Лабораторна робота № 1
Тема: Наближене розв`язування нелінійних рівнянь

1.Постановка задачі

Задача розв'язання рівняння часто всього зустрічається при вивченні загально-технічних і спеціальних дисциплін, в інженерній практиці. Знайти точне значення кореня рівняння можливе лише в деяких окремих часткових випадках, причому навіть в цих випадках формули знаходження коренів бувають настільки громіздкими (наприклад, формули коренів алгебраїчних рівнянь третього і четвертого степенів), що ними важко користуватися. Крім того, часто константи, що входять у рівняння, відомі наближено, а також точне значення кореня, як, наприклад, $x=\sqrt{2}$, все рівно приходиться замінити його наближеним значенням. Тому при розв'язуванні рівнянь широко використовуються методи, які дозволяють одержати наближений розв'язок з будь-якою заданою точністю.

Нехай задано рівняння $f(x)=0$, де функція $f(x)$ визначена і неперервна на деякому відрізку і має на ньому неперервні першу і другу похідні. Корені заданого рівняння являються нулями функції $y=f(x)$ і геометрично представляють собою точки перетину її графіку з віссю Ох.

Розглянемо задачу відшукання наближених значень дійсних коренів заданого рівняння з будь-якою заданою точністю. Розв`язок задачі складається з двох етапів:

1. Виділення (ізоляція) кореня, тобто відшукання відрізка [a;b], який належить області визначення функції $y=f(x)$, на якому знаходиться один і тільки один корінь рівняння $f(x)=0$.
2. Обчислення або уточнення значення кореня з наперед заданою точністю.

2.Виділення кореня рівняння

Умови виділення кореня

Виділення кореня засновується на двох очевидних фактах.

1) На кінцях відрізка [a;b] функція має різні знаки, тобто $f(a)*f(b)<0$. Очевидно, що при цьому всередині відрізка [a;b] є принаймні один корінь рівняння $f(x)=0$. Геометрично це означає, що графік функції $y=f(x)$ в точках a і b знаходиться по різних сторонах від осі ох і, відповідно, всередині відрізка [a;b] обов`язково повинен перетинати вісь ох. Однак ця умова не гарантує існування єдиного кореня. Так, наприклад, на рис.1 $f(a)<0$, $f(b)>0$ і всередині відрізка [a;b] є два різних кореня.

Замітимо, що якщо на кінцях відрізка значення функції має один і той самий знак, то це зовсім не означає, що корінь відсутній. Наприклад, відрізок [a1;b1] (див. рис.1) містить корінь x_1(точка x_1, показана на рис.1, являється кратним коренем рівняння f(x)=0. Далі такі корені розглядати не будемо), але f(a1)>0 і f(b1)>0.

Для існування єдиного кореня на [a;b] повинен мати місце ще один факт.

2) На відрізку [a;b] функція f(x) монотонна, тобто її похідна не міняє знак на [a;b].

Умови 1) і 2) являються достатніми для існування єдиного кореня рівняння f(x)=0.

Задача визначення кореня рівняння f(x)=0 являється у відшуканні відрізка [a;b] області визначення функції y=f(x), на якому виконуються три умови:

1) f(a)*f(b)<0;
2) $f'(x)$ не міняє знак для $x \in [a;b]$;
3) $f''(x)$ не міняє знак для $x \in [a;b]$.

Третя умова означає, що графік функції або тільки випуклий, або тільки вгнутий на відрізку [a;b].

На рис.1 визначені всі можливі варіанти розміщення графіка функції на відрізку [a;b] при виконанні умов 1)-3).

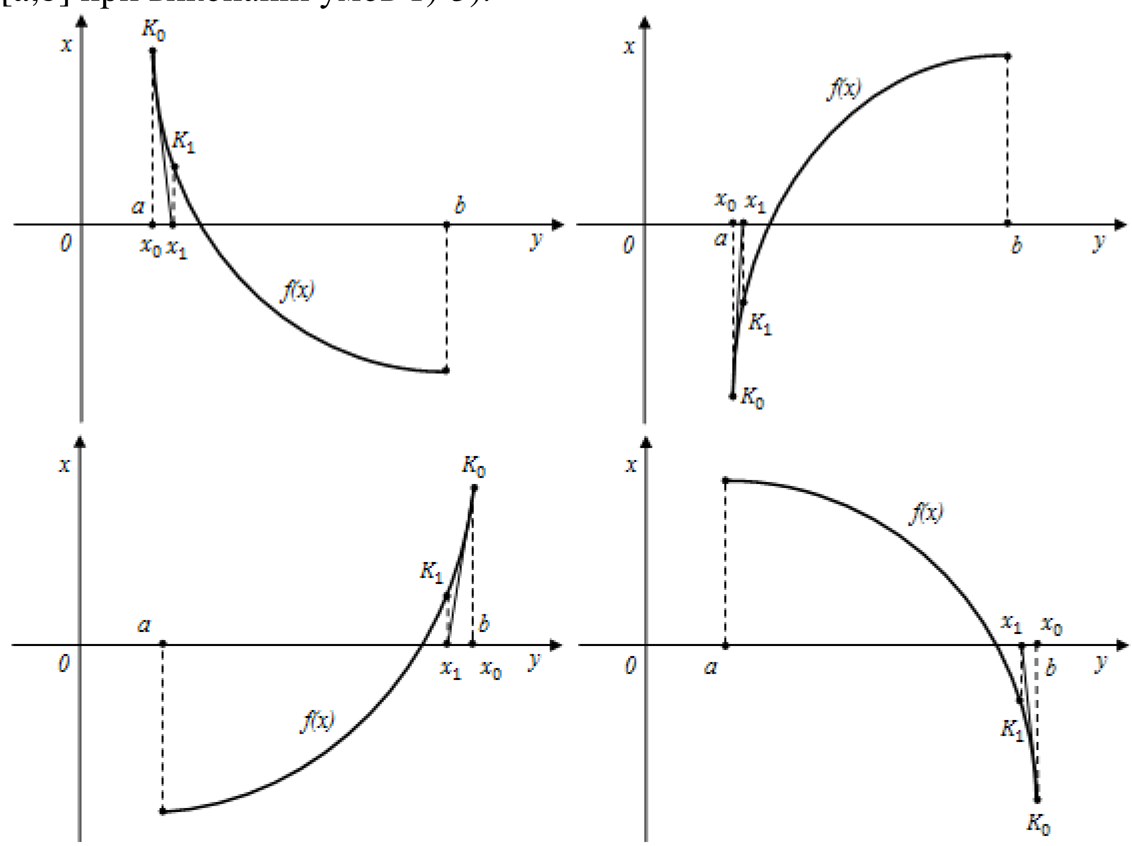


Рисунок 1

Відрізок [a;b] при виконанні умов 1)-3) для функції f(x) називають відрізком, що виділяє корінь даної функції.

Виділення кореня можна проводити як аналітично, так і графічно.

а) Графічний метод

Графічні корені рівняння f(x)=0 можна виділити, побудувавши графік функції y=f(x) і наближено визначивши точки його перетину з віссю ох. Однак задача побудови графіку не завжди проста. Звично рівняння f(x)=0 заміняють еквівалентним рівнянням $\varphi_1(x)=\varphi_2(x)$ ($f(x)=\varphi_1(x)-\varphi_2(x)$), підбирають функції $y_1=\varphi_1(x)$ і $y_2=\varphi_2(x)$ так, щоб будувати їх графіки було простіше, чим графік функції y=f(x). Абсциси точок перетину графіків $y_1=\varphi_1(x)$ і $y_2=\varphi_2(x)$ будуть шуканими коренями.

ПРИКЛАД: *Виділити графічним методом корені рівняння*

$$e^{-x}+x^2-2=0.$$

РОЗВ`ЯЗОК: Перепишемо дане рівняння у вигляді $e^{-x}=2-x^2$ *і розглянемо дві функції* $\varphi_1(x)=e^{-x}$ *і* $\varphi_2(x)=2-x^2$. *Точки перетину графіків цих функцій і є коренями заданого рівняння. Як видно із рисунка, задане рівняння має два дійсних кореня (графіки перетинаються в двох точках), причому один з коренів від`ємний, а другий – додатній. Обидва корені по абсолютній величині не перевищують* $\sqrt{2}$ $(-\sqrt{2}<x_1<0,$ $0<x_2<\sqrt{2}$ *).*

б) Метод проб

Цей метод полягає в тому, що наугад вибирають точку x=a із області визначення функції (або із більш вужчої області), знаходять знак f(a), а потім підбирають точку b так, щоб значення функції f(b) мало знак, протилежний знаку f(a). Далі визначають знак $f'(x)$ всередині відрізка [a;b]. Якщо $f'(x)$ не міняє знак на [a;b], то корінь виділений, в інакшому випадку відрізок [a;b] звужують, взяв точку c, яка лежить посередині відрізка [a;b]. Визначають знак f(c) і в якості нового відрізка розглядають або [a;c] (якщо f(a)*f(c)<0), або [c;b] (якщо f(c)*f(a)<0). Позначивши новий відрізок через $[a_1;b_1]$, повторяють ті самі дії, що на відрізку [a;b], до тих пір, поки не буде знайдено відрізок $[a_n;b_n]$, який визначає корінь .

ПРИКЛАД: Методом проб виділити додатній корінь рівняння:

$$x^4+x^3-36x-20=0.$$

РОЗВ`ЯЗОК: Функція $f(x)=x^4+x^3-36x-20$ *визначена на всій числовій прямій. Оскільки треба виділити додатній корінь рівняння, розглянемо пів інтервал* $[0;\infty]$.

*1. Знаходимо f(0)=-20<0. Потім вибираємо будь-яку точку, наприклад x=1, і обчислюємо f(1)=-54<0. Так як f(0)*f(1)>0, то нічого визначеного про відрізок [0;1] сказати не можна. Треба підібрати так точку x=b, щоб було*

$f(b)>0$, а для цього $x^4 + x^3$ повинно бути більше, чим $36x+20$. Візьмемо, наприклад, $x=4$, тоді $f(4)=156>0$, а відповідно, на відрізку [1;4] є корінь ($f(1)*f(4)<0$).

2. *Оскільки $f'(x)=4x^3+3x^2-36=4(x^3-9)+3x^2$, то безпосередньою перевіркою переконуємося , що на відрізку [1;4] похідна міняє знак ($f'(1)=-29<0$; $f'(4)=268>0$).*

Звужаємо відрізок [1;4]. Візьмемо, наприклад, точку $x=3$. Тоді $f(3)=-20<0$ і $f(3)*f(4)<0$. Відповідно на відрізку [3;4] є корінь. Перевіряємо знак похідної. Маємо $f'(3)=99>0$, а для $x>3$, очевидно, похідна зростає, тому залишається додатною. Таким чином, корінь виділений. На відрізку [3;4] знаходиться додатній дійсний корінь заданого рівняння. Відмітимо, що $f''(x)=12x^2+6x>0$ для xЄ[3;4]. Графік $y=f(x)$ для xЄ[3;4] має приблизно такий же вигляд, як на рис.1.

в) Метод виділення проміжків монотонності

Цей метод полягає в тому, що спочатку визначаємо інтервали монотонності функції f(x) (якщо це не складно), тобто інтервали області визначення функції, в яких похідна зберігає знак. Потім обчислюємо знаки функції на кінцях цих інтервалів і визначаємо інтервал (a;b), на якому похідна зберігає знак і f(a)*f(b)<0. Задача виділення кореня виконана. Таким способом можна виділити всі дійсні корені рівняння f(x)=0.

Якщо ж серед інтервалів монотонності функції не існує інтервала, на кінцях якого функція має різні знаки, то це означає, що або рівняння f(x)=0 не має дійсних коренів, або такими являються границі інтервалів монотонності, тобто для цих точок функція і похідна цієї функції рівні нулю(див. рис.1, точка x_1). Це так називаємі кратні корені.

ПРИКЛАД: Виділити дійсні корені рівняння

$$x-\sin x-1=0.$$

РОЗВ`ЯЗОК: Розглянемо функцію $f(x)= x-\sin x-1$, яка визначена на всій числовій прямій.

1. *Знаходимо першу похідну і інтервали монотонності функції. Одержимо $f'(x)=1-\cos x$, звідси $1-\cos x=0$,*

$$\cos x=1,\ \ x=2\pi n (n=Z),$$

так, що інтервалами монотонності функції являються всі інтервали виду $(2\pi n; 2\pi(n+1))$.

2. *Визначаємо знаки функції в граничних точках інтервалів монотонності. Взявши відрізок $[0;2\pi]$, знаходимо $f(0)=-1<0$, $f(2\pi)=2\pi-1>0$ і переконуємося, що на цьому відрізку є один корінь рівняння. По вигляду функції заключаєм, що для $x>2\pi$ буде $f(x)>0$ (так як $\sin x<=1$ і $x>\sin x+1$), а для $x<0$ буде $f(x)<0$ (так як $\sin x>=1$ і $\sin x>x-1$). Відповідно, в інших інтервалах монотонності функція знаку не міняє. Рівняння має єдиний корінь, що знаходиться на відрізку $[0; 2\pi]$.*

Враховуючи ще умову 3), знаходимо $f''(x)=\sin x$, яка на відрізку $[0;2\pi]$ міняє знак. Відрізком, що виділяє корінь, буде $[0;\pi]$, оскільки

1) *$f(0)=-1$, $f(\pi)=\pi-1$, $f(0)*f(\pi)<0$;*
2) *перша похідна не міняє знаку на $[0;\pi]$;*
3) *друга похідна не міняє знаку на $[0;\pi]$;*

3.Оцінка наближеного значення кореня

Нехай на відрізку [a;b] виділений корінь рівняння $f(x)=0$, тоді в якості наближеного значення кореня x_0 може бути прийнята будь-яка точка x, що лежить всередині [a;b]. Ясно, що чим менший відрізок, тим точніше x буде представляти корінь x_0. Для того, щоб вважати x цілком сприйнятливим, оцінимо різницю $|x_0 - x|$, тобто різницю між точним і наближеним значеннями кореня. Очевидно, що $|x_0 - x|<$ b-a, так як x_0 і x знаходяться всередині [a;b]. Число b-a являється оцінкою наближеного значення x: $\Delta(x)=b-a$. Найчастіше в якості x вибираємо точку, що лежить посередині відрізка [a;b], тобто $x=\frac{a+b}{2}$, тоді помилка при заміні x_0 на x буде не більше чим $\frac{b-a}{2}$, тобто $\Delta(x)=\frac{b-a}{2}$, причому, по знаках f(a), $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, f(b) з`ясовуємо, в якому із відрізків $\left[a;\frac{a+b}{2}\right]$ чи $\left[\frac{a+b}{2};b\right]$ знаходиться шуканий корінь. Однак стверджувати, що значення $x=\frac{a+b}{2}$ точніше представляє корінь, чим, наприклад, значення x=a, не має ніяких підстав. Вказані оцінки являються достатньо грубими і не залежать від розглядуваної функції, а лише від довжини відрізка [a;b].

Для уточнення оцінки наближеного значення x кореня x_0 використаємо формулу скінчених приростів Лагранжа:

$$f(x_0)-f(x)=f'(\xi)(x_0-x),$$

де ξ-деяка точка між x_0 і x. Так як x_0- корінь рівняння, то $f(x_0)=0$ і тоді $|x_0 - x| = \left|\frac{f(x)}{f'(\xi)}\right|$.

Згідно припущенню, $f'(x)\neq 0$ і неперервна на [a;b], а тоді існує таке m>0, що $|f'(x)| \geq m$ для xЄ[a;b], тобто $|f'(\xi)| \geq m$ і $|x_0 - x| \leq \frac{|f(x)|}{m}$, відповідно, $\Delta(x) = \frac{|f(x)|}{m}$.

Замітимо, що якщо b-a менше, чим величина $\Delta(x)$, то оцінкою буде менше число, тобто $\Delta(x)$=min$\left\{b-a;\left|\frac{f(x)}{m}\right|\right\}$.

ПРИКЛАД: Оцініть наближене значення кореня, виділеного в прикладі методі проб.

РОЗВ`ЯЗОК: В прикладі було виділено, що шуканий корінь знаходиться на відрізку [3;4], відповідно, b-a=1.

Приймемо за наближене значення кореня число x=b=4. Тоді f(x)= f(4)=156. Як вказано в прикладі, f΄(x)≥f΄(3)=99, ∆(4)= $\frac{156}{99}\approx 1{,}58$. *Але, b-a=1<1,58, а відповідно, ∆(4)=min* $\{1;1{,}58\}=1$, *і* $3\le x_0\le 4$. *Якщо в якості x взяти, наприклад,* $\frac{a+b}{2}$ *=3,5, то f(3,5)≈47>0. Корінь* x_0 *виділений на відрізку[3;3,5]. Оцінка наближення x=3,5 буде* $\Delta(3{,}5)=\min\left\{0{,}5;\frac{47}{99}\right\}=0{,}47$. *Накінець, при x=3,2 одержимо: f(3,2)≈2,42>0; [3;3,2]- відрізок, що відділяє корінь, і* $\Delta(3{,}2)=\min\left\{0{,}2;\frac{2{,}42}{99}\right\}=0{,}03$. *Відповідно, можна вважати, що* x_0*=3,2.*

Якщо оцінка одержаного наближеного значення кореня задовольняє потрібні точності, то задачу можна вважати розв`язаною, в інакшому випадку треба перейти до обчислення або уточнення кореня з заданою точністю.

4. Суть методу послідовних наближень

Нехай виконана задача виділення кореня, тобто одержано відрізок [a;b] такий, що $a<x_0<b$. Ясно, що чим менший відрізок [a;b], тим точніше вибране значення x (a<x<b) буде представляти корінь x_0 рівняння f(x)=0. Даль ніша задача полягає в послідовному звуженню відрізка [a;b] до тих пір, поки не одержимо значення кореня з заданою точністю. Ідея методу полягає в тому, що спочатку вибираємо деяку точку c_1 із [a;b] (перше наближення до x_0), шуканий корінь при цьому попадає або в $[a;c_1]$, або в $[c_1;b]$. Позначимо новий відрізок, виділяючий корінь, через $[a_1;b_1]$ (очевидно, що $[a_1;b_1]$ міститься в [a;b]), вибираємо в ньому точку c_2 (друге наближення до x_0) і знову звужуємо відрізок $[a_1;b_1]$, замінивши його на $[a_1;c_2]$ або на $[c_2;b_1]$ і так далі ., до тих пір, поки не одержимо відрізок $[a_n;b_n]$, в якому для вибраної точки c_n (n-го наближення) маємо $|x_0-c_n|<$E, де E- задана точність наближення. Таким чином будуємо послідовність значень $c_1, c_2, c_3, ..., c_n, ...,$ які повинні поступово наближатись до шуканого кореня. Тому цей метод називають *методом послідовних наближень* або *ітераційним процесом.* Потім треба показати, що $\lim\limits_{n\to\infty} c_n \to x_0$, а якщо це так, то ітераційний процес називають *збіжним.* В цьому випадку x_0 можна визначити з будь-якою заданою точністю.

Існують різні методи послідовних наближень при відшуканні дійсних коренів рівняння.

Найбільш простим із цих методів являється метод проб. Однак в цьому методі не враховуються особливості функції і тому можливі надто великі обчислення.

5. Метод хорд

Ідея методу полягає в тому, що на відрізку [a,b] будується хорда AB, що стягує кінці дуги графіка функції y=f(x), і в якості наближеного значення кореня x_0 вибирається число $c=c_1$, що являється абсцисою точки перетину цієї хорди з віссю ox (рис.1). Для визначення числа c_1 складемо рівняння хорди як прямої, що проходить через дві точки A(a;f(a)) і B(b;f(b)):

$$\frac{x-a}{b-a} = \frac{y-f(a)}{f(b)-f(a).}$$

Взявши y=0, $x=c_1$, одержимо

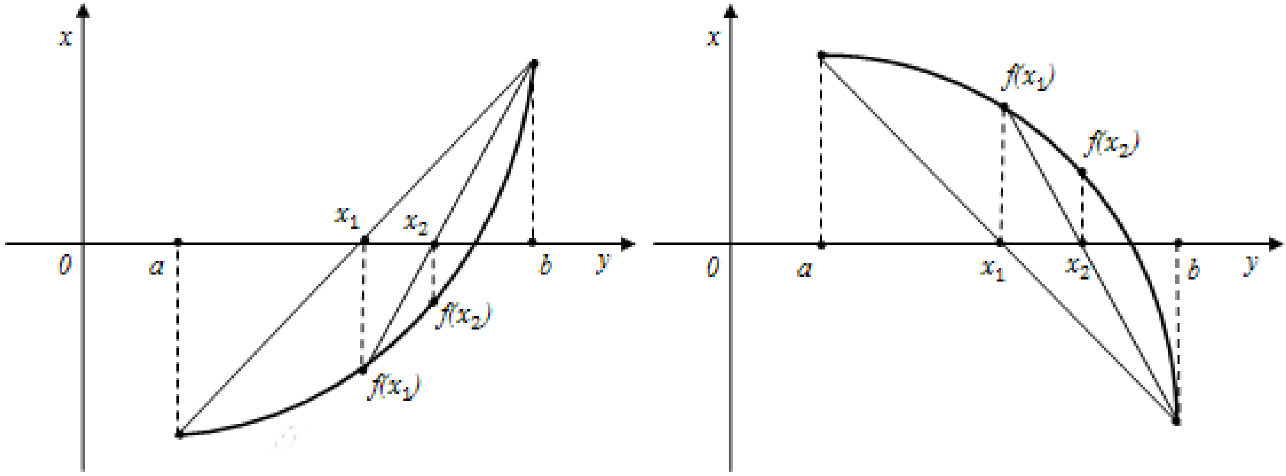
$c_1 = a - \dfrac{f(a)(b-a)}{f(b)-f(a)}$ або $c_1 = b - \dfrac{f(b)(b-a)}{f(b)-f(a)}$

Число c_1 приймаємо за перше наближення до шуканого кореня .

Очевидно, що при зроблених наближеннях про знаки першої і другої похідних на [a,b] точка $(c_1;0)$ буде знаходитися зі сторони вгнутості кривої і розділить [a,b] на два відрізки $[a;c_1]$ і $[c_1;b]$, в одному з яких знаходиться корінь x_0(рис.1). Новий відрізок, на якому знаходиться корінь, можна визначити, порівнюючи знаки f(a), $f(c_1)$ і f(b). Із аналізу рис.1 видно, що точка c_1 ближче до точки a, ніж x_0, якщо $y' * y''>0$ (див. рис.1а), і відрізком, на якому знаходиться корінь, буде $[c_1;b]$, в іншому випадку, якщо $y' * y''<0$ (див. рис.2б), відрізком, на якому знаходиться корінь, буде $[a;c_1]$.

Далі повторимо ту ж процедуру на новому відрізку, на якому знаходиться корінь, і визначаєм число c_2 (друге наближення) по формулах:

$$c_2 = c_1 - \frac{f(c_1)(b - c_1)}{f(b) - f(c_1)} \quad (y' * y'' > 0),$$



$$c_2 = c_1 - \frac{f(c_1)(c_1 - a)}{f(c_1) - f(a)}$$

$$(y' * y'' < 0).$$

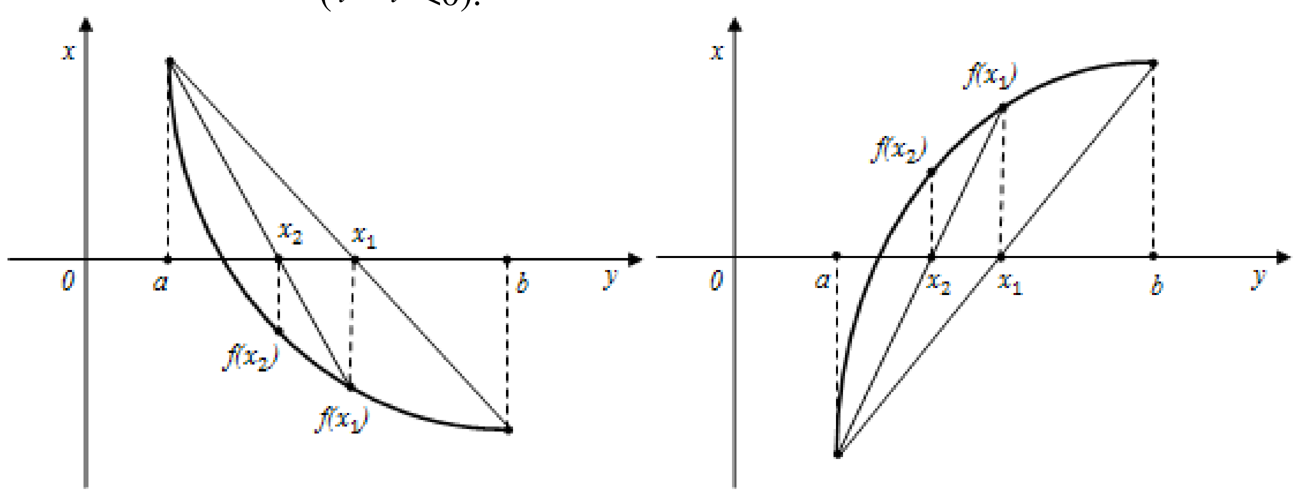


Рисунок 2

Потім по c_2 знаходимо c_3 і так далі (див. рис.2)

Процес призупиняється тоді, коли оцінка одержаного наближення задовольняє заданій точності.

Для спрощення обчислень часто задають деяке достатньо мале число Е>0 (не більше заданої точності). Процес зупиняється тоді, коли абсолютна величина різниці між двома наступними наближеннями c_{n-1} і c_n менше Е. Число c_n приймають за наближене значення кореня, тобто x= c_n .

ПРИКЛАД: Використовуючи метод хорд, уточнити корінь рівняння $x^4 + x^3 - 36x - 20 = 0$*, який виділений на відрізку [3;4] (див. приклад методу проб). Обмежитись трьома наближеннями.*

РОЗВ`ЯЗАННЯ: Згідно умови, маємо f(x)= $x^4+x^3-36x-20$*,* $f'(x)=4x^3+3x^2-36$*,* $f''(x)=12x^2+6x$ *і xЄ[3;4].*

Уточнення кореня буде проходити по алгоритму:

1. Для xЄ[3;4] маємо $f'(x)>0$*,* $f''(x)>0$*, так що* $y' * y''>0$*, відповідно, вводимо позначення* $c_0=a=3$*, A=b=4. Знаходимо f(A)= f(4)=156.*

2. Обчислюємо перше наближення $c_1=c_0-\frac{f(c_0)(A-c_0)}{f(A)-f(c_0)}$.

Для цього послідовно визначаємо $A-c_0=1$*,* $f(c_0)=f(3)=-20$*,* $f(A)-f(c_0)=176$*,* $\frac{f(c_0)(A-c_0)}{f(A)-f(c_0)}\approx -0{,}1136$*. Тоді* $c_1=3-(-0{,}1136)=3{,}1136$*.*

Обчислюємо c_2 *- друге наближення.* $c_2=c_1-\frac{f(c_1)(A-c_1)}{f(A)-f(c_1)}$, $c_2=3{,}1564$

Третє наближення $c_3=3{,}1719$*.*

Отже, шуканий корінь знаходиться на відрізку [3,1719;4].

Обґрунтування методу хорд. Впевнимося, що послідовне застосування методу дозволяє визначити x_0 з будь-якою заданою точністю. Відмітимо, що послідовність $c_1 c_2,\ldots,c_n,\ldots$ монотонно змінюється і обмежена. Дійсно, при $y' * y''>0$ маємо $c_1<c_2<\ldots<c_n<\ldots<x_0$ (див. рис.1а)), а при $y' * y''<0$ маємо $c_1>c_2>\ldots>c_n>\ldots>x_0$ (див. рис.1б)). Тут істотно, що друга похідна не міняє знаку на відрізку. Згідно теореми із теореми границь, така послідовність має границю α.

Перейшовши до границі в формулі $c_n=c_{n-1}-\frac{f(c_{n-1})(A-c_{n-1})}{f(A)-f(c_{n-1})}$ і використавши неперервність f(x), одержимо:

$$\alpha=\alpha-\frac{f(\alpha)(A-\alpha)}{f(A)-f(\alpha)},\quad \frac{f(\alpha)(A-\alpha)}{f(A)-f(\alpha)}=0.$$

Звідси f(α)=0, так як A$\neq\alpha$, f(A)$\neq f(\alpha)$. Отже, α є коренем рівняння f(x)=0, але на відрізку [a;b] існує один корінь рівняння, отже, $\alpha=x_0$. Так що послідовні наближення збігаються до кореня x_0.

Оцінка одержаних наближень: $|x-c_n|\le\frac{|f(c_n)|}{m}$, де m- найменше значення модуля похідної на відрізку.

Покажемо, що при зроблених припущеннях про похідну на відрізку m=$|f'(c_n)|$.

Нехай $y' * y''$>0, тоді відрізки, в яких знаходиться корінь, мають вигляд [c_n;b]. Якщо y'>0 і y''>0, то перша похідна зростає і додатня, відповідно, найменше її значення в лівому кінці відрізка, тобто m=$\left|f'(c_n)\right|$=$f'(c_n)$; при y'<0, y''<0 перша похідна спадає (а по абсолютній величині зростає) і найменше значення її модуля знову досягається в лівому кінці відрізка, тобто m=$\left|f'(c_n)\right|$=-$f'(c_n)$.

Аналогічно розглядаємо при $y' * y''$<0, беручи відрізки [a;c_n]. Відповідно, $\left|x_0 - c_n\right| \le \frac{\left|f(c_n)\right|}{\left|f'(c_n)\right|}$ і $\Delta(c_n) = \frac{\left|f(c_n)\right|}{\left|f'(c_n)\right|}$ (*)

Вернемось до розв`язування прикладу і використаємо формули(*).

$\Delta(c_n) =$ *0,009; c_3=3,1719 відрізняється від x_0 не більше чим на 0,009. Оскільки c_n в даному прикладі наближається до кореня зліва (див. рис. 1а)), то 3,172<x_0<3,181.*

Примітка: Для спрощення розрахунків в формулі * $\left|f'(c_n)\right|$ можна замінити на $\left|f'(a)\right|$, якщо $y' * y''$>0, і на $\left|f'(b)\right|$, якщо $y' * y''$<0, тобто $\Delta(c_n) = \left|\frac{f(c_n)}{f'(a)}\right|$, якщо $y' * y''$>0, і $\Delta(c_n) = \left|\frac{f(c_n)}{f'(b)}\right|$, якщо $y' * y''$<0. При такій заміні оцінка буде грубшою, але обчислення простіші.

6. Метод дотичних

Ідея методу полягає в тому, що в одному із кінців дуги АВ графіка функції y=f(x) проводиться дотична до цієї дуги і в якості наближеного значення кореня x_0 вибирається число d_1 (перше наближення) - абсциса точки перетину цієї дотичної з віссю ох (рис. 3). Як відомо рівняння дотичної до кривої y=f(x) в точці (x_1;f(x_1)) має вигляд y-f(x_1)=$f'(x_1)$(x-x_1). Відповідно, y-f(a)=f'(a)(x-a) – рівняння дотичної в точці A(a;f(a)), а y-f(b)=f'(b)(x-b) – в точці B(b;f(b). Поклавши y=0, а x=d_1, визначаємо абсцису точки перетину дотичної з віссю ох: $d_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$ або $d_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$.

Очевидно, що точка (d_1;0) буде знаходиться зі сторони випуклості кривої. Точка d_1 розділить [a;b] на два відрізки [a;d_1] і [d_1;b], в одному із яких розміщена точка x_0. Якщо $y'y''$>0, це буде відрізок [a;d_1] (дотична проводиться в точці В, див. рис.3а), а при $y'y''$<0 - відрізок [d_1;b] (дотична проводиться в точці А, див. рис.3б). Визначивши новий проміжок на якому знаходиться корінь, процедуру повторяємо.

При цьому дотичну проводимо в точці (d_1;f(d_1)) (див. рис.3) і визначаємо друге наближення - точку d_2 по формулі: $d_2 = d_1 - \frac{f(d_1)}{f'(d_1)}$.

Потім по d_2 знаходимо третє наближення d_3 і т.д. Процес призупиняється тоді, коли абсолютна величина різниці двох наступних наближень d_{n-1} і d_n менше заданого E>0, тобто $|d_n - d_{n-1}| < E$, і покладемо, що x=d_n (число E не перевищує заданої точності наближення і служить сигналом для зупинення обчислень).

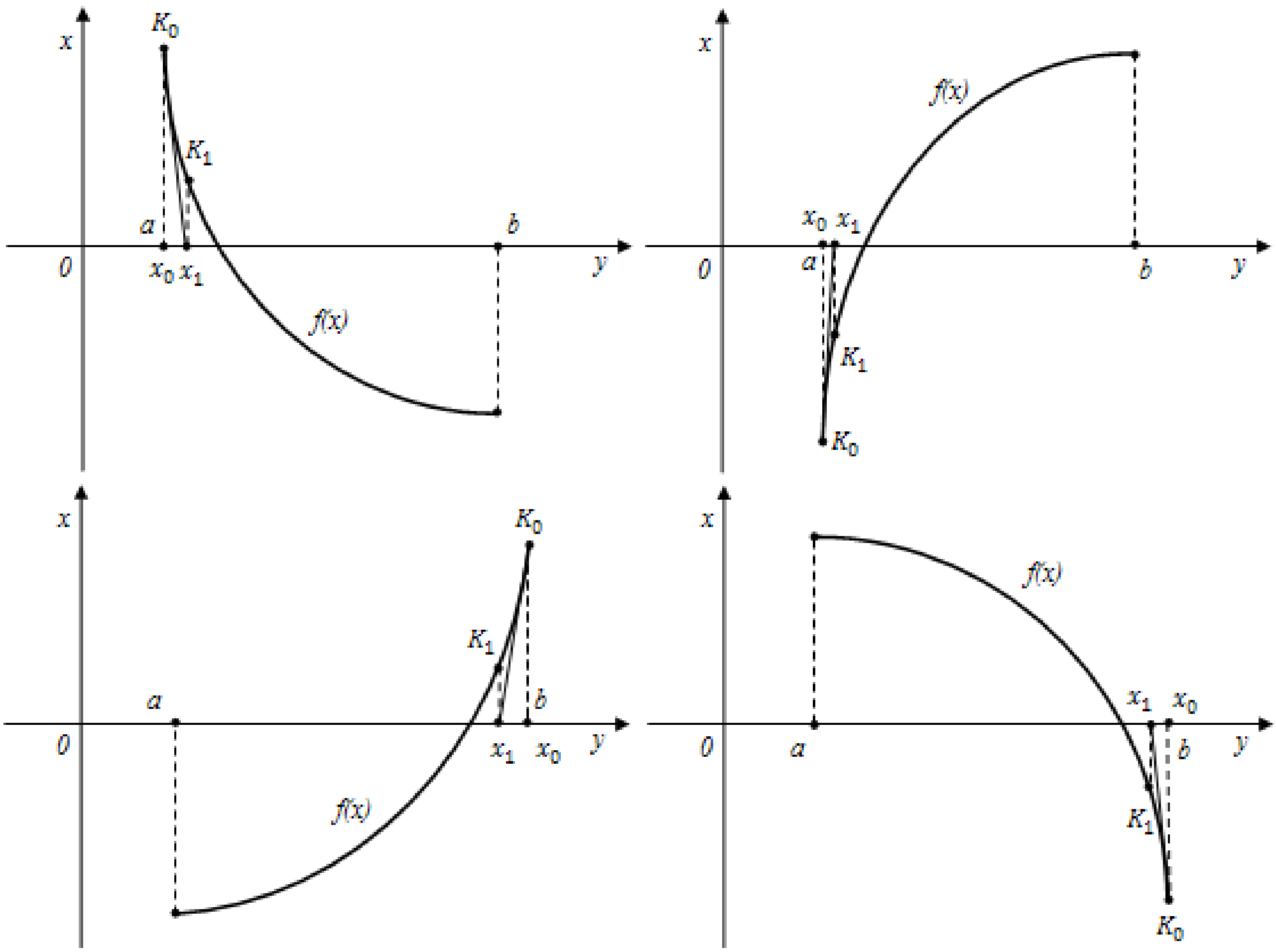


Рисунок 3

ПРИКЛАД: Користуючись методом дотичних, уточнити корінь рівняння $x^4 + x^3 - 36x - 20 = 0$, *який виділений на відрізку [3;4]. Обмежитись трьома наближеннями(див. приклад з методу хорд).*

Розв`язок: Згідно умови, маємо $f(x)= x^4 + x^3 -36x-20$, $f'(x)=4x^3+3x^2-36$, $f''(x)=12x^2+6x$ *і* x_0 *Є[3;4]. Уточнення кореня будем проводити по алгоритму.*

1.Для xЄ[3;4] буде $y' y'' >0$, *так що покладаєм* d_0*=b=4.*

2а). Маємо нульове наближення d_0. Визначаємо перше наближення d_1 по формулі $d_n = d_{n-1} - \frac{f(d_{n-1})}{f'(d_{n-1})}$ (*) *при n=1:* $d_1 = d_0 - \frac{f(d_0)}{f'(d_0)}$.

Послідовно находимо, що $f(d_0)=f(4)=156$, $f'(d_0) = f'(4)=268$, $\frac{f(d_0)}{f'(d_0)} \approx 0{,}5821$, і $d_1 \approx 4-0{,}5821=3{,}4179$.

2б). Обчислюємо d_2 - друге наближення. Кладучи в формулі(*) n=2, знаходимо $d_2 = d_1 - \frac{f(d_1)}{f'(d_1)}$. *Виконуючи відповідні обчислення, одержимо $d_2 =3{,}2078$.*

2в). Аналогічно по формулі(*) при n=3 знаходимо третє наближення $d_3 = d_2 - \frac{f(d_2)}{f'(d_2)} \approx 3{,}1809$.

Обґрунтування методу дотичних. Покажемо, що послідовність $d_1, d_2, ..., d_n, ...$ збігається і має своєю границею значення кореня x_0. Відмітимо, що при $y'y''>0$ маємо $d_1 > ... > d_n > ... > x_0$ (див. рис. 1а), а при $y'y''<0$ маємо $d_1 < d_2 < ... < d_n < ... < x_0$ (див. рис 1б). При цьому послідовність d_n прямує до α при n прямує до нескінченості (послідовність d_n монотонно міняється і обмежена). Переходячи до границі в формулі (*) і використовуючи неперервність f(x) і f'(x), як в методі хорд, знаходимо $\alpha = x_0$. Одержані наближення оцінюються по формулі $\Delta(x) = \frac{|f(x)|}{m}$, причому $m = |f'(a)|$ і $\Delta(d_n) = \left|\frac{f(d_n)}{f'(a)}\right|$ при $y'y''>0$, $m = |f'(b)|$ і $\Delta(d_n) = \left|\frac{f(d_n)}{f'(b)}\right|$ при $y'y''<0$.

В розглянутому прикладі $y'y''>0$, тому оцінка кожного наближення обчислюється по формулі $\Delta(d_n) = \left|\frac{f(d_n)}{f'(a)}\right|$, де $f'(a) = 99$. Маємо $\Delta(d_1) = 0{,}337$, $\Delta(d_2) = 0{,}034$, $\Delta(d_3) = 0{,}0005$. Видимо, що для d_3=3,1809 оцінка $\Delta(d_3) = 0{,}0005$ і наближення d_3 обчислене з трьома точними десятковими значеннями.

Оскільки числа d_n визначають в цьому випадку корінь x_0 з недостачею, то $3{,}1804< x_0<3{,}1809$.

7. Комбінований метод

Ідея методу полягає в об`єднанні метода хорд і метода дотичних. Із рисунка 1 і попередніх описань цих методів видно, що наближення c_n, обчислюване по методу хорд, прямує до кореня x_0 зі сторони вгнутості кривої, а наближення d_n, обчислюване по методу дотичних,- зі сторони опуклості кривої. При цьому для будь-якого наближення маємо: $c_n < x_0 < d_n$ при $y' y'' > 0$, $d_n < x_0 < c_n$ при $y' y'' < 0$. Відповідно, комбінуючи ці два методи і визначаючи c_n і d_n, послідовно на кожному кроці звужуємо з двох сторін відрізок, всередині якого знаходиться корінь x_0. Процес призупиняється тоді, коли $|d_n - c_n| < E$, де E- задана точність обчислення.

За наближене значення кореня частіше беремо точку, що належить середині відрізка, тобто $x=\frac{c_n + d_n}{2}$, так що $|x_0 - x| \le |d_n - c_n|$ <E.

8. Метод половинного поділу

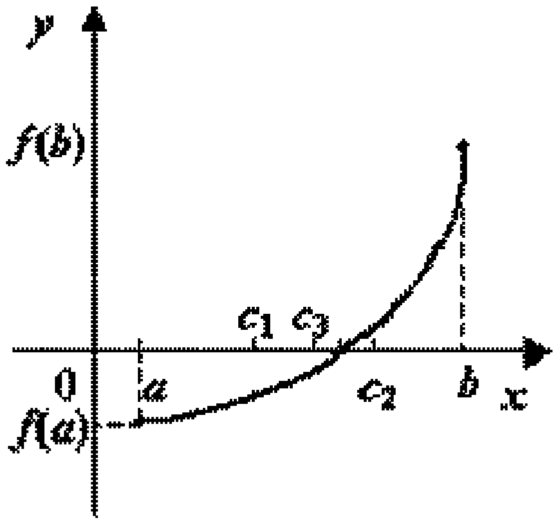
Метод половинного поділу також можна віднести до методу послідовних наближень. По своїй ідеї метод простий і фактично аналогічний методу проб, але його реалізація пов`язана з довгими обчисленнями (великим числом ітерацій) і тому при ручних обчисленнях метод половинного поділу не застосовується. При використанні програмування цей метод набагато простіший, так як не потребує обмежуючих умов для першої і другої похідних.

Алгоритм методу половинного поділу. Нехай відомо, що на відрізку [a;b] знаходиться один єдиний корінь рівняння f(x)=0, відповідно, f(a)*f(b)<0. Треба визначити цей корінь з заданою точністю E.

Суть методу полягає в тому, що відрізок [a;b] ділимо пополам точкою $c_1 = \frac{a+b}{2}$ (перше наближення) і розглядаємо той із відрізків $[a;c_1]$ або $[c_1;b]$, який містить шуканий корінь. Позначимо цей відрізок через $[a_1;b_1]$, причому $|b_1 - a_1| = \frac{1}{2}|b-a|$, визначаємо точку $c_2 = \frac{a_1 + b_1}{2}$ (друге наближення) і розглядаємо відрізок $[a_1;c_2]$ або $[c_2;b_1]$, що містить шуканий корінь, тобто $[a_2;b_2]$, де $|b_2 - a_2| = \frac{1}{2^2}|b-a|$, і так далі, до тих пір, поки не одержимо відрізок $[a_n;b_n]$, що містить шуканий корінь x_0, для якого $|b_n - a_n| = \frac{1}{2^n}|b-a|$<E (*).

Точку $c_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} = x$ приймаємо за наближене значення кореня x_0. Із (*) видно, що $|x_0 - x|$<0.

Із (*) можна наперед визначити число n послідовних наближень, необхідних для визначення кореня при заданім E: n> $\dfrac{\lg\dfrac{|b-a|}{E}}{\lg 2}$, або n= $\left[\dfrac{\lg\dfrac{b-a}{E}}{\lg 2}+1\right]$.



9.Метод простої ітерації

Розглянемо рівняння x= $\varphi(x)$ (0)

Нехай [a;b] – відрізок, що виділяє корінь x_0 цього рівняння, тобто $x_0=\varphi(x_0)$. Вибираємо довільну точку c_0Є [a;b] і першим наближенням називаємо число c_1, де $c_1=\varphi(c_0)$, по першому наближенню будуємо друге $c_2=\varphi(c_1)$ і так далі $c_n=\varphi(c_{n-1})$ (1)

Таким чином будується послідовність наближень $c_0,\dots,c_n,\dots$. Якщо ця послідовність збігається, причому c_n прямує до x_0 при n прямуючому до нескінченості, то за скінчене число ітерацій буде одержано наближення c_n, яке представляє наближене значення кореня з заданою точністю E, тобто $|x_0-c_n|$<E. Однак ітераційний процес, що визначається формулою (1), не завжди збігається.

Вияснимо спочатку геометричний зміст процесу і його збіжності.

Корінь рівняння (0) – це абсциса x_0 точки перетину прямої y=x і графіка функції y= $\varphi(x)$; c_0- довільна точка на осі ox; c_1- абсциса точки перетину прямих y= $\varphi(c_0)$ і y=x .

По c_1 визначаємо c_2 як абсцису точки перетину прямих $y=\varphi(c_1)$ і y=x і так далі.

Встановимо умови збіжності. Оскільки x_0- точне значення кореня рівняння (0), то $x_0=\varphi(x_0)$ і, обчислюючи це співвідношення із (1), одержимо

$c_n - x_0 = \varphi(c_{n-1}) - \varphi(x_0)$.

Застосуємо до правої частини рівності формулу скінчених приростів Лагранжа $\varphi(c_{n-1}) - \varphi(x_0) = \varphi'(\xi)(c_{n-1} - x_0)$, де $c_{n-1} < \xi < x_0$ ($x_0 < \xi < c_{n-1}$), тоді $c_n - x_0 = \varphi'(\xi)(c_{n-1} - x_0)$, або $|c_n - x_0| = |\varphi'(\xi)||c_{n-1} - x_0|$.

Нехай M – найбільше значення $|\varphi'(x)|$ на [a;b], тоді

$|c_n - x_0| \le M|c_{n-1} - x_0|$, (2)

і якщо $|\varphi'(x)| \le M$ <1, (3)

то $|c_n - x_0| < |c_{n-1} - x_0|$, тобто c_n ближче до x_0 чим c_{n-1}. Покажемо, що при виконанні умови (3) послідовність $c_0, c_1, c_2, \ldots$ збігається до x_0. Для цього будемо послідовно використовувати нерівність (2):

$|c_n - x_0| \le M|c_{n-1} - x_0| \le M^2|c_{n-2} - x_0| \le \ldots \le M^n|c_0 - x_0|$.

Переходячи в останній нерівності до границі при $n \to \infty$ і враховуючи, що $M^n \to 0$, одержимо границя (c_n- x_0) дорівнює нулю при n прямуючому до нескінченості, тобто границя c_n дорівнює x_0 при n прямуючому до нескінченості.

Знайдемо оцінку n-го наближення. Застосовуючи формулу (2), одержимо: $|c_n - x_0| \le M|c_{n-1} - x_0| = M|(c_n - x_0) + (c_{n-1} - c_n)| \le M|c_n - x_0| + M|c_{n-1} - c_n|$.

Звідси $|c_n - x_0| \le \frac{M}{1-M}|c_n - c_{n-1}|$ (M<1) (4)

Якщо M $\le \frac{1}{2}$, то $|c_n - x_0| \le |c_n - c_{n-1}|$ і оцінка наближення c_n зводиться до оцінки модуля різниці двох послідовних наближень.

Застосуємо тепер метод ітерацій до розв`язання рівняння f(x)=0. Для цього запишемо його у вигляді x=x+$\lambda f(x)$, (5)

де λ- довільний параметр. Рівняння (5), очевидно, еквівалентне рівнянню f(x)=0. Прирівнявши рівняння (5) і (0), бачимо, що $\varphi(x)$=x+$\lambda f(x)$. Вибираємо тепер λ так, щоб була виконана умова збіжності (3):

$|\varphi'(x)|$<1 або $|1 + \lambda f'(x)|$<1.

Розв'язуючи цю нерівність, одержимо, що при $f'(x)$>0 повинно бути 0>λ>-$\frac{2}{f'(x)}$, а при $f'(x)$<0 повинно бути -$\frac{2}{f'(x)}$>λ>0. Якщо функція f(x) має на [a;b] обмежену похідну, тобто $|f'(x)| \le M$, то при $f'(x)$>0 0>λ>$-\frac{2}{M}$, а при $f'(x)$<0 $\frac{2}{M} > \lambda > 0$.

Вибравши λ, що задовольняє цим нерівностям, забезпечуємо умову (3) збіжності процесу ітерацій для рівняння (5), а відповідно, і для вихідного рівняння f(x)=0.

ПРИКЛАД: Рівняння 2ln x- $\frac{1}{x}$ *=0 перетворити до вигляду, що допускає застосування методу ітерацій. Корінь виділений на відрізку[1;2].*

Розв`язок: Представимо рівняння у вигляді x=x+ $\lambda\left(2\ln x-\frac{1}{x}\right)$.

Тоді $\varphi(x)$ *= x+* $\lambda\left(2\ln x-\frac{1}{x}\right)$. *Виберемо* λ *так, щоб* $\left|\varphi^{'}(x)\right|$*<1 для xЄ[1;2]. Маємо* $\varphi^{'}(x)=1+\lambda\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$. *Звідси* $\left|1+\lambda\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\right|$*<1. Розв`язуючи цю нерівність, одержимо -1<1+* $\lambda\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$*<1, -2<* $\lambda\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$*<0.*

Так як на [1;2] 3 $\geq\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}$ *>0, то -2<3*λ*<0, -* $\frac{2}{3}<\lambda<0$*. Будь-яке значення параметра* λ*, що задовольняє одержану нерівність, можливе для застосування методу ітерацій.*

Завдання:

1. **Виділити відрізок на якому існує єдиний корінь.**
2. **Обчислити значення кореня рівняння з точністю ε=0,001 за допомогою наступних методів (тобто програмно реалізувати) згідно отриманих варіантів:**

- Метод хорд;
- Метод дотичних;
- Комбінований метод;
- Метод половинного поділу
- Метод простої ітерації

№ варіанту	Рівняння
1	**2**
1	$x - \sin x = 0.25$
2	$3x - \cos x - 1 = 0$
3	$x + \ln x = 0.25$
4	$x^2 + 4\sin x = 0$
5	$3x + \cos x + 1 = 0$
6	$3x - e^x = 0$
7	$x^2 = \sin x$
8	$x^3 - 3x^2 - 24x - 3 = 0$
9	$2 - x = \ln x$
10	$x^3 + 4x - 6 = 0$
11	$x + \cos x = 1$
12	$x^3 = \sin x$
13	$2x^3 - 3x^2 - 12x + 8 = 0$
14	$tg(0.55x + 0.1) = x^2$
15	$e^x \sin x - 1 = 0$
16	$\arcsin x - 2x - 0.1 = 0$
17	$x^2 - 2\cos x = 0$

18	$x^2 - 20\sin x = 0$
19	$ctgx - \frac{x}{4} = 0$
20	$x^3 + 4x - 6 = 0$
21	$e^x(2 - x) - 0.5 = 0$
22	$(x-2)^2 \cdot 2^x = 1$
23	$x^4 \cdot 3^x = 2$
24	$2e^x = 5x + 2$
25	$x^3 + 2x - 4 = 0$