Série de TD N°2 d'*Analyse 4*

Optimisation avec ou sans contraintes

Exercice 1. Déterminer les extrema relatifs et les extrema absolus de chacune des fonctions suivantes :

- $f_1(x, y) = 2x^2 + y^2 + \sqrt{2}xy + 2$,
- $f_2(x, y) = x^2 + y^3 + 2xy - 1$,
- $f_3(x, y) = x^2 + y^2 + 3xy + 1$,
- $f_4(x, y) = x + y - 1 - x^2 - y^2 - xy$,
- $f_5(x, y) = x^2 + (y^3 - y)^2$,
- $f_6(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$,
- $f_7(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-x}$,
- $f_8(x, y) = e^{x^2+y^2}$,
- $f_9(x, y) = x^2y^2(1 + x + 2y)$,
- $f_{10}(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$.

Exercice 2. Déterminer le domaine de définition, les extrema relatifs et les extrema absolus de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x, y) = x^2 + xy \log x; \quad g(x, y) = x((\log x)^2 + y^2); \quad h(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + xyz - z + y.$$

Exercice 3. Soient f et g les deux fonctions définies sur $\mathcal{D} := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ par :

$$f(x, y) = \log(x^2 + y^2) - x^2 - x; \quad g(x, y) = x^2 + y^2.$$

1. Montrer que f n'admet aucun extremum global sur $\mathcal{D}$.
2. Déterminer les points critiques de f et donner leur nature.
3. Montrer que f admet un maximum global et un minimum global sous la contrainte $g(x, y) = 1$. En utilisant deux méthodes, préciser les points où ces extrema sont atteints et leurs valeurs.

Exercice 4. Soient $f(x,y) = x^2 - x^2y + y^2$ et $\mathcal{K} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ |y| \leq 1 - x^2\}$.

1. Représenter graphiquement l'ensemble $\mathcal{K}$.
2. Justifier que f admet un maximum et un minimum sur $\mathcal{K}$ (resp. $\mathrm{Fr}(\mathcal{K})$).
3. Déterminer le minimum et le maximum de f sur $\mathrm{Fr}(\mathcal{K})$.
4. Déterminer les points critiques de f sur $\mathrm{Int}(\mathcal{K})$.
5. En déduire le minimum et le maximum de f sur $\mathcal{K}$.

Exercice 5. Soit $n \geq 2$ un entier et f la fonction définie sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1 x_2 \cdots x_n.$$

Soit $\Gamma = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n \mid x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1\}$.

1. Montrer que f admet un maximum global sur Γ et le déterminer.
2. En déduire l'inégalité *arithmético-géométrique* :

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \ldots x_n}{n}, \quad \forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n.$$