# Projeto de Lógica Computacional 1 - Equivalência entre diferentes noções de indução

Ana Luísa de Souza Paraguassu - 231003442
Arthur Menezes Botelho - 231003362
Pedro Lucas Pereira Neris - 231018964

7 de dezembro de 2025

**Universidade de Brasília (UnB)**
**Departamento de Ciência da Computação (CIC)**
**Disciplina:** Lógica Computacional 1
**Semestre:** 2025.2
**Professor:** Flávio L. C. de Moura

## 1 Introdução

O projeto desenvolvido visa provar a equivalência entre as noções de Indução Matemática e Indução Forte, utilizando o assistente de provas Rocq. Para isso, foram provados os lemas e teoremas que já haviam sido enunciados e disponibilizados pelo professor, utilizando o conteúdo de lógica proposicional, lógica de primeira ordem e indução vistos em sala de aula. Além disso, foi utilizada a versão online do Rocq (jsCoq) para o desenvolvimento do trabalho, na versão 8.12.2 e toda a prova está contida no arquivo 'ind_equiv.v'.

Este relatório tem como objetivo mostrar a base teórica utilizada para o desenvolvimento do projeto. Nele também são descritas quais as principais estratégias de prova utilizadas e o raciocínio que as justifica. Ademais, são descritas as experiências e opiniões do grupo em relação ao projeto, assim como sugestões para melhorias futuras.

## 2 Fundamentação Teórica

### 2.1 Princípio da Indução Matemática

O Princípio da Indução Matemática (PIM) é uma técnica poderosa para provas de propriedades definidas para o conjunto dos números naturais. Este princípio permite que não seja necessário analisar a propriedade para cada número natural particularmente. Ao invés disso, se é possível provar que esta propriedade particular é válida para 0, e se, assumindo que esta propriedade é válida para um número $k$ qualquer, conseguimos provar que esta propriedade é válida para $k+1$, então podemos concluir que esta propriedade é válida para qualquer número natural.

Este raciocínio se mostra intuitivo ao citar a (frequentemente utilizada) metáfora da escada infinita: se conseguimos alcançar o primeiro degrau de uma escada infinita, e se, ao alcançarmos um degrau dessa escada, conseguimos alcançar o próximo, então conseguimos alcançar todos os degraus dessa escada [1]. Pode ser feita uma relação com o conjunto dos números naturais: se uma propriedade vale para o 0, e, se uma propriedade vale para um número natural qualquer, também vale para seu sucessor, logo, também irá ser válida para 1; mas, se sabemos que esta propriedade é válida para 1, também sabemos que é valida para 2, e assim por diante, englobando todos os naturais. Formalmente, o PIM pode ser definido da seguinte forma:

$$\frac{P\,0 \qquad \forall k,\ P\,k \Rightarrow P\,(k+1)}{\forall n,\ P\,n}$$

## 2.2 Princípio da Indução Forte

O Princípio da Indução Forte (PIF) também é um princípio indutivo definido para os números naturais. Esta técnica funciona da seguinte forma: assumimos que a propriedade P que queremos provar é válida para todos os números menores que um número $n$ qualquer. Caso seja possível provar que a propriedade também é válida para este $n$ (utilizando as suposições anteriores), conseguimos concluir que a propriedade é válida para todos os naturais. Formalmente, o PIF pode ser definido da seguinte forma:

$$\frac{\forall k, (\forall m, m < k, P\ m) \Rightarrow P\ k}{\forall n, Pn}$$

O PIF é uma técnica de prova mais flexível do que o PIM, visto que, no PIF, é possível instanciar o passo indutivo com qualquer número natural menor do que o $k$ que está se tentando chegar. Já no PIM, é possível instanciar apenas com o antecessor direto $k - 1$ [1].

## 2.3 Base da indução, hipótese indutiva e passo indutivo

É importante definirmos os seguintes conceitos-chave para o PIM e o PIF, que foram utilizados para desenvolver provar a equivalência entre essas duas noções de indução, baseados nas notas de aula e no livro de Rosen [1]:

- **Passo base**: prova de que a propriedade P que estamos tentando provar vale para 0 — o primeiro degrau da escada infinita.
- **Hipótese indutiva**: para PIM, é a hipótese de que P(k) é verdadeiro; para o PIF, é a hipótese de que a propriedade P é verdadeira para todo $m, m < k$; em suma, é o que precisamos assumir que é verdadeiro para conseguirmos demonstrar que a propriedade é válida para um $n \in \mathbb{N}$ qualquer;
- **Passo indutivo**: é a prova de que a propriedade é válida para qualquer $n \in \mathbb{N}$, assumindo a(s) hipótese(s) de indução.

## 2.4 Semelhanças entre PIM e PIF

Seria interessante estabelecer e entender as semelhanças entre os dois princípios de indução antes de fazer a prova de que eles são equivalentes entre si, visto que este entendimento é central para o desenvolvimento do projeto.

Inicialmente, pode-se perceber que ambos procuram demonstrar propriedades definidas sobre o conjunto dos números naturais. Além disso, ambos precisam assumir que a propriedade seja válida para números estritamente menores que um certo $n$, já que, no PIM, mesmo que a hipótese de indução atue sobre um único número $k$, este $k$ sempre vai ser estritamente menor que $k + 1$ (pelas propriedades do conjunto $\mathbb{N}$).

Por fim, é válido notar que a hipótese indutiva do PIM é parte da hipótese indutiva do PIF, visto que, ao se assumir que a propriedade é válida para todos os números menores que $k$, também se está assumindo que a propriedade é válida para $k - 1$ [1]. Esta observação será útil para provarmos que o PIF implica o PIM, na seção 3.2

# 3 Desenvolvimento da prova

## 3.1 Definições iniciais

Utilizamos as seguintes definições em Rocq para o PIM e para o PIF, respectivamente:

Código 1: Definição do PIM

```
Definition PIM := forall P: nat -> Prop, (P 0) ->
                            (forall k, P k -> P (S k)) ->
                             forall n, P n.
```

Código 2: Definição do PIF

```
Definition PIF := forall Q: nat -> Prop,
                  (forall k, (forall m, m<k -> Q m) -> Q k) ->
                  forall n, Q n.
```

### 3.2 Da Indução Forte para a Indução Matemática

Para demonstrar que o Princípio de Indução Forte ($PIF$) implica o Princípio de Indução Matemática ($PIM$) `(Lemma PIF_to_PIM: PIF -> PIM.)`, seguimos um raciocínio que se conecta com a seção 2.4. É importante destacar que o $PIM$ pode ser provado por conta própria, sem o uso do $PIF$, de maneira direta e até mais simples. No entanto, esse não é o objetivo do projeto. Aqui, buscamos reconstruir o $PIM$ exclusivamente a partir do $PIF$, mostrando como um princípio mais abrangente é capaz de recuperar a forma tradicional da indução.

Partimos das duas hipóteses fundamentais do $PIM$, já discutidas na Fundamentação Teórica 2:

- **Caso base:** a propriedade vale para 0;
- **Passo indutivo:** se vale para $n$, então vale para $n + 1$.

Com isso, utilizamos o $PIF$ para estender a propriedade para todos os naturais ($\mathbb{N}$). O desenvolvimento segue um raciocínio direto: analisamos um natural arbitrário $k$ e verificamos como a propriedade pode ser estabelecida para ele com base nos valores menores, conforme a indução forte. A partir disso, $k$ se divide em dois casos:

- $k = 0$

  Nesse caso, nada precisa ser feito, pois o caso base já garante imediatamente a validade da propriedade para 0.

- $k = n + 1$

  Como citado anteriormente, o $PIF$ assegura que a propriedade vale para todos os valores menores que $k$, em particular, para $n$. Com essa informação, basta aplicar o passo indutivo do $PIM$, que afirma que $P(n)$ implica $P(n + 1)$. Assim, concluímos a validade da propriedade também para o sucessor.

Como todo número natural ($\mathbb{N}$) é ou o zero ou o sucessor de outro, essa divisão cobre todo o domínio. Assim, recuperamos todo o comportamento da indução matemática tradicional a partir do Princípio da Indução Forte. Esse processo confirma que o $PIF$ é suficientemente expressivo para derivar o $PIM$, ainda que essa não seja a maneira mais direta de prová-lo — mas, sim, a que está alinhada com o propósito do projeto.

Apesar de não trazer grandes dificuldades, o Lema 1 cumpriu um papel importante no desenvolvimento da prova. Concluir essa etapa deixou mais claro como o $PIM$ pode ser reinterpretado dentro do $PIF$, aspecto útil para a demonstração inversa apresentada no Lema 2.

### 3.3 Da Indução Matemática para a Indução Forte

O segundo lema da prova se tratava de mostrar que o Princípio de Indução Matemática ($PIM$) implica o Princípio de Indução Forte ($PIF$) `(Lemma PIM_to_PIF: PIM -> PIF.)`.

Usando como hipótese o $PIM$:

$$\frac{P\,0 \qquad \forall k,\ P\,k \Rightarrow P\,(k+1)}{\forall n,\ P\,n}$$

Queremos mostrar que o $PIF$ vale, ou seja, que:

$$\frac{\forall k, (\forall m, m < k, P\ m) \Rightarrow P\ k}{\forall n, Pn}$$

A estratégia para a realização dessa prova foi a introdução de um predicado auxiliar $R(n)$: $\forall m, m < n \Rightarrow P(m)$. O predicado $R(n)$ afirma que a propriedade $P$ é válida para todos os números estritamente menores que $n$. Assim, iremos provar $R(n)$ para todos os naturais $n$ usando o $PIM$ como hipótese. Se provarmos $R(n + 1)$, isso significa que $P$ vale para todos os $m < n + 1$, e, em particular, que $P(n)$ é verdadeiro. Se $P(n)$ for verdadeiro para todo $n$, o $PIF$ estará provado.

A demonstração segue os dois passos do $PIM$ aplicados ao predicado $R(n)$:

1. Caso Base: Provar $R(0)$

   A propriedade $R(0)$ afirma que $\forall m, m < 0 \Rightarrow P(m)$. Como não existe nenhum natural $m$ tal que $m < 0$, a implicação é verdadeira por vacuidade. Portanto, o caso base segue de forma imediata.

2. Passo Indutivo: Provar $R(n) \Rightarrow R(n+1)$

   Assumimos como hipótese indutiva que $R(n)$ é verdadeiro, ou seja, que $P$ é válido para todos os naturais $m$ tais que $m < n$. Queremos provar $R(n+1)$, que significa que $P$ é válido para todos os $m < n+1$. Para isso, vamos dividir $m < n+1$ em dois casos:

   (a) $m < n$

   Neste caso, $P(m)$ segue diretamente da hipótese indutiva $R(n)$.

   (b) $m = n$

   Neste caso, precisamos provar $P(n)$. A definição do $PIF$ nos dá a hipótese de que, se $P$ vale para todo $m < n$, então $P$ vale para $n$. A hipótese indutiva $R(n)$ é exatamente a premissa dessa implicação, então podemos concluir que $P(n)$ é verdadeiro.

   A partir da conclusão da prova nos dois casos, concluímos que $R(n+1)$ é verdadeiro.

Com o $PIM$ aplicado ao predicado $R(n)$, provamos que $R(n)$ vale para todo $n$ natural. Portanto, $R(n+1)$ vale para todo $n$. Como $R(n+1)$ implica $P(n)$, o $PIF$ está provado, mostrando que o $PIM$ é forte o suficiente para derivar a indução forte.

Essa, sem dúvidas, era a etapa mais complexa do projeto. A prova desse lema foi consideravelmente mais difícil do que a do anterior, precisando de uma estratégia mais criativa e de divisões em casos.

### 3.4 Equivalência entre o PIM e o PIF

O último teorema que necessitava de prova se tratava justamente da equivalência entre os dois princípios de indução, que é representada na linguagem da lógica através da bi-implicação `(Theorem PIM_equiv_PIF: PIM <-> PIF.)`.

Ao provar o lema em (3.2), temos que $PIF \rightarrow PIM$. E, ao provar o lema em (3.3), temos que $PIM \rightarrow PIF$. Porém, para provar o teorema final, precisamos provar a bi-implicação entre os dois princípios, ou seja, $PIM \leftrightarrow PIF$, que é a mesma coisa de $(PIM \rightarrow PIF) \wedge (PIF \rightarrow PIM)$. Como já provamos as duas partes dessa conjunção, por introdução da conjunção, a bi-implicação está provada. Com isso, prova do objetivo principal do projeto está concluída.

Esta é, sem dúvida, a parte mais simples de todo o projeto, visto que a prova do teorema é trivial quando já se provou ambos os lemas com as duas implicações, devido à forma como o professor havia estruturado o arquivo base para a prova. Ao provarmos este teorema, finalizamos a prova, tendo mostrado que os princípios de Indução Matemática e de Indução Forte são equivalentes com êxito.

## 4 Aprendizado e *feedbacks*

O projeto exigiu com que se saísse da forma usual e mais intuitiva de montar argumentos/demonstrações matemáticas para trabalhar com a formalização rigorosa do Rocq. Uma grande dificuldade é com a linguagem utilizada, especialmente em relação à sintaxe e a tradução do raciocínio para comandos formais, visto que trabalhar com assistente de provas (como o Rocq) não é usual no decorrer do curso de Ciências da Computação.

Também foi possível perceber como diferentes formas de indução, que aparecem, muitas vezes, apenas como conceitos abstratos, ganham estrutura concreta quando formalizadas. Entender esses princípios e ver como é possível manipulá-los para obter provas distintas reforçou a importância da indução dentro da disciplina e suas possibilidades de uso.

Outro ponto positivo foi a oportunidade de aprofundar a compreensão das noções de indução, ainda que restritas ao conjunto dos números naturais. Como o tema escolhido pelo grupo exigia trabalhar integralmente com esses conceitos, o projeto fortaleceu a familiaridade com o conteúdo teórico.

Por fim, como sugestão para futuros projetos, consideramos útil a disponibilização de um documento consolidado com informações essenciais sobre o Rocq — desde instruções de instalação e uso (inclusive alternativas ao jsCoq, que por vezes se mostrou instável durante o desenvolvimento) até listas de comandos, exemplos comentados e orientações sobre como estruturar provas formais. Esse material pode ser desenvolvido ao longo do semestre em um formato semelhante às notas de aula e facilitaria o trabalho dos alunos ao lidar com o assistente de provas. Ainda assim, reconhecemos que as aulas dedicadas à resolução de exercícios no Rocq contribuem bastante para esse processo de familiarização com a linguagem e o ambiente.

# 5 Conclusão

Ao desenvolver este projeto, foi possível provar um resultado bastante útil para provas de propriedades: a equivalência entre o Princípio de Indução Matemática e o Princípio de Indução Forte. Isto mostra que qualquer prova feita utilizando um princípio pode ser refeita utilizando outro, de acordo com a conveniência. Mesmo que este conceito já estivesse mencionado na fonte utilizada para definir o PIM e o PIF teoricamente [1], entender como efetivamente se prova o conceito formalmente é importante.

Ao concluir a prova com sucesso, também foi possível observar como a teoria vista durante a disciplina possui aplicações práticas, e também de entender como um assistente de provas como o Rocq pode ser útil para este tipo de problema, se encaixando na proposta geral do conteúdo visto e trabalhado durante o semestre.

# Referências

[1] Kenneth H. Rosen. *Matemática Discreta e Suas Aplicações*. 6. ed. Porto Alegre: McGraw-Hill, 2009.