Exercice. Calculer suivant les valeurs du paramètre réel α la limite en $(0,0)$ de la fonction :

$$f(x,y) = \frac{|xy|^\alpha}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Corrigé. Voir la page suivante.

$$* \quad h(x,y) = \frac{|xy|^{\alpha}}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

- <u>Si $\alpha = 0$</u> : $h(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} +\infty$

- <u>Si $\alpha < 0$</u> : $h(x,y) = \dfrac{1}{|xy|^{-\alpha}\sqrt{x^2+y^2}} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} +\infty$

(Car : $|xy|^{-\alpha} \longrightarrow 0^+$ et $\sqrt{x^2+y^2} \longrightarrow 0^+$).

- <u>Si $\alpha > \frac{1}{2}$</u> :

$$h(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = r^{2\alpha-1} \cdot |\cos\theta \sin\theta|^{\alpha}$$
$$= r^{2\alpha-1} \cdot \varphi(\theta), \text{ où } \varphi(\theta) = |\cos\theta \sin\theta|^{\alpha}$$

puisque $2\alpha - 1 > 0$ et φ est une fonction bornée, alors :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = \lim_{r\to 0} h(r\cos\theta, r\sin\theta) = \lim_{r\to 0} r^{2\alpha-1}\varphi(\theta) = 0$$

- <u>Si $0 < \alpha < \frac{1}{2}$</u> :

$$h(0,x) = 0, \quad \forall x \neq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lim_{x\to 0} h(0,x) = 0} \quad \text{--- } (1)$$

$$h(x,x) = \frac{|x|^{2\alpha}}{\sqrt{2x^2}} = \frac{|x|^{2\alpha}}{\sqrt{2}\cdot|x|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{|x|^{1-2\alpha}}$$

puisque $1 - 2\alpha > 0$, alors : $|x|^{1-2\alpha} \xrightarrow[x\to 0]{} 0^+$, donc

$$\boxed{\lim_{x\to 0} h(x,x) = +\infty} \quad \text{--- } (2)$$

On en déduit de (1) et (2) que h n'a pas de limite dans ce cas.

- si $\alpha = \frac{1}{2}$:

$$h(x,y) = \sqrt{\frac{|xy|}{x^2+y^2}}$$

$$h(r\cos\theta, r\sin\theta) = \sqrt{|\cos\theta \sin\theta|}$$

$$\lim_{r \to 0} h(r\cos\theta, r\sin\theta) = \sqrt{|\cos\theta \sin\theta|}$$

La limite dépend de θ !! h n'a pas de limite dans ce cas.

Conclusion :

- si $\alpha \leq 0$: $h(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} +\infty$

- si $\alpha > \frac{1}{2}$: $h(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$

- dans le reste des cas, h n'a pas de limite en $(0,0)$.