**E**cole **S**upérieure en **S**ciences et **T**echnologies

de l'**I**nformatique et du **N**umérique (ESTIN)

**Deuxième Année**.CP

Année 2021/2022

# Solution des exercices suplémentaires

# Sur les fonctions à plusieurs variables

**Solution .1** *Étudier l'existence et la valeur éventuelle de la limite en* $(0,0)$ *des fonctions* $f$, $g$ *et* $h$.

1. *Comme* $(1-\cos u) \leq \frac{u^2}{2}$ *et que* $x^2+xy+y^2 = \frac{x^2}{2}+\frac{(x+y)^2}{2}+\frac{y^2}{2} \geq \frac{1}{2}(x^2+y^2)$, *alors*

$$|f(x,y)| \leq \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)} \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$$

*donc* $f$ *tend vers* 0.

2. *En passant aux coordonnées polaires, on obtient*

$$g(r,\theta) = \frac{\sqrt{r^4\left(\cos^4\theta+\sin^4\theta\right)}}{r^{2\alpha}\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)^{\alpha}} = r^{2(1-\alpha)}\sqrt{\left(\cos^4\theta+\sin^4\theta\right)}$$

*a) Si* $\alpha<1$, *la fonctions* $\theta \mapsto \sqrt{\left(\cos^4\theta+\sin^4\theta\right)}$ *est bornée, et* $\lim\limits_{r\to 0} r^{2(1-\alpha)} = 0$. *Donc*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = \lim_{r\to 0} g(r,\theta) = 0.$$

*b) Si* $\alpha>1$, *alors*

$$g(x,0) = \frac{x^2}{x^{2\alpha}} = \frac{1}{(x^2)^{\alpha-1}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} +\infty.$$

*Donc, la limite n'existe pas.*

*c) Si* $\alpha=1$, *alors*

$$g(x,0) = 1 \text{ et } g(x,x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

*Donc la limite n'existe pas.*

*3. En passant aux coordonnées polaires, on obtient*

$$h(r,\theta) = \frac{r^{2\alpha}\left|\cos\theta\right|^{\alpha}\left|\sin\theta\right|^{\alpha}}{r} = r^{2\alpha-1}\left|\cos\theta\right|^{\alpha}\left|\sin\theta\right|^{\alpha}$$

*a) Si* $\alpha > \frac{1}{2}$*, alors*

$$|h(r,\theta)| \leq r^{2\alpha-1} \underset{r\to 0}{\longrightarrow} 0 \quad (\ car\ \ 2\alpha - 1 > 0) \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = 0$$

*b) Si* $\alpha < \frac{1}{2}$*, pas de limite. En effet, pour* $y = x$ *on a*

$$h(x,x) = \frac{x^{2\alpha}}{\sqrt{2}\,|x|} = \frac{1}{\sqrt{2}\,|x|^{1-2\alpha}} \underset{x\to 0}{\to} +\infty$$

*c) Si* $\alpha = \frac{1}{2}$*,on a*

$$f(x,x) = \frac{|x|}{\sqrt{2}\,|x|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad et \quad f(x,0) = 0.$$

*Donc, la limite n'existe pas.*

**Solution .2** *Étudier la continuité des fonctions* $f$ *et* $g$ *sur* $\mathbb{R}^2$.

*1.La fonction* $f$ *est continue sur* $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$*, car c'est la composée de deux fonctions continue sur* $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

*Étudions la continuité de* $f$ *en* $(0,0)$.

*On a*

$$\left|\frac{xy^2}{x^4+y^2}\right| = \frac{|x|\,y^2}{x^4+y^2} \leq |x| \underset{x\to 0}{\to} 0$$

*alors*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^4+y^2} = 0 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0).$$

*Donc,* $f$ *est continue en* $(0,0)$*,donc elle est continue sur* $\mathbb{R}^2$.

*2. La fonction* $g$ *est le quotient de deux fonctions continues sur* $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$*, dont le dénoménateur ne s'annule pas, donc* $g$ *est continue sur* $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.

*Étudions la continuité de* $g$ *en* $(0,0)$.

*En utilisant le développement limité d'ordre* $1$ *de* $e^t$ *au voisinnage de* $0$*, on obtient*

$$\frac{e^{(xy)^2}-1}{x^2+y^2} \approx \frac{(1+(xy)^2)-1}{x^2+y^2} = \frac{(xy)^2}{x^2+y^2}$$

*En utilisant le théorème d'encadrement, on montre que* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = g(,0,0) \Rightarrow g$ *est continue en* $(0,0)$*. Finalement,* $g$ *est continue sur* $\mathbb{R}^2$.

**Solution .3** *$f$ est une fonction définie et continue sur $D$.*

*La fonction $f$ est proongeable par contiuité sur $\overline{D}$ si et seulement si $f$ admet une limite finie en $(0,0)$.*

*En utilisant les développements limités d'ordre 1 de "cos" et "sin", on obtient*

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= \frac{\sin(1-(1-\frac{(xy)^2}{2}))}{(xy)^2+x^2\left|y^3\right|} \\
&= \frac{\sin(\frac{(xy)^2}{2})}{2(1+|y|)\frac{(xy)^2}{2}} \\
&= \frac{1}{2(1+|y|)} \times \frac{\sin(\frac{(xy)^2}{2})}{\frac{(xy)^2}{2}}
\end{aligned}
$$

*On a*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{2(1+|y|)} = \frac{1}{2} \quad et \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(\frac{(xy)^2}{2})}{\frac{(xy)^2}{2}} = 1,$$

*alors*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \frac{1}{2}$$

*Comme $f$ admet une limite finie en $(0,0)$ alors elle est prolongeable par continuité sur $\overline{D}$.*

*Notons par $\widetilde{f}$ le prolongement par continuité de $f$ sur $\overline{D}$,alors $\widetilde{f}$ est donnée par*

$$\widetilde{f}(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(1-\cos(xy))}{(xy)^2+\sin(x^2)\left|\sin^3(y)\right|}, & si\ (x,y) \in D \\ \frac{1}{2}, & si\ \ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

**Solution .4** *Soit la fonction $f$ définie par*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^3}{\sqrt{x^2+y^4}} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & sinon \end{cases}$$

*1. Montrer que $f$ est continue en $(0,0)$.*

*On a*

$$|y| \leq (x^2+y^4)^{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow |y|^3 \leq (x^2+y^4)^{\frac{3}{4}}$$

*alors*

$$
\begin{aligned}
|f(x,y)| &= \frac{|y|^3}{\sqrt{x^2+y^4}} \\
&\leq \frac{(x^2+y^4)^{\frac{3}{4}}}{\sqrt{x^2+y^4}} \\
&\leq (x^2+y^4)^{\frac{1}{4}}
\end{aligned}
$$

.

*et*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^4)^{\frac{1}{4}} = 0 \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0).$$

*Donc, $f$ est continue en* $(0,0)$.

*2. Calculer les dérivée partielle de $f$ en* $(0,0)$.

*Pour $x \neq 0$, $f(x,0)=0$, on obtient*

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0).$$

*Pour $y \neq 0$, $f(0,y)=y$, on obtient*

$$\lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = 1 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

*3. Étudier la différentiabilité de $f$ en* $(0,0)$.

*On a*

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \left| \frac{f(h,k)-f(0,0)-h\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)-k\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}} \right| = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \left| \frac{\frac{k^3}{\sqrt{h^2+k^4}}-k}{\sqrt{h^2+k^2}} \right|$$

*On considérant la direction $h=k^2$, on obtient*

$$\begin{aligned}\lim_{(h,k)\to(0,0)} \left| \frac{f(h,k)-f(0,0)-h\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)-k\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}} \right| &= \lim_{k\to 0} \left| \frac{\frac{k^3}{\sqrt{2k^2}}-k}{\sqrt{2}\,|k|} \right| \\ &= \lim_{k\to 0} \left| \frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \frac{k}{|k|} \right| \\ &= \frac{2-\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

*Puisque la limite est différente de* $0$, *alors $f$ n'est pas différentiable en* $(0,0)$.

**Solution .5** *Soit le changement de variable suivant*

$$\begin{cases} 5u = 3x-2y \\ 5v = x+y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = u+2v \\ y = -u+3v \end{cases}$$

*Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$.*

*Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$telle que $g(u,v) = f(u+2v, -u+3v)$.*

*1. Déterminer les solutions des l'équations aux dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$ ...(1)*

*En dérivant $g$ par rapport à $u$, on obtient*

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(u+2v,-u+3v) - \frac{\partial f}{\partial y}(u+2v,-u+3v)$$

*d'autre part,*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} \Leftrightarrow \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial g}{\partial u} = 0$$

*Ce qui conduit à* $g(u,v) = h(v)$, *puis* $f(x,y) = h(\frac{1}{5}(x+y))$.

*2. Déterminer les solutions de l'équation aux dérivées partielles* $2\frac{\partial f}{\partial x} + 3\frac{\partial f}{\partial y} = f$ *...(2)*

*En dérivant g par rapport à v, on obtient*

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = 2\frac{\partial f}{\partial x}(u+2v, -u+3v) + 3\frac{\partial f}{\partial y}(u+2v, -u+3v)$$

*et*

$$2\frac{\partial f}{\partial x} + 3\frac{\partial f}{\partial y} = f \Leftrightarrow \frac{\partial g}{\partial v} = g$$

*C'est une équation de la forme* $y' = y$. *Donc, il existe une fonction* $C(u) \in \mathbb{R}$ *tel que* $g(u,v) = C(u)e^v$. *Par suite, on obtient* $f(x,y) = C(\frac{3}{5}x - \frac{2}{5}y)e^{\frac{1}{5}x+\frac{1}{5}y}$.

**Solution .6** *On pose* $x = uv$, $y = v^2$ *et* $k(u,v) = f(uv, v^2)^2 + e^{-u}$.

*a) Calculer La dérivée de g par rapport à u*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) &= \frac{\frac{\partial k}{\partial u}(u,v)}{k(u,v)} \\
&= \frac{2f(uv,v^2) \times \frac{\partial f}{\partial u}(uv,v^2) - e^{-u}}{f(uv,v^2)^2 + e^{-u}} \\
&= \frac{2f(uv,v^2) \times \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \times \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \times \frac{\partial y}{\partial u}\right] - e^{-u}}{f(uv,v^2)^2 + e^{-u}} \\
&= \frac{2f(uv,v^2) \times \left[f'_x(x,y) \times v + f'_y(x,y) \times 0\right] - e^{-u}}{f(uv,v^2)^2 + e^{-u}} \\
&= \frac{2f(uv,v^2) \times [f'_x(x,y) \times v] - e^{-u}}{f(uv,v^2)^2 + e^{-u}} \\
&= \frac{2vf(uv,v^2) \times f'_x(x,y) - e^{-u}}{f(uv,v^2)^2 + e^{-u}}
\end{aligned}$$

*b) La dérivée de g par rapport à v*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) &= \frac{\frac{\partial k}{\partial v}(u,v)}{k(u,v)} \\
&= \frac{2f(uv,v^2) \times \frac{\partial f}{\partial v}(uv,v^2)}{f(uv,v^2)^2 + e^{-u}} \\
&= \frac{2f(uv,v^2) \times \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \times \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \times \frac{\partial y}{\partial v}\right]}{f(uv,v^2)^2 + e^{-u}} \\
&= \frac{2f(uv,v^2) \times \left[f'_x(x,y) \times u + f'_y(x,y) \times 2v\right]}{f(uv,v^2)^2 + e^{-u}}
\end{aligned}$$

*On obtient*

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \frac{2uf(uv,v^2)\times f'_x(x,y) + 4vf(uv,v^2)\times f'_y(x,y)}{f(uv,v^2)^2 + e^{-u}}$$

**Solution .7** *1. Montrer que l'équation $f(x,y)=0$ définit, au voisinage de $(1,1)$, une fonction implicite $y=\varphi(x)$.*

*a) $f$ est une fonctions de classe $C^\infty$, donc de classe $C^1$*

*b) On a bien $f(1,1)=0$.*

*c) La dérivée de $f$ par rapport à la deuxième variable $y$ est donnée par*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2x+4y$$

*et on a*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 2 \neq 0$$

*De a), b), c) et d'après le théorème des fonctions implicites, l'équation $f(x,y)=0$ définit bien, au voisinage de $(1,1)$, une fonction implicite $y=\varphi(x)$.*

*2. Calculer le développement limité d'ordre 2 de $\varphi$ en 1*

*On pose*

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \varphi(1) + \frac{\varphi'(1)}{1!}(x-1) + \frac{\varphi''(1)}{2!}(x-1)^2\\ &= 1 + \varphi'(1)(x-1) + \frac{\varphi''(1)}{2}(x-1)^2\end{aligned}$$

***Première méthode***

*Calculons $\varphi'(1)$*

*On a*

$$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)} = \frac{-3x^2+2y}{-2x+4y}$$

*alors*

$$\varphi'(1) = \frac{-3+2\varphi(1)}{-2+4\varphi(1)} = \frac{-1}{2}$$

*Calculons $\varphi''(1)$. On a*

$$\varphi'(x) = \frac{(-6x+2\varphi'(x))(-2x+4\varphi(x)) - (-2+4\varphi'(x))(-3x^2+2\varphi(x))}{(-2x+4\varphi(x))^2}$$

*alors*

$$\varphi''(1) = \frac{-9}{2}$$

*Donc*

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= 1 - \frac{1}{2}(x-1) - \frac{9}{4}(x-1)^2 \\ &= \frac{-3}{4} + 4x - \frac{9}{4}x^2\end{aligned}$$

***Deuxième méthode***

*Soit l'équation suivante*

$$x^3 - 2x\varphi(x) + 2\left(\varphi(x)\right)^2 - 1 = 0$$

*En dérivant l'équations, on obtient*

$$3x^2 - 2\varphi(x) - 2x\varphi'(x) + 4\varphi(x)\varphi'(x) = 0$$

*et*

$$3 - 2\varphi(1) - 2\varphi'(1) + 4\varphi(1)\varphi'(1) = 0 \Rightarrow \varphi'(1) = \frac{-1}{2}$$

*En dérivant l'équation une autre fois, on obtient*

$$6x - 2\varphi'(x) - 2\varphi'(x) - 2x\varphi''(x) + 4\left(\varphi'(x)\right)^2 + 4\varphi(x)\varphi''(x) = 0$$

*et*

$$6 - 4\varphi'(1) - 2\varphi''(1) + 4\left(\varphi'(1)\right)^2 + 4\varphi(1)\varphi''(1) = 0 \Rightarrow \varphi''(1) = \frac{-9}{2}$$

*Ainsi, on obtient le même développement limité.*