Exercice.

Démontrer que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

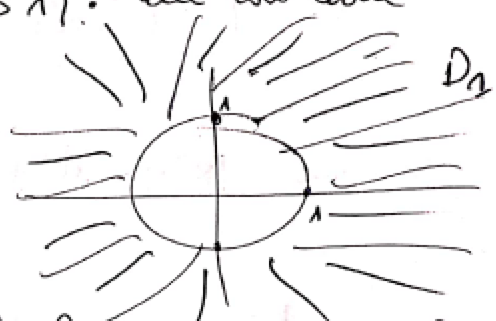
$$f(x,y) = \begin{cases} 2x^2 + y^2 - 1 & \text{si } x^2 + y^2 > 1 \\ x^2 & \text{sinon} \end{cases}$$

est continue sur $\mathbb{R}^2$.

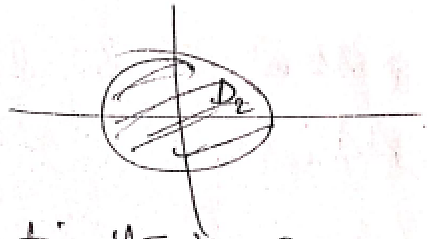
Corrigé. Voir la page suivante.

Soit $f(x,y) = \begin{cases} 2x^2+y^2-1 & \text{si } x^2+y^2>1 \\ x^2 & \text{si } x^2+y^2 \leq 1 \end{cases}$

* f est un polynôme dans la région $D_1 = \{(x,y) \; ; \; x^2+y^2>1\}$. elle est donc continue sur D_1.



* f est aussi un polynôme dans la région $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; \; x^2+y^2<1\}$. elle est donc continue sur D_2.



* le ~~pr~~ problème de continuité de f se pose uniquement sur le cercle unité (i,e, sur le cercle $\mathcal{C}((0,0),1)$).

Soit $(a,b) \in \mathcal{C}((0,0),1)$ (donc, $a^2+b^2=1$).

On a : $|f(x,y)-f(a,b)| = |f(x,y)-a^2|$

$$= \begin{cases} |2x^2+y^2-1-a^2| & \text{si } x^2+y^2>1 \\ |x^2-a^2| & \text{si } x^2+y^2 \leq 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} |x^2+y^2-1+x^2-a^2| & \text{si } x^2+y^2>1 \\ |x^2-a^2| & \text{si } x^2+y^2 \leq 1 \end{cases}$$

$$\leq \begin{cases} |x^2+y^2-1|+|x^2-a^2| & \text{si } x^2+y^2>1 \\ |x^2-a^2| & \text{si } x^2+y^2 \leq 1 \end{cases}$$

$$\leq |x^2+y^2-1|+|x^2-a^2| \quad ; \text{ dans les 2 cas}$$
$(\text{càd}, \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2)$

On a montré que :

$$|f(x,y)-f(a,b)| \leq |x^2+y^2-1|+|x^2-a^2| \; ; \; \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

En passant à la limite quand $(x,y) \to (a,b)$, on obtient :

$$0 \leq \lim_{(x,y)\to(a,b)} |f(x,y)-f(a,b)| \leq \lim_{(x,y)} \left(|x^2+y^2-1|+|x^2-a^2|\right)$$

$$= |\underbrace{a^2+b^2-1}_{0}|+|\underbrace{a^2-a^2}_{0}|$$

$\boxed{\text{Car} : (a,b) \in \mathcal{C}((0,0),1)}$

$$= 0$$

D'où : $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} |f(x,y)-f(a,b)| = 0$.

Ce qui montre que $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$.

En conclusion, f est continue en tout point $(a,b) \in \mathcal{C}((0,0),1)$.

<u>f est donc continue sur $\mathbb{R}^2$.</u>