0*q2_dot*q3_dot*sin(q3)))/q2_dot,
-(0.0025*(54.0*q3_dot^2*sin(q3) -
- 336.0*q1_dot^2*sin(q2) - 81.0*q1_dot^2*sin(q2 + q3) + 108.0*q1_dot*q3_dot*sin(q3) + 108.0*
q2_dot*q3_dot*sin(q3)))/q3_dot]
[
(0.3375*(0.4*q1_dot^2*sin(q3) + 0.4*q2_dot^2*sin(q3) + 0.6*q1_dot^2*sin(q2 + q3) + 0.8*q1_dot*q2_dot*sin(q3)))/q1_dot,
(0.3375*(0.4*q1_dot^2*sin(q3) + 0.4*q2_dot^2*sin(q3) + 0.6*q1_dot^2*sin(q2 + q3) + 0.8*q1_dot*q2_dot*sin(q3)))/q2_dot,
(0.3375*(0.4*q1_dot^2*sin(q3) + 0.4*q2_dot^2*sin(q3) + 0.6*q1_dot^2*sin(q2 + q3) + 0.8*q1_dot*q2_dot*sin(q3)))/q3_dot]

```

## Matrix Vector Relationship =

$$\begin{aligned}
& L1*mL*cos(q1)))/2 + q2_acc*(0.25*L2^2*m2 + L2^2*m3 + 0.25*L3^2*m3 + L2^2*mL + L3^2*mL + 0.5*L \\
& 1*L3*m3*cos(q2 + q3) + L1*L3*mL*cos(q2 + q3) + 0.5*L1*L2*m2*cos(q2) + L1*L2*m3*cos(q2) + L2*L \\
& 3*m3*cos(q3) + L1*L2*mL*cos(q2) + 2.0*L2*L3*mL*cos(q3)) + (L3*q3_acc*(L3*m3 + 4.0*L3*mL + 2.0 \\
& *L1*m3*cos(q2 + q3) + 4.0*L1*mL*cos(q2 + q3) + 2.0*L2*m3*cos(q3) + 4.0*L2*mL*cos(q3))/4 - 1. \\
& 5*L1*L2*m2*q2_dot^2*sin(q2) - 3*L1*L2*m3*q2_dot^2*sin(q2) - 1.5*L2*L3*m3*q3_dot^2*sin(q3) - 3 \\
& *L1*L2*mL*q2_dot^2*sin(q2) - 3*L2*L3*mL*q3_dot^2*sin(q3) - 1.5*L1*L3*m3*q2_dot^2*sin(q2 + q3) \\
& - 1.5*L1*L3*m3*q3_dot^2*sin(q2 + q3) - 3*L1*L3*mL*q2_dot^2*sin(q2 + q3) - 3*L1*L3*mL*q3_dot^ \\
& 2*sin(q2 + q3) - 3*L1*L2*m2*q1_dot*q2_dot*sin(q2) - 6.0*L1*L2*m3*q1_dot*q2_dot*sin(q2) - 3*L2 \\
& *L3*m3*q1_dot*q3_dot*sin(q3) - 3*L2*L3*m3*q2_dot*q3_dot*sin(q3) - 6.0*L1*L2*mL*q1_dot*q2_dot* \\
& sin(q2) - 6.0*L2*L3*mL*q1_dot*q3_dot*sin(q3) - 6.0*L2*L3*mL*q2_dot*q3_dot*sin(q3) - 3*L1*L3*m \\
& 3*q1_dot*q2_dot*sin(q2 + q3) - 3*L1*L3*m3*q1_dot*q3_dot*sin(q2 + q3) - 3*L1*L3*m3*q2_dot*q3_d \\
& ot*sin(q2 + q3) - 6.0*L1*L3*mL*q1_dot*q2_dot*sin(q2 + q3) - 6.0*L1*L3*mL*q1_dot*q3_dot*sin(q2 \\
& + q3) - 6.0*L1*L3*mL*q2_dot*q3_dot*sin(q2 + q3) == 0.25*L1^2*m1*q1_acc + L1^2*m2*q1_acc + L1 \\
& ^2*m3*q1_acc + 0.25*L2^2*m2*q1_acc + 0.25*L2^2*m2*q2_acc + L2^2*m3*q1_acc + L2^2*m3*q2_acc + \\
& 0.25*L3^2*m3*q1_acc + 0.25*L3^2*m3*q2_acc + 0.25*L3^2*m3*q3_acc + L1^2*mL*q1_acc + L2^2*mL*q1 \\
& _acc + L2^2*mL*q2_acc + L3^2*mL*q1_acc + L3^2*mL*q2_acc + L3^2*mL*q3_acc + 0.5*L2*g*m2*cos(q1 \\
& + q2) + L2*g*m3*cos(q1 + q2) + L2*g*mL*cos(q1 + q2) + 0.5*L1*g*m1*cos(q1) + L1*g*m2*cos(q1) \\
& + L1*g*m3*cos(q1) + L1*g*mL*cos(q1) + 0.5*L3*g*m3*cos(q1 + q2 + q3) + L3*g*mL*cos(q1 + q2 + q \\
& 3) - 0.5*L1*L2*m2*q2_dot^2*sin(q2) - 1.0*L1*L2*m3*q2_dot^2*sin(q2) - 0.5*L2*L3*m3*q3_dot^2*si \\
& n(q3) - 1.0*L1*L2*mL*q2_dot^2*sin(q2) - 1.0*L2*L3*mL*q3_dot^2*sin(q3) + L1*L3*m3*q1_acc*cos(q \\
& 2 + q3) + 0.5*L1*L3*m3*q2_acc*cos(q2 + q3) + 0.5*L1*L3*m3*q3_acc*cos(q2 + q3) + 2.0*L1*L3*mL* \\
& q1_acc*cos(q2 + q3) + L1*L3*mL*q2_acc*cos(q2 + q3) + L1*L3*mL*q3_acc*cos(q2 + q3) + L1*L2*m2* \\
& q1_acc*cos(q2) + 0.5*L1*L2*m2*q2_acc*cos(q2) + 2.0*L1*L2*m3*q1_acc*cos(q2) + L1*L2*m3*q2_acc* \\
& cos(q2) + L2*L3*m3*q1_acc*cos(q3) + L2*L3*m3*q2_acc*cos(q3) + 0.5*L2*L3*m3*q3_acc*cos(q3) + 2 \\
& .0*L1*L2*mL*q1_acc*cos(q2) + L1*L2*mL*q2_acc*cos(q2) + 2.0*L2*L3*mL*q1_acc*cos(q3) + 2.0*L2*L \\
& 3*mL*q2_acc*cos(q3) + L2*L3*mL*q3_acc*cos(q3) - 0.5*L1*L3*m3*q2_dot^2*sin(q2 + q3) - 0.5*L1*L \\
& 3*m3*q3_dot^2*sin(q2 + q3) - 1.0*L1*L3*mL*q2_dot^2*sin(q2 + q3) - 1.0*L1*L3*mL*q3_dot^2*sin(q \\
& 2 + q3) - 1.0*L1*L2*m2*q1_dot*q2_dot*sin(q2) - 2.0*L1*L2*m3*q1_dot*q2_dot*sin(q2) - 1.0*L2*L3 \\
& *m3*q1_dot*q3_dot*sin(q3) - 1.0*L2*L3*m3*q2_dot*q3_dot*sin(q3) - 2.0*L1*L2*mL*q1_dot*q2_dot*s \\
& in(q2) - 2.0*L2*L3*mL*q1_dot*q3_dot*sin(q3) - 2.0*L2*L3*mL*q2_dot*q3_dot*sin(q3) - 1.0*L1*L3*m \\
& 3*q1_dot*q2_dot*sin(q2 + q3) - 1.0*L1*L3*m3*q1_dot*q3_dot*sin(q2 + q3) - 1.0*L1*L3*m3*q2_dot* \\
& q3_dot*sin(q2 + q3) - 2.0*L1*L3*mL*q1_dot*q2_dot*sin(q2 + q3) - 2.0*L1*L3*mL*q1_dot*q3_dot*s \\
& in(q2 + q3) - 2.0*L1*L3*mL*q2_dot*q3_dot*sin(q2 + q3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& q2_acc*(0.25*L2^2*m2 + L2^2*m3 + 0.25*L3^2*m3 + L2^2*mL + L3^2*mL + 2.0*L2*L3*m3*cos(q3)) + q1_acc*(0.25*L2^2*m2 + L2^2*m3 + 0. \\
& 25*L3^2*m3 + L2^2*mL + L3^2*mL + 0.5*L1*L3*m3*cos(q2 + q3) + L1*L3*mL*cos(q2 + q3) + 0.5*L1*L \\
& 2*m2*cos(q2) + L1*L2*m3*cos(q2) + L2*L3*m3*cos(q3) + L1*L2*mL*cos(q2) + 2.0*L2*L3*mL*cos(q3)) \\
& + (L3*q3_acc*(L3*m3 + 4.0*L3*mL + 2.0*L2*m3*cos(q3) + 4.0*L2*mL*cos(q3))/4 + 0.5*L2*g*m2*co \\
& s(q1 + q2) + L2*g*m3*cos(q1 + q2) + L2*g*mL*cos(q1 + q2) + 0.5*L3*g*m3*cos(q1 + q2 + q3) + L3 \\
& *g*mL*cos(q1 + q2 + q3) + 1.5*L1*L2*m2*q1_dot^2*sin(q2) + 3.0*L1*L2*m3*q1_dot^2*sin(q2) - 1.5 \\
& *L2*L3*m3*q3_dot^2*sin(q3) + 3.0*L1*L2*mL*q1_dot^2*sin(q2) - 3*L2*L3*mL*q3_dot^2*sin(q3) + 1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 5*L1*L3*m3*q1_dot^2*sin(q2 + q3) + 3.0*L1*L3*mL*q1_dot^2*sin(q2 + q3) - 3*L2*L3*m3*q1_dot*q3_ \\
& dot*sin(q3) - 3*L2*L3*m3*q2_dot*q3_dot*sin(q3) - 6.0*L2*L3*mL*q1_dot*q3_dot*sin(q3) - 6.0*L2* \\
& L3*mL*q2_dot*q3_dot*sin(q3) == 0.25*L2^2*m2*q1_acc + 0.25*L2^2*m2*q2_acc + L2^2*m3*q1_acc + L \\
& 2^2*m3*q2_acc + 0.25*L3^2*m3*q1_acc + 0.25*L3^2*m3*q2_acc + 0.25*L3^2*m3*q3_acc + L2^2*mL*q1_ \\
& acc + L2^2*mL*q2_acc + L3^2*mL*q1_acc + L3^2*mL*q2_acc + L3^2*mL*q3_acc + 0.5*L2*g*m2*cos(q1 \\
& + q2) + L2*g*m3*cos(q1 + q2) + L2*g*mL*cos(q1 + q2) + 0.5*L3*g*m3*cos(q1 + q2 + q3) + L3*g*mL \\
& *cos(q1 + q2 + q3) + 0.5*L1*L2*m2*q1_dot^2*sin(q2) + L1*L2*m3*q1_dot^2*sin(q2) - 0.5*L2*L3*m3 \\
& *q3_dot^2*sin(q3) + L1*L2*mL*q1_dot^2*sin(q2) - 1.0*L2*L3*mL*q3_dot^2*sin(q3) + 0.5*L1*L3*m3* \\
& q1_acc*cos(q2 + q3) + L1*L3*mL*q1_acc*cos(q2 + q3) + 0.5*L1*L2*m2*q1_acc*cos(q2) + L1*L2*m3*q \\
& 1_acc*cos(q2) + L2*L3*m3*q1_acc*cos(q3) + L2*L3*m3*q2_acc*cos(q3) + 0.5*L2*L3*m3*q3_acc*cos(q \\
& 3) + L1*L2*mL*q1_acc*cos(q2) + 2.0*L2*L3*mL*q1_acc*cos(q3) + 2.0*L2*L3*mL*q2_acc*cos(q3) + L2 \\
& *L3*mL*q3_acc*cos(q3) + 0.5*L1*L3*m3*q1_dot^2*sin(q2 + q3) + L1*L3*mL*q1_dot^2*sin(q2 + q3) - \\
& 1.0*L2*L3*m3*q1_dot*q3_dot*sin(q3) - 1.0*L2*L3*m3*q2_dot*q3_dot*sin(q3) - 2.0*L2*L3*mL*q1_ \\
& dot*q3_dot*sin(q3) - 2.0*L2*L3*mL*q2_dot*q3_dot*sin(q3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (L3*q1_acc*( \\
& L3*m3 + 4.0*L3*mL + 2.0*L1*m3*cos(q2 + q3) + 4.0*L1*mL*cos(q2 + q3) + 2.0*L2*m3*cos(q3) + 4.0 \\
& *L2*mL*cos(q3)))/4 + (L3*q2_acc*(L3*m3 + 4.0*L3*mL + 2.0*L2*m3*cos(q3) + 4.0*L2*mL*cos(q3)))/ \\
& 4 + (L3^2*q3_acc*(m3 + 4.0*mL))/4 + (3*L3*(m3 + 2.0*mL)*(L1*q1_dot^2*sin(q2 + q3) + L2*q1_dot \\
& ^2*sin(q3) + L2*q2_dot^2*sin(q3) + 2.0*L2*q1_dot*q2_dot*sin(q3)))/2 + (L3*g*cos(q1 + q2 + q3) \\
& *(m3 + 2.0*mL))/2 == (L3*(2.0*g*m3*cos(q1 + q2 + q3) + 4.0*g*mL*cos(q1 + q2 + q3) + L3*m3*q1_ \\
& acc + L3*m3*q2_acc + L3*m3*q3_acc + 4.0*L3*mL*q1_acc + 4.0*L3*mL*q2_acc + 4.0*L3*mL*q3_acc + \\
& 2.0*L1*m3*q1_acc*cos(q2 + q3) + 4.0*L1*mL*q1_acc*cos(q2 + q3) + 2.0*L2*m3*q1_acc*cos(q3) + 2. \\
& 0*L2*m3*q2_acc*cos(q3) + 4.0*L2*mL*q1_acc*cos(q3) + 4.0*L2*mL*q2_acc*cos(q3) + 2.0*L1*m3*q1_ \\
& dot^2*sin(q2 + q3) + 4.0*L1*mL*q1_dot^2*sin(q2 + q3) + 2.0*L2*m3*q1_dot^2*sin(q3) + 2.0*L2*m3* \\
& q2_dot^2*sin(q3) + 4.0*L2*mL*q1_dot^2*sin(q3) + 4.0*L2*mL*q2_dot^2*sin(q3) + 4.0*L2*m3*q1_ \\
& dot*q2_dot*sin(q3) + 8.0*L2*mL*q1_dot*q2_dot*sin(q3)))/4
\end{aligned}$$

Numerical\_Matrix\_Vector\_Relationship =

$$3.308*\cos(q1 + q2 + q3) + 13.72*\cos(q1 + q2) + 35.28*\cos(q1) + q1\_acc*(0.405*\cos(q2 + q3) +$$

$$\begin{aligned}
& 1.68 \cos(q_2) + 0.27 \cos(q_3) + 2.418 - 2.52 q_2 \dot{\text{dot}}^2 \sin(q_2) - 0.405 q_3 \dot{\text{dot}}^2 \sin(q_3) + q_3 \text{acc} \\
& c * (0.2025 \cos(q_2 + q_3) + 0.135 \cos(q_3) + 0.04781) - 0.6075 q_2 \dot{\text{dot}}^2 \sin(q_2 + q_3) - 0.6075 q_3 \dot{\text{dot}}^2 \sin(q_2 + q_3) + q_2 \text{acc} * (0.2025 \cos(q_2 + q_3) + 0.84 \cos(q_2) + 0.27 \cos(q_3) + 0.5278) - 5.04 q_1 \dot{\text{dot}} q_2 \dot{\text{dot}} \sin(q_2) - 0.81 q_1 \dot{\text{dot}} q_3 \dot{\text{dot}} \sin(q_3) - 0.81 q_2 \dot{\text{dot}} q_3 \dot{\text{dot}} \sin(q_3) - 1.215 q_1 \dot{\text{dot}} q_2 \dot{\text{dot}} \sin(q_2 + q_3) - 1.215 q_1 \dot{\text{dot}} q_3 \dot{\text{dot}} \sin(q_2 + q_3) == 2.418 q_1 \text{acc} + 0.5278 q_2 \text{acc} + 0.04781 q_3 \text{acc} + 3.308 \cos(q_1 + q_2 + q_3) + 13.72 \cos(q_1 + q_2) + 35.28 \cos(q_1) - 0.84 q_2 \dot{\text{dot}}^2 \sin(q_2) - 0.135 q_3 \dot{\text{dot}}^2 \sin(q_3) + 0.405 q_1 \text{acc} \cos(q_2 + q_3) + 0.2025 q_2 \text{acc} \cos(q_2 + q_3) + 0.2025 q_3 \text{acc} \cos(q_2 + q_3) + 1.68 q_1 \text{acc} \cos(q_2) + 0.27 q_1 \text{acc} \cos(q_3) + 0.84 q_2 \text{acc} \cos(q_2) + 0.27 q_2 \text{acc} \cos(q_3) + 0.135 q_3 \text{acc} \cos(q_3) - 0.2025 q_2 \dot{\text{dot}}^2 \sin(q_2 + q_3) - 0.2025 q_3 \dot{\text{dot}}^2 \sin(q_2 + q_3) - 1.68 q_1 \dot{\text{dot}} q_2 \dot{\text{dot}} \sin(q_2) - 0.27 q_1 \dot{\text{dot}} q_3 \dot{\text{dot}} \sin(q_3) - 0.27 q_2 \dot{\text{dot}} q_3 \dot{\text{dot}} \sin(q_3) - 0.405 q_1 \dot{\text{dot}} q_2 \dot{\text{dot}} \sin(q_2 + q_3) - 0.405 q_1 \dot{\text{dot}} q_3 \dot{\text{dot}} \sin(q_2 + q_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 3.308 \cos(q_1 + q_2 + q_3) + 13.72 \cos(q_1 + q_2) + q_3 \text{acc} * (0.135 \cos(q_3) + 0.04781) + 2.52 q_1 \dot{\text{dot}}^2 \sin(q_2) - 0.405 q_3 \dot{\text{dot}}^2 \sin(q_3) + 0.6075 q_1 \dot{\text{dot}}^2 \sin(q_2 + q_3) + q_2 \text{acc} * (0.27 \cos(q_3) + 0.5278) + q_1 \text{acc} * (0.2025 \cos(q_2 + q_3) + 0.84 \cos(q_2) + 0.27 \cos(q_3) + 0.5278) - 0.81 q_1 \dot{\text{dot}} q_3 \dot{\text{dot}} \sin(q_3) - 0.81 q_2 \dot{\text{dot}} q_3 \dot{\text{dot}} \sin(q_3) == 0.5278 q_1 \text{acc} + 0.5278 q_2 \text{acc} + 0.04781 q_3 \text{acc} + 3.308 \cos(q_1 + q_2 + q_3) + 13.72 \cos(q_1 + q_2) + 0.84 q_1 \dot{\text{dot}}^2 \sin(q_2) - 0.135 q_3 \dot{\text{dot}}^2 \sin(q_3) + 0.2025 q_1 \text{acc} \cos(q_2 + q_3) + 0.84 q_1 \text{acc} \cos(q_2) + 0.27 q_1 \text{acc} \cos(q_3) + 0.27 q_2 \text{acc} \cos(q_3) + 0.135 q_3 \text{acc} \cos(q_3) + 0.2025 q_1 \dot{\text{dot}}^2 \sin(q_2 + q_3) - 0.27 q_1 \dot{\text{dot}} q_3 \dot{\text{dot}} \sin(q_3) - 0.27 q_2 \dot{\text{dot}} q_3 \dot{\text{dot}} \sin(q_3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 0.04781 q_3 \text{acc} + 3.308 \cos(q_1 + q_2 + q_3) + q_2 \text{acc} * (0.135 \cos(q_3) + 0.04781) + 0.405 q_1 \dot{\text{dot}}^2 \sin(q_3) + 0.405 q_2 \dot{\text{dot}}^2 \sin(q_3) + q_1 \text{acc} * (0.2025 \cos(q_2 + q_3) + 0.135 \cos(q_3) + 0.04781) + 0.6075 q_1 \dot{\text{dot}}^2 \sin(q_2 + q_3) + 0.81 q_1 \dot{\text{dot}} q_2 \dot{\text{dot}} \sin(q_3) == 0.04781 q_1 \text{acc} + 0.04781 q_2 \text{acc} + 0.04781 q_3 \text{acc} + 3.307 \cos(q_1 + q_2 + q_3) + 0.135 q_1 \dot{\text{dot}}^2 \sin(q_3) + 0.135 q_2 \dot{\text{dot}}^2 \sin(q_3) + 0.2025 q_1 \text{acc} \cos(q_2 + q_3) + 0.135 q_1 \text{acc} \cos(q_3) + 0.135 q_2 \text{acc} \cos(q_3) + 0.2025 q_1 \dot{\text{dot}}^2 \sin(q_2 + q_3) + 0.27 q_1 \dot{\text{dot}} q_2 \dot{\text{dot}} \sin(q_3)
\end{aligned}$$

## ANS 6 Newton Euler Dynamics

---

```
%initial state
w0 = 0;
acc0_e = 0;
acc0_c = 0;
acc0 = 0;

%given link lenghts
r_0_1 = [0;0.6;0];
r_1_2 = [0;0.4;0];
r_2_3 = [0;0.15;0];
rc_0_1 =[0;0.3;0];
rc_1_2 =[0;.2;0];
rc_2_3 =[0;0.075;0];
rc_4_3 =[0;-0.075;0];
```

```

rc_1_0 =[0;-0.3;0];
rc_2_1 =[0;-.2;0];

%forward recursion

%Angular velocity
w1 = transpose(R_0_1)*[0;0;0] + [1;0;0]*q1_dot;
w2 = transpose(R_1_2)*w1 + [1;0;0]*q2_dot;
w3 = transpose(R_2_3)*w2 + [1;0;0]*q3_dot;

qb1 = (q1_dot*[1;0;0]);
qb2 = (q2_dot*[1;0;0]);
qb3 = (q3_dot*[1;0;0]);
%Angular acceleration
acc1 = transpose(R_0_1)*[0;0;0] + [1;0;0]*q1_acc + cross(w1,qb1);
acc2 = transpose(R_1_2)*acc1 + [1;0;0]*q2_acc + cross(w2,qb2);
acc3 = transpose(R_2_3)*acc2 + [1;0;0]*q3_acc + cross(w3,qb3);

%linear acceleration
acc1_e = transpose(R_0_1)*[0;0;0] + cross(acc1,r_0_1) + cross(w1,(cross(w1,r_0_1)));
acc2_e = transpose(R_1_2)*acc1_e + cross(acc2,r_1_2) + cross(w2,(cross(w2,r_1_2)));
acc3_e = transpose(R_2_3)*acc2_e + cross(acc3,r_2_3) + cross(w3,(cross(w3,r_2_3)));

acc1_c = transpose(R_0_1)*[0;0;0] + cross(acc1,rc_0_1) + cross(w1,cross(w1,rc_0_1));
acc2_c = transpose(R_1_2)*acc1_e + cross(acc2,rc_1_2) + cross(w2,cross(w2,rc_1_2));
acc3_c = transpose(R_2_3)*acc2_e + cross(acc3,rc_2_3) + cross(w3,cross(w3,rc_2_3));

%backward recursion

%force calculation
f4 = [0;0;2*9.8];
R_4_3 = eye(3);
R_0_3 = R_0_1*R_1_2*R_2_3;

%for converting f4 from global frame to frame 3
R_3_0 = transpose(R_0_3);

f3 = R_3_0*f4 + mL*acc3_c - mL*g;
f2 = transpose(R_2_3)*f3 + mL*acc2_c - m3*9.8;
f1 = transpose(R_1_2)*f2 + mL*acc1_c - m2*9.8;

%Torque Calculation
T4 = 0;
T3 = R_4_3*[0;0;0] - cross(f3,rc_2_3) + cross((R_4_3*f4), rc_4_3) + acc3;
T2 = transpose(R_2_3)*T3 - cross(f2,rc_1_2) + cross((transpose(R_2_3)*f3), rc_2_1) + acc2;
T1 = transpose(R_1_2)*T2 - cross(f1,rc_0_1) + cross((transpose(R_1_2)*f2), rc_1_0) + acc1;

T_newton = [T1(1,:);T2(1,:);T3(1,:)];

%Intermediate calculations to calculate M, C and G matrix
M_11 = simplify((T1(1,:)- subs(T1(1,:), q1_acc,0)) / q1_acc);
M_12 = simplify((T1(1,:)- subs(T1(1,:), q2_acc,0)) / q2_acc);
M_13 = simplify((T1(1,:)- subs(T1(1,:), q3_acc,0)) / q3_acc);
M_21 = simplify((T2(1,:)- subs(T2(1,:), q1_acc,0)) / q1_acc);
M_22 = simplify((T2(1,:)- subs(T2(1,:), q2_acc,0)) / q2_acc);
M_23 = simplify((T2(1,:)- subs(T2(1,:), q3_acc,0)) / q3_acc);

```

```

M_31 = simplify((T3(1,:) - subs(T3(1,:), q1_acc,0)) / q1_acc);
M_32 = simplify((T3(1,:) - subs(T3(1,:), q2_acc,0)) / q2_acc);
M_33 = simplify((T3(1,:) - subs(T3(1,:), q3_acc,0)) / q3_acc);

G1_ = simplify(subs(T1(1,:), [q1_acc, q2_acc, q3_acc, q1_dot, q2_dot, q3_dot],[0,0,0,0,0,0]));
;
G2_ = simplify(subs(T2(1,:), [q1_acc, q2_acc, q3_acc, q1_dot, q2_dot, q3_dot],[0,0,0,0,0,0]));
;
G3_ = simplify(subs(T3(1,:), [q1_acc, q2_acc, q3_acc, q1_dot, q2_dot, q3_dot],[0,0,0,0,0,0]));
;

%Inertia Matrix
M_ = simplify([M_11,M_12,M_13; M_21,M_22,M_23; M_31,M_32,M_33])
%M_ = M(t);
%Numerical Inertia Matrix
M_numerical_ = vpa(simplify(subs(M_, [L1,L2,L3,m1,m2,m3,mL,g],[0.6,0.4,0.15,3,2,0.5,2,9.8])))

%Gravity Matrix
G_ = simplify([G1_; G2_; G3_])
%G = G(t);
%Numerical Gravity Matrix
G_numerical_ = vpa(simplify(subs(G_, [L1,L2,L3,m1,m2,m3,mL,g],[0.6,0.4,0.15,3,2,0.5,2,9.8])))

% Coriolis force matrix
q_acc = [q1_acc; q2_acc; q3_acc];
Cq_ = [T_newton - M_*q_acc - G_];
C11_ = simplify(Cq_(1,:)/q1_dot);
C12_ = simplify(Cq_(1,:)/q2_dot);
C13_ = simplify(Cq_(1,:)/q3_dot);
C21_ = simplify(Cq_(2,:)/q1_dot);
C22_ = simplify(Cq_(2,:)/q2_dot);
C23_ = simplify(Cq_(2,:)/q3_dot);
C31_ = simplify(Cq_(3,:)/q1_dot);
C32_ = simplify(Cq_(3,:)/q2_dot);
C33_ = simplify(Cq_(3,:)/q3_dot);

C_ = simplify([C11_,C12_,C13_; C21_,C22_,C23_; C31_,C32_,C33_])
%Numerical Coriolis force Matrix
C_numerical_ = vpa(simplify(subs(C_, [L1,L2,L3,m1,m2,m3,mL,g],[0.6,0.4,0.15,3,2,0.5,2,9.8])))

% Matrix-Vector Relationship: M(q)q_acc + C(q,q_dot)q_dot + G(q) = Tau
Matrix_Vector_Relationship = M_*q_acc + C_*q_dot + G_ == T_newton

%Numerical Relation
Numerical_Matrix_Vector_Relationship = M_numerical_*q_acc + C_numerical_*q_dot + G_numerical_
== T_newton

%ans 6 c
% difference in both methods
M_diff = simplify(M_numerical_ - M_numerical)
C_diff = simplify(C_numerical_ - C_numerical)
G_diff = simplify(G_numerical_ - G_numerical)

% function to convert angles to Euler
function rot_angle = converttoEuler(Tfinal)
% Convert rotation matrix to Euler angles
singularity_check = sqrt(Tfinal(1,1)^2 + Tfinal(2,1)^2);

```

```

if singularity_check < 10^-6
    PHI = atan2(Tfinal(2,3), Tfinal(2,2)); % corresponds to RX in Robot Studio
    THETA = atan2(-Tfinal(3,1), sqrt(Tfinal(1,1)^2+Tfinal(2,1)^2)); % corresponds to RY in Robot Studio
    PSI = 0; % corresponds to RZ in Robot Studio
else
    THETA = atan2(-Tfinal(3,1),sqrt(Tfinal(1,1)^2+Tfinal(2,1)^2)); % corresponds to RY in Robot Studio
    PHI = atan2(Tfinal(3,2),Tfinal(3,3)); % corresponds to RX in Robot Studio
    PSI = atan2(Tfinal(2,1),Tfinal(1,1)); % corresponds to RZ in Robot Studio
end

rot_angle = [PHI,THETA,PSI]*180/pi;
end

```

M\_ =

```

[ (217*mL)/1600 + (9*mL*cos(2*q2))/25 + (4*mL*cos(2*q3))/25 + (9*mL*cos(2*q2 + 2*q3))/25 + (9*mL*cos(q2 + q3))/100 + (6*mL*cos(q2))/25 + (3*mL*cos(q3))/50 + (12*mL*cos(q2 + 2*q3))/25 + 3, (73*mL)/1600 + (4*mL*cos(2*q3))/25 + (9*mL*cos(q2 + q3))/200 + (3*mL*cos(q2))/25 + (3*mL*cos(q3))/50 + (6*mL*cos(q2 + 2*q3))/25 + 2, (9*mL)/1600 + (9*mL*cos(q2 + q3))/200 + (3*mL*cos(q3))/100 + 1]
[ (73*mL)/1600 + (4*mL*cos(2*q3))/25 + (9*mL*cos(q2 + q3))/200 + (3*mL*cos(q2))/25 + (3*mL*cos(q3))/50 + (6*mL*cos(q2 + 2*q3))/25 + 2, (8*mL*cos(q3)^2)/25 - (183*mL)/1600 + (3*mL*cos(q3))/50 + 2, (9*mL)/1600 + (3*mL*cos(q3))/200 + (9*mL*cos(q2 + q3))/100 + 1]
[ (9*mL)/1600 + (9*mL*cos(q2 + q3))/200 + (3*mL*cos(q3))/100 + 1,
,
(9*mL)/1600 + (3*mL*cos(q3))/100 + 1, (9*mL)/1600 + 1]

```

M\_numerical\_ =

```

[ 0.96*cos(q2 + 2.0*q3) + 0.72*cos(2.0*q2) + 0.32*cos(2.0*q3) + 0.18*cos(q2 + q3) + 0.48*cos(q2) + 0.12*cos(q3) + 0.72*cos(2.0*q2 + 2.0*q3) + 3.271, 0.48*cos(q2 + 2.0*q3) + 0.32*cos(2.0*q3) + 0.09*cos(q2 + q3) + 0.24*cos(q2) + 0.12*cos(q3) + 2.091, 0.09*cos(q2 + q3) + 0.06*cos(q3) + 1.011]
[ 0.48*cos(q2 + 2.0*q3) + 0.32*cos(2.0*q3) + 0.09*cos(q2 + q3) + 0.24*cos(q2) + 0.12*cos(q3) + 2.091, 0.12*cos(q3) + 0.64*cos(q3)^2 + 1.771, 0.06*cos(q3) + 1.011]
[ 0.09*cos(q2 + q3) + 0.06*cos(q3) + 1.011, 0.06*cos(q3) + 1.011, 1.011]

```

G\_ =

```

(147*cos(q1 + q2 + q3))/100 - (49*m3)/25 - (147*m2)/50 + (196*cos(q1 + q2 + 2*q3))/25 + (294*cos(q1 + 2*q2 + 2*q3))/25 - (3*g*mL)/40 - (147*m3*cos(q2))/25 + (147*m3*sin(q2))/25 - (2*g*m

```

L\*cos(q3))/5 + (2\*g\*mL\*sin(q3))/5 - (3\*g\*mL\*cos(q2 + q3))/5 + (3\*g\*mL\*sin(q2 + q3))/5 + 147/1  
00

(147\*cos(q1 + q2 + q3))/100 - (49\*m3)/25 +  
(196\*cos(q1 + q2 + 2\*q3))/25 - (3\*g\*mL)/40 - (2\*g\*mL\*cos(q3))/5 + (2\*g\*mL\*sin(q3))/5 + 147/1  
00

(147\*cos(q1 + q2 + q3))/100 - (3\*g\*mL)/40 + 147/1  
00

G\_numerical\_ =

1.47\*cos(q1 + q2 + q3) - 16.63\*cos(q2 + q3 + 0.7854) + 11.76\*cos(q1 + 2.0\*q2 + 2.0\*q3) - 4.1  
58\*cos(q2 + 0.7854) - 11.09\*cos(q3 + 0.7854) + 7.84\*cos(q1 + q2 + 2.0\*q3) - 6.86  
7\*cos(q1 + q2 + q3) - 11.09\*cos(q3 + 0.7854) + 7.84\*cos(q1 + q2 + 2.0\*q3) - 0.98

1.47\*cos(q1 + q2 + q3)

C\_ =

[ (mL\*(48\*q1\_dot^2\*sin(q2) + 12\*q1\_dot^2\*sin(q3) + 24\*q2\_dot^2\*sin(q2) + 12\*q2\_dot^2\*sin(q3)  
+ 96\*q1\_dot^2\*sin(q2 + 2\*q3) + 48\*q2\_dot^2\*sin(q2 + 2\*q3) + 72\*q1\_dot^2\*sin(2\*q2) + 32\*q1\_dot  
^2\*sin(2\*q3) + 32\*q2\_dot^2\*sin(2\*q3) + 72\*q1\_dot^2\*sin(2\*q2 + 2\*q3) + 18\*q1\_dot^2\*sin(q2 + q3)  
+ 9\*q2\_dot^2\*sin(q2 + q3) + 48\*q1\_dot\*q2\_dot\*sin(q2) + 24\*q1\_dot\*q2\_dot\*sin(q3) + 96\*q1\_dot  
\*q2\_dot\*sin(q2 + 2\*q3) + 64\*q1\_dot\*q2\_dot\*sin(2\*q3) + 18\*q1\_dot\*q2\_dot\*sin(q2 + q3)) / (200\*q1  
\_dot), (mL\*(48\*q1\_dot^2\*sin(q2) + 12\*q1\_dot^2\*sin(q3) + 24\*q2\_dot^2\*sin(q2) + 12\*q2\_dot^2\*sin  
(q3) + 96\*q1\_dot^2\*sin(q2 + 2\*q3) + 48\*q2\_dot^2\*sin(q2 + 2\*q3) + 72\*q1\_dot^2\*sin(2\*q2) + 32\*q  
1\_dot^2\*sin(2\*q3) + 32\*q2\_dot^2\*sin(2\*q3) + 72\*q1\_dot^2\*sin(2\*q2 + 2\*q3) + 18\*q1\_dot^2\*sin(q2  
+ q3) + 9\*q2\_dot^2\*sin(q2 + q3) + 48\*q1\_dot\*q2\_dot\*sin(q2) + 24\*q1\_dot\*q2\_dot\*sin(q3) + 96\*q  
1\_dot\*q2\_dot\*sin(q2 + 2\*q3) + 64\*q1\_dot\*q2\_dot\*sin(2\*q3) + 18\*q1\_dot\*q2\_dot\*sin(q2 + q3)) / (2  
00\*q2\_dot), (mL\*(48\*q1\_dot^2\*sin(q2) + 12\*q1\_dot^2\*sin(q3) + 24\*q2\_dot^2\*sin(q2) + 12\*q2\_dot^  
2\*sin(q3) + 96\*q1\_dot^2\*sin(q2 + 2\*q3) + 48\*q2\_dot^2\*sin(q2 + 2\*q3) + 72\*q1\_dot^2\*sin(2\*q2) +  
32\*q1\_dot^2\*sin(2\*q3) + 32\*q2\_dot^2\*sin(2\*q3) + 72\*q1\_dot^2\*sin(2\*q2 + 2\*q3) + 18\*q1\_dot^2\*s  
in(q2 + q3) + 9\*q2\_dot^2\*sin(q2 + q3) + 48\*q1\_dot\*q2\_dot\*sin(q2) + 24\*q1\_dot\*q2\_dot\*sin(q3) +  
96\*q1\_dot\*q2\_dot\*sin(q2 + 2\*q3) + 64\*q1\_dot\*q2\_dot\*sin(2\*q3) + 18\*q1\_dot\*q2\_dot\*sin(q2 + q3)  
)) / (200\*q3\_dot)]

[

(mL\*(24\*q1\_dot^2\*sin(q2) + 12\*q1\_dot^2\*sin(q3) + 12  
\*q2\_dot^2\*sin(q3) + 48\*q1\_dot^2\*sin(q2 + 2\*q3) + 32\*q1\_dot^2\*sin(2\*q3) + 32\*q2\_dot^2\*sin(2\*q3  
)+ 9\*q1\_dot^2\*sin(q2 + q3) + 24\*q1\_dot\*q2\_dot\*sin(q3) + 64\*q1\_dot\*q2\_dot\*sin(2\*q3)) / (200\*q1  
\_dot),

(mL\*(24\*q1\_dot^2\*sin(q2) + 12\*q1\_dot^2\*sin(q3)  
+ 12\*q2\_dot^2\*sin(q3) + 48\*q1\_dot^2\*sin(q2 + 2\*q3) + 32\*q1\_dot^2\*sin(2\*q3) + 32\*q2\_dot^  
2\*sin(2\*q3) + 9\*q1\_dot^2\*sin(q2 + q3) + 24\*q1\_dot\*q2\_dot\*sin(q3) + 64\*q1\_dot\*q2\_dot\*sin(2\*q3)) / (2  
00\*q2\_dot),

(mL\*(24\*q1\_dot^2\*sin(q2) + 12\*q1\_dot^2\*sin(q3)  
+ 12\*q2\_dot^2\*sin(q3) + 48\*q1\_dot^2\*sin(q2 + 2\*q3) + 32\*q1\_dot^2\*sin(2\*q3) + 32\*q2\_dot^  
2\*sin(2\*q3) + 9\*q1\_dot^2\*sin(q2 + q3) + 24\*q1\_dot\*q2\_dot\*sin(q3) + 64\*q1\_dot\*q2\_dot\*sin(2\*q3)  
)) / (200\*q3\_dot)]

[

$$(3*mL*(2*q1_dot^2*sin(q3) + 2*q2_dot^2*sin(q3) + 3*q1_dot^2*sin(q2 + q3) + 4*q1_dot*q2_dot*sin(q3)))/(200*q1_dot),$$

$$(3*mL*(2*q1_dot^2*sin(q3) + 2*q2_dot^2*sin(q3) + 3*q1_dot^2*sin(q2 + q3) + 4*q1_dot*q2_dot*sin(q3)))/(200*q2_dot),$$

$$(3*mL*(2*q1_dot^2*sin(q3) + 2*q2_dot^2*sin(q3) + 3*q1_dot^2*sin(q2 + q3) + 4*q1_dot*q2_dot*sin(q3)))/(200*q3_dot)]$$

C\_numerical\_ =

$$[(0.01*(48.0*q1_dot^2*sin(q2) + 12.0*q1_dot^2*sin(q3) + 24.0*q2_dot^2*sin(q2) + 12.0*q2_dot^2*sin(q3) + 72.0*q1_dot^2*sin(2.0*q2 + 2.0*q3) + 96.0*q1_dot^2*sin(q2 + 2.0*q3) + 48.0*q2_dot^2*sin(q2 + 2.0*q3) + 72.0*q1_dot^2*sin(2.0*q2) + 32.0*q1_dot^2*sin(2.0*q3) + 32.0*q2_dot^2*sin(2.0*q3) + 18.0*q1_dot^2*sin(q2 + q3) + 9.0*q2_dot^2*sin(q2 + q3) + 48.0*q1_dot*q2_dot*sin(q2) + 24.0*q1_dot*q2_dot*sin(q3) + 96.0*q1_dot*q2_dot*sin(q2 + 2.0*q3) + 64.0*q1_dot*q2_dot*sin(2.0*q3) + 18.0*q1_dot*q2_dot*sin(q2 + q3)))/q1_dot, (0.01*(48.0*q1_dot^2*sin(q2) + 12.0*q1_dot^2*sin(q3) + 24.0*q2_dot^2*sin(q2) + 12.0*q2_dot^2*sin(q3) + 72.0*q1_dot^2*sin(2.0*q2 + 2.0*q3) + 96.0*q1_dot^2*sin(q2 + 2.0*q3) + 48.0*q2_dot^2*sin(q2 + 2.0*q3) + 72.0*q1_dot^2*sin(2.0*q2) + 32.0*q1_dot^2*sin(2.0*q3) + 32.0*q2_dot^2*sin(2.0*q3) + 18.0*q1_dot^2*sin(q2 + q3) + 9.0*q2_dot^2*sin(q2 + q3) + 48.0*q1_dot*q2_dot*sin(q2) + 24.0*q1_dot*q2_dot*sin(q3) + 96.0*q1_dot*q2_dot*sin(q2 + 2.0*q3) + 64.0*q1_dot*q2_dot*sin(2.0*q3) + 18.0*q1_dot*q2_dot*sin(q2 + q3)))/q2_dot, (0.01*(48.0*q1_dot^2*sin(q2) + 12.0*q1_dot^2*sin(q3) + 24.0*q2_dot^2*sin(q2) + 12.0*q2_dot^2*sin(q3) + 72.0*q1_dot^2*sin(2.0*q2 + 2.0*q3) + 96.0*q1_dot^2*sin(q2 + 2.0*q3) + 48.0*q2_dot^2*sin(q2 + 2.0*q3) + 72.0*q1_dot^2*sin(2.0*q2) + 32.0*q1_dot^2*sin(2.0*q3) + 32.0*q2_dot^2*sin(2.0*q3) + 18.0*q1_dot^2*sin(q2 + q3) + 9.0*q2_dot^2*sin(q2 + q3) + 48.0*q1_dot*q2_dot*sin(q2) + 24.0*q1_dot*q2_dot*sin(q3) + 96.0*q1_dot*q2_dot*sin(q2 + 2.0*q3) + 64.0*q1_dot*q2_dot*sin(2.0*q3) + 18.0*q1_dot*q2_dot*sin(q2 + q3)))/q3_dot]$$

$$(0.01*(24.0*q1_dot^2*sin(q2) + 12.0*q1_dot^2*sin(q3) + 12.0*q2_dot^2*sin(q3) + 48.0*q1_dot^2*sin(q2 + 2.0*q3) + 32.0*q1_dot^2*sin(2.0*q3) + 32.0*q2_dot^2*sin(2.0*q3) + 9.0*q1_dot^2*sin(q2 + q3) + 24.0*q1_dot*q2_dot*sin(q3) + 64.0*q1_dot*q2_dot*sin(2.0*q3)))/q1_dot,$$

$$(0.01*(24.0*q1_dot^2*sin(q2) + 12.0*q1_dot^2*sin(q3) + 12.0*q2_dot^2*sin(q3) + 48.0*q1_dot^2*sin(q2 + 2.0*q3) + 32.0*q1_dot^2*sin(2.0*q3) + 32.0*q2_dot^2*sin(2.0*q3) + 9.0*q1_dot^2*sin(q2 + q3) + 24.0*q1_dot*q2_dot*sin(q3) + 64.0*q1_dot*q2_dot*sin(2.0*q3)))/q2_dot,$$

$$(0.01*(24.0*q1_dot^2*sin(q2) + 12.0*q1_dot^2*sin(q3) + 12.0*q2_dot^2*sin(q3) + 48.0*q1_dot^2*sin(q2 + 2.0*q3) + 32.0*q1_dot^2*sin(2.0*q3) + 32.0*q2_dot^2*sin(2.0*q3) + 9.0*q1_dot^2*sin(q2 + q3) + 24.0*q1_dot*q2_dot*sin(q3) + 64.0*q1_dot*q2_dot*sin(2.0*q3)))/q3_dot]$$

$$(0.03*(2.0*q1_dot^2*sin(q3) + 2.0*q2_dot^2*sin(q3) + 3.0*q1_dot*t^2*sin(q2 + q3) + 4.0*q1_dot*q2_dot*sin(q3)))/q1_dot,$$

$$0*q1\_dot^2*\sin(q3) + 2.0*q2\_dot^2*\sin(q3) + 3.0*q1\_dot^2*\sin(q2 + q3) + 4.0*q1\_dot*q2\_dot*\sin(q3)))/q2\_dot,$$

```
(0.03*(2.0*q1_dot^2*sin(q3) + 2.0*q2_dot^2*sin(q3)
) + 3.0*q1_dot^2*sin(q2 + q3) + 4.0*q1_dot*q2_dot*sin(q3)))/q3_dot]
```

Matrix\_Vector\_Relationship =

$$\begin{aligned}
& \frac{(147*\cos(q1 + q2 + q3))/100 - (49*m3)/25 - (147*m2)/50 + (196*\cos(q1 + q2 + 2*q3))/25 + (294*\cos(q1 + 2*q2 + 2*q3))/25 + q3\_acc*((9*mL)/1600 + (9*mL*\cos(q2 + q3))/200 + (3*mL*\cos(q3))/100 + 1) - (3*g*mL)/40 + q2\_acc*((73*mL)/1600 + (4*mL*\cos(2*q3))/25 + (9*mL*\cos(q2 + q3))/200 + (3*mL*\cos(q2))/25 + (3*mL*\cos(q3))/50 + (6*mL*\cos(q2 + 2*q3))/25 + 2) - (147*m3*\cos(q2))/25 + (147*m3*\sin(q2))/25 + q1\_acc*((217*mL)/1600 + (9*mL*\cos(2*q2))/25 + (4*mL*\cos(2*q3))/25 + (9*mL*\cos(2*q2 + 2*q3))/25 + (9*mL*\cos(q2 + q3))/100 + (6*mL*\cos(q2))/25 + (3*mL*\cos(q3))/50 + (12*mL*\cos(q2 + 2*q3))/25 + 3) + (3*mL*(48*q1_dot^2*\sin(q2) + 12*q1_dot^2*\sin(q3) + 24*q2_dot^2*\sin(q2) + 12*q2_dot^2*\sin(q3) + 96*q1_dot^2*\sin(q2 + 2*q3) + 48*q2_dot^2*\sin(q2 + 2*q3) + 72*q1_dot^2*\sin(2*q2) + 32*q1_dot^2*\sin(2*q3) + 32*q2_dot^2*\sin(2*q3) + 72*q1_dot^2*\sin(2*q2 + 2*q3) + 18*q1_dot^2*\sin(q2 + q3) + 9*q2_dot^2*\sin(q2 + q3) + 48*q1_dot*q2_dot*\sin(q2) + 24*q1_dot*q2_dot*\sin(q2 + q3) + 96*q1_dot*q2_dot*\sin(q2 + 2*q3) + 64*q1_dot*q2_dot*\sin(2*q3) + 18*q1_dot*q2_dot*\sin(q2 + q3))/200 - (2*g*mL*\cos(q3))/5 + (2*g*mL*\sin(q3))/5 - (3*g*mL*\cos(q2 + q3))/5 + (3*g*mL*\sin(q2 + q3))/5 + 147/100 == 3*q1_acc - (49*m3)/25 - (147*m2)/50 + 2*q2_acc + q3_acc + (3*\sin(q2)*((49*m3)/5 + \cos(q3)*(g*mL + mL*((3*q1_dot)/40 + (3*q2_dot)/40)*(q1_dot + q2_dot) + \cos(q3)*(3*q1_dot^2*\cos(q2))/5 + ((2*q1_dot)/5 + (2*q2_dot)/5)*(q1_dot + q2_dot) - (3*q1_acc*\sin(q2))/5) - \sin(q3)*((3*\sin(q2)*q1_dot^2)/5 + (2*q1_acc)/5 + (2*q2_acc)/5 + (3*q1_acc*\cos(q2))/5)) - (98*\cos(q3)*(\cos(q1)*\sin(q2) + \cos(q2)*\sin(q1)))/5 - (98*\sin(q3)*(cos(q1)*\cos(q2) - \sin(q1)*\sin(q2)))/5 + mL*((3*q1_dot^2*\cos(q2))/5 + (q1_dot/5 + q2_dot/5)*(q1_dot + q2_dot) - (3*q1_acc*\sin(q2))/5) + \sin(q3)*(g*mL - mL*((3*q1_acc)/40 + (3*q2_acc)/40 + (3*q3_acc)/40 + \cos(q3)*(3*sin(q2)*q1_dot^2)/5 + (2*q1_acc)/5 + (2*q2_acc)/5 + (3*q1_acc*\cos(q2))/5) + \sin(q3)*((3*q1_dot^2*\cos(q2))/5 + ((2*q1_dot)/5 + (2*q2_dot)/5)*(q1_dot + q2_dot) - (3*q1_acc*\sin(q2))/5)) - (98*\cos(q3)*(\cos(q1)*\cos(q2) - \sin(q1)*\sin(q2)))/5 + (98*\sin(q3)*(cos(q1)*\sin(q2) + \cos(q2)*\sin(q1)))/5 - (98*\sin(q3)*(cos(q1)*\cos(q2) - \sin(q1)*\sin(q2)))/5) - (3*g*mL)/40 + (9*mL*q1_acc)/100 + (mL*((3*\sin(q2)*q1_dot^2)/5 + q1_acc/5 + q2_acc/5 + (3*q1_acc*\cos(q2))/5))/5 + (3*mL*((3*q1_acc)/40 + (3*q2_acc)/40 + (3*q3_acc)/40 + \cos(q3)*(3*sin(q2)*q1_dot^2)/5 + (2*q1_acc)/5 + (2*q2_acc)/5 + (3*q1_acc*\cos(q2))/5) + \sin(q3)*((3*q1_dot^2*\cos(q2))/5 + ((2*q1_dot)/5 + (2*q2_dot)/5)*(q1_dot + q2_dot) - (3*q1_acc*\sin(q2))/5)) - (98*\cos(q3)*(\cos(q1)*\cos(q2) - \sin(q1)*\sin(q2)))/5 + (2*sin(q3)*(g*mL + mL*((3*q1_dot)/40 + (3*q2_dot)/40)*(q1_dot + q2_dot) + \cos(q3)*(3*q1_dot^2*\cos(q2))/5 + ((2*q1_dot)/5 + (2*q2_dot)/5)*(q1_dot + q2_dot) - (3*q1_acc*\sin(q2))/5) - \sin(q3)*((3*\sin(q2)*q1_dot^2)/5 + (2*q1_acc)/5 + (2*q2_acc)/5 + (3*q1_acc*\cos(q2))/5)) - (98*\cos(q3)*(\cos(q1)*\sin(q2) + \cos(q2)*\sin(q1)))/5 - (98*\sin(q3)*(cos(q1)*\cos(q2) - \sin(q1)*\sin(q2)))/5 + (3*mL*(3*q1_acc)/40 + (3*q2_acc)/40 + (3*q3_acc)/40 + \cos(q3)*(3*sin(q2)*q1_dot^2)/5 + (2*q1_acc)/5 + (2*q2_acc)/5 + (3*q1_acc*\cos(q2))/5) + \sin(q3)*((3*q1_dot^2*\cos(q2))/5 + ((2*q1_dot)/5 + (2*q2_dot)/5)*(q1_dot + q2_dot) - (3*q1_acc*\sin(q2))/5))/40 + (147*\cos(q3)*(\cos(q1)*\cos(q2) - \sin(q1)*\sin(q2)))/100 - (147*\sin(q3)*(\cos(q1)*\sin(q2) + \cos(q2)*\sin(q1)))/100 - (2*cos(q3)*(g*mL - mL*((3*q1_acc)/40 + (3*q2_acc)/40 + (3*q3_acc)/40 + \cos(q3)*(3*sin(q2)*q1_dot^2)/5 + (2*q1_acc)/5 + (2*q2_acc)/5 + (3*q1_acc*\cos(q2))/5) + \sin(q3)*((3*q1_dot^2*\cos(q2))/5 + ((2*q1_dot)/5 + (2*q2_dot)/5)*(q1_dot + q2_dot) - (3*q1_acc*\sin(q2))/5)))/40 + (98*\cos(q3)*(\cos(q1)*\cos(q2) - \sin(q1)*\sin(q2)))/5 + (98*\sin(q3)*(cos(q1)*\sin(q2) + \cos(q2)*\sin(q1)))/5 - (3*cos(q2)*((49*m3)/5 - \sin(q3)*(g*mL + mL*((3*q1_dot)/40 + (3*q2_dot)/40)*(q1_dot + q2_dot) + \cos(q3)*(3*q1_dot^2*\cos(q2))/5 + ((2*q1_dot)/5 + (2*q2_dot)/5)*(q1_dot + q2_dot) - (3*q1_acc*\sin(q2))/5) - \sin(q3)*((3*\sin(q2)*q1_dot^2)/5 + (2*q1_acc)/5 + (2*q2_acc)/5 + (3*q1_acc*\cos(q2))/5)) - (98*\cos(q3)*(\cos(q1)*\sin(q2) + \cos(q2)*\sin(q1)))/5 - (98*\sin(q3)*(cos(q1)*\cos(q2) - \sin(q1)*\sin(q2)))/5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\text{q2})))/5) - \text{mL}*((3*\sin(\text{q2})*\text{q1\_dot}^2)/5 + \text{q1\_acc}/5 + \text{q2\_acc}/5 + (3*\text{q1\_acc}*\cos(\text{q2}))/5) + \cos(\text{q3}) \\
& *(\text{g}*\text{mL} - \text{mL}*((3*\text{q1\_acc})/40 + (3*\text{q2\_acc})/40 + (3*\text{q3\_acc})/40 + \cos(\text{q3})*((3*\sin(\text{q2})*\text{q1\_dot}^2)/5 \\
& + (2*\text{q1\_acc})/5 + (2*\text{q2\_acc})/5 + (3*\text{q1\_acc}*\cos(\text{q2}))/5) + \sin(\text{q3})*((3*\text{q1\_dot}^2*\cos(\text{q2}))/5 + ((2*\text{q1\_dot})/5 \\
& + (2*\text{q2\_dot})/5)*(\text{q1\_dot} + \text{q2\_dot}) - (3*\text{q1\_acc}*\sin(\text{q2}))/5)) - (98*\cos(\text{q3})*(\cos(\text{q1}) \\
& *\cos(\text{q2}) - \sin(\text{q1})*\sin(\text{q2}))/5 + (98*\sin(\text{q3})*(\cos(\text{q1})*\sin(\text{q2}) + \cos(\text{q2})*\sin(\text{q1}))/5))/5 + 14 \\
& 7/100
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (147*\cos(\text{q1} + \text{q2} + \text{q3}))/100 - (49*\text{m3})/25 + (196*\cos(\text{q1} + \text{q2} + 2*\text{q3}))/25 + (3*\text{mL}*(24*\text{q1\_dot}^2*\sin(\text{q2}) + 12*\text{q1\_dot}^2*\sin(\text{q3}) + 12*\text{q2\_dot}^2*\sin(\text{q3}) \\
& + 48*\text{q1\_dot}^2*\sin(\text{q2} + 2*\text{q3}) + 32*\text{q1\_dot}^2*\sin(2*\text{q3}) + 32*\text{q2\_dot}^2*\sin(2*\text{q3}) + 9*\text{q1\_dot}^2*\sin(\text{q2} + \text{q3}) + 24*\text{q1\_dot}*\text{q2\_dot}*\sin(\text{q3}) + 64*\text{q1\_dot}*\text{q2\_dot}*\sin(2*\text{q3}))/200 - (3*\text{g}*\text{mL})/40 + \text{q1\_acc}*((73*\text{mL})/1600 + (4*\text{mL}*\cos(2*\text{q3}))/25 + (9*\text{mL}*\cos(\text{q2} + \text{q3}))/200 + (3*\text{mL}*\cos(\text{q2}))/25 + (3*\text{mL}*\cos(\text{q3}))/50 + (6*\text{mL}*\cos(\text{q2} + 2*\text{q3}))/25 + 2) + \text{q3\_acc}*((9*\text{mL})/1600 + (3*\text{mL}*\cos(\text{q3}))/100 + 1) + \text{q2\_acc}*((8*\text{mL}*\cos(\text{q3})^2)/25 - (183*\text{mL})/1600 + (3*\text{mL}*\cos(\text{q3}))/50 + 2) - (2*\text{g}*\text{mL}*\cos(\text{q3}))/5 + (2*\text{g}*\text{mL}*\sin(\text{q3}))/5 + 147/100 == 2*\text{q1\_acc} - (49*\text{m3})/25 + 2*\text{q2\_acc} + \text{q3\_acc} + (2*\sin(\text{q3})*(\text{g}*\text{mL} + \text{mL}*((3*\text{q1\_dot})/40 + (3*\text{q2\_dot})/40)*(\text{q1\_dot} + \text{q2\_dot}) + \cos(\text{q3})*((3*\text{q1\_dot}^2*\cos(\text{q2}))/5 + ((2*\text{q1\_dot})/5 + (2*\text{q2\_dot})/5)*(\text{q1\_dot} + \text{q2\_dot}) - (3*\text{q1\_acc}*\sin(\text{q2}))/5) - \sin(\text{q3})*((3*\sin(\text{q2})*\text{q1\_dot}^2)/5 + (2*\text{q1\_acc})/5 + (2*\text{q2\_acc})/5 + (3*\text{q1\_acc}*\cos(\text{q2}))/5) - (98*\cos(\text{q3})*(\cos(\text{q1})*\sin(\text{q2}) + \cos(\text{q2})*\sin(\text{q1}))/5) - (98*\sin(\text{q3})*(\cos(\text{q1})*\cos(\text{q2}) - \sin(\text{q1})*\sin(\text{q2}))/5))/5 - (3*\text{g}*\text{mL})/40 + (\text{mL}*((3*\sin(\text{q2})*\text{q1\_dot}^2)/5 + \text{q1\_acc}/5 + \text{q2\_acc}/5 + (3*\text{q1\_acc}*\cos(\text{q2}))/5))/5 + (3*\text{mL}*((3*\text{q1\_acc})/40 + (3*\text{q2\_acc})/40 + (3*\text{q3\_acc})/40 + \cos(\text{q3})*((3*\sin(\text{q2})*\text{q1\_dot}^2)/5 + (2*\text{q1\_acc})/5 + (2*\text{q2\_acc})/5 + (3*\text{q1\_acc}*\cos(\text{q2}))/5) + \sin(\text{q3})*((3*\text{q1\_dot}^2*\cos(\text{q2}))/5 + ((2*\text{q1\_dot})/5 + (2*\text{q2\_dot})/5)*(\text{q1\_dot} + \text{q2\_dot}) - (3*\text{q1\_acc}*\sin(\text{q2}))/5))/40 + (147*\cos(\text{q3})*(\cos(\text{q1})*\cos(\text{q2}) - \sin(\text{q1})*\sin(\text{q2}))/100 - (147*\sin(\text{q3})*(\cos(\text{q1})*\sin(\text{q2}) + \cos(\text{q2})*\sin(\text{q1}))/100 - (2*\cos(\text{q3})*(\text{g}*\text{mL} - \text{mL}*((3*\text{q1\_acc})/40 + (3*\text{q2\_acc})/40 + (3*\text{q3\_acc})/40 + \cos(\text{q3})*((3*\sin(\text{q2})*\text{q1\_dot}^2)/5 + (2*\text{q1\_acc})/5 + (2*\text{q2\_acc})/5 + (3*\text{q1\_acc}*\cos(\text{q2}))/5) + \sin(\text{q3})*((3*\text{q1\_dot}^2*\cos(\text{q2}))/5 + ((2*\text{q1\_dot})/5 + (2*\text{q2\_dot})/5)*(\text{q1\_dot} + \text{q2\_dot}) - (3*\text{q1\_acc}*\sin(\text{q2}))/5) - (98*\cos(\text{q3})*(\cos(\text{q1})*\cos(\text{q2}) - \sin(\text{q1})*\sin(\text{q2}))/5) + (98*\sin(\text{q3})*(\cos(\text{q1})*\sin(\text{q2}) + \cos(\text{q2})*\sin(\text{q1}))/5))/5 + 14 \\
& 7/100
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (147*\cos(q1 + q2 + q3))/100 + q1\_acc*((9*mL)/1600 + (9*mL*\cos(q2 + q3)) \\
& /200 + (3*mL*\cos(q3))/100 + 1) - (3*g*mL)/40 + (9*mL*(2*q1_dot^2*\sin(q3) + 2*q2_dot^2*\sin(q3) \\
& + 3*q1_dot^2*\sin(q2 + q3) + 4*q1_dot*q2_dot*\sin(q3)))/200 + q2_acc*((9*mL)/1600 + (3*mL*\cos(q3)) \\
& /100 + 1) + q3_acc*((9*mL)/1600 + 1) + 147/100 == q1_acc + q2_acc + q3_acc - (3*g*mL)/40 \\
& + (3*mL*((3*q1_acc)/40 + (3*q2_acc)/40 + (3*q3_acc)/40 + \cos(q3)*(3*\sin(q2)*q1_dot^2)/5 + (2*q1_ \\
& acc)/5 + (2*q2_acc)/5 + (3*q1_acc*\cos(q2))/5) + \sin(q3)*(3*q1_dot^2*\cos(q2))/5 + ((2*q1_ \\
& dot)/5 + (2*q2_dot)/5)*(q1_dot + q2_dot) - (3*q1_acc*\sin(q2))/5))/40 + (147*\cos(q3)*(\cos(q1) \\
& *\cos(q2) - \sin(q1)*\sin(q2)))/100 - (147*\sin(q3)*(\cos(q1)*\sin(q2) + \cos(q2)*\sin(q1)))/100 + 14 \\
& 7/100
\end{aligned}$$

Numerical\_Matrix\_Vector\_Relationship =

$$\begin{aligned}
& 1.47*\cos(q1 + q2 + q3) - 16.63*\cos(q2 + q3 + 0.7854) + 11.76*\cos(q1 + 2.0*q2 + 2.0*q3) - 4.1 \\
& 58*\cos(q2 + 0.7854) - 11.09*\cos(q3 + 0.7854) + 7.84*\cos(q1 + q2 + 2.0*q3) + 1.44*q1_dot^2*\sin(q2) \\
& + 0.36*q1_dot^2*\sin(q3) + 0.72*q2_dot^2*\sin(q2) + 0.36*q2_dot^2*\sin(q3) + 2.16*q1_dot^2*\sin(2.0*q2 + 2.0*q3) \\
& + q1_acc*(0.96*\cos(q2 + 2.0*q3) + 0.72*\cos(2.0*q2) + 0.32*\cos(2.0*q3) + 0.18*\cos(q2 + q3) + 0.48*\cos(q2) \\
& + 0.12*\cos(q3) + 0.72*\cos(2.0*q2 + 2.0*q3) + 3.271) + q2_acc*(0.48*\cos(q2 + 2.0*q3) + 0.32*\cos(2.0*q3) \\
& + 0.09*\cos(q2 + q3) + 0.24*\cos(q2) + 0.12*\cos(q3) + 2.091) + q3_acc*(0.09*\cos(q2 + q3) + 0.06*\cos(q3) \\
& + 1.011) + 2.88*q1_dot^2*\sin(q2 + 2.0*q3) + 1.44*q2_dot^2*\sin(q2 + 2.0*q3) + 2.16*q1_dot^2*\sin(2.0*q2) \\
& + 0.96*q1_dot^2*\sin(2.0*q3) + 0.54*q1_dot^2*\sin(q2 + q3) + 0.27*q2_dot^2*\sin(q2 + q3) + 1.44*q1_ \\
& dot*q2_dot*\sin(q2) + 0.72*q1_dot*q2_dot*\sin(q3) + 2.88*q1_dot*q2_dot*\sin(q2 + 2.0*q3) + 1.92*q1_ \\
& dot*q2_dot*\sin(2.0*q3) + 0.54*q1_dot*q2_dot*\sin(q2 + q3) - 6.86 == 3*q1_acc - (49*m3)/25 - \\
& (147*m2)/50 + 2*q2_acc + q3_acc + (3*\sin(q2)*(49*m3)/5 + \cos(q3)*(g*mL + mL*((3*q1_dot)/40
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (3*q2_dot)/40 * (q1_dot + q2_dot) + \cos(q3) * ((3*q1_dot^2 * \cos(q2))/5 + ((2*q1_dot)/5 * (q1_dot + q2_dot) - (3*q1_acc * \sin(q2))/5 - \sin(q3) * ((3 * \sin(q2) * q1_dot^2)/5 + (2*q1_acc)/5 + (2*q2_acc)/5 + (3*q1_acc * \cos(q2))/5)) - (98 * \cos(q3) * (\cos(q1) * \sin(q2) + \cos(q2) * \sin(q1))/5 - (98 * \sin(q3) * (\cos(q1) * \cos(q2) - \sin(q1) * \sin(q2))/5)) + mL * ((3*q1_dot^2 * \cos(q2))/5 + (q1_dot/5 + q2_dot/5) * (q1_dot + q2_dot) - (3*q1_acc * \sin(q2))/5 + \sin(q3) * (g*mL - mL * ((3*q1_ac_c)/40 + (3*q2_acc)/40 + (3*q3_acc)/40 + \cos(q3) * ((3 * \sin(q2) * q1_dot^2)/5 + (2*q1_acc)/5 + (2*q2_acc)/5 + (3*q1_acc * \cos(q2))/5) + \sin(q3) * ((3*q1_dot^2 * \cos(q2))/5 + ((2*q1_dot)/5 + (2*q2_dot)/5) * (q1_dot + q2_dot) - (3*q1_acc * \sin(q2))/5) - (98 * \cos(q3) * (\cos(q1) * \cos(q2) - \sin(q1) * \sin(q2))/5) + (98 * \sin(q3) * (\cos(q1) * \sin(q2) + \cos(q2) * \sin(q1))/5))) / 5 + (2 * \sin(q3) * (g*mL + mL * ((3*q1_dot)/40 + (3*q2_dot)/40) * (q1_dot + q2_dot) + \cos(q3) * ((3*q1_dot^2 * \cos(q2))/5 + ((2*q1_dot)/5 + (2*q2_dot)/5) * (q1_dot + q2_dot) - (3*q1_acc * \sin(q2))/5) - \sin(q3) * ((3 * \sin(q2) * q1_dot^2)/5 + (2*q1_acc)/5 + (2*q2_acc)/5 + (3*q1_acc * \cos(q2))/5) - (98 * \cos(q3) * (\cos(q1) * \sin(q2) + \cos(q2) * \sin(q1))/5) - (98 * \sin(q3) * (\cos(q1) * \cos(q2) - \sin(q1) * \sin(q2))/5)) / 5 - (3*g*mL)/40 + (9*mL*q1_acc)/100 + (mL * ((3 * \sin(q2) * q1_dot^2)/5 + q1_acc/5 + q2_acc/5 + (3*q1_acc * \cos(q2))/5) / 5 + (3*mL * ((3*q1_acc)/40 + (3*q2_acc)/40 + (3*q3_acc)/40 + \cos(q3) * ((3 * \sin(q2) * q1_dot^2)/5 + (2*q1_acc)/5 + (2*q2_acc)/5 + (3*q1_acc * \cos(q2))/5) + \sin(q3) * ((3*q1_dot^2 * \cos(q2))/5 + ((2*q1_dot)/5 + (2*q2_dot)/5) * (q1_dot + q2_dot) - (3*q1_acc * \sin(q2))/5)) / 40 + (147 * \cos(q3) * (\cos(q1) * \cos(q2) - \sin(q1) * \sin(q2))/100 - (147 * \sin(q3) * (\cos(q1) * \sin(q2) + \cos(q2) * \sin(q1))/100 - (2 * \cos(q3) * (g*mL - mL * ((3*q1_acc)/40 + (3*q2_acc)/40 + (3*q3_acc)/40 + \cos(q3) * ((3 * \sin(q2) * q1_dot^2)/5 + (2*q1_acc)/5 + (2*q2_acc)/5 + (3*q1_acc * \cos(q2))/5) + \sin(q3) * ((3*q1_dot^2 * \cos(q2))/5 + ((2*q1_dot)/5 + (2*q2_dot)/5) * (q1_dot + q2_dot) - (3*q1_acc * \sin(q2))/5) - (98 * \cos(q3) * (\cos(q1) * \cos(q2) - \sin(q1) * \sin(q2))/5 + (98 * \sin(q3) * (\cos(q1) * \sin(q2) + \cos(q2) * \sin(q1))/5)) / 5 - (3 * \cos(q2) * ((49*m3)/5 - \sin(q3) * (g*mL + mL * ((3*q1_dot)/40 + (3*q2_dot)/40) * (q1_dot + q2_dot) + \cos(q3) * ((3*q1_dot^2 * \cos(q2))/5 + ((2*q1_dot)/5 + (2*q2_dot)/5) * (q1_dot + q2_dot) - (3*q1_acc * \sin(q2))/5) - \sin(q3) * ((3 * \sin(q2) * q1_dot^2)/5 + (2*q1_acc)/5 + (2*q2_acc)/5 + (3*q1_acc * \cos(q2))/5) - (98 * \cos(q3) * (\cos(q1) * \sin(q2) + \cos(q2) * \sin(q1))/5) - (98 * \sin(q3) * (\cos(q1) * \cos(q2) - \sin(q1) * \sin(q2))/5) - mL * ((3 * \sin(q2) * q1_dot^2)/5 + q1_acc/5 + q2_acc/5 + (3*q1_acc * \cos(q2))/5) + \cos(q3) * (g*mL - mL * ((3*q1_acc)/40 + (3*q2_acc)/40 + (3*q3_acc)/40 + \cos(q3) * ((3 * \sin(q2) * q1_dot^2)/5 + (2*q1_acc)/5 + (2*q2_acc)/5 + (3*q1_acc * \cos(q2))/5) + \sin(q3) * ((3*q1_dot^2 * \cos(q2))/5 + ((2*q1_dot)/5 + (2*q2_dot)/5) * (q1_dot + q2_dot) - (3*q1_acc * \sin(q2))/5) - (98 * \cos(q3) * (\cos(q1) * \cos(q2) - \sin(q1) * \sin(q2))/5 + (98 * \sin(q3) * (\cos(q1) * \sin(q2) + \cos(q2) * \sin(q1))/5)) / 5 + 147/100
\end{aligned}$$

1.47\*c

$\cos(q1 + q2 + q3) - 11.09 * \cos(q3 + 0.7854) + 7.84 * \cos(q1 + q2 + 2.0 * q3) + 0.72 * q1_dot^2 * \sin(q2)$

$$\begin{aligned}
& + 0.36 \cdot q1\_dot^2 \cdot \sin(q3) + 0.36 \cdot q2\_dot^2 \cdot \sin(q3) + q3\_acc \cdot (0.06 \cdot \cos(q3) + 1.011) + q2\_acc \cdot (0 \\
& .12 \cdot \cos(q3) + 0.64 \cdot \cos(q3)^2 + 1.771) + q1\_acc \cdot (0.48 \cdot \cos(q2 + 2.0 \cdot q3) + 0.32 \cdot \cos(2.0 \cdot q3) + 0. \\
& 09 \cdot \cos(q2 + q3) + 0.24 \cdot \cos(q2) + 0.12 \cdot \cos(q3) + 2.091) + 1.44 \cdot q1\_dot^2 \cdot \sin(q2 + 2.0 \cdot q3) + 0.9 \\
& 6 \cdot q1\_dot^2 \cdot \sin(2.0 \cdot q3) + 0.96 \cdot q2\_dot^2 \cdot \sin(2.0 \cdot q3) + 0.27 \cdot q1\_dot^2 \cdot \sin(q2 + q3) + 0.72 \cdot q1\_dot \\
& \cdot q2\_dot \cdot \sin(q3) + 1.92 \cdot q1\_dot \cdot q2\_dot \cdot \sin(2.0 \cdot q3) - 0.98 = 2 \cdot q1\_acc - (49 \cdot m3) / 25 + 2 \cdot q2\_acc + \\
& q3\_acc + (2 \cdot \sin(q3)) \cdot (g \cdot mL + mL \cdot ((3 \cdot q1\_dot) / 40 + (3 \cdot q2\_dot) / 40) \cdot (q1\_dot + q2\_dot) + \cos(q3) \cdot \\
& ((3 \cdot q1\_dot^2 \cdot \cos(q2)) / 5 + ((2 \cdot q1\_dot) / 5 + (2 \cdot q2\_dot) / 5) \cdot (q1\_dot + q2\_dot) - (3 \cdot q1\_acc \cdot \sin(q2) \\
& ) / 5) - \sin(q3) \cdot ((3 \cdot \sin(q2) \cdot q1\_dot^2) / 5 + (2 \cdot q1\_acc) / 5 + (2 \cdot q2\_acc) / 5 + (3 \cdot q1\_acc \cdot \cos(q2)) / 5) \\
& - (98 \cdot \cos(q3) \cdot (\cos(q1) \cdot \sin(q2) + \cos(q2) \cdot \sin(q1))) / 5 - (98 \cdot \sin(q3) \cdot (\cos(q1) \cdot \cos(q2) - \\
& \sin(q1) \cdot \sin(q2))) / 5 - (3 \cdot g \cdot mL) / 40 + (mL \cdot ((3 \cdot \sin(q2) \cdot q1\_dot^2) / 5 + q1\_acc / 5 + q2\_acc / 5 + (3 \cdot q1\_a \\
& cc \cdot \cos(q2)) / 5) / 5 + (3 \cdot mL \cdot ((3 \cdot q1\_acc) / 40 + (3 \cdot q2\_acc) / 40 + (3 \cdot q3\_acc) / 40 + \cos(q3) \cdot ((3 \cdot \sin(q2) \\
& ) \cdot q1\_dot^2) / 5 + (2 \cdot q1\_acc) / 5 + (2 \cdot q2\_acc) / 5 + (3 \cdot q1\_acc \cdot \cos(q2)) / 5) + \sin(q3) \cdot ((3 \cdot q1\_dot^2 \cdot \cos(q2)) / 5 \\
& + ((2 \cdot q1\_dot) / 5 + (2 \cdot q2\_dot) / 5) \cdot (q1\_dot + q2\_dot) - (3 \cdot q1\_acc \cdot \sin(q2)) / 5) / 40 + (14 \\
& 7 \cdot \cos(q3) \cdot (\cos(q1) \cdot \cos(q2) - \sin(q1) \cdot \sin(q2))) / 100 - (147 \cdot \sin(q3) \cdot (\cos(q1) \cdot \sin(q2) + \cos(q2) \cdot \\
& \sin(q1))) / 100 - (2 \cdot \cos(q3) \cdot (g \cdot mL - mL \cdot ((3 \cdot q1\_acc) / 40 + (3 \cdot q2\_acc) / 40 + (3 \cdot q3\_acc) / 40 + \cos(q3) \\
& ) \cdot ((3 \cdot \sin(q2) \cdot q1\_dot^2) / 5 + (2 \cdot q1\_acc) / 5 + (2 \cdot q2\_acc) / 5 + (3 \cdot q1\_acc \cdot \cos(q2)) / 5) + \sin(q3) \cdot ((3 \\
& \cdot q1\_dot^2 \cdot \cos(q2)) / 5 + ((2 \cdot q1\_dot) / 5 + (2 \cdot q2\_dot) / 5) \cdot (q1\_dot + q2\_dot) - (3 \cdot q1\_acc \cdot \sin(q2)) / 5) \\
& - (98 \cdot \cos(q3) \cdot (\cos(q1) \cdot \cos(q2) - \sin(q1) \cdot \sin(q2))) / 5 + (98 \cdot \sin(q3) \cdot (\cos(q1) \cdot \sin(q2) + \cos(q2) \\
& \cdot \sin(q1))) / 5) / 5 + 147 / 100
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 1.011 \cdot q3\_acc + 1.47 \cdot \cos(q1 + q2 + q3) + 0.18 \cdot q1\_dot^2 \cdot \sin(q3) \\
& + 0.18 \cdot q2\_dot^2 \cdot \sin(q3) + q2\_acc \cdot (0.06 \cdot \cos(q3) + 1.011) + q1\_acc \cdot (0.09 \cdot \cos(q2 + q3) + 0.06 \cdot
\end{aligned}$$

```

cos(q3) + 1.011) + 0.27*q1_dot^2*sin(q2 + q3) + 0.36*q1_dot*q2_dot*sin(q3) == q1_acc + q2_acc
+ q3_acc - (3*g*mL)/40 + (3*mL*((3*q1_acc)/40 + (3*q2_acc)/40 + (3*q3_acc)/40 + cos(q3)*((3*sin(q2)*q1_dot^2)/5 + (2*q1_acc)/5 + (2*q2_acc)/5 + (3*q1_acc*cos(q2))/5) + sin(q3)*((3*q1_dot^2*cos(q2))/5 + ((2*q1_dot)/5 + (2*q2_dot)/5)*(q1_dot + q2_dot) - (3*q1_acc*sin(q2))/5)))/40
+ (147*cos(q3)*(cos(q1)*cos(q2) - sin(q1)*sin(q2)))/100 - (147*sin(q3)*(cos(q1)*sin(q2) + cos(q2)*sin(q1)))/100 + 147/100

```

M\_diff =

```

[ 0.96*cos(q2 + 2.0*q3) + 0.72*cos(2*q2 + 2*q3) + 0.72*cos(2.0*q2) + 0.32*cos(2.0*q3) - 0.225
*cos(q2 + q3) - 1.2*cos(q2) - 0.15*cos(q3) + 0.8534, 0.48*cos(q2 + 2.0*q3) + 0.32*cos(2.0*q3)
- 0.1125*cos(q2 + q3) - 0.6*cos(q2) - 0.15*cos(q3) + 1.563, 0.9634 - 0.075*cos(q3) - 0.1125*
cos(q2 + q3)]
[ 0.48*cos(q2 + 2.0*q3) + 0.32*cos(2.0*q3) - 0.112
5*cos(q2 + q3) - 0.6*cos(q2) - 0.15*cos(q3) + 1.563,
 0.64*cos(q3)^2 - 0.15*cos(q3) + 1.243, 0.9634 - 0
.075*cos(q3)]
[
 0.9634 - 0.075*cos(q3) - 0.1125*cos(q2 + q3),
 0.9634 - 0.075*cos(q3),
 0.9634]

```

C\_diff =

```

[ (0.0025*(192.0*q1_dot^2*sin(q2) + 48.0*q1_dot^2*sin(q3) + 432.0*q2_dot^2*sin(q2) + 48.0*q2_
dot^2*sin(q3) + 54.0*q3_dot^2*sin(q3) + 384.0*q1_dot^2*sin(q2 + 2.0*q3) + 192.0*q2_dot^2*sin(
q2 + 2.0*q3) + 288.0*q1_dot^2*sin(2*q2 + 2*q3) + 288.0*q1_dot^2*sin(2.0*q2) + 128.0*q1_dot^2*
sin(2.0*q3) + 128.0*q2_dot^2*sin(2.0*q3) + 72.0*q1_dot^2*sin(q2 + q3) + 117.0*q2_dot^2*sin(q2
+ q3) + 81.0*q3_dot^2*sin(q2 + q3) + 864.0*q1_dot*q2_dot*sin(q2) + 96.0*q1_dot*q2_dot*sin(q3)
+ 108.0*q1_dot*q3_dot*sin(q3) + 108.0*q2_dot*q3_dot*sin(q3) + 384.0*q1_dot*q2_dot*sin(q2 +
2.0*q3) + 256.0*q1_dot*q2_dot*sin(2.0*q3) + 234.0*q1_dot*q2_dot*sin(q2 + q3) + 162.0*q1_dot*q
3_dot*sin(q2 + q3) + 162.0*q2_dot*q3_dot*sin(q2 + q3)))/q1_dot, (0.0025*(192.0*q1_dot^2*sin(q
2) + 48.0*q1_dot^2*sin(q3) + 432.0*q2_dot^2*sin(q2) + 48.0*q2_dot^2*sin(q3) + 54.0*q3_dot^2*s
in(q3) + 384.0*q1_dot^2*sin(q2 + 2.0*q3) + 192.0*q2_dot^2*sin(q2 + 2.0*q3) + 288.0*q1_dot^2*s
in(2*q2 + 2*q3) + 288.0*q1_dot^2*sin(2.0*q2) + 128.0*q1_dot^2*sin(2.0*q3) + 128.0*q2_dot^2*si
n(2.0*q3) + 72.0*q1_dot^2*sin(q2 + q3) + 117.0*q2_dot^2*sin(q2 + q3) + 81.0*q3_dot^2*sin(q2 +
q3) + 864.0*q1_dot*q2_dot*sin(q2) + 96.0*q1_dot*q2_dot*sin(q3) + 108.0*q1_dot*q3_dot*sin(q3)
+ 108.0*q2_dot*q3_dot*sin(q3) + 384.0*q1_dot*q2_dot*sin(q2 + 2.0*q3) + 256.0*q1_dot*q2_dot*s
in(2.0*q3) + 234.0*q1_dot*q2_dot*sin(q2 + q3) + 162.0*q1_dot*q3_dot*sin(q2 + q3) + 162.0*q2_d
ot*q3_dot*sin(q2 + q3)))/q2_dot, (0.0025*(192.0*q1_dot^2*sin(q2) + 48.0*q1_dot^2*sin(q3) + 43
2.0*q2_dot^2*sin(q2) + 48.0*q2_dot^2*sin(q3) + 54.0*q3_dot^2*sin(q3) + 384.0*q1_dot^2*sin(q2
+ 2.0*q3) + 192.0*q2_dot^2*sin(q2 + 2.0*q3) + 288.0*q1_dot^2*sin(2*q2 + 2*q3) + 288.0*q1_dot^
2*sin(2.0*q2) + 128.0*q1_dot^2*sin(2.0*q3) + 128.0*q2_dot^2*sin(2.0*q3) + 72.0*q1_dot^2*sin(q
2 + q3) + 117.0*q2_dot^2*sin(q2 + q3) + 81.0*q3_dot^2*sin(q2 + q3) + 864.0*q1_dot*q2_dot*sin(
q2) + 96.0*q1_dot*q2_dot*sin(q3) + 108.0*q1_dot*q3_dot*sin(q3) + 108.0*q2_dot*q3_dot*sin(q3)
+ 384.0*q1_dot*q2_dot*sin(q2 + 2.0*q3) + 256.0*q1_dot*q2_dot*sin(2.0*q3) + 234.0*q1_dot*q2_d
ot*sin(q2 + q3) + 162.0*q1_dot*q3_dot*sin(q2 + q3) + 162.0*q2_dot*q3_dot*sin(q2 + q3)))/q3_dot
]
[ (0.0025*(48.0*q
1_dot^2*sin(q3) - 240.0*q1_dot^2*sin(q2) + 48.0*q2_dot^2*sin(q3) + 54.0*q3_dot^2*sin(q3) + 19
2.0*q1_dot^2*sin(q2 + 2.0*q3) + 128.0*q1_dot^2*sin(2.0*q3) + 128.0*q2_dot^2*sin(2.0*q3) - 45.
0*q1_dot^2*sin(q2 + q3) + 96.0*q1_dot*q2_dot*sin(q3) + 108.0*q1_dot*q3_dot*sin(q3) + 108.0*q2

```

```

_dot*q3_dot*sin(q3) + 256.0*q1_dot*q2_dot*sin(2.0*q3)))/q1_dot,
                                         (0.0025*(48.0*q1_dot^2*sin(q3) - 240.0*q1_dot^
2*sin(q2) + 48.0*q2_dot^2*sin(q3) + 54.0*q3_dot^2*sin(q3) + 192.0*q1_dot^2*sin(q2 + 2.0*q3) +
128.0*q1_dot^2*sin(2.0*q3) + 128.0*q2_dot^2*sin(2.0*q3) - 45.0*q1_dot^2*sin(q2 + q3) + 96.0*
q1_dot*q2_dot*sin(q3) + 108.0*q1_dot*q3_dot*sin(q3) + 108.0*q2_dot*q3_dot*sin(q3) + 256.0*q1_
dot*q2_dot*sin(2.0*q3)))/q2_dot,
                                         (0.0025*(48.0*q1_dot^2*sin(q3) - 240.0*q1_dot^2*sin(q2) + 48.0*q2_dot^2*sin(q
3) + 54.0*q3_dot^2*sin(q3) + 192.0*q1_dot^2*sin(q2 + 2.0*q3) + 128.0*q1_dot^2*sin(2.0*q3) + 1
28.0*q2_dot^2*sin(2.0*q3) - 45.0*q1_dot^2*sin(q2 + q3) + 96.0*q1_dot*q2_dot*sin(q3) + 108.0*q
1_dot*q3_dot*sin(q3) + 108.0*q2_dot*q3_dot*sin(q3) + 256.0*q1_dot*q2_dot*sin(2.0*q3)))/q3_dot
]
[

                                         -(0.0125*(6.0*q1_dot^2*sin(q3) + 6.0*q2_dot^2*sin(q3) + 9
.0*q1_dot^2*sin(q2 + q3) + 12.0*q1_dot*q2_dot*sin(q3)))/q1_dot,
                                         -(0.0125*(6.0*q1_dot^2*sin(q3) + 6.0*q2_dot^2*sin(q3) + 9.0*q1_dot^2*sin(q2 + q3) + 12.0
*q1_dot*q2_dot*sin(q3)))/q2_dot,
                                         -(0.0125*(6.0*q1_dot^2*sin(q3) + 6.0*q2_dot^2*sin(q3) + 9.0*q1_dot^2*sin(q2 + q3) + 12.0*q1_
dot*q2_dot*sin(q3)))/q3_dot
]

G_diff =
11.76*cos(q1 + 2.0*q2 + 2.0*q3) - 1.838*cos(q1 + q2 + q3) - 16.63*cos(q2 + q3 + 0.7854) - 4.
158*cos(q2 + 0.7854) - 11.09*cos(q3 + 0.7854) - 13.72*cos(q1 + q2) + 7.84*cos(q1 + q2 + 2.0*q
3) - 35.28*cos(q1) - 6.86
7.84*cos(q1 + q2 + 2.0*q3) - 11.09*cos(q3 + 0.7854) - 13.72*cos(q1 + q2) - 1.838
*cos(q1 + q2 + q3) - 0.98
-1.838*cos(q1 + q2 + q3)

```

