



**TECHNIQUES  
DE L'INGÉNIEUR**

Réf. : **AF5100 V1**

Date de publication :  
**10 janvier 2012**

# Bases de la dynamique du véhicule

Cet article est issu de : **Sciences fondamentales | Physique Chimie**

par **Lionel MAIFFREDY**

**Résumé** La dynamique du véhicule consiste en l'identification des phénomènes physiques en présence dans la tenue de route et le comportement du véhicule. Les équations générales de la dynamique externe sont applicables à ce système, le but recherché étant l'utilisation de modèles théoriques et/ou expérimentaux pour l'expression des actions mécaniques. Ainsi, deux modèles sont retenus, selon que le véhicule possède des roues rigides ou des roues déformables ; à chacun ses spécificités, sa modélisation cinématique et sa trajectoire. L'étude du contact sol-roue, donc celle de la mécanique du pneumatique et de ses déformations, est incontournable mais assez complexe. [...]

**Abstract** Vehicle dynamics consist in identifying physical phenomena at work in the way vehicles behave and hold the road. The general equations of external dynamics are applicable to this system in order to facilitate the use of theoretical and/or experimental models illustrating mechanical actions. Two models have been selected according to whether the vehicle has rigid or deformable wheels; each having different specificities, kinematic modelling and trajectory. The study of the wheel-to-road contact and thus that of pneumatic mechanics and deformations is essential although rather complex. Then, once the modelling option, its parameterizations and tracking have been chosen, the simplest equation method to be used in the case of vehicles is that of general theorems of a vectorial character.

**Pour toute question :**  
Service Relation clientèle  
Techniques de l'Ingénieur  
Immeuble Pleyad 1  
39, boulevard Ornano  
93288 Saint-Denis Cedex

**Par mail :**  
infos.clients@teching.com  
**Par téléphone :**  
00 33 (0)1 53 35 20 20

Document téléchargé le : **20/04/2017**

Pour le compte : **7200051982 - universite de bordeaux // 147.210.215.16**

© Techniques de l'Ingénieur | tous droits réservés

# Bases de la dynamique du véhicule

par **Lionel MAIFFREDY**

*Maître de conférence,  
Laboratoire de mécanique des contacts et des structures (UMR CNRS 5259),  
Institut national des sciences appliquées de Lyon*

<b>1. Cinématique du virage en roues rigides.....</b>	<b>AF 5 100 - 2</b>
1.1 Schématisation de base.....	— 2
1.2 Paramétrage et repérage .....	— 3
1.3 Relations de liaisons.....	— 4
1.4 Étude de la trajectoire .....	— 4
1.5 Modèle à roue moyenne.....	— 6
1.6 Véhicule à quatre roues directrices.....	— 7
<b>2. Contact sol-roue avec pneumatique : phénomène de dérive ....</b>	<b>— 8</b>
2.1 Roue au repos : caractéristiques élastiques du pneu .....	— 9
2.2 Roue en mouvement : phénomène de dérive.....	— 10
2.3 Effort longitudinal et glissement.....	— 14
2.4 Formulation de Pacejka.....	— 15
<b>3. Cinématique en roues déformables.....</b>	<b>— 15</b>
3.1 Modélisation cinématique sans déport latéral.....	— 15
3.2 Modèle à roues moyennes .....	— 18
3.3 Comportement du véhicule.....	— 19
<b>4. Actions de l'air sur le véhicule .....</b>	<b>— 20</b>
4.1 Aérodynamique de l'aile.....	— 20
4.2 Aérodynamique automobile.....	— 22
<b>5. Équations de la dynamique .....</b>	<b>— 27</b>
5.1 Modélisation, paramétrage, repérage .....	— 27
5.2 Équations de la dynamique.....	— 27
5.3 Mouvement lacet-dérive .....	— 31
5.4 Mouvement de roulis .....	— 32

**L**a dynamique du véhicule, comme son nom l'indique, est l'application de la dynamique des systèmes multicorps aux véhicules. Mais dans cette acception, il est d'usage de restreindre le mot véhicule aux véhicules automobiles terrestres non guidés. Ainsi, dans cet article, il ne sera question ni des véhicules ferroviaires, ni des aéronefs, même si ces derniers lorsqu'ils roulent sur la piste d'atterrissage entrent dans cette catégorie. Cela étant, cela ne signifie pas que certains aspects théoriques ne soient pas voisins et que la forme des équations ne soit pas semblable, il suffit de se référer aux équations de la dynamique du vol par exemple.

Si l'on revient à la définition, application de la dynamique des systèmes multicorps, on comprend qu'il faudra suivre la logique de cette discipline, à savoir faire un modèle cinématique multicorps du véhicule, le paramétrer, être capable de calculer les éléments de cinétique, mais surtout déterminer les actions mécaniques extérieures agissant sur le système. Ce dernier point revient à être capable d'exprimer ces actions en fonctions des paramètres en utilisant des modèles théoriques et/ou expérimentaux.

Depuis quelques années, une nouvelle direction appelée « contrôle global châssis » fait son apparition en dynamique du véhicule, elle trouve son origine

dans l'introduction des « aides à la conduite ». Ces aides, utilisant les données de capteurs situés dans le véhicule et les résultats de simulation, issus de la modélisation du véhicule agissent sur les actionneurs – freins, direction, suspensions, etc. – afin d'aider le conducteur dans des situations délicates. Le choix des actionneurs, l'ordre, la durée, l'intensité de leur intervention, la prise en compte de la dynamique propre de chacun des actionneurs requièrent différents niveaux de modélisation du véhicule associés à des démarches utilisées en automatique couplées à des techniques de contrôle optimal.

L'article, qui se focalisera uniquement sur les bases de la dynamique du véhicule, comportera deux parties.

La première partie donnera les équations générales de la dynamique externe des véhicules. Pour ce faire, la première section sera consacrée à la cinématique en roues indéformables ; l'étude du pneumatique à la section 2 nous permettra d'introduire, dans la section 3, les spécificités de cet élément déformable dans la cinématique. La section 4 sera consacrée aux principaux résultats de l'aérodynamique appliqués à l'automobile. Enfin, à la section 5, les équations de la dynamique seront écrites en toute généralité dont on déduira les équations relatives au modèle lacet-dérive et au modèle de roulis.

Dans la seconde partie (à paraître), sera abordé le développement de ces deux modèles ainsi qu'un aperçu sur le « contrôle global châssis ». Les sections 1 et 2 seront consacrées au modèle lacet-dérive par l'étude du mouvement stationnaire, sa stabilité et les mouvements transitoires autour du mouvement stationnaire. Dans la section 4 sera étudié le mouvement de roulis avec une démarche similaire aux sections 1 et 2. Auparavant, dans la section 3, le moment anti-roulis sera calculé à partir des actions intérieures (ressorts, amortisseurs, barres anti-roulis). Dans la section 5, il sera fait état de quelques travaux de recherche menés sur le « contrôle global châssis ».

Nous utiliserons les notations explicitées dans [A 1 661] ; de même, le lecteur pourra s'y reporter pour tous les éléments théoriques dont il aurait besoin tant en cinématique qu'en dynamique.

## 1. Cinématique du virage en roues rigides

Avertissement : tous les repères utilisés seront orthonormés directs.

Bien qu'il n'existe plus de véhicules terrestres automobiles classiques à roues rigides, ce chapitre a plusieurs utilités. La première réside dans le fait qu'un véhicule à roues rigides est cinématiquement déterminé (notion expliquée plus tard), à l'inverse d'un véhicule à roues déformables dont la dynamique a une influence considérable sur le positionnement comme il sera vu ultérieurement. La seconde, parce qu'un véhicule dit neutre (définition vue plus tard) se comporte comme un véhicule à roues rigides.

### 1.1 Schématisation de base

La schématisation requiert de l'expérience afin de trouver le modèle cinématique, juste nécessaire à la compréhension du phénomène. En ce qui nous concerne, le véhicule sera vu comme une « caisse à savon », c'est-à-dire réduit à sa plus simple expression. En particulier, il sera à deux roues avant directrices indépendantes, dépourvu de suspension et les éléments de la direction dépouillés à l'extrême comme l'indique la figure 1.

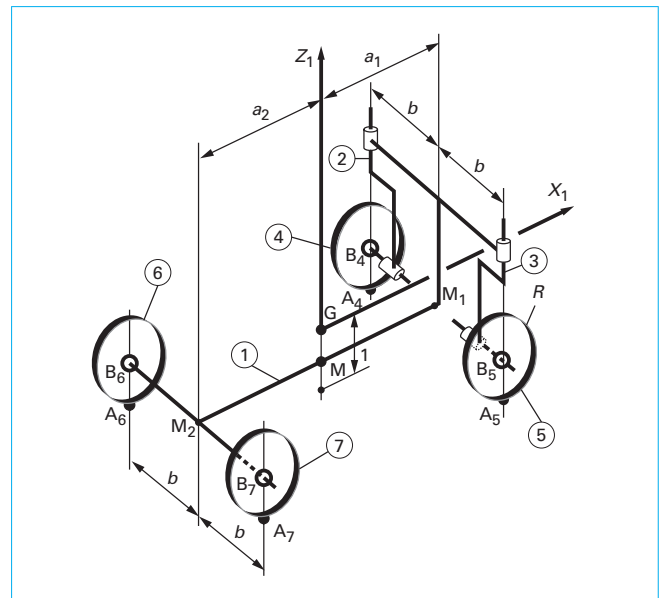


Figure 1 – Schématisation générale

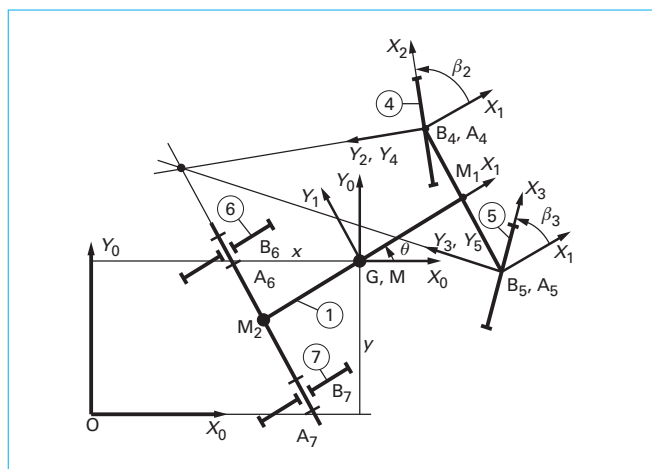


Figure 2 – Paramétrage et repérage

Ainsi, sur la figure 1, on peut distinguer sept solides  $S_1$  à  $S_7$  qui figurent le véhicule.  $S_1$  figure le châssis,  $S_4$  à  $S_7$  les roues enfin  $S_2$  et  $S_3$  les porte-pivots des roues avant.

Les centres des roues seront notés  $B_4, \dots, B_7$ , les segments de droite  $B_4B_5$  et  $B_6B_7$  seront appelés essieu avant et arrière respectivement. Les points  $B_4, \dots, B_7$  et  $M_1$  et  $M_2$ , milieux des essieux, sont situés dans un même plan horizontal.

## 1.2 Paramétrage et repérage

Le véhicule sera supposé se déplacer sur un sol plan horizontal appelé  $S_0$  auquel on lie le repère  $R_0: [O, \vec{X}_0, \vec{Y}_0, \vec{Z}_0]$ , avec  $[O, \vec{Z}_0]$  vertical ascendant.

Au châssis  $S_1$ , on lie le repère  $R_1: [G, \vec{X}_1, \vec{Y}_1, \vec{Z}_1]$ , avec  $G$ , centre d'inertie de  $S_1$ , dont la projection dans le plan du centre des roues est  $M$  :

$$\vec{Z}_1 = \vec{Z}_0$$

$[G, \vec{X}_1]$  est vers l'avant du véhicule, dans le plan de symétrie.

Le mouvement plan de  $S_1/S_0$  requiert les trois paramètres suivants (figure 2) :

- $x$  et  $y$ , déplacement longitudinal et transversal respectivement ;
- $\theta$  angle de lacet ou de cap.

Sur la figure 3, on retrouve les porte-pivots  $S_2$  et  $S_3$  ; il est à remarquer que les points de contact  $A_4$  et  $A_5$ , les centres des roues  $B_4$  et  $B_5$  sont portés par l'axe des liaisons porte-pivot châssis. On paramètre le braquage des roues avant par  $\beta_2$  et  $\beta_3$ . On notera  $\varphi_i$  le paramètre de rotation des roues 4 à 7.

Remarque 1 : la géométrie réelle d'une roue est plus complexe que celle retenue figure 1. Sur la figure 4 sont repérés les différents angles relatifs au positionnement d'une roue avant. L'axe  $O_2\vec{Z}_2$  qui est l'axe d'orientation du porte-pivot est incliné dans l'espace ; son orientation est donnée par deux angles : « angle de chasse » dans un plan longitudinal et « angle d'inclinaison de pivot » dans un plan transversal. Cet axe rencontre le sol au point  $A_4$  de sorte que la distance  $A_4A_1$  suivant l'axe longitudinal est la « chasse géométrique » tandis que la distance suivant l'axe transversal est le « déport latéral ». Ordre de grandeur :  $10^\circ$  pour l'angle de pivot et  $5^\circ$  pour la chasse.

Remarque 2 : il existe aussi un autre angle extrêmement important qui est « l'angle de carrossage ». Cet angle caractérise l'inclinaison du plan de la roue par rapport au plan vertical transversal du véhicule. La définition usuelle de cette inclinaison est la suivante : le carrossage est dit « négatif » si la roue semble « tomber » vers l'intérieur du véhicule, il est dit « positif » dans le

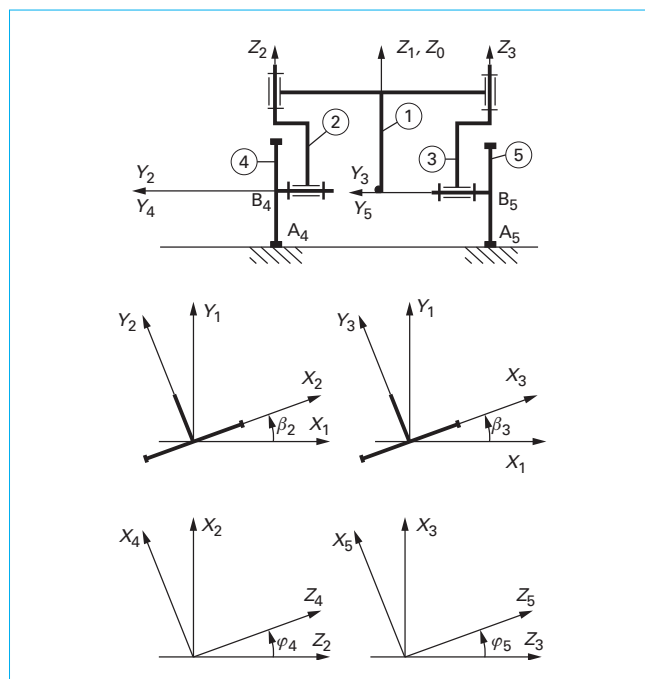


Figure 3 – Angles de braquage

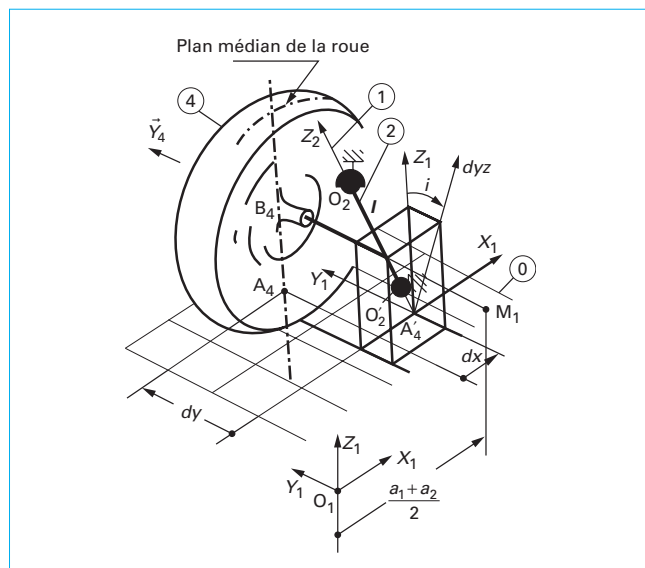


Figure 4 – Différents angles positionnant une roue avant

cas contraire. Mais cela n'est pas en accord avec les règles de la mécanique puisqu'elle ne tient pas compte de la convention des repères directs, nous utiliserons évidemment la convention des repères directs. Ordre de grandeur :  $30'$  à  $1^\circ$  d'angle.

Remarque 3 : pour finir, dans un plan horizontal, l'intersection du plan des roues avec le sol n'est pas parallèle à l'axe longitudinal du véhicule, on parle alors de pincement s'il y a convergence vers l'intérieur, d'ouverture dans le cas contraire. Ordre de grandeur :  $10$  à  $20'$  d'angle.

### 1.3 Relations de liaisons

En retenant le fait que les roues sont rigides, nous allons traduire l'hypothèse que les roues roulent sans glisser sur le sol. La cinématique ne peut discuter de la validité de cette hypothèse car cela relève de la dynamique, en général, et des lois de Coulomb en particulier. La conséquence directe est que la puissance développée au contact est nulle. Cela conduit à des relations qui rendent le **modèle cinématiquement déterminé**, c'est-à-dire à un angle de braquage donné correspond une trajectoire donnée.

#### 1.3.1 Traduction du non-glissement de la roue 4

En se référant aux figures 1 et 2, calculons la vitesse de glissement en  $A_4$  :

$$\vec{V}_4^0(A_4) = 0$$

$$\vec{V}_4^0(A_4) = \vec{V}_4^0(B_4) + \vec{\Omega}_4^0 \wedge \overrightarrow{B_4 A_4} \quad (1)$$

mais compte tenu des remarques précédentes sur les porte-pivots, le point  $B_4$  appartient aussi à  $S_1$  et donc on peut écrire :

$$\vec{V}_1^0(B_4) = \vec{V}_1^0(G) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{G B_4}$$

$$\vec{V}_1^0(G) = [x', y', 0]_0$$

Compte tenu que la dynamique du véhicule s'intéresse plus à l'attitude du véhicule sur sa trajectoire qu'à la trajectoire elle-même, nous expliciterons toutes les relations dans le repère lié au véhicule soit  $R_1$  ; ainsi par un changement de base classique, nous poserons :

$$\vec{V}_1^0(G) = [V_x, V_y, 0]_1$$

$$V_x = x' \cos \theta + y' \sin \theta$$

$$V_y = -x' \sin \theta + y' \cos \theta$$

$$\vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{G B_4} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta' \end{bmatrix}_{R_1} \wedge \begin{bmatrix} a_1 \\ b \\ h-R \end{bmatrix}_{R_1}$$

$$\vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{G B_4} = [-b\theta', a_1\theta', 0]_{R_1}$$

On obtient alors pour la vitesse du point  $B_4$ , exprimée dans le repère  $R_1$  :

$$\vec{V}_1^0(B_4) = \begin{bmatrix} x' \cos \theta + y' \sin \theta - b\theta' \\ -x' \sin \theta + y' \cos \theta + a_1\theta' \\ 0 \end{bmatrix}_{R_1}$$

Calcul du deuxième terme de (1) :

$$\vec{\Omega}_4^0 = \vec{\Omega}_4^2 + \vec{\Omega}_2^1 + \vec{\Omega}_1^0$$

$$\vec{\Omega}_4^0 = \varphi_4' \vec{Z}_2 + \beta_2' \vec{Z}_2 + \theta' \vec{Z}_2$$

$$(\vec{\Omega}_4^0 \wedge \overrightarrow{B_4 A_4}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \varphi_4' \\ \beta_2' + \theta' \end{bmatrix}_{R_2} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -R \end{bmatrix}_{R_2}$$

$$(\vec{\Omega}_4^0 \wedge \overrightarrow{B_4 A_4}) = -R\varphi_4' \vec{X}_2$$

En exprimant ce dernier vecteur dans le repère lié au véhicule, on obtient :

$$(\vec{\Omega}_4^0 \wedge \overrightarrow{B_4 A_4}) = [-R\varphi_4' \cos \beta_2, -R\varphi_4' \sin \beta_2, 0]_{R_1}$$

Ainsi, la vitesse de glissement au point  $A_4$  entre la roue et le sol apparaît sous la forme suivante :

$$\vec{V}_4^0(A_4) = \begin{bmatrix} x' \cos \theta + y' \sin \theta - b\theta' - R\varphi_4' \cos \beta_2 \\ -x' \sin \theta + y' \cos \theta + a_1\theta' - R\varphi_4' \sin \beta_2 \\ 0 \end{bmatrix}_{R_1}$$

#### 1.3.2 Équations de liaison

Pour obtenir la vitesse de glissement au niveau de la roue 5, il suffit de changer  $b$  en  $-b$  et  $\beta_2$  en  $\beta_3$ . On déduit la vitesse de glissement au niveau des roues arrières en changeant  $a_1$  en  $-a_2$  et en annulant les angles de braquage. On obtient alors, en supposant le non-glissement, la série des huit équations (2) suivantes :

$$\begin{aligned} x' \cos \theta + y' \sin \theta - b\theta' - R\varphi_4' \cos \beta_2 &= 0 \\ -x' \sin \theta + y' \cos \theta + a_1\theta' - R\varphi_4' \sin \beta_2 &= 0 \\ x' \cos \theta + y' \sin \theta + b\theta' - R\varphi_5' \cos \beta_3 &= 0 \\ -x' \sin \theta + y' \cos \theta + a_1\theta' - R\varphi_5' \sin \beta_3 &= 0 \\ x' \cos \theta + y' \sin \theta - b\theta' - R\varphi_6' &= 0 \\ -x' \sin \theta + y' \cos \theta - a_2\theta' &= 0 \\ x' \cos \theta + y' \sin \theta + b\theta' - R\varphi_7' &= 0 \\ -x' \sin \theta + y' \cos \theta - a_2\theta' &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Nous constatons que, si  $\beta_2$  et  $\beta_3$  sont fixés, ce sont sept relations (deux sont identiques) qui lient les sept paramètres :  $x, y, \theta, \varphi$ .

Nous montrerons dans le paragraphe suivant que ces relations sont intégrables et qu'elles nous permettront d'accéder à la trajectoire du véhicule.

### 1.4 Étude de la trajectoire

#### 1.4.1 Relations entre les paramètres

Grâce aux équations (1), on peut obtenir les paramètres principaux :  $x, y, \theta$ . Dans un premier temps, il convient d'exprimer les paramètres de rotation des roues en fonction de l'angle de cap et celui du braquage. Puis en remplaçant dans les équations (1), on obtiendra des relations entre les paramètres principaux et le braquage. Par ailleurs, la connaissance de ces vitesses de rotation a un intérêt particulier lors de l'étude des différentiels, qui n'est pas abordée dans cet article.

En considérant que les angles de braquage ont une valeur non nulle, on obtient par combinaison des équations (2) :

$$\begin{aligned} \varphi_4' &= \frac{a_1 + a_2}{R} \frac{\theta'}{\sin \beta_2} \\ \varphi_5' &= \frac{a_1 + a_2}{R} \frac{\theta'}{\sin \beta_3} \\ \varphi_6' &= \frac{a_1 + a_2}{R} \cot \beta_2 \theta' \\ \varphi_7' &= \frac{a_1 + a_2}{R} \cot \beta_3 \theta' \end{aligned} \quad (3)$$

Le système d'équations suivant en découle :

$$\begin{aligned} V_x &= x' \cos \theta + y' \sin \theta \\ V_y &= -x' \sin \theta + y' \cos \theta \\ x' \cos \theta + y' \sin \theta &= [b + (a_1 + a_2) \cot \beta_2] \theta' \\ -x' \sin \theta + y' \cos \theta &= a_2 \theta' \end{aligned} \quad (4)$$

On en déduit alors  $x'$  et  $y'$ , puis, les valeurs  $x$  et  $y$  par intégration en considérant les angles de braquage constants.  $x$ ,  $y$  sont les coordonnées du vecteur position du point G dans le repère  $R_0$ , c'est-à-dire l'équation paramétrique de la trajectoire du point G dans le repère  $R_0$  :

$$\begin{aligned} x &= \{[b + (a_1 + a_2) \cot \beta_2] \sin \theta + a_2 \cos \theta\} + C_1 \\ y &= \{[-b + (a_1 + a_2) \cot \beta_2] \cos \theta + a_2 \sin \theta\} + C_2 \end{aligned}$$

On reconnaît l'équation d'un cercle ; ainsi la trajectoire du point G dans  $R_0$  est un cercle de rayon  $R_G$ , dont les coordonnées du centre sont  $C_1$  et  $C_2$ , qu'il conviendra de préciser :

$$R_G = \sqrt{(a_2)^2 + [b + (a_1 + a_2) \cot \beta_2]^2} \quad (5)$$

Remarque : en observant la quatrième équation de (4), on voit que  $\theta'$  peut s'exprimer en fonction de  $V_x$  et qu'ainsi les vitesses de rotation des roues peuvent aussi s'exprimer en fonction de  $V_x$  à partir des relations (3).

#### 1.4.2 Relation entre les angles de braquage

On peut encore obtenir un résultat remarquable à partir des équations de liaison. Par combinaison des 1<sup>re</sup> et 3<sup>e</sup> équations et en remplaçant les vitesses de rotation des roues par les valeurs précédentes, on obtient :

$$\begin{aligned} \theta' [2b - (a_1 + a_2) \cot \beta_2 + (a_1 + a_2) \cot \beta_3] &= 0 \\ \cot \beta_2 - \cot \beta_3 &= \frac{2b}{(a_1 + a_2)} \quad (6) \end{aligned}$$

La relation (6) est remarquable puisqu'elle fait apparaître les angles de braquage droit et gauche en relation avec l'empattement  $a_1 + a_2$  et la voie  $2b$  du véhicule, dimensions fondamentales dans un véhicule.

#### 1.4.3 Étude de la trajectoire du point G

Afin de mieux préciser les éléments du cercle trajectoire du point G dans  $R_0$ , nous allons faire appel à la cinématique plane. Le mouvement de  $S_1$ , pseudo-châssis, est un mouvement plan sur plan de paramètre  $x$ ,  $y$ ,  $\theta$   $\vec{Z}_{0,1}$ . La théorie des mouvements plan sur plan, nous apprend qu'il existe un point I de vitesse nulle (figure 2), ou **centre instantané de rotation** (CIR) :

$$\begin{aligned} \vec{V}_1^0(I) &= \vec{V}_1^0(G) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{GI} \\ 0 &= \vec{V}_1^0(G) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{GI} \end{aligned}$$

Ce qui donne par utilisation du résultat de la division vectorielle, et en supposant que  $\vec{\Omega}_1^0 = \theta' \vec{Z}_{0,1}$  est non nul, le vecteur :

$$\vec{GI} = \frac{\vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{V}_1^0(G)}{(\vec{\Omega}_1^0)^2}$$

soit après remplacement des vecteurs par leurs composantes dans le repère  $R_1$  lié au véhicule et en posant :

$$\begin{aligned} \vec{GI} &= [X_I, Y_I, 0]_1 \\ \vec{GI} &= \frac{1}{(\theta')^2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta' \end{bmatrix}_1 \wedge \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ 0 \end{bmatrix}_1 \\ X_I &= -\frac{V_y}{\theta'} \quad Y_I = \frac{V_x}{\theta'} \\ X_I &= -a_2 \\ Y_I &= b + (a_1 + a_2) \cot \beta_2 \quad (7) \end{aligned}$$

On voit immédiatement à partir des deux dernières relations de (7) que le CIR I :

- est un point fixe du véhicule ;
- est situé sur l'essieu arrière du véhicule.

Rappelons que le CIR est l'intersection de l'axe central, ici axe instantané de rotation, du mouvement avec le plan du mouvement. Ce CIR I est le centre du cercle trajectoire du point G.

Retrouvons maintenant le CIR de manière géométrique en utilisant un résultat de la cinématique plane qui dit que le CIR est situé sur la normale à la trajectoire d'un point. Comme points, nous prendrons les centres  $B_4$  et  $B_5$  des roues avant, l'intersection des deux normales à leur trajectoire donnera le CIR.

On a vu (figure 3) que le point  $B_4$  appartenait à la fois à  $S_1$  et  $S_4$ , sa vitesse pour un observateur lié à  $S_0$  sera donc la même. Par ailleurs, la vitesse est tangente à la trajectoire, donc si l'on connaît le support du vecteur vitesse, on connaît la normale à la trajectoire :

$$\begin{aligned} \vec{V}_1^0(B_4) &= \vec{V}_4^0(B_4) = \vec{V}_4^0(A_4) + \vec{\Omega}_4^0 \wedge \overline{A_4 B_4} \\ \vec{V}_4^0(A_4) &= 0 \\ \vec{V}_4^0(B_4) &= \vec{\Omega}_4^0 \wedge \overline{A_4 B_4} \\ \vec{V}_4^0(B_4) &= R \varphi_4' \vec{X}_2 \end{aligned}$$

Ainsi, le support du vecteur vitesse étant  $\vec{X}_2$ , la normale à la trajectoire de  $B_4$  dans le repère  $R_0$  est portée par  $B_4 \vec{Y}_2$ , qui est aussi l'axe de rotation de la roue ; de même, le support de la normale à la trajectoire de  $B_5$  sera  $B_5 \vec{Y}_3$ . Par conséquent, le CIR étant situé sur l'essieu arrière, ces deux droites se coupent sur l'essieu arrière comme on le constate sur la figure 5.

**En résumé**, à l'instant  $t$ , pour un véhicule à roues rigides, la trajectoire du point G est un cercle de centre le CIR I ; celui-ci est situé sur l'essieu arrière à l'intersection des axes de rotation des roues avant. Le rayon du cercle est donné par l'équation (5). Cette construction géométrique permet en outre de relier le rayon du virage aux angles de braquage.

Remarque 1 : en pratique, si l'on excepte les manœuvres de parking, les angles de braquage des roues  $\beta_2$  et  $\beta_3$  sont faibles, de l'ordre de quelques degrés. Entre le braquage volant et celui du plan de roue, le rapport de démultiplication est de l'ordre de 1/15 à 1/20. Par ailleurs, un virage de 100 m de rayon est déjà ce que l'on appelle un virage « serré », ainsi, on peut simplifier l'expression du rayon obtenue équation (5). On se souviendra que l'ordre de grandeur pour la voie  $2b$  est de 1,5 m et de 2,5 m pour l'empattement  $a_1 + a_2$  :

$$\begin{aligned} R_G &= \|\vec{GI}\| = \sqrt{(X_I)^2 + (Y_I)^2} \\ R_G &= \sqrt{(a_2)^2 + [b + (a_1 + a_2) \cot \beta_2]^2} \\ b &\ll \cot \beta_2 \quad a_2 \ll \cot \beta_2 \\ R_G &\approx (a_1 + a_2) \cot \beta_2 \\ R_G &\approx \frac{a_1 + a_2}{\beta_2} \quad (8) \end{aligned}$$

Ainsi, le rayon de virage est, avec une excellente approximation, égal à l'empattement divisé par l'angle de braquage des roues exprimé en radian.

Remarque 2 : le CIR I est aussi un point fixe de  $R_0$  ; pour s'en convaincre, il suffit de calculer sa vitesse pour un observateur lié à  $R_0$  en utilisant la composition des mouvements :

$$\begin{aligned} \vec{V}^0(I) &= \vec{V}^1(I) + \vec{V}_1^0(I) \\ \vec{V}^1(I) &= 0 \\ \vec{V}_1^0(I) &= 0 \\ \vec{V}^0(I) &= 0 \end{aligned}$$



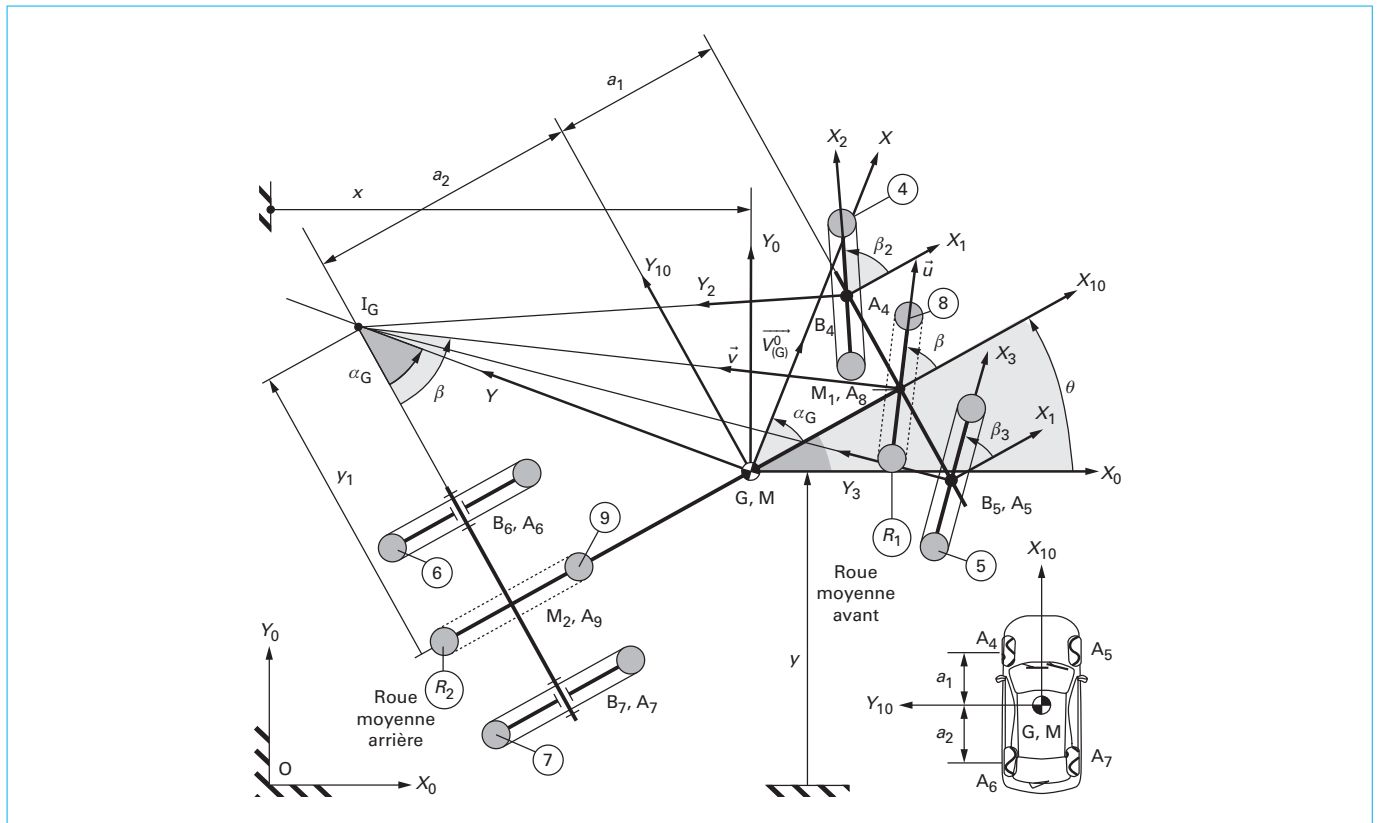


Figure 5 – Schématisation récapitulative avec en place les roues moyennes

## 1.5 Modèle à roue moyenne

Ce modèle, aussi appelé modèle bicyclette, est un modèle simplifié très commode dans de nombreux cas car il donne une vision très apurée du fonctionnement du véhicule en virage. Cela étant, il faut comprendre, bien que cela ne soit pas souvent dit, qu'un dispositif, jamais représenté, maintient le véhicule vertical. Il est bien évident que ce modèle ne peut servir pour l'étude du véhicule en roulis mais qu'il est uniquement dédié à une étude en mouvement plan sur plan.

Comme indiqué sur la figure 5, on met en place deux roues moyennes  $S_8$  sur le train avant et  $S_9$  sur le train arrière. Pour que ces roues soient compatibles avec le fonctionnement de l'ensemble, c'est-à-dire qu'elles roulent sans glisser, elles doivent avoir leur axe de rotation respectif qui se coupent au CIR I.

### 1.5.1 Roue moyenne avant

À la roue avant  $S_8$ , on lie le repère  $R_8 : [M_1, \vec{u}, \vec{v}, \vec{Z}_1]$ , avec  $\vec{u}$  selon le plan de jante, ce qui donne :

$$\vec{v} = \vec{M}_1 \vec{u} \quad (\vec{u}, \vec{v}) = \pi/2 \quad \beta = (\vec{X}_1, \vec{u})$$

On voit donc sur la figure que :

$$\tan \beta = \frac{a_1 + a_2}{Y_1}$$

### 1.5.2 Angle d'Ackerman

En se reportant aux équations (8), on voit qu'on peut, dans un premier temps, approximer  $R_G$  avec  $Y_1$ , c'est ce que nous ferons dans les calculs qui vont suivre.

À partir de la figure 5, on peut écrire que :

$$\tan \beta_2 = \frac{a_1 + a_2}{Y_1 - b}$$

et en faisant un développement limité de  $\tan \beta_2$  autour de 0, on obtient :

$$\beta_2 = \frac{a_1 + a_2}{Y_1 - b} - \frac{1}{3} \left( \frac{a_1 + a_2}{Y_1 - b} \right)^3 + \dots$$

En se souvenant que  $Y_1 \gg b \Rightarrow b/Y_1 \ll 1$ , et par une démarche analogue pour  $\beta_3$ , on obtient les expressions approchées de  $\beta_2$  et  $\beta_3$  :

$$\beta_2 = \frac{a_1 + a_2}{Y_1} + \frac{b(a_1 + a_2)}{(Y_1)^2} + \frac{(a_1 + a_2) \left[ b^2 - \left( (a_1 + a_2)^2 \frac{1}{3} \right) \right]}{(Y_1)^3} + \dots$$

$$\beta_3 = \frac{a_1 + a_2}{Y_1} - \frac{b(a_1 + a_2)}{(Y_1)^2} + \frac{(a_1 + a_2) \left[ b^2 - \left( (a_1 + a_2)^2 \frac{1}{3} \right) \right]}{(Y_1)^3} + \dots$$

On peut donc maintenant facilement faire apparaître la différence de ces angles ainsi que la demi-somme :

$$\beta_2 - \beta_3 = \frac{2b(a_1 + a_2)}{(R_G)^2}$$

$$\frac{\beta_2 + \beta_3}{2} = \frac{a_1 + a_2}{R_G} + \frac{(a_1 + a_2) \left[ b^2 - \left( (a_1 + a_2)^2 \frac{1}{3} \right) \right]}{(R_G)^3} + \dots$$

En procédant à l'identique avec l'angle de braquage  $\beta$  de la roue moyenne :

$$\beta = \frac{a_1 + a_2}{R_G} - \frac{1}{3} \left( \frac{a_1 + a_2}{R_G} \right)^3 + \dots$$

On pose  $\beta_A$ , **angle d'Ackerman**, la quantité suivante :

$$\beta_A = \frac{a_1 + a_2}{R_G}$$

Ainsi, l'angle d'Ackerman est égal, au troisième ordre près, à l'angle de braquage de la roue moyenne et à la moyenne des braquages. Exemple numérique :

$$a_1 + a_2 = 2,595 \text{ m} \quad R_G = 100 \text{ m}$$

$$\beta_A = 0,02595 \text{ rad} = 0,17^\circ \quad \beta_{\text{volant}} = 4^\circ$$

### 1.5.3 Angle au vent ou angle d'incidence

Le vecteur vitesse du centre d'inertie G du véhicule est perpendiculaire au vecteur  $\vec{GI}$ , il n'est donc pas porté par l'axe longitudinal du véhicule. On verra dans la section sur l'aérodynamisme, que, en air calme, le véhicule est soufflé latéralement. Sur la figure 6, on retrouve les éléments essentiels de la cinématique du virage d'un véhicule à roues rigides. On pose  $\alpha = (\vec{X}_1, V^0(G))$  appelé angle au vent ou angle d'incidence et désigné en aérodynamique par angle de dérapage aérodynamique. À partir de la figure 6, on peut en trouver sa valeur :

$$\tan \alpha = \frac{a_2}{Y_1} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{a_2}{a_1 + a_2} \tan \beta$$

$$\alpha \approx \frac{a_2}{a_1 + a_2} \beta$$

La valeur de cet angle est très faible, de l'ordre du degré.

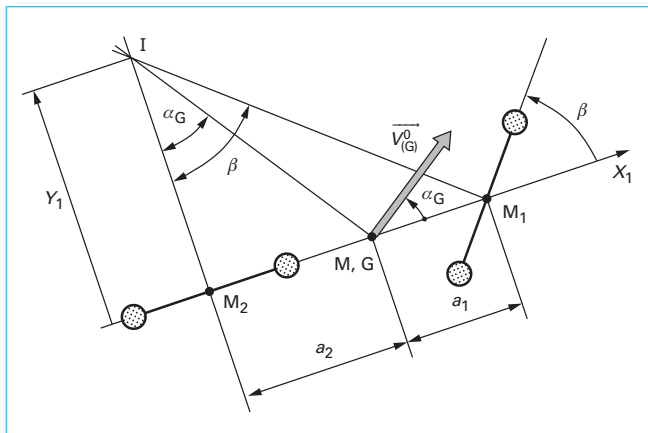


Figure 6 – Angle au vent

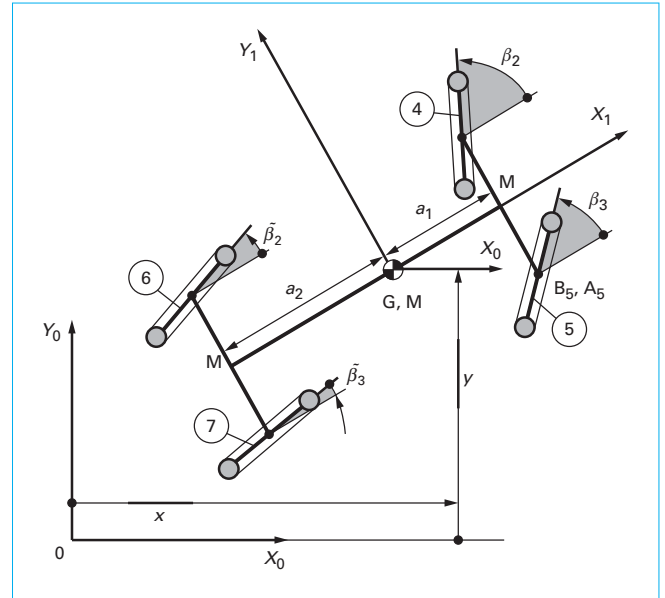


Figure 7 – Véhicule à quatre roues directrices

### 1.6 Véhicule à quatre roues directrices

Sur la figure 7, on retrouve les éléments de base ainsi que le paramétrage. On notera  $\tilde{\beta}_2$  et  $\tilde{\beta}_3$  les angles de braquage arrière.

En considérant qu'il y a non-glissement au niveau des quatre roues, seules les quatre dernières équations de liaisons de (2) sont modifiées. On obtient alors :

$$\begin{aligned} x' \cos \theta + y' \sin \theta - b\theta' - R\varphi_4' \cos \beta_2 &= 0 \\ -x' \sin \theta + y' \cos \theta + a_1\theta' - R\varphi_4' \sin \beta_2 &= 0 \\ x' \cos \theta + y' \sin \theta - b\theta' - R\varphi_5' \cos \beta_3 &= 0 \\ -x' \sin \theta + y' \cos \theta + a_1\theta' - R\varphi_5' \sin \beta_3 &= 0 \\ x' \cos \theta + y' \sin \theta - b\theta' - R\varphi_6' \cos \tilde{\beta}_2 &= 0 \\ -x' \sin \theta + y' \cos \theta - a_2\theta' \sin \tilde{\beta}_2 &= 0 \\ x' \cos \theta + y' \sin \theta - b\theta' - R\varphi_7' \cos \tilde{\beta}_3 &= 0 \\ -x' \sin \theta + y' \cos \theta + a_2\theta' \sin \tilde{\beta}_3 &= 0 \end{aligned}$$

Par une démarche analogue à celle menée en (5), on peut obtenir deux relations qui relient les quatre angles de braquage :

$$\frac{1}{\tan \beta_3 - \tan \tilde{\beta}_3} - \frac{1}{\tan \tilde{\beta}_2} = \frac{2b}{a_1 + a_2}$$

$$\frac{\tan \tilde{\beta}_3}{\tan \beta_3} - \frac{\tan \tilde{\beta}_2}{\tan \beta_2} = 0$$

Dans le mouvement plan de  $S_1/S_0$ , le CIR I est unique, donc, comme déjà vu, les quatre axes de rotation des roues vont se couper au même point. Puisqu'il y a deux relations liant quatre angles, on peut donc choisir une stratégie de positionnement du CIR. La figure 8 permet de comprendre les stratégies retenues par les constructeurs : à basse vitesse, on privilégie les faibles rayons pour augmenter la manœuvrabilité et, à plus haute vitesse (à partir de 60 à 80 km/h), les plus grands rayons. La dynamique permet de mieux comprendre cette stratégie.



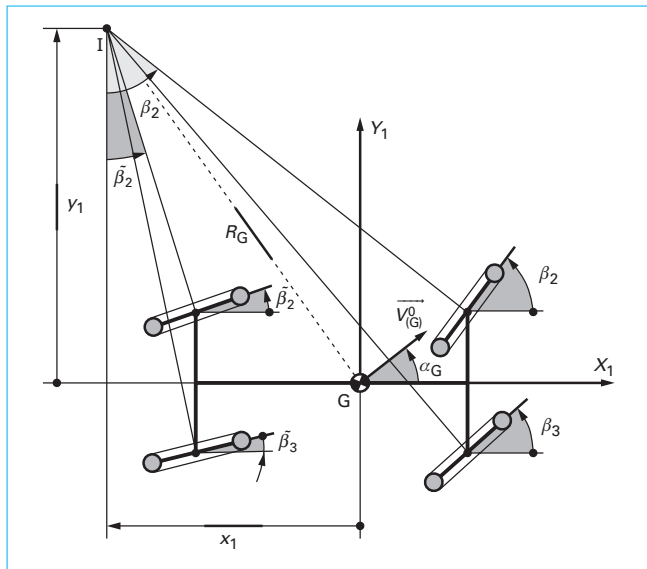


Figure 8 - Position du CIR

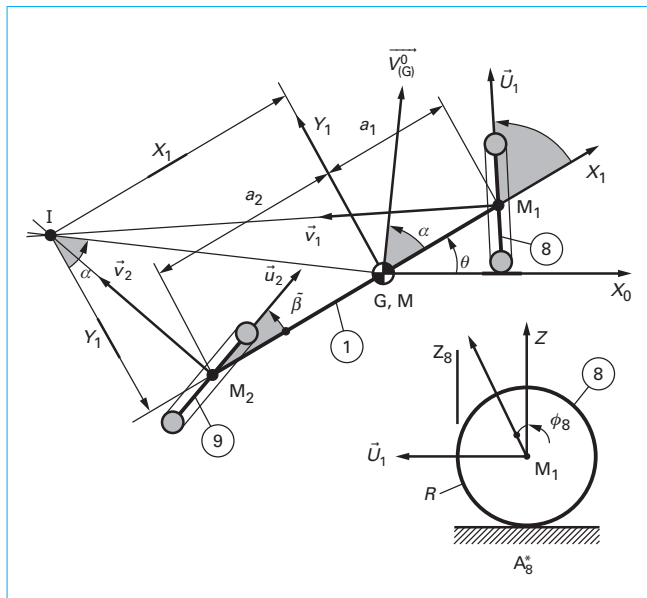


Figure 9 - Modèle à roue moyenne

Sur la figure 8, on trouve immédiatement les relations entre les angles de braquage et les coordonnées du CIR dans le repère véhicule. Par exemple, les relations suivantes :

$$\tan \beta_2 = \frac{a_1 - X_I}{Y_I - b} \quad \tan \tilde{\beta}_2 = \frac{-a_2 - X_I}{Y_I - b}$$

On obtient de même l'angle au vent :  $\tan \alpha = \frac{-X_I}{Y_I}$  que l'on peut aussi exprimer, si besoin, en fonction des angles de braquage.

Il n'est pas sans intérêt de considérer le modèle à roues avant et arrière moyennes directrices ; cela donne le schéma de la figure 9.

Ce modèle est intéressant car il permet de rendre compte du fonctionnement de base d'un véhicule à deux essieux directeurs en roues rigides, sans avoir des relations trop compliquées surtout si l'on retient, ce qui est une très bonne approximation, les faibles angles. Ci-après, on trouvera les relations (9) donnant la position du CIR I dans le repère véhicule, le rayon de virage ainsi que l'angle au vent :

$$\begin{aligned} X_I &\approx - \frac{a_1 \tilde{\beta} + a_2 \beta}{\beta - \tilde{\beta}} \\ Y_I &\approx \frac{a_1 + a_2}{\beta - \tilde{\beta}} \\ R &\approx Y_I \approx \frac{a_1 + a_2}{\beta - \tilde{\beta}} \\ \alpha &\approx \frac{a_1 \tilde{\beta} + a_2 \beta}{a_1 + a_2} \end{aligned} \quad (9)$$

Le mouvement d'un véhicule à roue rigide est cinématiquement déterminé, c'est-à-dire à un angle de braquage donné correspond une trajectoire donnée. Cette trajectoire est – théorie des mouvements plans sur plans – un cercle de centre le CIR I. Ce CIR est un point fixe dans le repère lié au véhicule mais il est aussi fixe dans le repère fixe lié au sol. On l'obtient par une construction géométrique simple : il est situé à l'intersection des axes de rotation des roues. Il est donc situé sur l'essieu arrière dans le cas d'un véhicule à un essieu directeur ; par contre, il est pilotable en position, soit en arrière soit en avant de l'essieu arrière lorsque le véhicule est à deux essieux directeurs. Avec une bonne approximation, on peut confondre la valeur du rayon de virage avec la valeur de la composante transversale positionnant le CIR. Un dernier élément à noter est que, en virage et par air calme, le vecteur vitesse du véhicule par rapport au sol n'est pas porté par l'axe longitudinal du véhicule mais fait un angle – appelé angle au vent ou angle d'incidence – avec cet axe ; la valeur de cet angle est très faible.

## 2. Contact sol-roue avec pneumatique : phénomène de dérive

Il y a une différence essentielle de comportement entre une roue rigide et une roue munie de pneumatique. En effet, celle-ci, de par sa déformation, induit des conséquences cinématiques importantes, en particulier, la trajectoire obtenue sera différente de celle d'une roue rigide. Cette déformation est due à des efforts, ainsi il ne sera pas possible d'avoir une vision purement cinématique ; autrement dit, un véhicule muni de pneumatiques n'est plus cinématiquement déterminé. Et apprendre à conduire revient, en partie, à apprendre à gérer cette déformation en fonction des efforts que le conducteur génère lui-même, par l'intermédiaire du frein et de l'accélérateur, afin d'obtenir la trajectoire souhaitée.

La mécanique du pneumatique est compliquée car elle fait intervenir à la fois des données constructives et des données relatives au sol. L'objectif de la modélisation du pneumatique est de pouvoir prendre en compte tous ces aspects, en proportion variable selon l'utilisation, avec un temps de calcul compatible avec une simulation « temps réel ». Cela permettrait de réduire le nombre d'essais et de rendre plus performants les logiciels de simulation et dynamique du véhicule.

Deux voies d'investigations existent :

- celle modélisant le pneu dans son ensemble et utilisant les éléments finis comme support ;
- celle qui essaie de comprendre et de décrire les phénomènes physiques dans l'aire de contact.

À l'heure actuelle, aucun modèle ne remplit les critères énoncés précédemment. C'est pourquoi l'approche théorique et expérimentale se poursuit, afin de déterminer le torseur des actions mécaniques sol-roues qui interviendra dans les équations de la dynamique.

La place étant comptée, nous n'examinerons pas les détails constructifs du pneumatique ni le marquage qui spécifie le domaine d'utilisation d'un pneu. Le site Michelintransport.com ou l'article de Wikipédia, par exemple, explicite cela en détails.

Dans ce chapitre, nous aborderons dans un premier paragraphe les éléments relatifs à la déformation en statique du pneumatique ; puis, nous examinerons le phénomène de dérive qui se produit lorsque la roue est sollicitée et en mouvement. Dans une troisième étape, nous exposerons les facteurs influençant la dérive ; enfin, nous terminerons par l'exposé de la « *magic formula* » ou représentation Pacejka.

## 2.1 Roue au repos : caractéristiques élastiques du pneu

Le pneumatique étant une enveloppe déformable qui emprisonne de l'air, il présente des caractéristiques de ressort pneumatique différentes selon la direction des sollicitations. Supposons la roue montée dans le dispositif expérimental schématisé sur la figure 10 et qui permet à la roue de se déplacer longitudinalement et latéralement.

Considérons (figure 10) que l'on applique au centre roue un torseur d'actions extérieures exprimé dans le repère lié à la jante  $R_j$  tel que, B désignant le centre roue :

$$\begin{cases} \overrightarrow{F}_{(ext)/(roue1)} = (X_{e/r}, Y_{e/r}, Z_{e/r})_j \\ \overrightarrow{M}_{(ext)/(roue1)}(B) = (0, M_{e/r}, 0)_j \end{cases}$$

Selon les valeurs données aux composantes du torseur, nous obtiendrons les sollicitations donc les déformations recherchées. Remarquons que la roue devra être toujours chargée verticalement sinon, une simple application des lois de Coulomb sur le frottement montrerait que la roue glisserait.

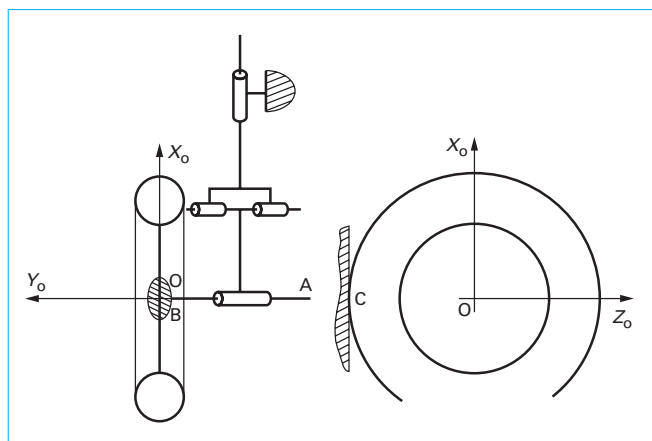


Figure 10 – Machine d'essais

### 2.1.1 Déformation longitudinale

Le cas de charge est le suivant :

$$\begin{cases} \overrightarrow{F}_{(ext)/(roue1)} = (X_{e/r}, 0, Z_{e/r})_j \\ \overrightarrow{M}_{(ext)/(roue1)}(B) = (0, 0, M_{e/r})_j \end{cases}$$

Le centre roue ne reste pas à la verticale de sa position non sollicitée et en fonction de la sollicitation  $X_{e/r}$ , on obtient une courbe type figure 11 donnant l'action du sol sur le pneu que nous noterons  $X_{01}$ . On peut prendre en première approximation la partie linéaire des courbes :

$$X_{01} = -K_x x$$

où  $K_x$  est la raideur longitudinale du pneu dont l'ordre de grandeur est de 350 000 N/m.

Cette raideur longitudinale intervient dans les suspensions en se combinant aux raideurs des liaisons souples suspension/caisse.

### 2.1.2 Déformation transversale

Le cas de charge est le suivant :

$$\begin{cases} \overrightarrow{F}_{(ext)/(roue1)} = (0, Y_{e/r}, Z_{e/r})_j \\ \overrightarrow{M}_{(ext)/(roue1)}(B) = (0, 0, 0)_j \end{cases}$$

Cette raideur sera directement responsable du phénomène de dérive puisqu'elle permet au centre roue de se déplacer latéralement par rapport à sa position initiale comme sur la figure 12.

Là encore, l'approximation linéaire est bonne (figure 13) et on peut poser :

$$Y_{01} = -K_y y$$

avec une valeur de  $K_y$  beaucoup plus faible de l'ordre de 100 000 N/m.

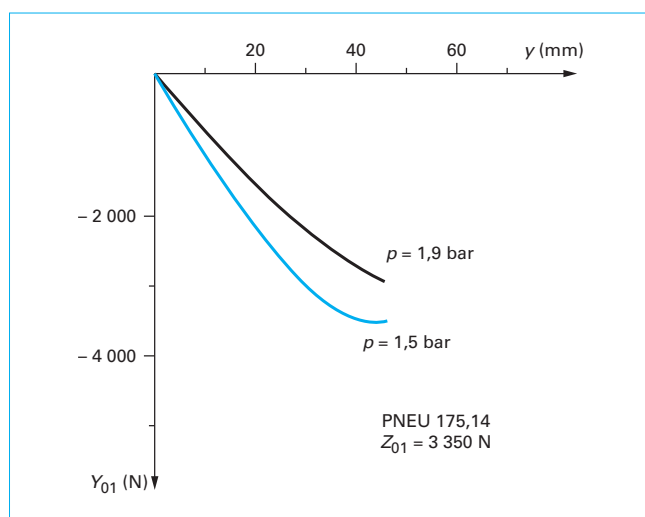


Figure 11 – Action longitudinale sol/roue en fonction du déplacement du point B

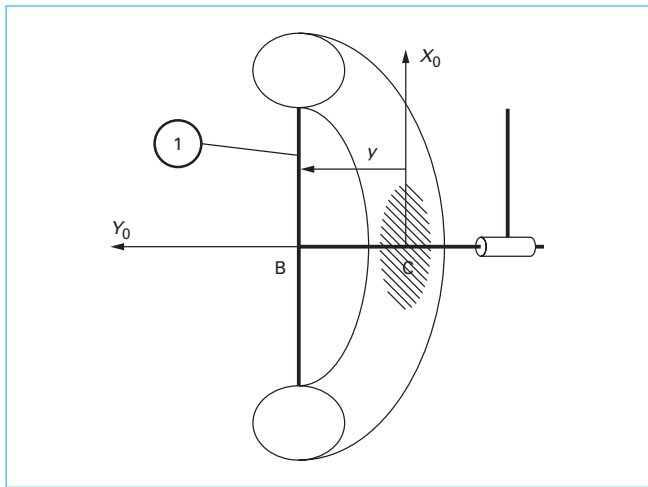


Figure 12 – Déplacement latéral du centre roue

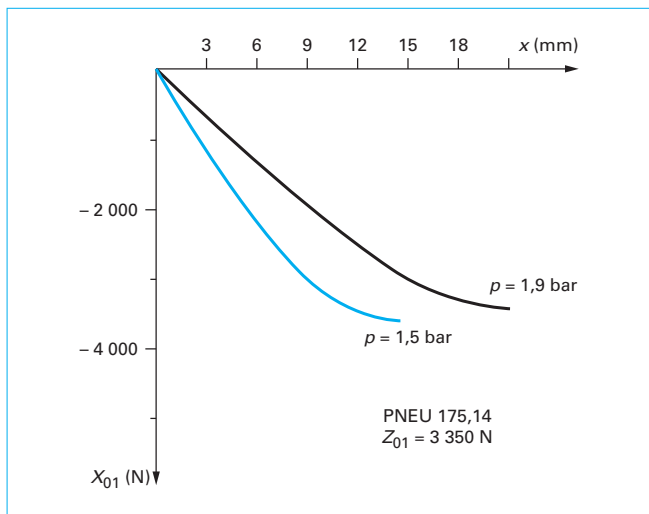


Figure 13 – Effort latéral sol/roue en fonction du déplacement du point B

### 2.1.3 Déformation verticale

Le cas de charge est le suivant :

$$\begin{cases} \overrightarrow{F_{(ext)/(roue1)}} = (0, 0, Z_{e/r})_j \\ \overrightarrow{M_{(ext)/(roue1)}(B)} = (0, 0, 0)_j \end{cases}$$

La charge verticale écrase le pneumatique, cet écrasement dépend fortement de la pression de gonflage. Là encore, on peut considérer que le phénomène est linéaire, et on peut poser :

$$Z_{01} = -K_z z$$

avec un ordre de grandeur pour  $K_z$  de 150 000 N/m. Cette raideur verticale intervient de manière conséquente dans l'établissement des suspensions et notamment sur le confort vertical. Dans les véhicules industriels, elle intervient aussi dans le phénomène de roulis des essieux.

### 2.1.4 Déformation angulaire

Le cas de charge est le suivant :

$$\begin{cases} \overrightarrow{F_{(ext)/(roue1)}} = (0, 0, Z_{e/r})_j \\ \overrightarrow{M_{(ext)/(roue1)}(B)} = (0, 0, N_{e/r})_j \end{cases}$$

Par application du couple sous charge verticale, la roue tourne d'un angle  $\beta$ . En se restreignant aux petits angles, on peut retenir l'approximation linéaire :

$$N_{01} = -K_\beta \beta$$

Cette raideur, de l'ordre de 1 500 mN/rad intervient dans le dimensionnement de la direction pour les manœuvres de parking.

## 2.2 Roue en mouvement : phénomène de dérive

### 2.2.1 Description du phénomène de dérive

Le cas de charge est le suivant :

$$\begin{cases} \overrightarrow{F_{(ext)/(roue1)}} = (X_{e/r}, Y_{e/r}, Z_{e/r})_j \\ \overrightarrow{M_{(ext)/(roue1)}(B)} = (0, 0, 0)_j \end{cases}$$

La présence de la force transversale, conjuguée à la rotation de la roue, conduit au phénomène de dérive. Comme vu au paragraphe précédent, le centre roue ne reste pas à la verticale de l'aire de contact, ainsi, à chaque incrément de l'angle de rotation, le centre roue aura une trajectoire qui résultera de la combinaison du déplacement latéral  $y$  et de l'avancement dû à la rotation de la roue ainsi qu'on peut le voir sur les figures 14 et 15. Le centre de l'aire de contact se déplace sur une droite faisant un angle  $\delta$ , appelé **angle de dérive**, avec la trace au sol du plan de jante. C'est le phénomène de base du fonctionnement du pneumatique où l'on voit la roue dévier de sa trajectoire initiale sans braquage du plan de jante de celle-ci.

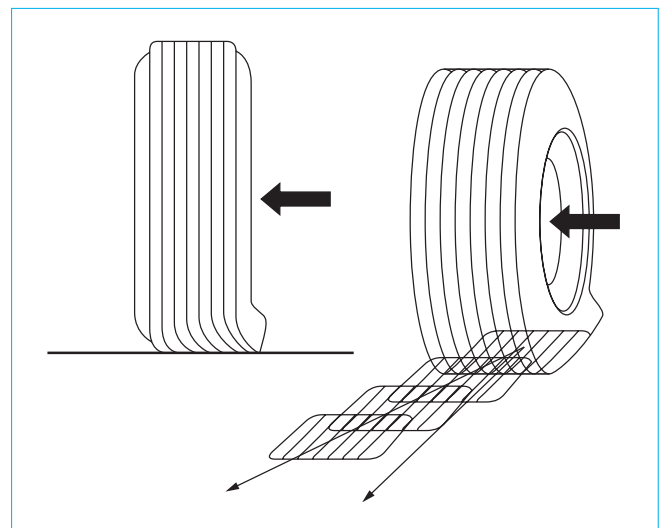


Figure 14 – Roue en dérive : empreintes successives au sol

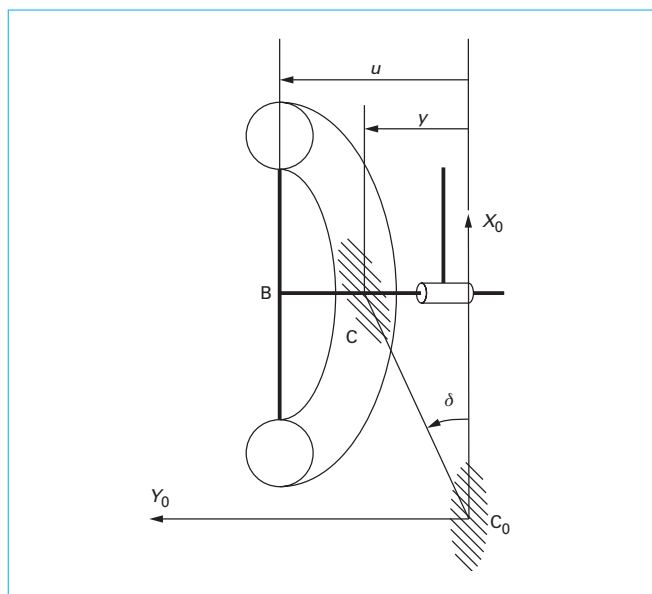


Figure 15 – Roue en dérive : angle de dérive

La conséquence immédiate est que le centre C de l'aire de contact ne se déplace plus selon la trace du plan de jante comme pour une roue rigide mais selon cette droite, ce qui signifie que le vecteur vitesse du point géométrique C « sort » lui aussi du plan

de jante. En interprétant ce résultat en terme de cinématique plane, le CIR, qui était situé à l'intersection des normales aux plans de jante en roues rigides (positionné sur l'essieu arrière pour un véhicule à 2 roues directrices), va se situer à l'intersection des normales aux trajectoires du centre de l'aire de contact donc aux vecteurs vitesse, ce qui donnera un point différent du précédent. La caractéristique principale de ce point est qu'il est la conséquence de la déformation du pneu, il va donc dépendre de la dynamique, c'est-à-dire du torseur d'efforts appliqué au centre roue. On notera alors, lorsque ce sera nécessaire,  $I_G$  pour géométrique, le CIR cinématiquement déterminé et  $I_D$  le CIR dépendant de l'angle de dérive. On obtient sur la figure 16 le résumé des CIR et des vecteurs vitesses des centres de l'aire de contact. On constate alors que le CIR  $I_D$  peut se déplacer d'avant en arrière du véhicule selon les valeurs relatives des angles de dérives avant et arrière, ce qui sera directement relié au comportement du véhicule, comme on le verra dans les sections suivantes.

### 2.2.2 Résultats expérimentaux

Le torseur des actions du sol sur la roue en A, centre de l'aire de contact, comporte six composantes :

$$\begin{cases} \overrightarrow{F_{(sol)/(roue)}} = (X_{0/1}, Y_{0/1}, Z_{0/1})_j \\ \overrightarrow{M_{(sol)/(roue)}}(B) = (L_{0/1}, M_{0/1}, N_{0/1})_j \end{cases}$$

parmi lesquelles, on privilégiera les composantes  $Y_{0/1}$  et  $N_{0/1}$ .

Ces éléments sont obtenus sur des machines d'essais soit à tambour intérieur ou extérieur, soit sur tapis roulant *via* un moyeu dynamométrique.

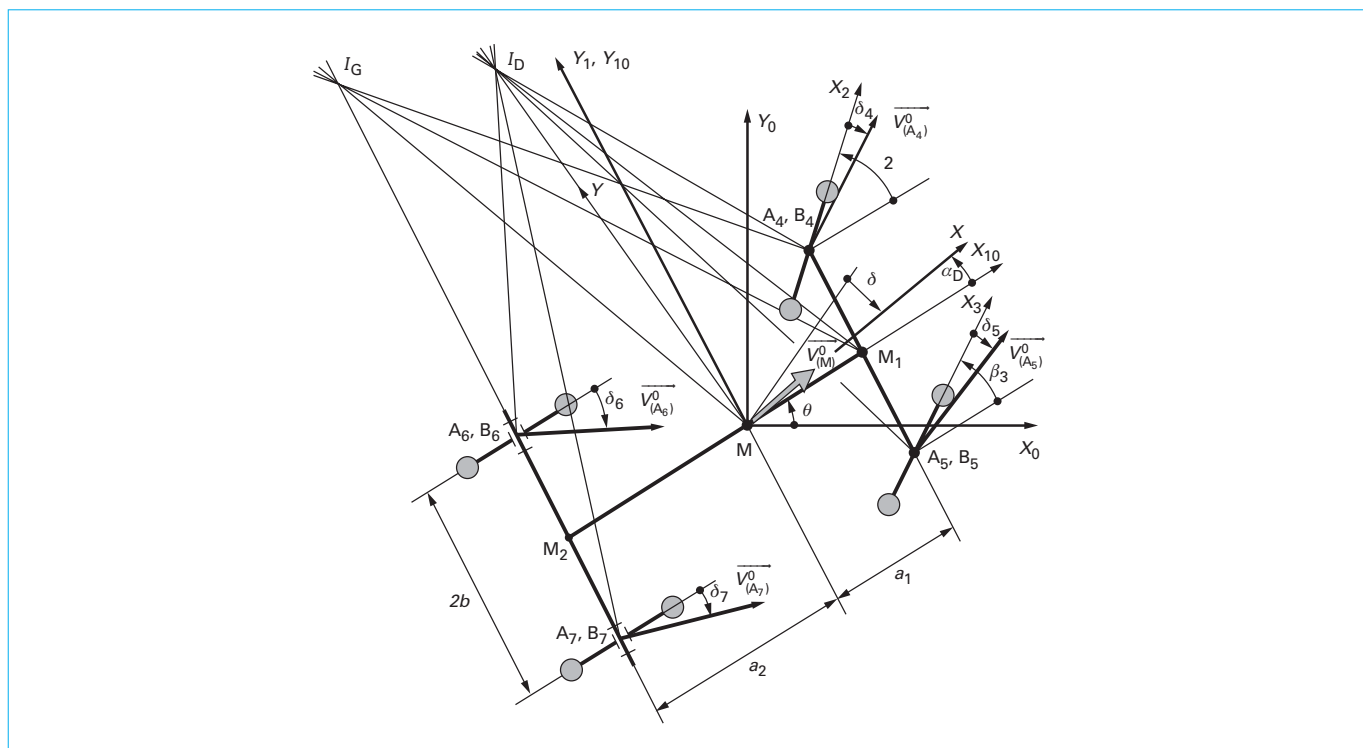


Figure 16 – Angles de dérive et centre instantané de rotation du véhicule

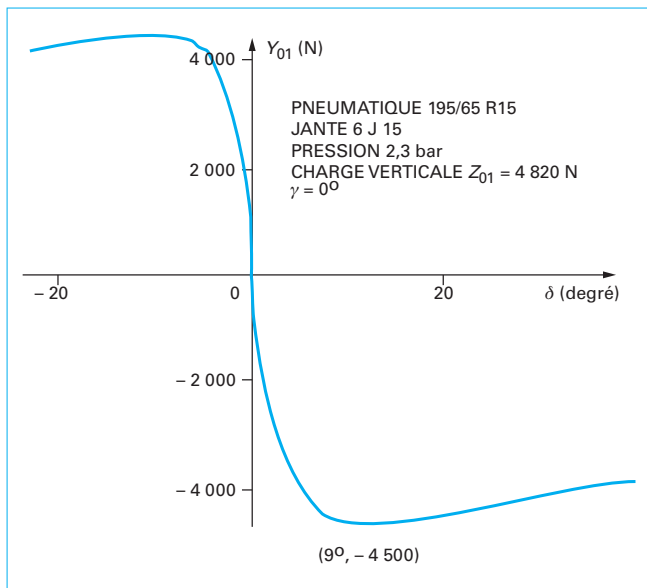


Figure 17 – Force de dérive en fonction de l'angle de dérive

### 2.2.2.1 Force de dérive $Y_{01}$ en fonction de la dérive

La courbe reliant force de dérive  $Y_{01}$  à l'angle de dérive a la forme caractéristique illustrée à la figure 17.

Elle passe par un maximum voisin de 8 à 10° d'angle de dérive. Un examen plus fin montre une progression linéaire jusqu'aux environs de 4° d'angle puis un infléchissement progressif de la pente avant le sommet. On peut donc développer la loi  $Y_{0/1} = Y_{0/1}(\delta)$  en série autour de l'origine :

$$Y_{0/1} = \left( \frac{\partial Y_{0/1}}{\partial \delta} \right)_0 \delta + \dots$$

On pose :

$$\left( \frac{\partial Y_{0/1}}{\partial \delta} \right)_0 = -D \quad D > 0 \quad Y_{0/1} = (-D) \delta + \dots$$

$D$  est appelé rigidité de dérive dont l'ordre de grandeur est 40 000 N/rad (700 N/°).

On peut faire de même en un autre point de la courbe ( $Y^*$ ,  $\delta^*$ ) :

$$Y_{0/1} = Y^* + \left( \frac{\partial Y_{0/1}}{\partial \delta} \right)^* (\delta - \delta^*) + \dots \quad \left( \frac{\partial Y_{0/1}}{\partial \delta} \right)^* = -D^*$$

avec  $D^*$ , rigidité de dérive au point considéré, pente de la courbe en ce point. Sur la figure 17, on voit que  $D^*$  diminue lorsque l'angle de dérive croît.

### 2.2.2.2 Moment d'autoalignement $N_{01}$ en fonction de la dérive

On obtient une courbe (figure 18) similaire et on peut faire aussi un développement en série de la loi  $N_{0/1} = N_{0/1}(\delta)$  autour de l'origine :

$$N_{0/1} = \left( \frac{\partial N_{0/1}}{\partial \delta} \right)_0 \delta + \dots \quad \left( \frac{\partial N_{0/1}}{\partial \delta} \right)_0 = A \quad A > 0 \quad N_{0/1} = A\delta + \dots$$

$A$  est la rigidité en torsion du pneu dont l'ordre de grandeur est 800 Nm/rad.

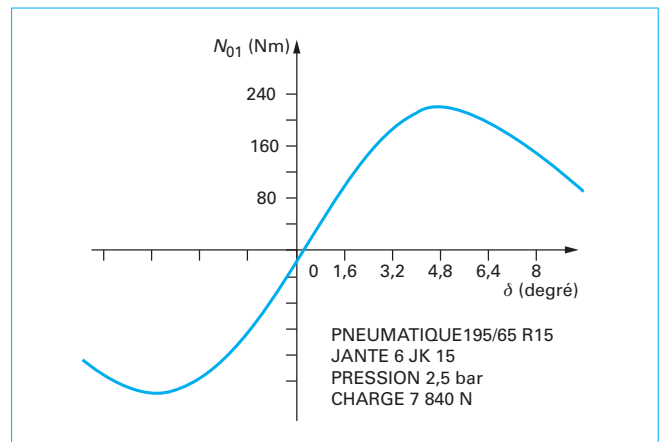


Figure 18 – Couple d'autoalignement en fonction de l'angle de dérive

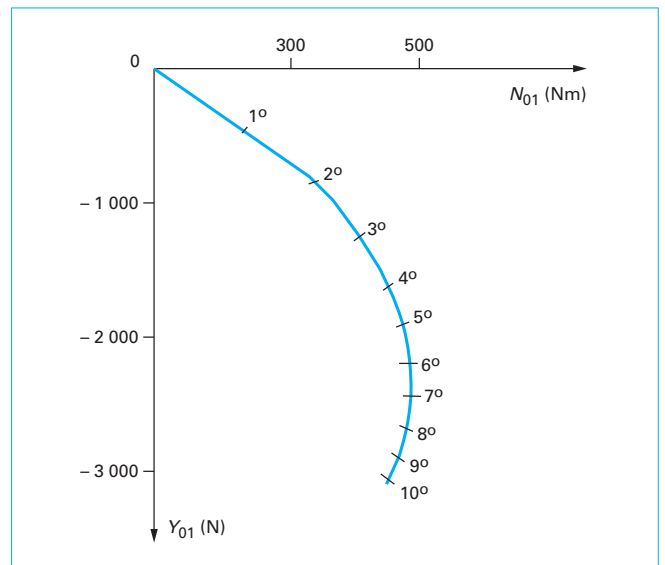


Figure 19 – Polaire du pneumatique

Ce moment d'autoalignement, en l'absence de moyen de guidage du plan de jante, orienterait la jante selon la trajectoire du centre de l'aire de contact.

### 2.2.2.3 Relation force de dérive-moment d'autoalignement

Puisque  $Y_{0/1} = Y_{0/1}(\delta)$  et  $N_{0/1} = N_{0/1}(\delta)$ , on peut naturellement penser à éliminer  $\delta$  entre ces deux éléments et obtenir une polaire  $Y_{0/1} = Y_{0/1}(N_{0/1})$ , graduée en angle de dérive, comme en aérodynamique. Ce qui donne la figure 19.

On peut aussi, en ne retenant que  $Y_{0/1}$  et  $N_{0/1}$ , représenter ce sous-torseur par un vecteur glissant unique passant par un point  $N$  :

$$\overline{AN} = t_p \vec{X}_0 \\ N_{0/1} = t_p Y_{0/1}$$

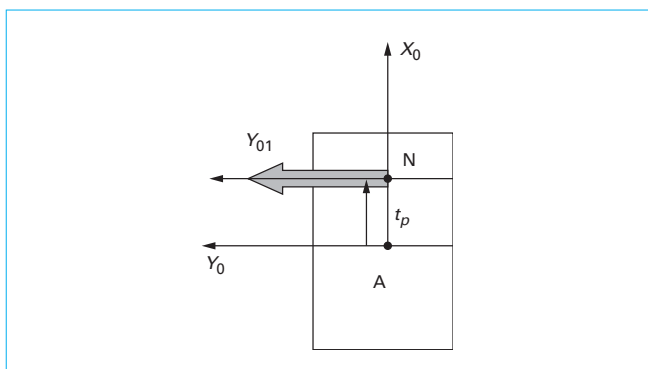


Figure 20 – Chasse du pneumatique

On appelle  $t_p$  la chasse du pneumatique (figure 20). C'est une quantité négative de l'ordre de  $-2$  cm qui diminue lorsque la dérive augmente, ce qui traduit bien le fait que  $N_{0/1}$  passe par un maximum. Dans une direction, elle s'ajoute à la chasse géométrique vue précédemment.

## 2.2.3 Éléments influençant la force de dérive

### 2.2.3.1 Effort normal

De nombreux facteurs influencent la force de dérive, ou la rigidité de dérive ce qui revient au même. Actuellement, tous les pneumatiques pour les véhicules routiers sont de conception radiale, nous ne retiendrons pas ce point. La déformation du pneumatique étant à l'origine du phénomène de dérive, la pression de gonflage, le rapport d'aspect (hauteur de flanc sur largeur du pneu) et l'effort vertical, dit effort normal vont avoir une grande influence. Cela explique que, sur les figures précédentes, ces indications sont données.

Mais, parmi ces trois éléments, un seul, l'effort normal, va varier au cours de l'utilisation du véhicule. On se focalise donc sur l'influence de la charge normale sur la force de dérive. Sur la figure 21 est tracé un réseau de courbes  $Y_{0/1} = Y_{0/1}(\delta)$  pour différents cas de charges verticales.

Sur la figure 22 sont portées les courbes  $Y_{0/1} = Y_{0/1}(Z_{0/1})$ , pour différents angles de dérive. Il va de soi, qu'au delà d'une certaine valeur de la charge normale, il y a saturation comme constaté sur la figure 22.

Une autre vision de cette dépendance de la force de dérive à l'effort normal est de tracer une courbe  $D = D(Z_{0/1})$ , comme sur la figure 23 où, là encore, on visualise le phénomène de saturation qui peut être aussi interprété comme donnant la charge normale optimale pour le pneu considéré.

La conséquence de cette dépendance se retrouve lors d'un virage au cours duquel se produit le phénomène dit de transfert de charge  $\Delta P$ . Le véhicule, en virage, prend du roulis, ce qui occasionne le délestage des suspensions intérieures au virage et la compression des externes avec pour corollaire, un charge normale moindre  $P - \Delta P$  sur les roues intérieures et une plus grande  $P + \Delta P$  sur les roues extérieures. La courbe, figure 23, montre bien que les rigidités de dérive ne seront pas les mêmes pour chacune des roues d'un même essieu. Donc, dans un virage, la non-linéarité de cette courbe va alors impliquer, qu'à charge normale totale égale sur l'essieu, la rigidité de dérive globale du train sera moindre que si chacune des roues était chargée à  $P$ , d'où une force transversale générée moindre.

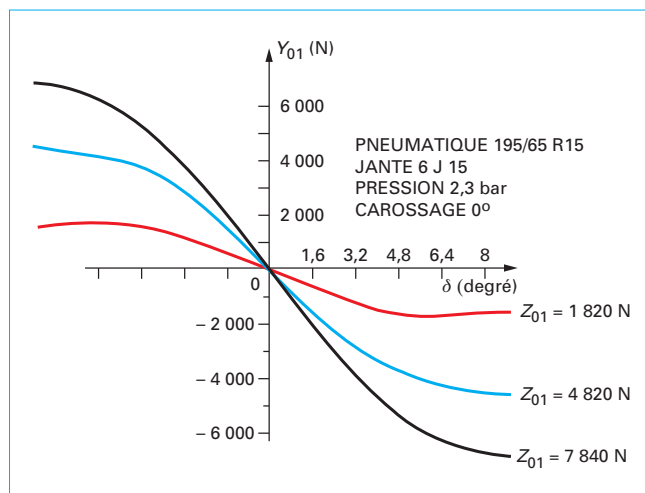


Figure 21 – Variation de la force de dérive avec la force normale

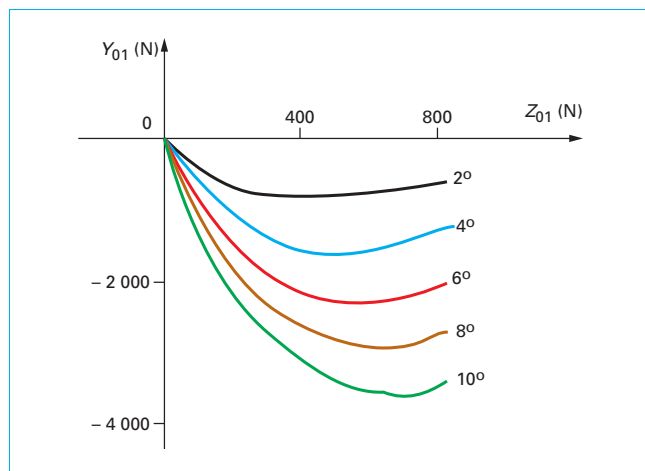


Figure 22 – Force de dérive en fonction de l'effort normal à isodérive

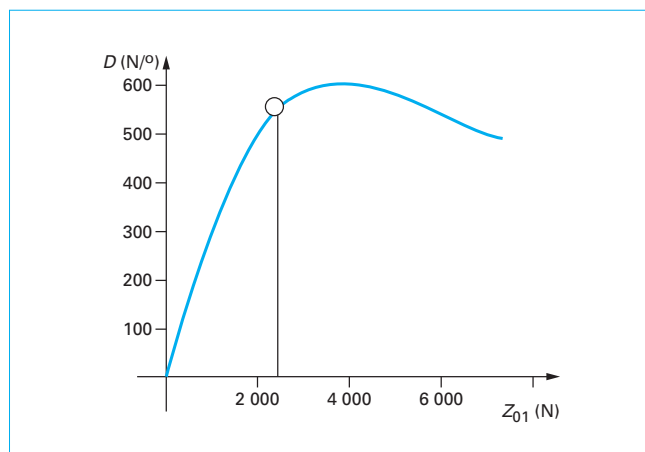


Figure 23 – Rigidité de dérive en fonction de la charge normale



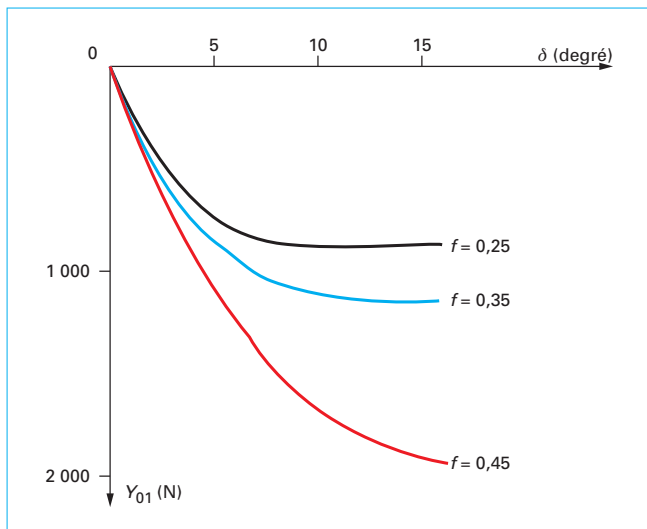


Figure 24 – Influence du coefficient de frottement sur la charge transversale

### 2.2.3.2 Coefficient de frottement

Outre la force normale, il existe une caractéristique qui varie aussi lors de l'utilisation du véhicule, c'est le **coefficient de frottement**. La figure 24 donne un réseau de courbes  $Y_{0/1} = Y_{0/1}(\delta)$  pour différentes valeurs du coefficient de frottement ; à la limite, on retrouve les lois de Coulomb sur le frottement où  $|Y_{0/1}| = |fZ_{0/1}|$ .

### 2.2.3.3 Carrossage

Rappelons que le carrossage est l'inclinaison du plan de jante par rapport à la verticale. Désignons l'angle par  $\gamma$  ; sa valeur est faible. La désignation usuelle du signe de cet angle est problématique car elle crédite du même signe l'angle de carrossage des deux roues du même essieu (cf. section 1). Cela est contraire aux conventions de la mécanique théorique, il faudra en tenir compte lors d'une mise en équation.

Lorsqu'une roue ayant du carrossage dérive, on aura :  $Y_{0/1} = Y_{0/1}(\delta, \gamma)$ . Au voisinage de l'origine, on peut donc écrire :

$$Y_{0/1} = \left( \frac{\partial Y_{0/1}}{\partial \delta} \right)_0 \delta + \left( \frac{\partial Y_{0/1}}{\partial \gamma} \right)_0 \gamma + \dots \quad Y_{0/1} = (-D)\delta + (-C)\gamma + \dots$$

On constate donc que, suivant le signe de  $\gamma$ , la valeur de  $Y_{0/1} = Y_{0/1}(\delta)$  peut augmenter ou diminuer. La figure 25 donne un exemple de courbe.

### 2.2.3.4 Influence de l'effort longitudinal sur l'effort transversal

Cette notion fait référence explicitement au cercle dit d'adhérence dans les lois de Coulomb. On se reportera utilement à [A 1 661]. La relation de base, équation du cercle, est la suivante :

$$(X_{0/1})^2 + (Y_{0/1})^2 = (T_{0/1})^2 = (Z_{0/1})^2$$

où l'on voit clairement que, à  $f$  et  $Z_{01}$  constants, si  $X_{01}$  augmente, on aura  $Y_{01}$  qui diminuera. On fait la même constatation sur le pneu mais au lieu d'un cercle, on obtient une ellipse dite ellipse d'adhérence comme le montre la figure 26.

Sur cette figure 26, on peut comprendre le fonctionnement du pneu lors d'un freinage. Si l'on part d'un point de fonctionnement de  $Y_{01} = 2\,500$  N et de  $X_{01} = 1\,000$  N et que, par un freinage,  $X_{01}$  atteint  $2\,000$  N, si l'on veut conserver  $Y_{01} = 2\,500$  N, il faudra changer de

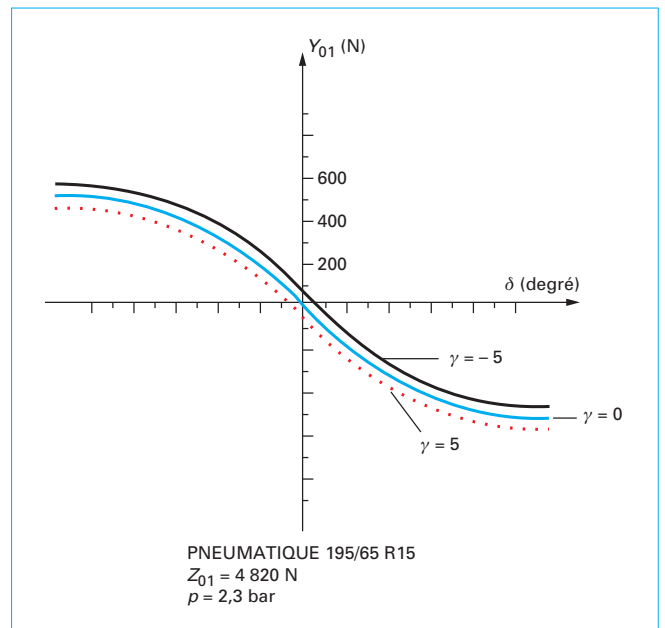


Figure 25 – Influence du carrossage sur la force transversale

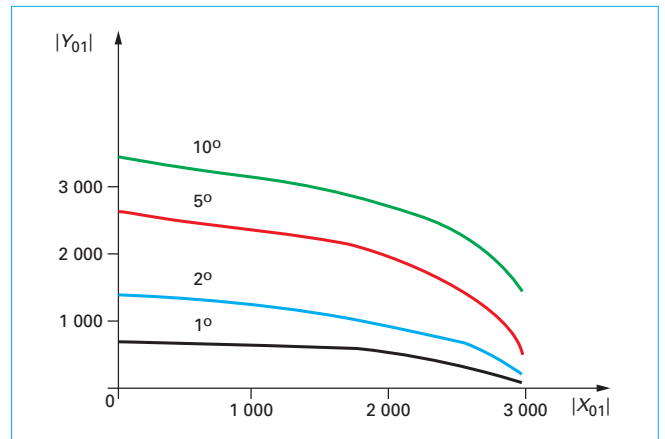


Figure 26 – Ellipse du pneu à angle de dérive constant

courbe et passer de la courbe  $\delta = 5^\circ$  à  $\delta = 7^\circ$ , donc faire dériver davantage le pneu. Mais on voit que cela a une limite si le  $X_{01}$  demandé est trop grand. Ce qui explique qu'il n'est jamais bon de freiner trop violemment en virage car on peut perdre tout contrôle transversal.

## 2.3 Effort longitudinal et glissement

### 2.3.1 Résistance au roulement

Considérons la roue en mouvement stationnaire en ligne droite, elle a donc une vitesse de rotation constante autour de son axe  $\mathbf{B}Y_0$ .

Si elle est soumise à ce torseur :

$$\begin{cases} \vec{F}_{\text{ext}/(\text{roue})} = (X_{e/r}, 0, Z_{e/r})_j \\ \vec{M}_{\text{ext}/(\text{roue})}(\mathbf{B}) = (0, 0, 0)_j \end{cases}$$

alors on peut écrire les trois équations suivantes :

$$\begin{cases} X_{e/r} + X_{0/1} = 0 \\ Z_{e/r} + Z_{0/1} - mg = 0 \\ M_{0/1} - RX_{0/1} = 0 \end{cases}$$

et puisque  $M_{0/1} = -hZ_{0/1}$  (loi de Coulomb, avec  $h$  paramètre de résistance au roulement), on déduit que :

$$X_{0/1} = -\mu Z_{0/1} \quad \mu = h/R$$

On appelle  $\mu$  le coefficient de résistance au roulement. Sa valeur est de l'ordre de 2/100. Remarquons que si l'on traîne une charge alors, (lois de Coulomb avec  $f$  coefficient de frottement), on a  $X_{0/1} = fZ_{0/1}$  avec une valeur de 0,5 à 0,8 pour  $f$ , ce qui explique la supériorité de la brouette sur le traîneau pour déplacer une charge.

### 2.3.2 Effort longitudinal et glissement

Considérons maintenant, la roue freinée ou accélérée, si elle est soumise au torseur suivant :

$$\begin{cases} \vec{F}_{(ext)/(roue)} = (X_{e/r}, Y_{e/r}, Z_{e/r})_j \\ \vec{M}_{(ext)/(roue)}(B) = (0, M_{e/r}, 0)_j \end{cases}$$

la présence du moment  $M_{e/r}$  change le fonctionnement du pneu et l'action  $X_{01}$  dépend alors du « glissement »  $S_x$  défini par :

$$S_x = \frac{x' - R\phi'}{x'} \quad x' = \overline{V^0(B)} \quad \vec{X}_0$$

Lorsque  $x' - R\phi' > 0$ , il y a freinage, dans le cas contraire, il y a accélération. Lorsque  $x' - R\phi' = 0$ , il y a non-glissement. Dans la figure 27, on a un réseau de courbes donnant la force longitudinale en fonction du glissement en % pour différentes valeurs d'angle de dérive. On constate qu'il y a un maximum vers 10 % de glissement, ensuite pour de fortes valeurs du glissement, on tend vers un glissement coulombien. Ce maximum est mis à profit dans les systèmes de freinage à antiblocage afin d'obtenir la force maximum de freinage.

## 2.4 Formulation de Pacejka

On a dit que la modélisation de pneumatique posait des problèmes, par conséquent, la connaissance du pneu passe par les essais comme on vient de le voir. Les courbes obtenues sont, en fait, une succession de points de fonctionnement. Mais dans les simulations, il est plus commode d'avoir une formule analytique qu'un tableau de points à gérer. Aussi est-il fréquent de représenter ces courbes par des polynômes voire, lorsque c'est possible, par des fonctions. On utilise usuellement trois niveaux de représentation analytique, par exemple, pour la force de dérive :

- linéaire avec  $Y_{0/1} = -D\delta$  ;
- linéaire saturé avec :

$$\begin{aligned} Y_{0/1} &= -D\delta & \delta < \delta^* \\ Y_{0/1} &= \text{cste} & \delta > \delta^* \end{aligned}$$

- complet avec la représentation de Pacejka. Cette représentation consiste à faire passer par les points expérimentaux la fonction suivante :

$$Y = -D \sin [C \tan (B\Phi)] \quad \Phi = (1-E)x + \frac{E}{B} \tan (Bx)$$

Le réglage des valeurs des coefficients B,C,D,E permet l'ajustement de la courbe avec la courbe expérimentale. Cet ajustement est obtenu par le biais de coefficients dits primaires qui, via une

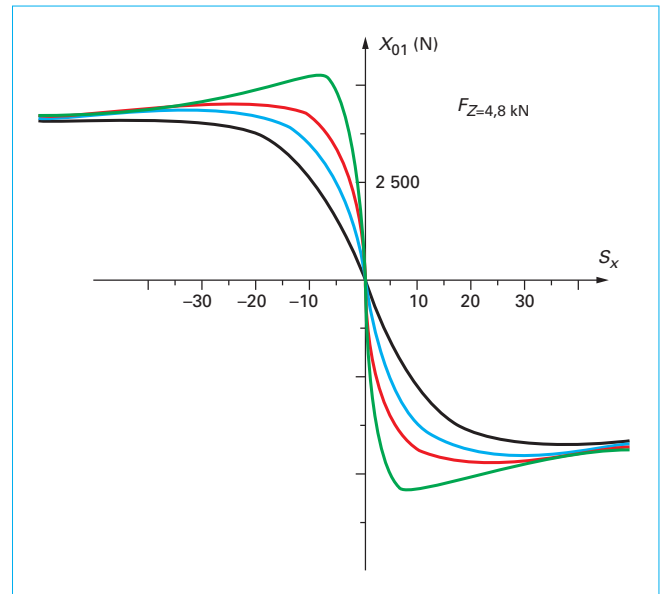


Figure 27 – Force longitudinale en fonction du glissement pour différentes dérives

formule, donnent les valeurs de B,C,D,E. Par le biais de ces formules existe aussi la possibilité d'extrapoler, dans une certaine mesure, les valeurs de la fonction  $Y$  vers d'autres conditions que celles de la courbe expérimentale.

On a pu remarquer que la forme des courbes pour  $Y_{01}$ ,  $X_{01}$  et  $N_{01}$  est la même. On utilisera donc la même fonction avec des valeurs différentes de coefficients pour représenter  $X_{01}$  et  $N_{01}$ .

## 3. Cinématique en roues déformables

Comme la section précédente l'a montré, la déformation latérale du pneumatique induit un comportement tel que les centres des roues ne sont plus à la verticale du centre des aires de contact sol/pneumatique. La conséquence cinématique est que le vecteur vitesse, par rapport au sol, du centre de l'aire de contact n'est plus porté par la trace au sol du plan de jante. C'est la manifestation du phénomène de dérive. Un modèle cinématique qui prendrait en compte le déport latéral du pneumatique (responsable du phénomène de dérive) est certes envisageable, mais la complexité induite est très grande pour un gain insignifiant. Il est usuellement admis que l'établissement du phénomène de dérive nécessite au plus deux tours de roues. Aussi, les modèles cinématiques ne prennent pas en compte le déport latéral, on retient donc une schématisation dans laquelle on admet que la dérive est établie.

### 3.1 Modélisation cinématique sans déport latéral

La schématisation du véhicule reprend celle décrite à la section 1 dans laquelle le centre de roues et le centre de l'aire de contact sont sur une même verticale. Ainsi, le point M, projection du centre de gravité G dans le plan passant par le centre des roues, est positionné par les deux paramètres  $x$ ,  $y$ , non représentés sur la figure 28. Seul l'angle de lacet  $\theta$  est notifié. Les centres des roues et

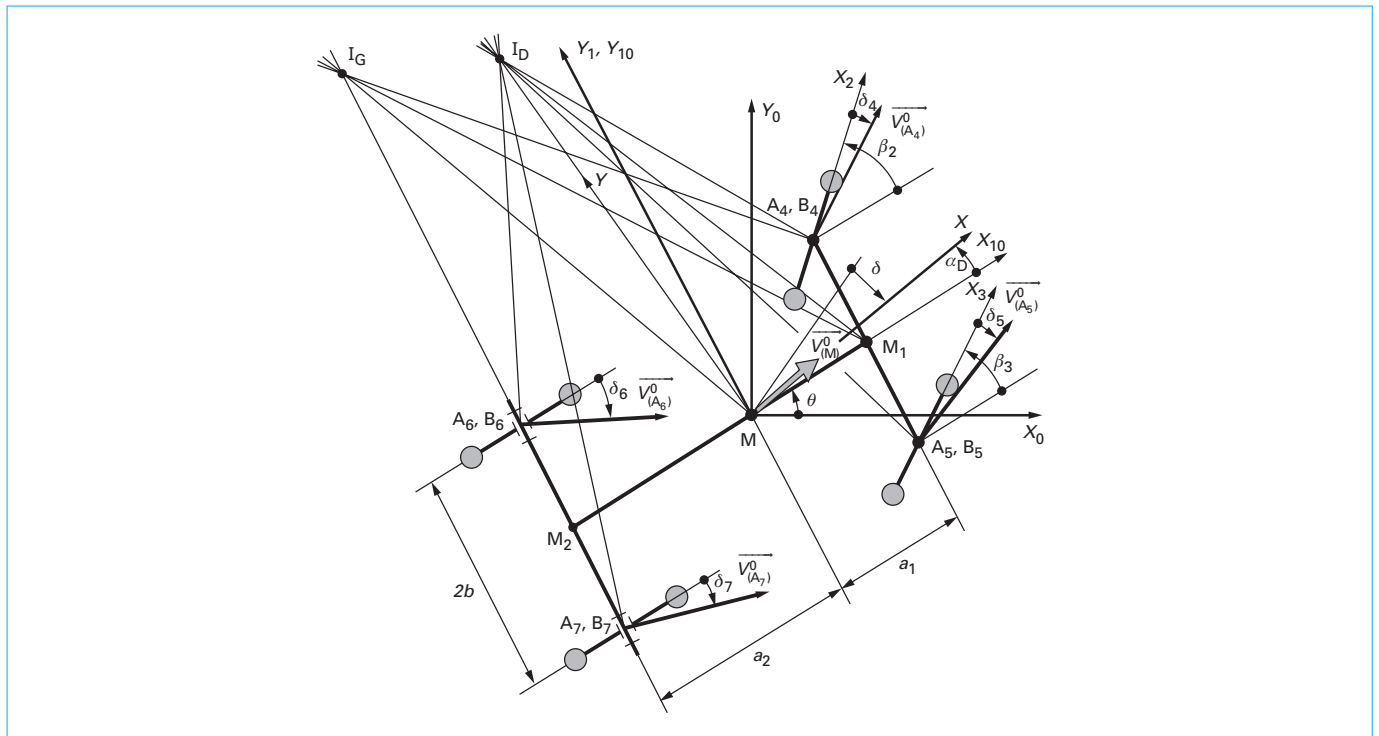


Figure 28 – Schématisation d'ensemble

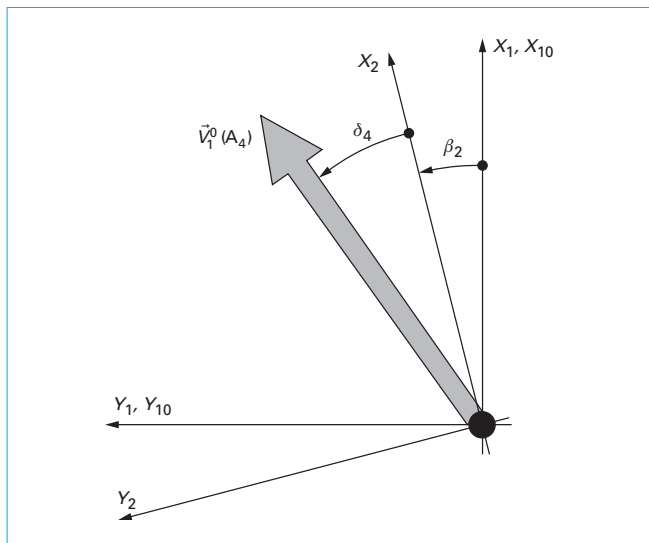


Figure 29 – Angle de dérive et de braquage

le centre de l'aire de contact étant sur une même verticale,  $\vec{B_i A_i} = -R \vec{Z}_{10}$   $i = 4, 5, 6, 7$ , on en conclut que  $\vec{V}^0(A_i) = \vec{V}^0(B_i)$ ; dit autrement, la vitesse du point géométrique  $A_i$  est égale à la vitesse du centre roue  $B_i$ . Le phénomène de dérive est pris en compte par l'angle que fait ce vecteur vitesse avec la trace au sol du plan de jante : c'est l'angle de dérive  $\delta_i$ , tel que  $(\vec{X}_i, \vec{V}^0(A_i)) = \delta_i$ .

On se référera à la figure 29.

En cinématique à roues rigides, le vecteur vitesse du point M (ou G) a été mis en évidence,  $\vec{V}^0(M) = V\vec{X}$ , ainsi que l'angle  $\alpha = [X_1, \vec{V}^0(M)]$  de ce vecteur avec l'axe longitudinal du véhicule. Le paramétrage en  $x, y, \theta$  est dit paramétrage lagrangien ; il permet de positionner le véhicule dans le repère  $R_0$ . Un autre paramétrage, dit paramétrage eulérien, consiste à prendre  $\vec{V}^0(M), \alpha, \theta$  comme paramètres. Ce dernier, que nous retiendrons, permet de décrire l'attitude du véhicule sur sa trajectoire indépendamment de sa position par rapport à l'origine. Le passage d'un repère à l'autre a été vu dans la section 1. Remarquons que sur la figure 28, l'angle  $\alpha$  est indicé D (comme Dérive) pour le distinguer du même angle lorsque les roues sont indéformables, mais lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté, nous ne le mettrons pas.

### 3.1.1 Calcul de la vitesse du centre roue

Nous prendrons, pour effectuer ce calcul, le point  $B_4$  centre de la roue 4. Soit encore :

$$\vec{V}^0(A_4) = \vec{V}^0(B_4)$$

Ce point  $B_4$  appartient à  $S_4$  mais aussi à  $S_1$  de par la schématisation retenue, ce qui donne :

$$\vec{V}^0(B_4) = \vec{V}^0(G) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{GB}_4$$

en prenant  $\vec{V}^0(G) = V\vec{X}$  et  $\vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{GB}_4 = [-b\theta' a_1 \theta']_{10}$  on obtient alors :

$$\vec{V}^0(B_4) = \begin{bmatrix} V \cos \alpha - b\theta' \\ V \sin \alpha + a_1 \theta' \\ 0 \end{bmatrix}_{10}$$

Mais, compte tenu de la présence du pneumatique, on peut aussi écrire (figure 29) que :

$$\overrightarrow{V_4^0(B_4)} = V_4 [\cos(\beta_2 + \delta_4) \sin(\beta_2 + \delta_4) \mathbf{0}]_{10}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} V \cos \alpha - b\theta' &= V_4 \cos(\beta_2 + \delta_4) \\ V \sin \alpha - a_1\theta' &= V_4 \sin(\beta_2 + \delta_4) \end{aligned} \quad V_4 = \|\overrightarrow{V^0(B_4)}\|$$

On peut simplifier ces résultats en remarquant que les angles sont petits, que  $|b\theta'| \ll V$ , mais que si  $|a_1\theta'| \ll V$ , on a  $|a_1\theta'| \equiv |V\alpha|$ . On procède de la même façon pour chacune des roues et on obtient les relations suivantes :

$$\begin{aligned} V &= V_i \\ V\alpha + a_1\theta' &= V(\beta_2 + \delta_4) \\ V\alpha + a_1\theta' &= V(\beta_3 + \delta_5) \\ V\alpha - a_2\theta' &= V\delta_6 \\ V\alpha - a_2\theta' &= V\delta_7 \end{aligned}$$

### 3.1.2 Expressions des angles de dérive en fonction des paramètres

Des expressions précédentes, on en déduit immédiatement la valeur des angles de dérive en fonction des paramètres. Cela donne :

$$\begin{aligned} \delta_4 &= \alpha + \frac{a_1\theta'}{V} - \beta_2 \\ \delta_5 &= \alpha + \frac{a_1\theta'}{V} - \beta_3 \\ \delta_6 &= \alpha - \frac{a_2\theta'}{V} \\ \delta_7 &= \alpha - \frac{a_2\theta'}{V} \end{aligned} \quad (10)$$

On remarque que, en l'absence de braquage du train arrière, les dérive des pneus arrières sont égales. Mais on a vu à la section 1 que les angles de braquage des roues droite et gauche étaient très voisins, ainsi fréquemment, on prendra les angles de dérive des roues avant égaux.

On peut bien entendu exprimer les paramètres en fonction des angles de dérive, ce qui donne, toujours avec l'approximation des petits angles :

$$\begin{aligned} \theta' &= \frac{1}{a_1 + a_2} (\beta_2 + \delta_4 - \delta_6) V & \theta' &= \frac{1}{a_1 + a_2} (\beta_3 + \delta_5 - \delta_7) V \\ \alpha &= \frac{1}{a_1 + a_2} [a_1\delta_6 + a_2(\beta_2 + \delta_4)] & \alpha &= \frac{1}{a_1 + a_2} [a_1\delta_7 + a_2(\beta_3 + \delta_5)] \end{aligned}$$

### 3.1.3 Vitesse de glissement au contact

Dans ce paragraphe, nous calculerons la vitesse du point  $A_4$  appartenant à la roue 4 dans le mouvement de la roue par rapport au sol, soit  $\overrightarrow{V_4^0(A_4)}$ . Nous utiliserons donc la formule de la cinéma-

tique du solide. On notera que la valeur obtenue sera différente de la vitesse du point géométrique A :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{V_4^0(A_4)} &= \overrightarrow{V_4^0 B_4} + \vec{\Omega}_4^0 \wedge \overrightarrow{B_4 A_4} \\ \overrightarrow{V_4^0(B_4)} &= \begin{bmatrix} V_4 \cos \delta_4 \\ V_4 \sin \delta_4 \\ 0 \end{bmatrix}_{-2} \quad V_4 = V \\ \vec{\Omega}_4^0 \wedge \overrightarrow{B_4 A_4} &= \begin{bmatrix} 0 \\ \phi'_4 \\ \theta' \end{bmatrix}_{-2} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -R \end{bmatrix}_{-2} = -R\phi'_4 \vec{X}_2 \\ \overrightarrow{V_4^0(A_4)} &= \begin{bmatrix} V_4 \cos \delta_4 - R\phi'_4 \\ V_4 \sin \delta_4 \\ 0 \end{bmatrix}_{-2} \end{aligned}$$

Il va de soi que l'on peut écrire ces relations pour chacune des roues. On peut donc, pour chacune des roues  $i$ , déterminer les glissements longitudinal et transversal. Le glissement longitudinal est donné par :

$$g_{xi} = \frac{V_i \cos \delta_i - R\phi'_i}{V_i \cos \delta_i}$$

et le glissement transversal par :

$$g_{yi} = \frac{V_i \sin \delta_i}{V_i \cos \delta_i} = \tan \delta_i$$

Mais les angles de dérive étant petits (quelques degrés), on obtient alors :

$$g_{xi} = \frac{V - R\phi'_i}{V} \quad g_{yi} = \delta_i$$

On notera que s'il n'y a pas de glissement longitudinal alors  $g_{xi} = 0$ . La connaissance du glissement longitudinal est importante lors des questions de dynamique longitudinale, freinage et accélération, alors que celle du glissement transversal, c'est-à-dire de l'angle de dérive, est de premier ordre lorsqu'il s'agit de la dynamique transversale.

### 3.1.4 Centre instantané de rotation, rayon de virage

En roues rigides, on a cherché, de manière analytique et de manière géométrique, le CIR ou point autour duquel le véhicule tournait. Cette dernière méthode ne convient plus ici, nous procéderons de manière analytique en cherchant le point de vitesse nulle :

$$\vec{GI} = \frac{\vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{V^0(G)}}{(\vec{\Omega}_1^0)^2}$$

En posant comme à la section 1 :

$$\vec{GI} = (X_I, Y_I, 0)_1 \quad \vec{\Omega}_1^0 = \theta' \vec{Z}_1 \quad \overrightarrow{V^0(G)} = (V \cos \alpha, V \sin \alpha, 0)_1$$

on obtient avec l'approximation des petits angles :

$$\begin{aligned} X_I &= -\frac{a_1\delta_6 + a_2(\beta_2 + \delta_4)}{\beta_2 + \delta_4 - \delta_6} \\ Y_I &= -\frac{a_1 + a_2}{\beta_2 + \delta_4 - \delta_6} \end{aligned}$$

Si les angles de dérives sont constant alors le CIR est fixe par rapport au véhicule ; nous avons déjà vu qu'il l'était dans le repère lié au sol. En appelant  $R_D$  (D pour dérive) le rayon de virage obtenu avec des roues déformables, la valeur trouvée est :

$$R_D = \sqrt{(X_I)^2 + (Y_I)^2} \quad R_D \equiv \sqrt{(Y_I)^2}$$

$$R_D = - \frac{a_1 + a_2}{\beta_2 + \delta_4 - \delta_6}$$

### 3.1.5 Remarque : dérive globale du véhicule

On a vu que l'angle de dérive au niveau du pneumatique est l'angle fait entre le vecteur vitesse du point géométrique avec la trace au sol du plan de jante, c'est-à-dire avec le vecteur vitesse en roue rigide. Sur la figure 28 apparaît l'angle  $\delta$ . Ce dernier est défini comme l'angle entre les vecteurs vitesse du point G pour le véhicule en roue rigide et roue déformable ; il traduit donc la différence de comportement entre les deux types de véhicule et, à ce titre, il est logique de le qualifier d'angle de dérive globale du véhicule

soit :  $\delta = \alpha_G - \alpha_D$ . Ce qui donne en remplaçant  $\alpha_D$  et  $\alpha_G$  par leur valeur :

$$\delta = \frac{a_2}{a_1 + a_2} \delta_4 + \frac{a_1}{a_1 + a_2} \delta_6$$

moyenne pondérée des dérives avant et arrière des pneumatiques.

L'usage n'a pas retenu cette manière de procéder et appelle  $\alpha_D$  l'angle de dérive du véhicule alors qu'il s'agit de l'angle au vent comme nous le verrons plus loin.

## 3.2 Modèle à roues moyennes

Comme dans le modèle à roues rigides, on met en place un modèle à roues moyennes avant et arrière ou modèle bicyclette. La figure 30 illustre le schéma et, ici encore, on constate une grande simplification du modèle. Le paramétrage est le même que celui à quatre roues, les angles de dérives avant et arrière sont notés  $\delta_1$  et  $\delta_2$ .

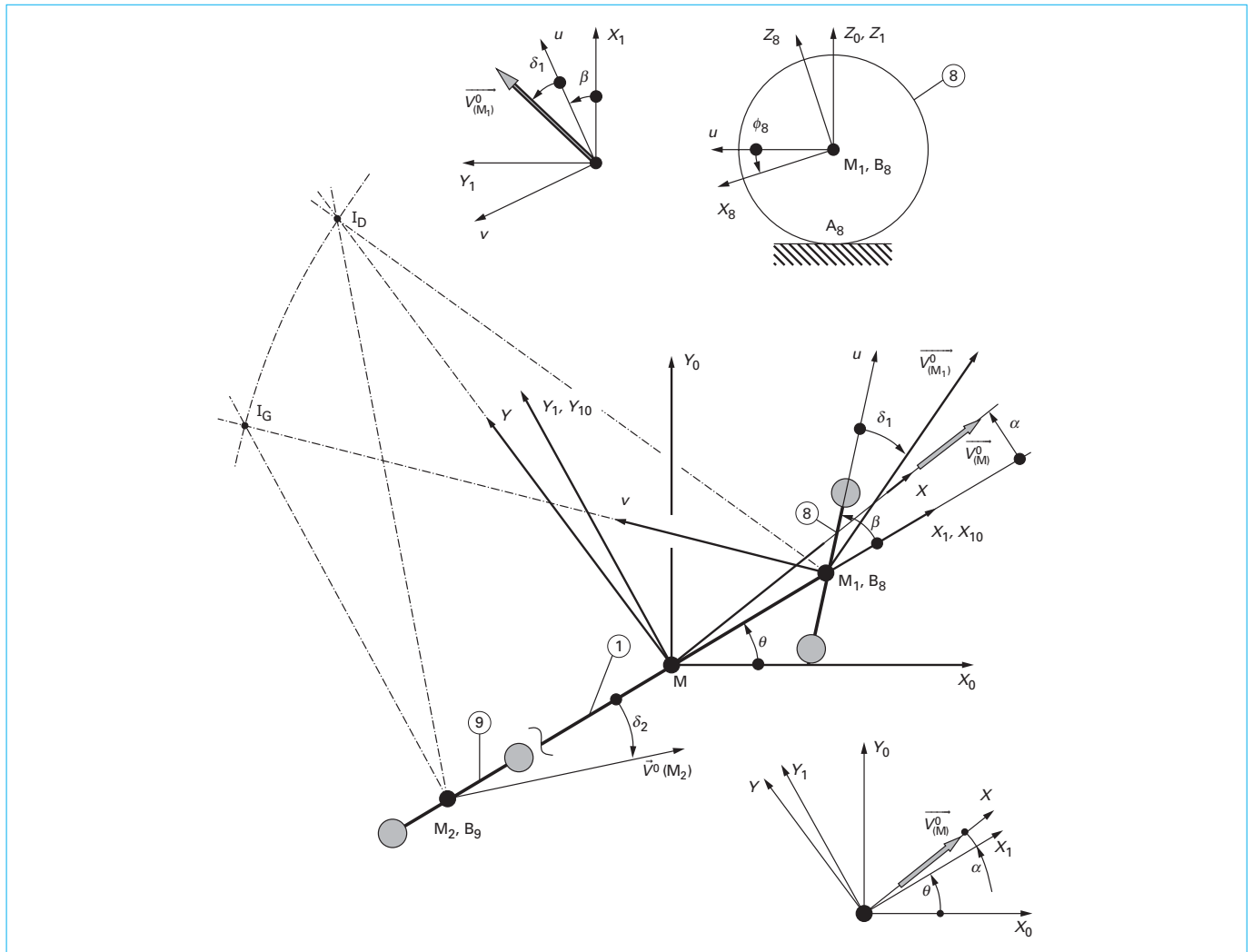


Figure 30 – Schéma et paramétrage du modèle bicyclette

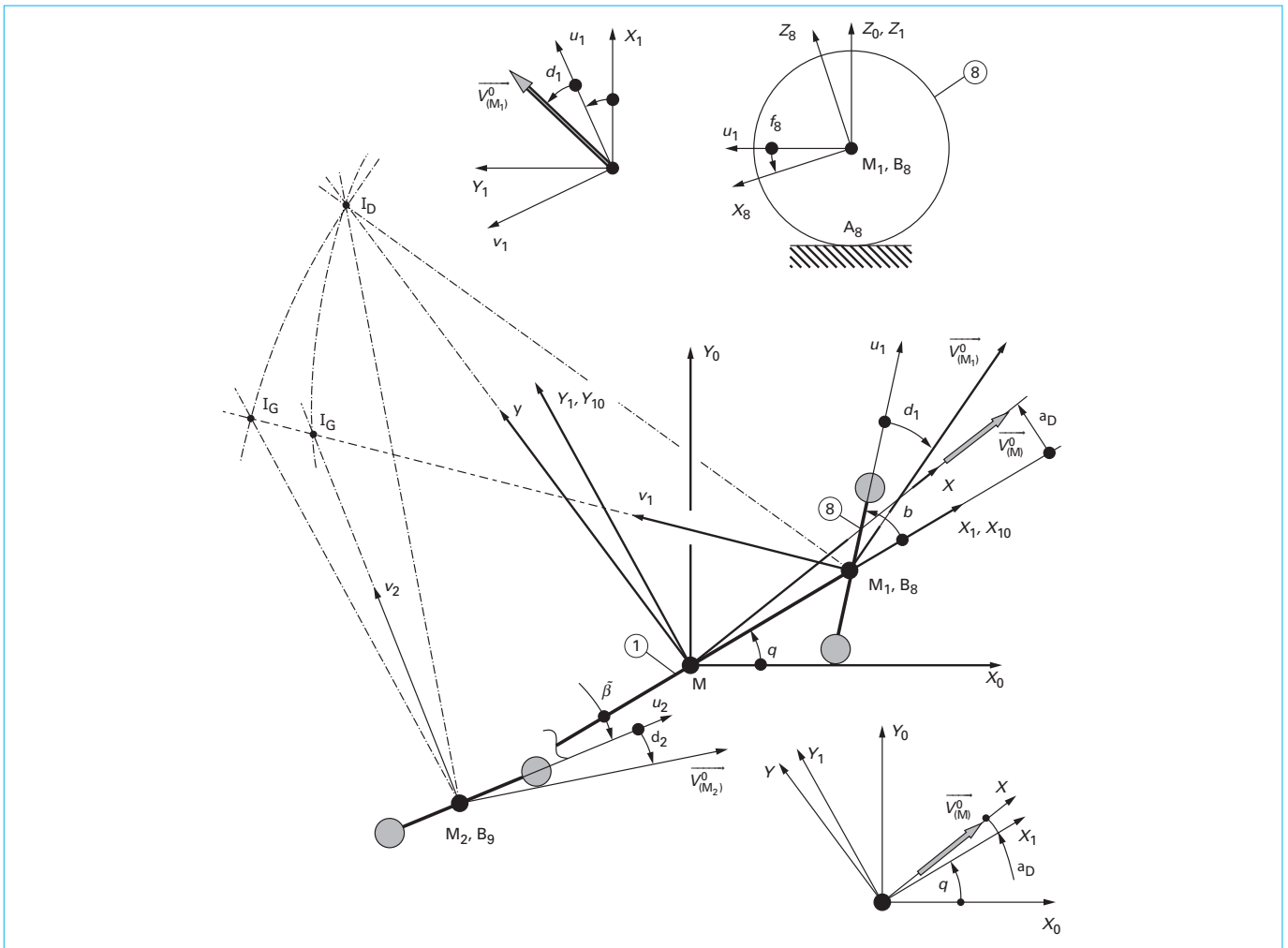


Figure 31 – Schématisation et paramétrage du véhicule à roues moyennes à deux essieux directeurs

Une démarche strictement analogue à la précédente conduit aux résultats suivants en se plaçant dans le cas des petits angles :

$$\begin{aligned}
 \delta_1 &= \alpha + \frac{a_1 \theta'}{V} - \beta \\
 \delta_2 &= \alpha - \frac{a_2 \theta'}{V} \\
 \theta' &= \frac{1}{a_1 + a_2} (\beta + \delta_1 - \delta_2) V \\
 \alpha &= \frac{1}{a_1 + a_2} [a_1 \delta_2 + a_2 (\beta + \delta_1)] \\
 X_I &= - \frac{a_1 \delta_2 + a_2 (\beta + \delta_1)}{\beta + \delta_1 - \delta_2} \\
 Y_I &= \frac{a_1 + a_2}{\beta + \delta_1 - \delta_2} \\
 R_D &= \sqrt{(X_I)^2 + (Y_I)^2} \quad R_D \equiv \sqrt{(Y_I)^2} \quad R_D = \frac{a_1 + a_2}{\beta + \delta_1 - \delta_2} \\
 \delta &= \frac{a_2}{a_1 + a_2} \delta_1 + \frac{a_1}{a_1 + a_2} \delta_2
 \end{aligned} \tag{11}$$

Naturellement, on peut adopter un modèle à deux essieux directeurs. Sur la figure 31, on retrouve les éléments connus pour un véhicule à roues moyennes.

Une démarche analogue donne pour les angles de dérive :

$$\begin{aligned}
 \delta_1 &= \alpha + \frac{a_1 \theta'}{V} - \beta \\
 \delta_2 &= \alpha - \frac{a_2 \theta'}{V} - \tilde{\beta}
 \end{aligned}$$

On peut obtenir, sans difficultés, les autres relations à partir des équations (12) en remplaçant  $\delta_2$  par  $\delta_2 + \beta$ .

### 3.3 Comportement du véhicule

Le comportement du véhicule est caractérisé par son rayon de virage et donc par la position du CIR dans le repère véhicule. On a vu que le véhicule à roues rigides était cinématiquement déterminé ; on admet généralement que le conducteur ordinaire a pour schéma mental de fonctionnement du véhicule, celui du véhicule à roues rigides. On qualifie alors le véhicule à roues



déformables en comparant le rayon de virage dans les deux cas. Rappelons les résultats en roues rigides :

$$(X_I)_G = -a_2 \quad (Y_I)_G = \frac{a_1 + a_2}{\beta} \quad R_G = \frac{a_1 + a_2}{\beta}$$

La comparaison se fera sur la base du rapport  $R_D/R_G$  :

- $R_D/R_G > 1$ . Le virage décrit par le véhicule en roues déformables présente un rayon plus grand que pour le véhicule en roues rigides : le véhicule sera dit sous-vireur ;
- $R_D/R_G < 1$ . Le véhicule sera survireur, car le rayon est plus petit ;
- $R_D/R_G = 1$ . Le véhicule sera dit neutre.

On remarque que c'est la valeur relative des dérivées qui va gouverner la valeur du rayon de virage. On montrera dans la suite que l'angle de dérive est toujours négatif, ce qui permet de réécrire :

$$R_D = \frac{a_1 + a_2}{\beta + |\delta_2| - |\delta_1|}$$

et de constater qu'un véhicule sous-vireur dérive plus de l'avant que de l'arrière en valeur absolue au contraire du véhicule survireur. Le véhicule neutre, quant à lui, dérive autant de l'avant que de l'arrière  $|\delta_1| = |\delta_2|$ .

De cette section, il faut avoir en tête le schéma de la figure 30 et retenir les relations synthétisées dans les équations (11), avec en particulier la valeur des angles de dérive ainsi que celle du rayon de virage. On voit que la dérive se comporte comme un braquage non commandé. Cela est d'autant plus important que les angles de dérive peuvent être du même ordre de grandeur que le braquage commandé  $\beta$ .

## 4. Actions de l'air sur le véhicule

Cette section est consacrée à l'action de l'air sur le véhicule, autrement dit à l'aérodynamique automobile. Cela étant, le but n'est pas de faire un cours de dynamique des fluides, mais plutôt de donner les informations sur les données essentielles qui interviennent dans le cadre de la dynamique du véhicule, sous quelles formes elles se présentent et comment les utiliser dans le cadre qui nous préoccupe. Pour bien comprendre l'usage qu'il est fait de ces données, il faut se reporter aux résultats de base développés sur l'aile dans le cadre de l'aérodynamique en aéronautique et qui fait l'objet du paragraphe 4.1 ; le paragraphe 4.2 est dédié à l'automobile.

### 4.1 Aérodynamique de l'aile

#### 4.1.1 Cadre de l'étude

L'air, pour l'usage qui en est fait en automobile, est considéré comme parfait et incompressible, aussi nous nous placerons dans ce même contexte. Le corps de base étudié en aérodynamique est l'aile qui est un corps profilé facilitant l'écoulement de l'air autour de lui. Les résultats obtenus concernent une aile immobile dans une soufflerie dont les extrémités sont munies de « plaques de gardes » permettant de supprimer les effets de bords.

##### 4.1.1.1 Vocabulaire

On appelle (figure 32) :

- **bord d'attaque** le point extrême avant de l'aile et **bord de fuite** le point extrême arrière ;

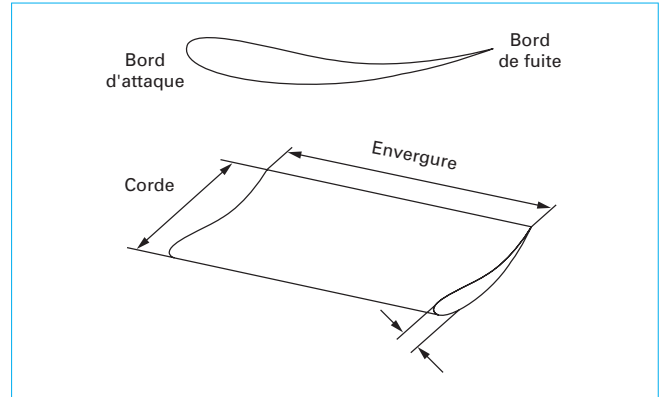


Figure 32 – Éléments de l'aile

- **extrados** la partie supérieure de l'aile et **intrados** étant celle inférieure ;
- corde le segment fictif qui relie les deux points précédents ;
- ligne moyenne, la ligne joignant les points équidistants de l'intrados et de l'extrados ;
- envergure de l'aile, la distance qui sépare ses deux extrémités ;
- allongement de l'aile, le rapport envergure/corde, il est d'une grande importance à cause des effets de bords.

**Nota** : dans tout ce qui suit, l'envergure de l'aile sera considérée comme infinie, donc il n'y a pas d'effets de bords ; de même la section droite de l'aile sera considérée comme constante.

#### 4.1.1.2 Repères, angles remarquables

On utilise généralement deux repères pour exprimer le torseur des efforts de l'air sur l'aile :

- le repère  $R_1$  lié à l'aile. Le repère  $R_1$  est tel que l'axe  $\vec{X}_1$  est porté par la corde, dirigé vers l'avant de l'aile ;

- le repère « lié au vent »  $R_V$  est défini comme suit  $\vec{X}_V = \vec{V}_1^a / \|\vec{V}_1^a\|$ , avec  $\vec{Y}_V = \vec{Y}_1$  la normale au plan de la figure (figure 33) et  $\vec{V}_1^a$  la vitesse de l'aile par rapport à l'air.

On définit un angle remarquable : angle d'incidence  $i$  tel que  $i = (\vec{X}_1, \vec{X}_V)$ , c'est l'angle que fait la corde avec le support du vecteur vitesse de l'aile relativement à l'air.

Lorsque l'aile est placée immobile dans une soufflerie afin de mesurer le torseur des actions aérodynamiques, le support du vecteur vitesse de l'air est fixe par rapport à la soufflerie et est portée par l'axe  $\vec{X}_0$  ; il y a alors confusion de l'angle d'incidence  $i$  avec l'angle  $\theta$ , angle de calage ou d'assiette aérodynamique. Mais si l'aile est en mouvement, alors il n'en est pas ainsi et cela peut être à l'origine de graves conséquences. Un aileron monté sur une automobile est une aile en mouvement du fait du débattement des suspensions ; l'angle de calage est alors l'angle que fait la corde avec le sol, véhicule à l'arrêt. Calculons, en nous servant des indications des figures 34 et 35, la valeur de l'angle d'incidence lorsque l'aile est en mouvement par rapport à la soufflerie.

Le calcul de la vitesse relative aile/air nous donne :

$$\begin{aligned} \vec{V}_1^a(G) &= \vec{V}_1^0(G) - \vec{V}_a^0(G) \\ \vec{V}_1^0(G) &= [x', 0, z']_{R_0} \quad \vec{V}_a^0(G) = -V_a \vec{X}_0 \\ \vec{V}_1^a(G) &= \begin{bmatrix} x' + V_a \\ 0 \\ z' \end{bmatrix}_{R_0} \quad V = x' + V_a \end{aligned}$$

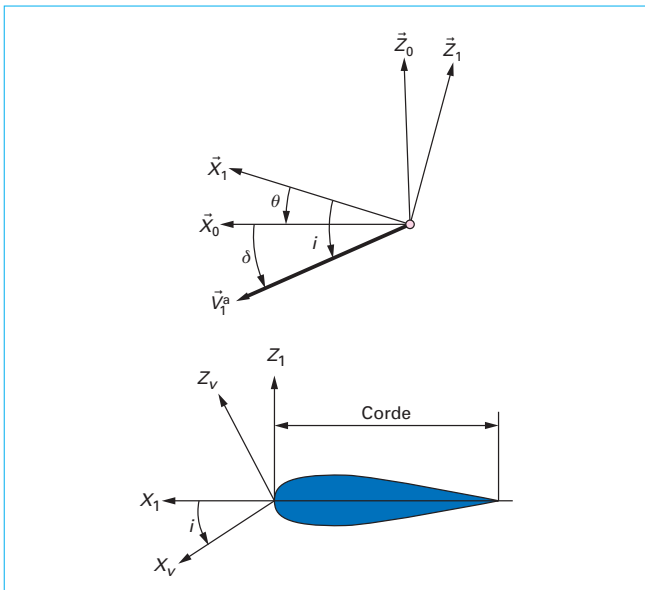


Figure 33 – Repère et angles remarquables

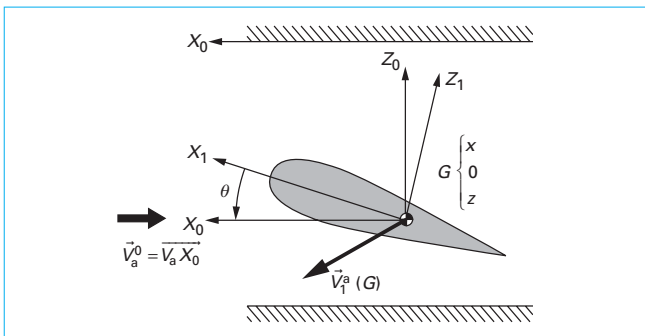
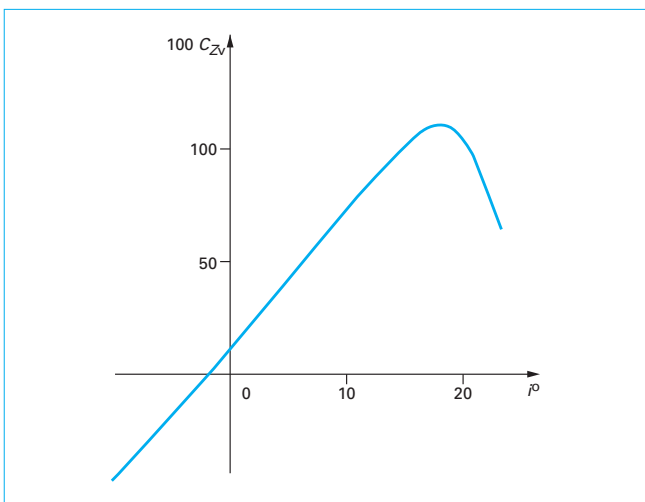


Figure 34 – Aile en mouvement par rapport à la soufflerie


 Figure 35 – Portance  $Z_v$ , en fonction de l'incidence (profil NACA23012, allongement 6)

Le calcul de l'angle d'incidence  $i$  donne :

$$i = [\vec{X}_1, \vec{V}_1^a(G)] = (\vec{X}_1, \vec{X}_0) + [\vec{X}_0, \vec{V}_1^a(G)] \\ i = \theta + \delta$$

Déterminons, en utilisant le produit vectoriel, la valeur de  $\delta$  qui est petite, et en remarquant que la vitesse d'avance longitudinale de l'aile est beaucoup plus grande que la vitesse ascensionnelle :

$$[\vec{X}_0 \wedge \vec{V}_1^a(G)] \vec{Y}_0 = (\sqrt{V^2 + z'^2}) \sin \delta \\ - z' = (\sqrt{V^2 + z'^2}) \delta \quad z'/V \ll 1 \\ \delta \approx - z'/V$$

Donc l'angle d'incidence a pour valeur :  $i = \theta - z'/V$ .

#### 4.1.1.3 Centre de poussée, foyer de l'aile

Du fait de l'hypothèse de section droite constante, le torseur, réduit au bord d'attaque A, représentant les efforts de l'air sur l'aile, est tel que :

$$\{T_{aero}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_A = (X_v, 0, Z_v)_{RV} \\ \vec{M}_A(\vec{A}) = (0, M_v, 0)_{RV} \end{array} \right\}$$

On constate que ce torseur est réductible à un vecteur glissant unique. Le support de ce vecteur glissant unique  $\vec{F}_A$  coupe la corde en un point appelé centre de poussée P. Ce point se déplace sur la corde en fonction de l'angle d'incidence. On peut réduire le torseur en un autre point remarquable de la corde, le foyer F, dont la position a la particularité de ne pas dépendre de l'angle d'incidence. Lorsque le profil de l'aile est symétrique, c'est-à-dire la corde est confondue avec la ligne moyenne de l'aile, foyer et centre de poussée sont confondus et situés au 1/4 avant de l'aile.

#### 4.1.2 Résultats

##### 4.1.2.1 Forme des composantes aérodynamiques

Les composantes aérodynamiques ont pour nom :

- $X_v$  la traînée aérodynamique ;
- $Z_v$  la portance aérodynamique ;
- $M_v$  le moment de tangage aérodynamique.

Les formes suivantes ont été adoptées respectivement pour chacune des composantes :

$$X_v = -\frac{\rho}{2} C_X S V^2, \quad Z_v = \frac{\rho}{2} C_Z S V^2 \quad \text{et} \quad M_v = \frac{\rho}{2} C_M S L V^2$$

avec  $\rho$  : masse spécifique de l'air (égale à 1,225 kg/m<sup>3</sup> pour  $T = 20^\circ \text{C}$  et  $p = 101\,325 \text{ Pa}$ ),

$V$  : vecteur vitesse relative de l'aile par rapport à l'air,

$L$  : longueur, pour l'aile il s'agit de l'envergure,

$S$  : surface de référence, pour l'aile c'est le produit de la corde par l'envergure,

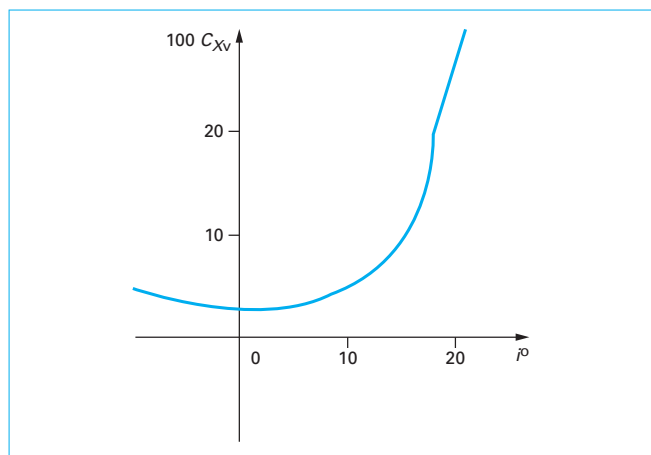
$C_X$ ,  $C_Z$  et  $C_M$  sont des coefficients de forme ;  $C_X$  est positif, par contre  $C_Z$  et  $C_M$  sont algébriques.

**Nota** : sachant que la traînée aérodynamique s'oppose toujours au mouvement, elle sera prise négative ; les autres composantes ont un signe qui dépend de celui des coefficients.

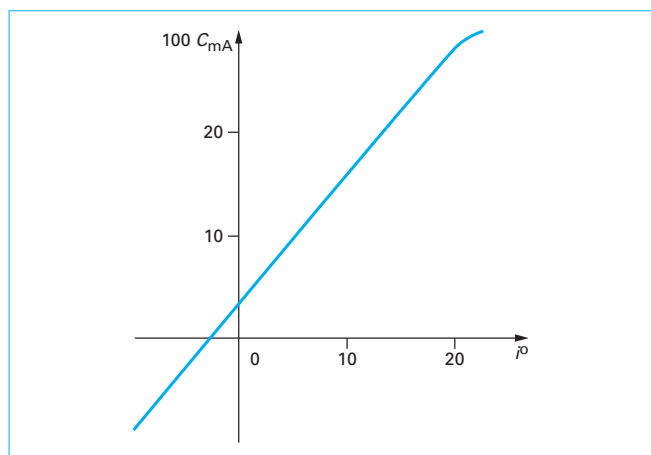
##### 4.1.2.2 Résultats pour une aile

Il existe différentes codifications des profils relativement à leur forme parmi lesquelles les profils NACA (National Advisory Committee on Aeronautics ancêtre de la NASA). Compte tenu de la formulation, plutôt que de parler en terme de composantes d'efforts, on parle en terme de coefficients de forme en fonction de l'incidence.

Quelques observations peuvent être faites d'après ces courbes expérimentales (figures 35, 36 et 37) :



**Figure 36 – Traînée  $C_{xv}$  en fonction de l'incidence**  
(profil NACA23012, allongement 6)



**Figure 37 – Moment  $M_a$  au bord d'attaque A en fonction de l'incidence**  
(profil NACA23012, allongement 6)

– l'angle d'incidence reste petit, de l'ordre de  $15^\circ$  maximum, au-delà de cette valeur, la portance chute brusquement, c'est le décrochage aérodynamique ;

– la portance est linéaire en angle d'incidence, on posera alors :  $C_z = a(i - i_0)$  ;

– la traînée est proche d'une parabole en angle d'incidence : on écrira alors, en éliminant  $i$ , que  $C_x = C_{x0} + KC^2z$ . Cela est l'équation d'une courbe appelée **polaire de l'aile** (figure 38).

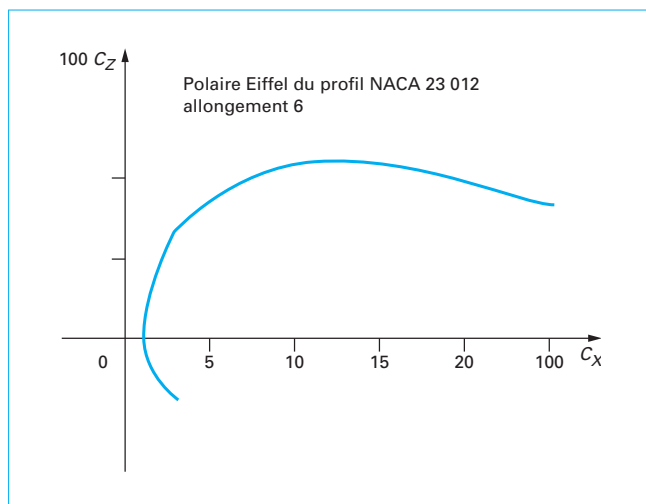
Cette polaire tracée dans le repère lié au vent est dite polaire d'Eiffel ; lorsqu'elle est tracée dans le repère lié à l'aile, elle est dite de Lilienthal.

Le moment étant linéaire en incidence, on posera :

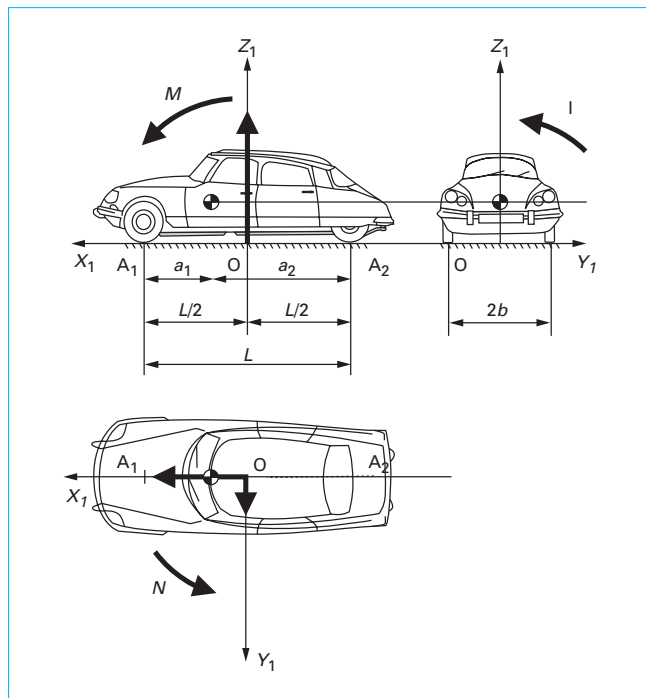
$$C_M = C_{M_0} - mC_z$$

## 4.2 Aérodynamique automobile

Contrairement à l'aile, une automobile n'est pas un corps profilé et appartient à la catégorie des corps émoussés qui présentent la caractéristique de générer une surpression sur la face avant et une



**Figure 38 – Polaire de l'aile tracée dans le repère  $R_v$**   
(profil NACA23012, allongement 6)



**Figure 39 – Repérage et torseur aérodynamique**

dépression sur la face arrière. Cette zone en dépression est le siège de mouvements tourbillonnaires (cf. l'arrière des piles de ponts dans un cours d'eau) et est responsable de la résistance à l'avancement des corps. On pourrait dire qu'une automobile se rapproche d'une demi-sphère soufflée du côté hémisphérique. Par ailleurs, un véhicule automobile se différencie d'un avion par le fait même qu'il est en contact avec le sol d'où une perturbation de l'écoulement de l'air.

De ce fait, pour un véhicule, le torseur aérodynamique est complet et possède six composantes (figure 39).

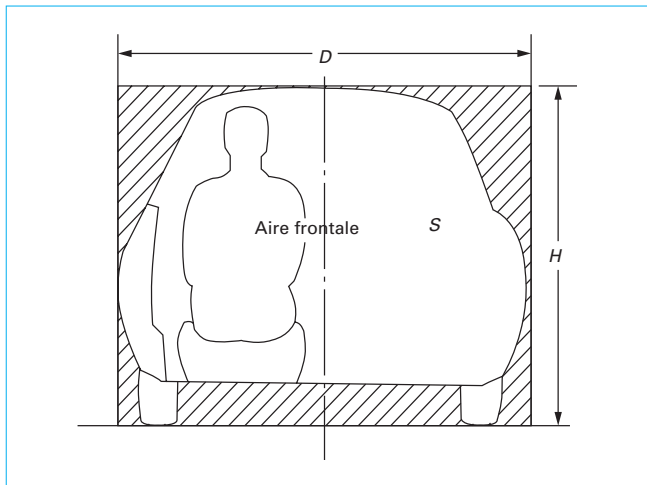


Figure 40 – Calcul de la surface frontale

Ce torseur est réduit traditionnellement en un point O qui est le centre du rectangle formé par les quatre empreintes des pneumatiques sur le sol. Ce point, défini uniquement géométriquement, n'est donc pas influencé par l'état de charge du véhicule. On verra, par la suite, comment on peut passer de ce point au centre de gravité :

$$\vec{F}_A = [X, Y, Z]_1 \quad \overline{M_A(O)} = [L, M, N]_1$$

$$X = -\frac{\rho}{2} C_X S V^2 \quad L = \frac{\rho}{2} C_L S L V^2$$

$$Y = \frac{\rho}{2} C_Y S V^2 \quad M = \frac{\rho}{2} C_M S L V^2$$

$$Z = \frac{\rho}{2} C_Z S V^2 \quad N = \frac{\rho}{2} C_N S L V^2$$

- avec  $X$  traînée aérodynamique avec  $C_X$  coefficient de traînée (nombre positif),  
 $Y$  portance latérale avec  $C_Y$  coefficient de portance latérale (nombre algébrique),  
 $Z$  portance avec  $C_Z$  coefficient de portance (nombre algébrique),  
 $L$  moment de roulis avec  $C_L$  coefficient de moment de roulis (nombre algébrique),  
 $M$  moment de tangage avec  $C_M$  coefficient de tangage (nombre algébrique),  
 $N$  moment aérodynamique de lacet avec  $C_N$  coefficient de moment de lacet (nombre algébrique),  
 $S$  surface de référence qui est la même quelle que soit la composante et qui est la projection sur un plan frontal de la plus grande section droite du véhicule. Une bonne approximation est donnée par la formule (figure 40) :

$$S = 0,8 * H * D$$

Un ordre de grandeur est 2 m<sup>2</sup> pour un véhicule de tourisme.

$L$  est une longueur prise égale à l'empattement  $a_1 + a_2$  pour un véhicule.

Voici un exemple de valeurs numériques pour un petit véhicule utilitaire présentant une surface frontale de 2,65 m<sup>2</sup>, un empattement de 2,595 m et une masse de 1 255 kg :

$$C_X = 0,35 \quad C_Y = 0,001 \quad C_Z = -0,054 \\ C_L = 0,0015 \quad C_M = -0,011 \quad C_N = -0,0045$$

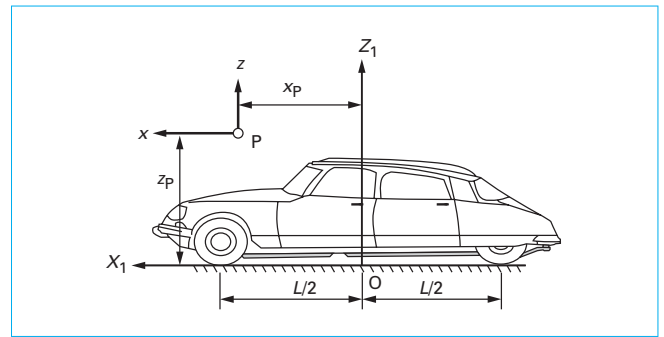


Figure 41 – Centre de poussée longitudinale

Il est fréquent d'étudier le torseur aérodynamique en le scindant en deux torseurs spéciaux qui permettent d'appliquer des raisonnements similaires à ceux d'une aile. Un premier torseur spécial concerne le véhicule se déplaçant en ligne droite en atmosphère calme, on dit alors que le véhicule est sans dérapage aérodynamique. Le second concerne le véhicule soufflé purement transversalement.

#### 4.2.1 Torseur longitudinal : véhicule sans dérapage aérodynamique

Dans ce cas, la vitesse de l'air est nulle et la vitesse du véhicule par rapport au sol est celle par rapport à l'air ; elle est portée par l'axe  $\vec{X}_1$ . Dans ce cas particulier, le torseur aérodynamique se réduit à trois composantes (figure 41) :

$$\vec{F}_A = [X, 0, Z]_1 \quad \overline{M_A(O)} = [0, M, 0]_1$$

$$X = -\frac{\rho}{2} C_X S V^2 \quad L = 0$$

$$Y = 0 \quad M = \frac{\rho}{2} C_M S L V^2$$

$$Z = \frac{\rho}{2} C_Z S V^2 \quad N = 0$$

On constate que le torseur est spécial de somme non nulle donc réductible à un vecteur glissant unique, ce qui permet de représenter ce torseur sous d'autres formes.

##### 4.2.1.1 Première représentation : centre de poussée longitudinale

On réduit le torseur à un vecteur glissant unique  $\vec{F}_A$  passant par un point P appelé **centre de poussée longitudinale**. On peut donc écrire  $\overline{M_A(O)} = \overline{M_A(P)} + \overline{OP} \wedge \vec{F}_A$ . Comme  $\overline{M_A(P)} = 0$ , on en déduit par la formule de la division vectorielle  $\overline{OP} = \frac{\vec{F}_A \wedge \overline{M_A(O)}}{(\vec{F}_A^2)}$  ; en posant

$\overline{OP} = [x_p, 0, z_p]_1$ , en remplaçant  $\vec{F}_A$ ,  $\overline{M_A(O)}$  par leurs expressions et en simplifiant, on obtient :

$$x_p = \frac{-(C_M C_Z)}{C_X^2 + C_Z^2} (a_1 + a_2) \quad z_p = \frac{-(C_M C_X)}{C_X^2 + C_Z^2} (a_1 + a_2)$$

On voit dans ces formules que si l'on connaît  $\overline{OP} = [x_p, 0, z_p]_1$  et  $\vec{F}_A$ , on connaît  $C_M$  et donc le torseur réduit au point O. Cette vision est très répandue et on reconnaît aisément la filiation avec l'aile.

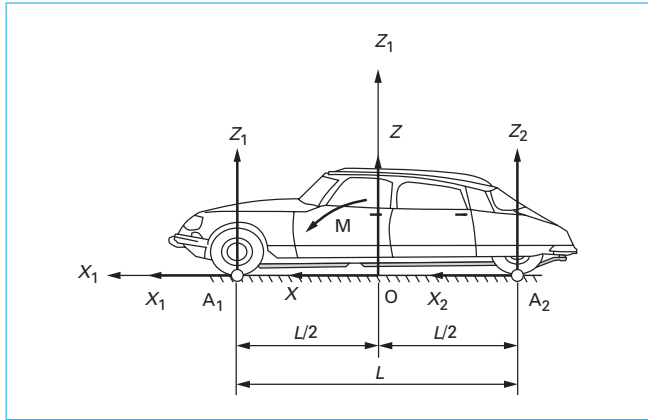


Figure 42 – Portance avant, portance arrière

#### 4.2.1.2 Deuxième représentation : portance avant et arrière

On peut donner une autre vision de ce torseur, en l'exprimant sous la forme de deux vecteurs glissants  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  passant par les points de contact sol/roues  $A_1$  et  $A_2$ , comme indiqué à la figure 42. On doit donc avoir :

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_A$$

$$\overrightarrow{OA_1} \wedge \vec{F}_1 + \overrightarrow{OA_2} \wedge \vec{F}_2 = \overrightarrow{MA}(\text{O})$$

En posant :

$$\vec{F}_1 = [X_1, 0, Z_1], \vec{F}_2 = [X_2, 0, Z_2]$$

et en développant, on trouve trois équations :

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 &= X \\ Z_1 + Z_2 &= Z \\ \frac{L}{2}(-Z_1 + Z_2) &= M \quad a_1 + a_2 = L \end{aligned} \quad (12)$$

En posant :

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{\rho}{2} C_{Z1} SV^2 \\ Z_2 &= \frac{\rho}{2} C_{Z2} SV^2 \end{aligned}$$

pour les portances avant et arrière, cela conduit à :

$$\begin{aligned} C_{Z1} &= \frac{1}{2} C_Z - C_M \\ C_{Z2} &= \frac{1}{2} C_Z + C_M \end{aligned}$$

On aura remarqué que quatre inconnues sont à déterminer avec les trois équations (12). On ne peut résoudre un tel système en traînée. Généralement, on affecte toute la traînée au train moteur.

On voit tout l'intérêt d'une telle vision car cela met en évidence directement la charge aérodynamique sur l'essieu, ce qui est de première importance pour le fonctionnement du pneumatique surtout pour un véhicule de compétition pour lequel ces portances sont grandes et négatives.

#### 4.2.1.3 Troisième représentation : réduction du torseur au centre de gravité G

Nous verrons dans la section suivante que l'on écrit les équations de la dynamique du véhicule au centre de gravité G, il importe donc de savoir changer d'origine le torseur aérodynamique. Cela revient à changer d'origine le moment à l'aide de la formule classique :

$$\overrightarrow{MA}(\text{G}) = \overrightarrow{MA}(\text{O}) + \overrightarrow{GO} \wedge \vec{F}_A$$

On obtient en posant  $\overrightarrow{MA}(\text{G}) = M_G \vec{Y}_1$  avec  $M_G = \frac{\rho}{2} C_{MG} SLV^2$  et  $h$  hauteur du centre de gravité au-dessus du sol :

$$C_{MG} = C_{M0} + \left(1/2 - \frac{a_1}{L}\right) C_Z + \frac{h}{L} C_X \quad C_{M0} = C_M$$

#### 4.2.1.4 Exemple

Pour le véhicule cité en exemple en début de section 4.2, on trouve :

$$\begin{aligned} h &= 0,6 \text{ m} \quad a_1 = 1,0649 \text{ m} \quad a_2 = 1,5301 \text{ m} \quad V = 30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \\ F_Z &= -80 \text{ N} \quad x_p = -0,13 \text{ m} \quad z_p = 0,99 \text{ m} \\ C_{Z1} &= 0,087 \quad C_{Z2} = -0,1417 \quad F_{Zav} = 127 \text{ N} \quad F_{Zar} = -206 \text{ N} \\ C_{MG} &= -0,0385 \quad M_G = -146 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

Les appendices aérodynamiques que l'on voit sur les véhicules récents ont pour but à la fois de modifier la valeur des portances avant et arrière mais aussi de réduire la traînée, c'est le cas des « spoilers » avant par exemple.

Sur un véhicule de compétition, les portances aérodynamiques peuvent être très grandes et égales à la charge statique sur chaque essieu.

#### 4.2.2 Torseur transversal

Dans ce cas, le sous-torseur se réduit à :

$$\begin{aligned} \vec{F}_A &= [0, Y, 0] \quad \overrightarrow{MA}(\text{O}) = [L, 0, N]_1 \\ X &= 0 \quad L = \frac{\rho}{2} C_L SLV^2 \\ Y &= \frac{\rho}{2} C_Y SV^2 \quad M = 0 \\ Z &= 0 \quad N = \frac{\rho}{2} C_N SLV^2 \end{aligned}$$

Là encore, le torseur est spécial et on peut procéder comme précédemment.

#### 4.2.2.1 Première représentation : centre de poussée latérale

On représente le torseur par un vecteur glissant unique passant par le point P' tel que (figure 43)  $\overrightarrow{OP'} = [x_p, 0, z_p]_1$ . Une démarche similaire conduit à :

$$x_p = \frac{C_N}{C_Y} (a_1 + a_2) \quad z_p = -\frac{C_L}{C_Y} (a_1 + a_2)$$

La position longitudinale  $x_p$  du point P' a une influence sur la stabilité transversale du véhicule lors de la « marche sous vent traversier ».

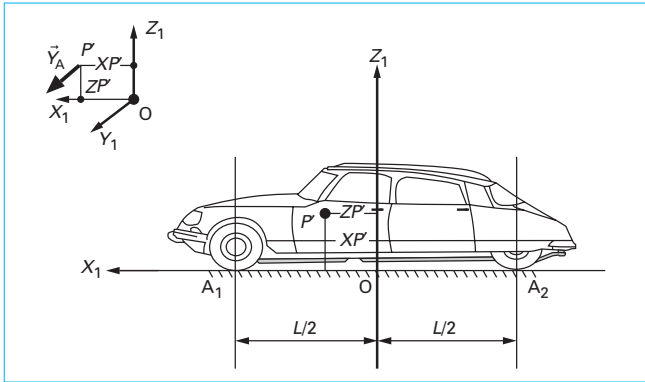


Figure 43 – Centre de poussée latérale

#### 4.2.2.2 Deuxième représentation : portance latérale avant, portance latérale arrière

On représente le torseur par deux vecteurs  $\vec{Y}_1, \vec{Y}_2$  passant par les points  $B_1$  et  $B_2$  situés à l'altitude  $z$  sur une verticale passant par les points de contact sol/roues  $A_1$  et  $A_2$  (figure 44).

On doit donc avoir :

$$\begin{aligned} Y_1 + Y_2 &= Y \\ (Y_1 - Y_2)(a_1 + a_2) &= N \\ (-z)(Y_1 + Y_2) &= L \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} C_{Y_1} &= 0,5 C_Y + C_N \quad C_{Y_2} = 0,5 C_Y - C_N \\ z &= \frac{-C_L}{C_Y}(a_1 + a_2) \end{aligned}$$

On constate que  $z$  est aussi la côte du centre de poussée latérale.

#### 4.2.2.3 Troisième représentation : réduction du torseur au centre de gravité G

Par utilisation de la formule du changement de point des moments, on a :

$$\overline{M_A}(G) = \overline{M_A}(O) + \overline{GO} \wedge \vec{F}_A$$

et en développant, on obtient :

$$\begin{aligned} C_{L_G} &= C_{L_0} + \frac{h}{L} C_Y \quad C_{L_0} = C_L \\ C_{N_G} &= C_{N_0} + \left(1/2 - \frac{a_1}{L}\right) C_Y \quad C_{N_0} = C_N \end{aligned}$$

#### 4.2.3 Problématique du dérapage aérodynamique

C'est le cas général de fonctionnement d'un véhicule. Le véhicule est en mouvement tel que les plans  $(G, \vec{X}_1, \vec{Y}_1)$  et  $(G, \vec{X}_0, \vec{Y}_0)$  soient parallèles. Le paramétrage est celui de la section 1 avec  $\overline{OG} = [x, y, h]_0$ ,  $\vec{X}_0, \vec{X}_1 = \theta$ . On dira qu'il y a dérapage aérodynamique lorsque le vecteur vitesse du véhicule par rapport à l'air :  $\vec{V}_1^a(G)$  n'est pas porté par l'axe longitudinal du véhicule (figure 45).

Le dérapage est caractérisé par l'angle  $j$  tel que (figure 46)  $j = (\vec{X}_1, \vec{V}_1^a(G))$  ; ce vecteur vitesse du véhicule par rapport à l'air.  $\vec{V}_1^a(G)$

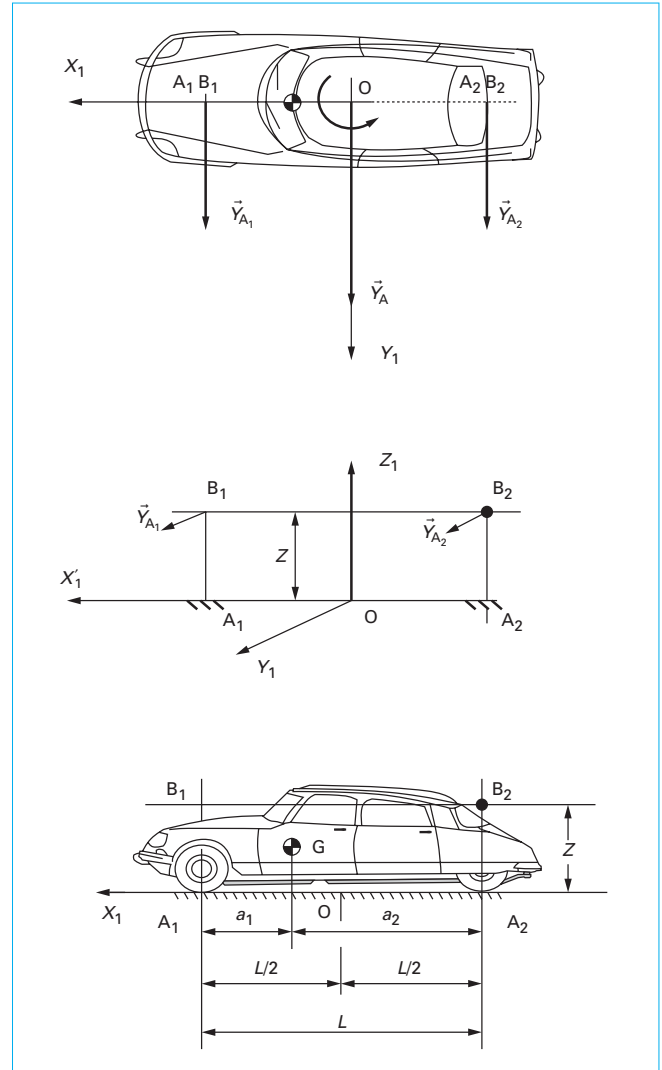


Figure 44 – Portance latérale avant, portance latérale arrière

se calcule en fonction de la vitesse du véhicule par rapport au sol et de la vitesse de l'air par rapport au sol comme cela a été vu à la section 4.1.1.2  $\vec{V}_1^a(G) = \vec{V}_1^0(G) - \vec{V}_a^0(G)$ . Bien sûr, ce vecteur vitesse peut s'exprimer dans le repère lié au véhicule ou lié au vent.

En pratique, il y a trois cas où le véhicule est en dérapage aérodynamique ; le 1<sup>er</sup> se produit lorsque le véhicule est en virage en air calme, le 2<sup>e</sup> lorsque le véhicule roule en ligne droite et est soufflé par un vent transversal et le 3<sup>e</sup> cas est la combinaison des deux précédents. Ce dernier cas ne sera pas examiné.

##### 4.2.3.1 Virage en air calme

Il s'agit du cas où  $\vec{V}_a^0(G) = 0$ . En posant  $\vec{V}_1^0(G) = (V_x, V_y, 0)_1$ , alors  $\tan j \approx j = \frac{V_y}{V_x} \quad V_x \gg V_y$ .

Cet angle est l'angle  $\alpha$  déjà rencontré en cinématique (figure 47).



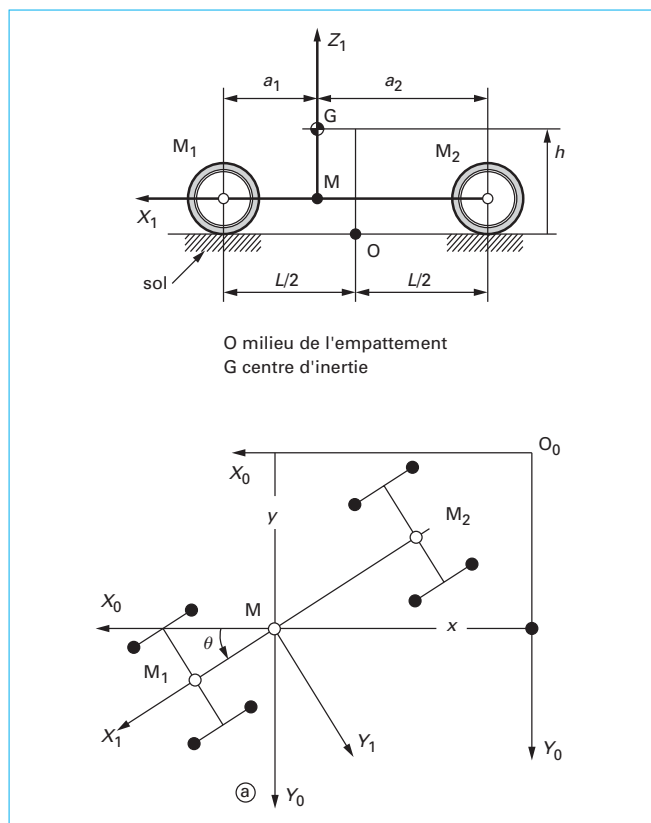


Figure 45 – Repérage du véhicule

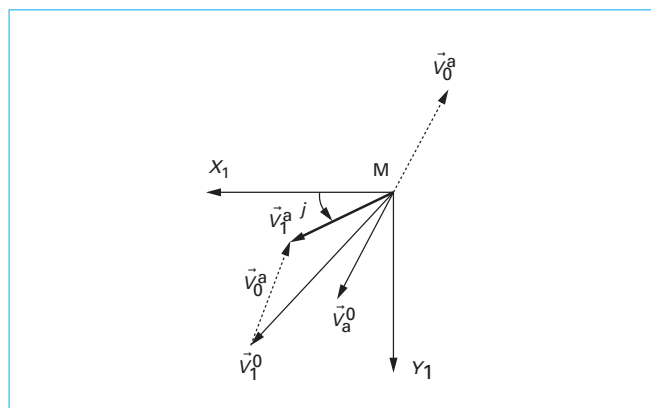


Figure 46 – Vecteurs vitesse du véhicule et de l'air

#### 4.2.3.2 « Marche en ligne droite par vent traversier »

La figure 48 résume la situation et sachant que le véhicule avance en ligne droite ( $\theta = 0$ ), on obtient :

$$\tan j = -\frac{V_T}{X} \quad V_T = \vec{V}_a^0(G) \vec{Y}_0$$

Dans ce cas, on ne peut pas considérer l'angle  $j$  comme petit.

On notera alors que les coefficients de forme sont très influencés par le dérapage aérodynamique, comme le montre les résultats,

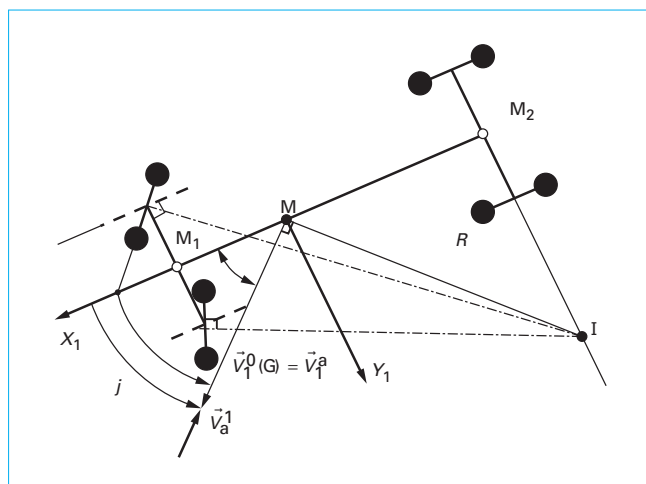


Figure 47 – Virage en air calme

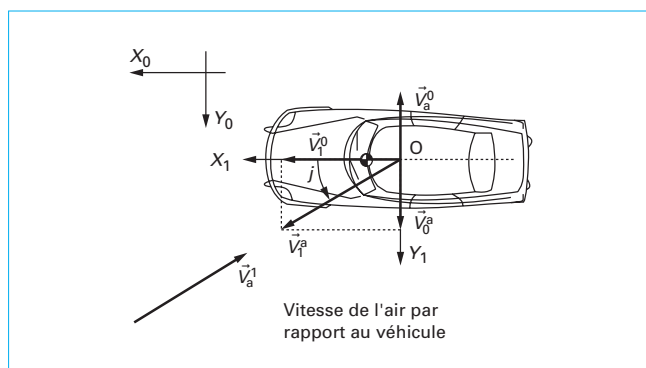


Figure 48 – Véhicule en dérapage aérodynamique

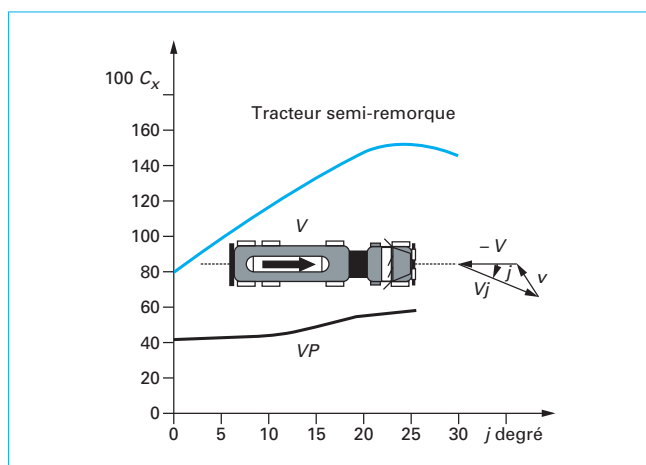


Figure 49 – Variation du  $C_x$  en fonction de  $j$  sur maquette au 3/8 (journal SIA)

consignés dans les figures 49 et 50 ci-après, qui concernent des essais sur maquettes. Cela est particulièrement vrai pour les véhicules industriels.

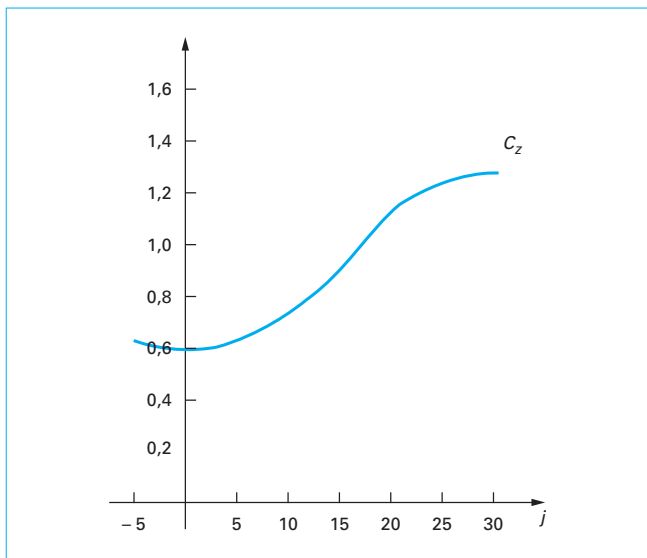


Figure 50 – Variation du  $C_z$  en fonction de  $j$  sur maquette au 3/8

Dans le cas général, le torseur aérodynamique d'un véhicule présente six composantes. Afin de faciliter le raisonnement, ce torseur est souvent décomposé, de manière artificielle, en deux torseurs, longitudinal et transversal. Sont associés, à ces deux torseurs, un centre de poussée longitudinal et un centre de poussée latéral, ces deux points sont différents puisque le torseur complet n'est pas réductible à un vecteur glissant unique. Le centre de poussée latéral a une grande importance lors de la marche du véhicule sous vent traversier. On associe aussi, dans une autre vision de ces torseurs, une portance longitudinale avant et arrière passant par les points de contact sol/roues des trains avant et arrière et une portance latérale avant et arrière passant par des points situés au droit des points de contact sol/roue, à la même hauteur que le centre de poussée latéral.

## 5. Équations de la dynamique

Après avoir regardé les aspects cinématiques et donné les éléments principaux sur les pneumatiques et l'aérodynamique automobile, il faut aborder l'aspect dynamique du problème. Dans cette section, nous aborderons la modélisation ainsi que le paramétrage et le repérage qui lui sont attachés. Puis nous écrirons les équations issues de l'application des théorèmes généraux. Nous montrerons alors comment l'on découple le système d'équations pour se ramener au modèle lacet-dérive, d'une part, et au modèle roulis, d'autre part.

### 5.1 Modélisation, paramétrage, repérage

Il va de soi qu'une modélisation plane ne peut convenir pour représenter les mouvements d'un véhicule. En effet, la présence des ressorts de suspensions permet à ce que, conventionnellement, on appelle la « caisse » d'avoir un mouvement par rapport au « châssis » décrit à la section 1. Si l'on admet que la caisse repose sur quatre ressorts, dont on sait qu'ils ne sont pas des éléments de guidage au sens cinématique du terme, alors le paramétrage le plus général requiert de paramétrer les six degrés de

liberté de cette caisse. À ces six paramètres, il conviendrait d'ajouter a minima, un paramètre de translation verticale et un paramètre de rotation par roue soit huit paramètres et, *in fine*, un total de 14 paramètres pour le véhicule. C'est naturellement possible et cela se fait ; cependant, l'interprétation des résultats devient très délicate et, à notre sens, ne peut se concevoir que si l'on a une bonne connaissance d'un modèle plus simple qui est le modèle de compréhension de base juste nécessaire pour rendre compte du fonctionnement d'un véhicule en virage.

Nous allons reprendre le paramétrage exposé aux sections 1 et 3 auxquelles nous ajouterons le roulis, mouvement de rotation de la caisse autour d'un axe longitudinal.

Sur la figure 51, on retrouve les paramètres eulériens familiers exposés à la section 3 : l'angle de lacet  $\theta$ , l'angle au vent  $\alpha$  et la vitesse  $V$  du centre de gravité tels que :

$$\vec{V}^0(M) = V\vec{X} \quad \alpha = [\vec{X}_1, \vec{V}^0(M)]$$

rappelons qu'à la place de  $\alpha$  et  $V$ , on aurait pu choisir  $V_x$  et  $V_y$  tels que :

$$\vec{V}^0(M)\vec{X}_1 = V_x \quad \vec{V}^0(M)\vec{Y}_1 = V_y$$

Ce modèle représente le « châssis ». À ce modèle, il convient d'en ajouter un autre, qui prend en compte une partie du mouvement possible de la « caisse » par rapport à ce châssis. On considère, pour élaborer ce modèle, que la caisse tourne autour d'un axe longitudinal fixe appelé axe de roulis  $O_1X_{10}^*$ , ce qui n'est pas exact *stricto sensu* ; mais cette notion d'axe de roulis est très commode pour comprendre et interpréter les résultats.

Cet axe est légèrement incliné vers l'avant du véhicule comme le montre le schéma sur la figure 52. Cette inclinaison se matérialise par la valeur de l'angle  $\alpha_r$  (environ 1 degré) et par les hauteurs  $h_1$ ,  $h_0$  et  $h_2$ , respectivement hauteur de l'axe de roulis au droit de l'essieu avant, du centre de gravité et de l'essieu arrière.

La conséquence de cette modélisation est que la liaison entre la caisse et le châssis est de type rotoïde à laquelle on adjoint l'angle de roulis  $\varphi$  comme indiqué sur la figure 53. On notera aussi une dimension importante pour l'étude du roulis :  $h$  hauteur du centre de gravité au-dessus de l'axe de roulis. On se doute facilement que, plus cette valeur sera grande, plus la valeur de l'angle de roulis sera importante. Cette modélisation prend tout son sens lorsqu'il s'agit de choisir et de déterminer des suspensions.

En effet, sur la figure 53, on constate que la caisse a un mouvement plan sur plan dans le plan transversal  $\vec{Y}_{10}^*, \vec{Z}_{10}^*$ , et que le point  $O_1$  se présente comme le CIR. Dans la réalité, toutes les suspensions ne déterminent pas cinématiquement un CIR mais on peut considérer qu'il existe un point de vitesse nulle au niveau de chaque essieu, autour duquel tournera la caisse, matérialisant ainsi l'axe de roulis ; de ce fait, une partie de la conception des suspensions va consister à positionner ces points, c'est-à-dire à positionner la hauteur et l'inclinaison de cet axe de roulis. Nous aborderons le mouvement de roulis et ses conséquences, en particulier sur la charge normale, dans la seconde partie.

### 5.2 Équations de la dynamique

Comme toujours dans la mécanique des systèmes multicorps, le choix de la méthode de mise en équation résulte à la fois de la modélisation et du paramétrage retenus. Dans le cas qui nous concerne, à savoir la connaissance de l'attitude du véhicule sur sa trajectoire plus que la trajectoire elle-même, le paramétrage eulérien a été retenu ; si l'on ajoute que le véhicule dans son ensemble est un corps en liaisons unilatérales avec le sol, la méthode la plus simple à utiliser est celle des théorèmes généraux à caractère vectoriel. Ainsi, nous isolerons le véhicule complet pour lui appliquer les six théorèmes au centre de gravité de l'ensemble, puis nous

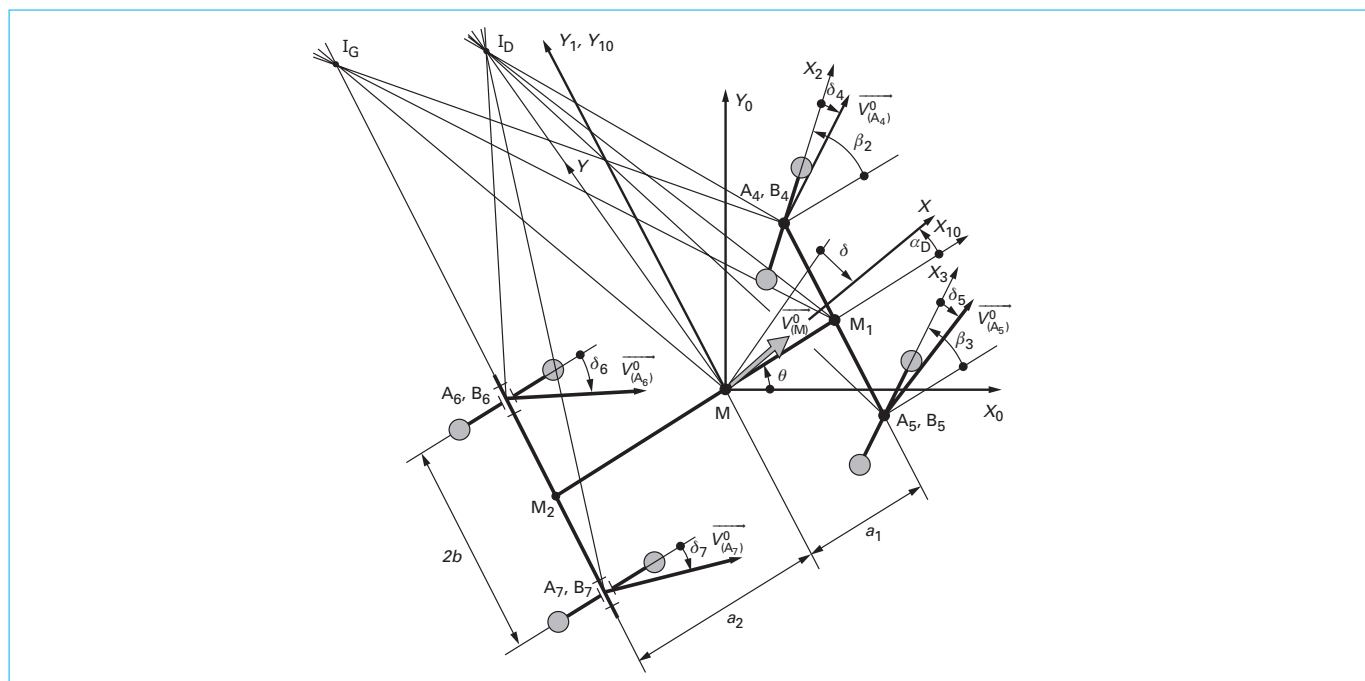


Figure 51 – Paramétrage eulérien du mouvement plan

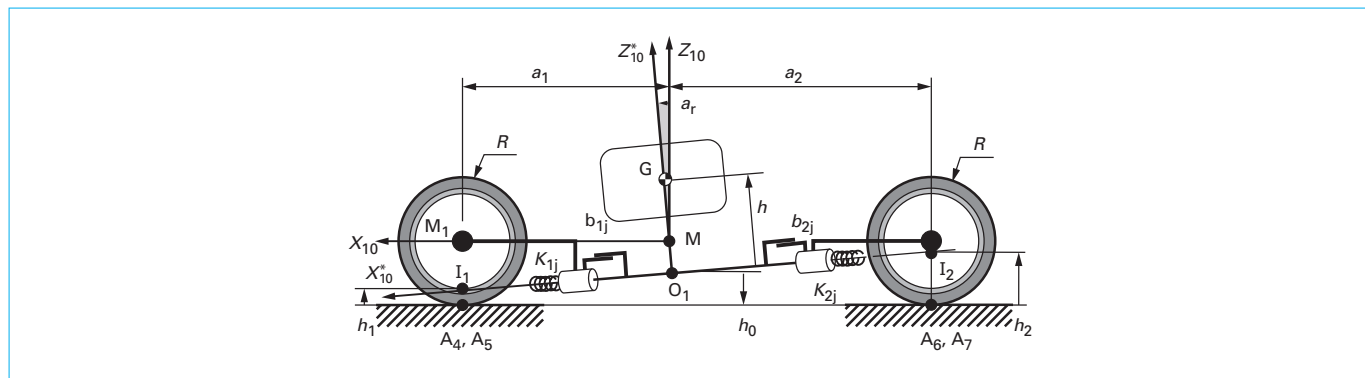


Figure 52 – Axe de roulis et hauteurs de l'axe

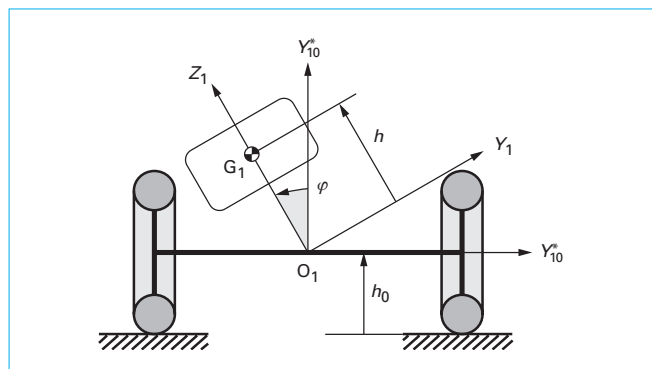


Figure 53 – Angle de roulis

utiliserons la présence de la liaison rotoïde pour appliquer trois théorèmes de moment suivant l'axe de roulis respectivement à la caisse en  $O_1$ , au train avant en  $I_1$  et arrière en  $I_2$ .

## 5.2.1 Calculs de cinétique

### 5.2.1.1 Somme dynamique

La somme dynamique est constituée de celle de la « caisse » dite aussi masse suspendue et de celle de chacune des masses non suspendues formées des roues et d'une partie de la suspension. On peut faire l'hypothèse, pour ces dernières, que leur centre de gravité est le centre roue. On obtient donc :  $\vec{\Sigma}_{total}^0 = \vec{\Sigma}_{caisse}^0 + \vec{\Sigma}_{roues}^0$ . Cela revient donc à calculer l'accélération du centre de gravité de la caisse ainsi que celle de chacune des roues indiquées par  $i$ . En pratique (voir figures 51, 52 et 53), on pourra confondre, du point de vue des accé-

lérations, le centre de gravité de la caisse avec celui de l'ensemble G ; de même, en ce qui concerne le point M avec O<sub>1</sub>. Ainsi :

$$\overline{\Gamma_{\text{caisse}}^0}(\mathbf{G}) = \overline{\Gamma^0}(\mathbf{O}_1) + \left( \frac{d^0}{dt} \vec{\Omega}_1^0 \right) \wedge \overline{\mathbf{O}_1\mathbf{G}} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge (\vec{\Omega}_1^0 \wedge \overline{\mathbf{O}_1\mathbf{G}})$$

et :

$$\overline{\Gamma_{\text{rouei}}^0}(\mathbf{B}_i) = \overline{\Gamma^0}(\mathbf{O}_1) + \left( \frac{d^0}{dt} \vec{\Omega}_{10}^0 \right) \wedge \overline{\mathbf{O}_1\mathbf{B}_i} + \vec{\Omega}_{10}^0 \wedge (\vec{\Omega}_{10}^0 \wedge \overline{\mathbf{O}_1\mathbf{B}_i})$$

En considérant que les angles et leurs dérivées temporelles sont petits :

$$\begin{aligned} \vec{\Omega}_1^0 &= \begin{bmatrix} \phi' \\ 0 \\ \theta' \end{bmatrix}_{10} \quad \frac{d^0}{dt} \vec{\Omega}_1^0 = \begin{bmatrix} \phi'' \\ \phi' \theta' \\ \theta'' \end{bmatrix}_{10} \quad \overline{\mathbf{O}_1\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -h\phi \\ h \end{bmatrix}_{10} \\ \left( \frac{d^0}{dt} \vec{\Omega}_1^0 \right) \wedge \overline{\mathbf{O}_1\mathbf{G}} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge (\vec{\Omega}_1^0 \wedge \overline{\mathbf{O}_1\mathbf{G}}) &\equiv -h\phi'' \vec{Y}_{10} \\ \overline{\Gamma^0}(\mathbf{O}_1) &= \begin{bmatrix} \frac{dV}{dt} \\ V(\theta' + \alpha') \\ 0 \end{bmatrix}_R \equiv \begin{bmatrix} \frac{dV}{dt} - \alpha V(\theta' + \alpha') \\ V(\theta' + \alpha') + \alpha \frac{dV}{dt} \\ 0 \end{bmatrix}_{10} \end{aligned}$$

on obtient au final :

$$\overline{\Gamma_{\text{caisse}}^0}(\mathbf{G}) = \begin{bmatrix} \frac{dV}{dt} - \alpha V(\theta' + \alpha') \\ V(\theta' + \alpha') + \alpha \frac{dV}{dt} - h\phi'' \\ 0 \end{bmatrix}_{10}$$

On procède de même pour les roues avec  $i = 4, 5, 6, 7$  :

$$\begin{aligned} \vec{\Omega}_{10}^0 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta' \end{bmatrix}_{10} \quad \overline{\mathbf{O}_1\mathbf{B}_{i=4}} = \begin{bmatrix} a_1 \\ b \\ 0 \end{bmatrix}_{10} \\ \sum_{i=4}^7 \left( \frac{d^0}{dt} \vec{\Omega}_{10}^0 \right) \wedge \overline{\mathbf{O}_1\mathbf{B}_i} + \vec{\Omega}_{10}^0 \wedge (\vec{\Omega}_{10}^0 \wedge \overline{\mathbf{O}_1\mathbf{B}_i}) &= \begin{bmatrix} -\theta'^2 (a_1 - a_2) \\ \theta'' (a_1 - a_2) \\ 0 \end{bmatrix}_{10} \end{aligned}$$

On obtient pour la somme dynamique totale :

$$\begin{aligned} \overline{\Sigma_{\text{total}}^0} &= (M_{\text{caisse}} + 4 M_{\text{roue}}) \overline{\Gamma^0}(\mathbf{O}_1) + M_{\text{caisse}} (-h\phi'' \vec{Y}_{10}) + \dots \\ &\quad 2 M_{\text{roue}} \begin{bmatrix} -\theta'^2 (a_1 - a_2) \\ \theta'' (a_1 - a_2) \\ 0 \end{bmatrix}_{10} \end{aligned}$$

Usuellement, on néglige le dernier terme devant le premier et en admettant que  $(M_{\text{caisse}} + 4M_{\text{roue}}) \approx M_{\text{caisse}} \equiv M$ , on retiendra comme valeur de la somme dynamique pour le véhicule :

$$\overline{\Sigma_{\text{total}}^0} = M \begin{bmatrix} \frac{dV}{dt} - \alpha V(\theta' + \alpha') \\ V(\theta' + \alpha') + \alpha \frac{dV}{dt} - h\phi'' \\ 0 \end{bmatrix}_{10}$$

### 5.2.1.2 Moment dynamique

Le moment dynamique est la somme du moment dynamique de la caisse, du moteur et des quatre roues. On sait que :

$$\overline{\delta^0}(\mathbf{G}) = \frac{d^0}{dt} \overline{\mu^0}(\mathbf{G}) \quad \overline{\mu^0}(\mathbf{G}) = \sum_{\text{solides}} \overline{\mu_{S_i}^0}(\mathbf{G})$$

Il faudrait détailler le calcul du moment cinétique de chacun des solides  $S_i$ . Cela signifie prendre aussi en compte la rotation de l'équipage mobile du moteur ainsi que la rotation propre des roues. Cela se fait sans difficulté mais, là encore au final, les ordres de grandeur font que l'on retient essentiellement le roulis de la caisse en prenant comme valeur des éléments inertiels ceux du véhicule dans son ensemble. Ce qui donne :

$$\begin{aligned} \overline{\mu^0}(\mathbf{G}) &= \overline{I_G} \vec{\Omega}_1^0 \\ \overline{I_G} &= \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & I_{xz} \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ I_{xz} & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}_{10} \equiv \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & I_{xz} \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ I_{xz} & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}_{10} \quad \overline{\mu^0}(\mathbf{G}) = \begin{bmatrix} I_{xx}\phi' + I_{xz}\theta' \\ 0 \\ I_{zz}\theta' + I_{xz}\phi' \end{bmatrix}_{10} \end{aligned}$$

on en déduit alors, en négligeant les termes d'ordre 2 en vitesse :

$$\overline{\delta^0}(\mathbf{G}) = \frac{d^0}{dt} \overline{\mu^0}(\mathbf{G}) = \begin{bmatrix} I_{xx}\phi'' + I_{xz}\theta'' \\ 0 \\ I_{zz}\theta'' + I_{xz}\phi'' \end{bmatrix}_{10}$$

On peut alors calculer sans peine le moment dynamique au point

O<sub>1</sub> de la manière suivante :  $\overline{\delta^0}(\mathbf{O}_1) = \overline{\delta^0}(\mathbf{G}) + \overline{\mathbf{O}_1\mathbf{G}} \wedge \overline{\Sigma_{\text{total}}^0}$ , ce qui donne :

$$\begin{aligned} \overline{\delta^0}(\mathbf{O}_1) &= \begin{bmatrix} I_{xx}\phi'' + I_{xz}\theta'' \\ 0 \\ I_{zz}\theta'' + I_{xz}\phi'' \end{bmatrix}_{10} + \begin{bmatrix} 0 \\ -h\phi \\ h \end{bmatrix}_{10} \wedge M \begin{bmatrix} \frac{dV}{dt} - \alpha V(\theta' + \alpha') \\ V(\theta' + \alpha') + \alpha \frac{dV}{dt} - h\phi'' \\ 0 \end{bmatrix}_{10} \\ \overline{\delta^0}(\mathbf{O}_1) &= \begin{bmatrix} (I_{xx} + Mh^2)\phi'' + I_{xz}\theta'' - Mh \left( V(\theta' + \alpha') + \alpha \frac{dV}{dt} \right) \\ Mh \left( \frac{dV}{dt} - \alpha V(\theta' + \alpha') \right) \\ I_{zz}\theta'' + I_{xz}\phi'' + Mh\phi \left( \frac{dV}{dt} - \alpha V(\theta' + \alpha') \right) \end{bmatrix}_{10} \end{aligned}$$

Dans cette expression, seule la première composante sera utilisée dans les théorèmes retenus. On y trouve en particulier  $\theta' = V/R \leftrightarrow V\theta' = V^2/R$  l'accélération transversale, terme toujours grand en virage, ce qui permet de simplifier et de ne retenir :

$$\overline{\delta^0}(\mathbf{O}_1) \cdot \vec{X}_{10} = (I_{xx} + Mh^2)\phi'' + I_{xz}\theta'' - MhV(\theta' + \alpha')$$

## 5.2.2 Actions mécaniques

### 5.2.2.1 Actions mécaniques extérieures au véhicule

Il n'y a que trois origines aux actions mécaniques extérieures agissant sur le véhicule : celles dues à la pesanteur, celles du sol sur les roues et enfin celles de l'air. Nous considérerons, comme il est d'usage, que le véhicule circule sur sol horizontal. Nous avons montré dans la section 4 comment et sous quelle forme le torseur des actions aérodynamique pouvait se présenter ; nous retiendrons, dans un premier temps, l'expression du torseur réduit au centre de gravité. Concernant les actions sol-roues, si l'on considère que les

roues sont rigides, alors il faudra faire appel aux lois de Coulomb sur le frottement, sinon nous ferons appel aux expressions détaillées dans la section 2. L'utilisation des lois de Coulomb permet, en particulier, de s'intéresser au problème du glissement, c'est-à-dire au dérapage du véhicule et on sait, qu'à la limite, un pneumatique présente un comportement de type coulombien.

Toujours dans les actions sol-roues, il est à noter le cas particulier des actions longitudinales. En effet, celles-ci sont commandées par le conducteur, via les freins et/ou la pédale de gaz. Par ailleurs, l'existence des différentiels induit des relations entre ces valeurs, qui sont, si l'on admet que les différentiels et le système de freinage sont parfaits :

$$\begin{aligned} X_{04}(t) &= X_{05}(t) \quad X_{06}(t) = X_{07}(t) \\ X_{04}(t) + X_{05}(t) &= x [X_{04}(t) + X_{05}(t) + X_{06}(t) + X_{07}(t)] \\ X_{06}(t) + X_{07}(t) &= (1-x) [X_{04}(t) + X_{05}(t) + X_{06}(t) + X_{07}(t)] \end{aligned}$$

avec  $x$  répartition de puissance entre l'avant et l'arrière ;  $x = 1$  véhicule traction avant et  $x = 0$  propulsion.

### 5.2.2.2 Actions mécaniques intérieures au véhicule

Ces actions sont au nombre de quatre :

– les **actions du moteur**. Via la boîte de vitesse et les arbres de transmission, le couple moteur commandé par le pilote détermine les actions longitudinales ;

– les **actions des freins**. Via le circuit et les mécaniques de freins, le couple de freinage commandé par le pilote détermine les actions longitudinales ;

– les **actions des ressorts**. Les ressorts de suspension jouent un double rôle, sur le confort en absorbant les inégalités ou les obstacles de la route mais aussi sur le roulis en maintenant la caisse dans les virages. Associées le cas échéant aux barres anti-roulis, leurs actions, admises comme linéaires, sur le roulis, peuvent être représentées par un torseur couple à l'avant en  $I_1$  et à l'arrière en  $I_2$  :

$$\overline{M_{(R_1)1}(I_1)} \vec{X}_{10} = -K_1 \phi \quad \overline{M_{(R_2)1}(I_2)} \vec{X}_{10} = -K_2 \phi$$

avec  $K_1$  et  $K_2$  respectivement raideur anti-roulis avant et arrière ;

– les **actions des amortisseurs**. Couplés avec les ressorts, ils ont une action sur le confort, mais leur rôle n'est pas négligeable lors des transitoires dans les virages. Comme les ressorts, leurs actions, admises comme linéaires, sur le roulis, peuvent être représentées par un torseur couple à l'avant en  $I_1$  et à l'arrière en  $I_2$  :

$$\overline{M_{(A_1)1}(I_1)} \vec{X}_{10} = -b_1 \phi' \quad \overline{M_{(A_2)1}(I_2)} \vec{X}_{10} = -b_2 \phi'$$

avec  $b_1$  et  $b_2$  respectivement coefficient d'amortissement anti-roulis avant et arrière.

Remarque : il va de soi que les liaisons ne sont pas parfaites dans la réalité, néanmoins, nous ne tiendrons pas compte des frottements et autres imperfections.

## 5.2.3 Équations de la dynamique

### 5.2.3.1 Équations générales

On les obtient en écrivant le théorème de la somme dynamique à l'ensemble du véhicule en projection sur les trois axes, puis celui du théorème du moment dynamique en G à l'ensemble du véhi-

cule en projection sur les trois axes. Ce qui donne, en utilisant les données des sections précédentes, pour la somme dynamique :

$$\begin{aligned} M \left( \frac{dV}{dt} - \alpha V(\theta' + \alpha') \right) &= X_{04} + X_{05} + X_{06} + X_{07} \frac{\rho}{2} C_X S V^2 \\ M \left( V(\theta' + \alpha') + \alpha \frac{dV}{dt} - h \phi'' \right) &= Y_{04} + Y_{05} + Y_{06} + Y_{07} \frac{\rho}{2} C_Y S V^2 \quad (13) \\ 0 &= Z_{04} + Z_{05} + Z_{06} + Z_{07} + \frac{\rho}{2} C_Z S V^2 - Mg \end{aligned}$$

et pour le moment dynamique en G :

$$\begin{aligned} (I_{xx} + Mh^2)\phi'' + I_{xz}\theta'' - Mh(V(\theta' + \alpha') + \alpha \frac{dV}{dt}) &= \dots \\ (h + h_0) \sum_{i=4}^7 Y_{0i} + b(Z_{04} - Z_{05}) + b(Z_{06} - Z_{07}) + \frac{\rho}{2} C_L S L V^2 \\ Mh \left( \frac{dV}{dt} - \alpha V(\theta' + \alpha') \right) &= \sum_{i=4}^7 M_{0i} - a_1(Z_{04} + Z_{05}) + a_2(Z_{06} + Z_{07}) + \dots \\ &\quad - (h + h_0) \sum_{i=4}^7 X_{0i} + \frac{\rho}{2} C_M S L V^2 \\ \sum_{i=4}^7 N_{0i} + a_1(Y_{04} + Y_{05}) - a_2(Y_{06} + Y_{07}) - b(X_{04} - X_{05}) \\ &\quad - b(X_{06} - X_{07}) + \frac{\rho}{2} C_N S L V^2 \end{aligned}$$

### 5.2.3.2 Équations spécifiques

Il s'agit d'écrire le théorème du moment dynamique appliqué aux trois sous-systèmes constitués par la caisse, le train avant et le train arrière, en utilisant la présence de la liaison rotoïde modélisant l'axe de roulis. Pour les équations qui vont suivre, on admettra, l'angle  $\alpha_r$  étant très petit, que :  $O_1 X_{10} = O_1 X_{10}^*$ ,  $I_1 X_{10} = I_1 X_{10}^*$ ,  $I_2 X_{10} = I_2 X_{10}^*$ .

L'application du théorème du moment dynamique à la caisse en  $O_1$  suivant la projection selon  $O_1 X_{10}$  donne :

$$(I_{xx} + Mh^2)\phi'' + I_{xz}\theta'' - MhV(\theta' + \alpha') = - (K_1 + K_2)\phi - (b_1 + b_2)\phi' + \dots$$

$$(\vec{O_1 G} \wedge \vec{P}) \cdot \vec{X}_{10}$$

En posant pour simplifier  $K_1 + K_2 = K_\phi$  et  $b_1 + b_2 = b_\phi$ , et en développant, on obtient :

$$(I_{xx} + Mh^2)\phi'' + I_{xz}\theta'' - MhV(\theta' + \alpha') = -K_\phi \phi - b_\phi \phi' + Mgh\phi$$

Très souvent on fait apparaître la quantité  $K_\phi - Mgh = K_\phi^*$ , qu'on appelle raideur apparente anti-roulis. On retiendra alors comme équation :

$$(I_{xx} + Mh^2)\phi'' + I_{xz}\theta'' - MhV(\theta' + \alpha') = -K_\phi^* \phi - b_\phi \phi' \quad (15)$$

L'application du théorème du moment dynamique au train avant en  $I_1$  suivant la projection selon  $I_1 X_{10}$  :

$$0 = h_1(Y_{04} + Y_{05}) + b(Z_{04} - Z_{05}) + K_1 \phi + b_1 \phi' \quad (16)$$

et au train arrière en  $I_2$  suivant la projection selon  $I_2 X_{10}$  :

$$0 = h_2(Y_{06} + Y_{07}) + b(Z_{06} - Z_{07}) + K_2 \phi + b_2 \phi' \quad (17)$$

Les équations de base de la dynamique de véhicule sont formées des équations suivantes :

- les trois équations (13) ;
- les trois équations (14) ;
- les équations (15), (16), (17).

On remarquera que, formellement, ni le moteur, ni les freins n'apparaissent explicitement ; certains auteurs disent que la voiture avance « par la route ». Bien sûr, comme on l'a vu précédemment, les actions sol-roues sont générées par le moteur ou les freins mais ce sont des actions intérieures au sens de la mécanique des systèmes multicorps ; pour y accéder, il faut isoler chacune des roues et leur appliquer les théorèmes de moment. De cet ensemble nous allons extraire deux sous-ensembles qui régiront, d'une part, le mouvement lacet-dérive et, d'autre part, le mouvement de roulis.

## 5.3 Mouvement lacet-dérive

### 5.3.1 Hypothèses

On admet que le roulis est nul et que la vitesse du véhicule est constante :

$$\phi = 0 \quad V = \text{cste} = V^*$$

Concernant les actions sol-roues, plusieurs hypothèses peuvent être retenues :

- les lois de Coulomb si l'on retient une modélisation roue rigide ;
- la loi de dérive linéaire, qui ne sera valide que pour les angles faibles de dérive ( $< 4^\circ$ ) ;
- la loi de dérive non linéaire.

Nous examinerons les deux dernières, même si la première présente un intérêt comme déjà signalé.

#### 5.3.1.1 Loi de dérive linéaire

Dans la section 2, nous avons vu que les relations entre les actions sol-roue sont mesurées et exprimées dans le repère lié à la jante de la roue ; il faut donc changer de repère uniquement les actions sol-roue sur les roues avant, dans l'hypothèse d'un véhicule à deux roues directrices. Les actions de contacts sol-roues sont désignées ici par :

$$[X_{j04}, Y_{j04}, Z_{j04}]_{\text{jante}}$$

Si le véhicule comporte quatre roues directrices, alors on appliquera une démarche similaire pour les roues arrières. Ce qui donne pour la roue 4 avec  $\beta_2$ , angle de braquage :

$$\begin{bmatrix} X_{04} \\ Y_{04} \\ Z_{04} \end{bmatrix}_{10} = \begin{bmatrix} 1 & -\beta_2 & 0 \\ \beta_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{j04} \\ Y_{j04} \\ Z_{j04} \end{bmatrix}_2$$

soit encore :

$$\begin{cases} X_{04} = X_{j04} - \beta_2 Y_{j04} \\ Y_{04} = \beta_2 X_{j04} + Y_{j04} \\ Z_{04} = Z_{j04} \end{cases}$$

mais comme  $Y_{j0i} = -D_i \delta_i$ , on retiendra, les angles étant petits :

$$\begin{aligned} X_{04} &= X_{j04} \\ Y_{04} &= \beta_2 X_{j04} - D_4 \delta_4 \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} Y_{04} + Y_{05} &= \beta_2 X_{j04} - D_4 \delta_4 + \beta_3 X_{j05} - D_5 \delta_5 \\ Y_{06} + Y_{07} &= -D_4 \delta_4 - D_5 \delta_5 \end{aligned} \quad (18)$$

Prenons en compte les hypothèses supplémentaires suivantes :  
– les différentiels et/ou le système de freinage sont équilibrés :

$$X_{04}(t) = X_{05}(t) \quad X_{06}(t) = X_{07}(t)$$

- $\beta_2 = \beta_3 = \beta$  ;
- les rigidités de dérive à droite et à gauche pour un même essieu sont égales :

$$D_4 = D_5 = D_1 \quad D_6 = D_7 = D_2$$

– les dérivées à droite et à gauche pour un même essieu sont égales :

$$\delta_4 = \delta_5 = \delta_1 \quad \delta_6 = \delta_7 = \delta_2$$

les expressions (18) deviennent :

$$\begin{aligned} Y_{04} + Y_{05} &= \beta (X_{j04} + X_{j05}) - 2D_1 \delta_1 \\ Y_{06} + Y_{07} &= -2D_2 \delta_2 \end{aligned}$$

– ajoutons l'hypothèse supplémentaire  $\beta(X_{j04} + X_{j05}) \ll |2D_1 \delta_1|$  car les forces de dérive sont toujours très grandes.

On obtient alors les résultats remarquables :

$$\begin{aligned} Y_{04} + Y_{05} &= -2D_1 \delta_1 \\ Y_{06} + Y_{07} &= -2D_2 \delta_2 \end{aligned}$$

**Remarque** : en utilisant les hypothèses énoncées, cela est revenu à adopter un modèle à roue moyenne.

#### 5.3.1.2 Loi de dérive non linéaire

Toutes les hypothèses précédentes seront conservées, mais nous serons amenés à adopter une fonction pour représenter la courbe expérimentale force de dérive-angle de dérive. À la section 2, nous avons vu que l'on pouvait adopter la représentation de Pacejka, actuellement la plus utilisée, mais d'autres existent. Ainsi, nous aurons :

$$\begin{aligned} Y_{04} + Y_{05} &= Y_{04}(\delta) + Y_{05}(\delta) \\ Y_{06} + Y_{07} &= Y_{06}(\delta) + Y_{07}(\delta) \end{aligned}$$

qui sont des expressions algébriques non linéaires en angle de dérive.

On notera que, lors de l'utilisation courante d'une voiture, les pneumatiques sont sollicités dans le domaine linéaire des dérivées. Cela correspond à une accélération transversale maximale de l'ordre de 3 à 4  $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

### 5.3.2 Modèle linéaire : équations

On retient, dans les équations (13), l'équation de la somme en projection sur l'axe des  $Y$  et, dans les équations (14), celle en projection sur l'axe  $GZ_0$  qui vont s'écrire compte tenu des hypothèses comme suit :

$$M \left( V(\theta' + \alpha') + \alpha \frac{dV}{dt} \right) = -2D_1 \delta_1 - 2D_2 \delta_2 + \frac{\rho}{2} C_V S V^2$$

$$I_{zz} \theta'' = \sum_{i=4}^7 N_{0i} + a_i (-2D_1 \delta_1) - a_2 (-2D_2 \delta_2) + \frac{\rho}{2} C_N S L V^2$$

Ces équations peuvent encore se simplifier puisque :

$$-(V\theta' + V^2/R) \gg \alpha \frac{dV}{dt} ;$$

–  $N_{0i} = t_i \cdot Y_{0i}$ , en admettant que la chasse des pneus d'un même essieu sont égales, on peut écrire  $N_{0i} + a_i Y_{0i} = (t_i + a_i) Y_{0i}$ . Mais en



ordre de grandeur  $t_i \ll a_i$  (quelques centimètres comparés à plus d'un mètre), ce qui fait que, très souvent, on ne prend pas en compte la chasse du pneu ce qui revient à négliger les moments d'autoalignement  $N_{0j}$ . On voit cependant qu'il n'y a aucune difficulté à en tenir compte ;

– les grandeurs aérodynamiques, comparées aux valeurs des efforts de dérives, sont dans un rapport de 1 à 10 voire de 1 à 20, nous les négligerons donc.

Les équations constituent ainsi les équations de base de la dynamique du véhicule, c'est-à-dire celles qui ont permis de comprendre le fonctionnement fondamental d'une voiture munie de pneumatiques. Elles se présentent sous deux formes.

### 5.3.2.1 Forme dite en angle de dérive

$$\begin{aligned} MV(\theta' + \alpha') &= -2D_1\delta_1 - 2D_2\delta_2 \\ I_{zz}\theta'' &= -2a_1D_1\delta_1 + 2a_2D_2\delta_2 \end{aligned} \quad (19)$$

On remarque que ces deux équations (19) ne sont pas des équations de mouvement au sens de la mécanique des systèmes multi-corps puisqu'elles ne sont pas exprimées en fonction uniquement des paramètres et de leurs dérivées.

Pour remédier à cela, il faut revenir à la section 3 et remplacer les valeurs des angles de dérive en fonction des paramètres, ce fut la raison d'être de cette section. Ainsi, avec l'approximation des petits angles :

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \alpha + \frac{a_1\theta'}{V} - \beta \\ \delta_2 &= \alpha - \frac{a_2\theta'}{V} \end{aligned} \quad (20)$$

En ordonnant par rapport aux paramètres et à leurs dérivées, on trouve alors deux équations de mouvement régissant le mouvement lacet-dérive d'un véhicule à roues moyennes à une seule roue directrice, ce qui est aussi celles d'un véhicule à quatre roues munies de deux roues directrices.

### 5.3.2.2 Forme avec équations de mouvement en $\alpha$ et $\theta$

$$\begin{aligned} MV\alpha' + [2D_1 + 2D_2]\alpha + \left[ MV + \frac{2D_1a_1 - 2D_2a_2}{V} \right]\theta' - 2D_1\beta &= 0 \\ I_{zz}\theta'' + \left[ \frac{2D_1a_1^2 + 2D_2a_2^2}{V} \right]\theta' + [2D_1a_1 - 2D_2a_2]\alpha - 2D_1a_1\beta &= 0 \end{aligned}$$

C'est un système linéaire du second ordre à coefficients constants.

Par exemple, pour une berline moyenne avec 2 personnes à bord, on obtient les valeurs numériques suivantes :

$$\begin{aligned} M &= 1355 \text{ kg} \quad a_1 = 0,994 \text{ m} \quad a_2 = 1,586 \text{ m} \\ D_1 &= 57\,324 \text{ Nrd}^{-1} \quad D_2 = 45\,859 \text{ Nrd}^{-1} \quad I_{zz} = 2\,222 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \\ V &= 30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \quad R = 225 \text{ m} \quad a_y = V^2/R = 4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned} 1,355V\alpha' + 206\alpha + \left[ 1,355V + \frac{-(31,5)}{V} \right]\theta' - 114,6\beta &= 0 \\ 2,222\theta'' + \left[ \frac{344}{V} \right]\theta' + [-(31,5)]\alpha - 114\beta &= 0 \end{aligned}$$

### 5.3.3 Modèle non linéaire

On retient les mêmes équations que précédemment mais dans ce cas, les forces de dérive sont des fonctions algébriques des angles de dérive ; soit encore :

$$\begin{aligned} MV(\theta' + \alpha') &= Y_{04}(\delta) + Y_{05}(\delta) + Y_{06}(\delta) + Y_{07}(\delta) \\ I_{zz}\theta'' &= a_1[Y_{04}(\delta) + Y_{05}(\delta)] - a_2[Y_{06}(\delta) + Y_{07}(\delta)] \end{aligned}$$

ce qui donne le système algèbro-différentiel non linéaire suivant :

$$\begin{aligned} MV(\theta' + \alpha') + f_1(\alpha, \theta', \beta, V) &= 0 \\ I_{zz}\theta'' + f_2(\alpha, \theta', \beta, V) &= 0 \end{aligned}$$

L'utilisation de ce dernier modèle requiert des systèmes performants de résolution d'équations différentielles.

## 5.4 Mouvement de roulis

Pour l'obtenir, on se reporte à l'équation (15) :

$$(I_{xx} + Mh^2)\phi'' + I_{xz}\theta'' - MhV(\theta' + \alpha') = -K_\phi^*\phi - b_\phi\phi'$$

dans laquelle on constate, comme dans les autres équations d'ailleurs, que le roulis n'est pas un mouvement découplé du mouvement lacet-dérive. Cependant, pour des raisons de compréhension de la base du phénomène, nous découplerons les deux mouvements de la manière suivante :

- en notant que  $V\theta' = V^2/R$  ;
- en négligeant le terme en  $V\alpha'$  devant l'accélération transversale ;
- en posant  $\theta'' = 0$ .

L'équation s'écrit alors :

$$(I_{xx} + Mh^2)\phi'' + b_\phi\phi' + K_\phi^*\phi = Mh(V^2/R) \quad (21)$$

Cette équation est communément appelée « **équation de roulis** ». On peut faire un certain nombre de commentaires :

– présentée sous la forme (21), le roulis apparaît comme la réponse à une accélération transversale. Il faut d'ailleurs toujours avoir à l'esprit la valeur de cette accélération transversale lorsqu'on interprète des résultats numériques ;

– pour le faire apparaître comme une réponse à un braquage, il suffit de se souvenir que le rayon de virage est lié à l'angle de braquage par deux relations selon que l'on est en roues rigides ou

en roues déformables  $R_G = \frac{a_1 + a_2}{\beta}$   $R_D = \frac{a_1 + a_2}{\beta + \delta_1 - \delta_2}$ . On constate

alors que si l'on veut utiliser le modèle de roue déformable, alors, il y a contradiction avec notre volonté de découpler le mouvement de roulis de celui de lacet-dérive. En effet, on a rappelé précédemment un résultat de la section 3 [équation (20)] qui montre clairement que les angles de dérive s'expriment en fonction de l'angle au vent et de l'angle de lacet. Le seul cas compatible serait le cas du véhicule dit « neutre » pour lequel  $\delta_1 - \delta_2 = 0$ , ce qui peut être déjà une approximation convenable.

### Remerciements

L'auteur est redevable aux Presses Polytechniques et Universitaires Romandes qui l'ont autorisé à utiliser les figures extraites de l'ouvrage de J.-P. Brossard ayant pour titre *Dynamique du véhicule, modélisation des systèmes complexes* ; qu'elles en soient remerciées.

# GAGNEZ DU TEMPS ET SÉCURISEZ VOS PROJETS EN UTILISANT UNE SOURCE ACTUALISÉE ET FIABLE

Techniques de l'Ingénieur propose la plus importante collection documentaire technique et scientifique en français !

Grâce à vos droits d'accès, retrouvez l'ensemble des **articles et fiches pratiques de votre offre**, **leurs compléments et mises à jour**, et bénéficiez des **services inclus**.



RÉDIGÉE ET VALIDÉE  
PAR DES EXPERTS



MISE À JOUR  
PERMANENTE



100 % COMPATIBLE  
SUR TOUS SUPPORTS  
NUMÉRIQUES



SERVICES INCLUS  
DANS CHAQUE OFFRE

- + de 350 000 utilisateurs
- + de 10 000 articles de référence
- + de 80 offres
- 15 domaines d'expertise

- ☐ Automatique - Robotique
- ☐ Biomédical - Pharma
- ☐ Construction et travaux publics
- ☐ Électronique - Photonique
- ☐ Énergies
- ☐ Environnement - Sécurité
- ☐ Génie industriel
- ☐ Ingénierie des transports
- ☐ Innovation
- ☐ Matériaux
- ☐ Mécanique
- ☐ Mesures - Analyses
- ☐ Procédés chimie - Bio - Agro
- ☐ Sciences fondamentales
- ☐ Technologies de l'information

**Pour des offres toujours plus adaptées à votre métier,  
découvrez les offres dédiées à votre secteur d'activité**

Depuis plus de 70 ans, Techniques de l'Ingénieur est la source d'informations de référence des bureaux d'études, de la R&D et de l'innovation.

**[www.techniques-ingenieur.fr](http://www.techniques-ingenieur.fr)**

**CONTACT :** Tél. : + 33 (0)1 53 35 20 20 - Fax : +33 (0)1 53 26 79 18 - E-mail : [infos.clients@teching.com](mailto:infos.clients@teching.com)

# LES AVANTAGES ET SERVICES compris dans les offres Techniques de l'Ingénieur

## ACCÈS



### Accès illimité aux articles en HTML

Enrichis et mis à jour pendant toute la durée de la souscription



### Téléchargement des articles au format PDF

Pour un usage en toute liberté



### Consultation sur tous les supports numériques

Des contenus optimisés pour ordinateurs, tablettes et mobiles

## SERVICES ET OUTILS PRATIQUES



### Questions aux experts\*

Les meilleurs experts techniques et scientifiques vous répondent



### Articles Découverte

La possibilité de consulter des articles en dehors de votre offre



### Dictionnaire technique multilingue

45 000 termes en français, anglais, espagnol et allemand



### Archives

Technologies anciennes et versions antérieures des articles



### Impression à la demande

Commandez les éditions papier de vos ressources documentaires



### Alertes actualisations

Recevez par email toutes les nouveautés de vos ressources documentaires

\*Questions aux experts est un service réservé aux entreprises, non proposé dans les offres écoles, universités ou pour tout autre organisme de formation.

## ILS NOUS FONT CONFIANCE



**www.techniques-ingenieur.fr**

**CONTACT :** Tél. : + 33 (0)1 53 35 20 20 - Fax : +33 (0)1 53 26 79 18 - E-mail : [infos.clients@teching.com](mailto:infos.clients@teching.com)