quand $(x,y) \neq (0,0)$, on a :

$$f(x,y) = xy\frac{(x^3-y^3)}{(x^2+xy+y^2)^\alpha}$$

$$= \frac{xy(x-y)(x^2+xy+y^2)}{(x^2+xy+y^2)^\alpha}$$

$$= \frac{xy(x-y)}{(x^2+xy+y^2)^{\alpha-1}}$$

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = r^{3-2\alpha+2} \cdot \frac{\cos\theta\sin\theta(\cos\theta-\sin\theta)}{(1+\cos\theta\sin\theta)^{\alpha-1}}$$

$$= r^{5-2\alpha} \cdot \frac{\cos\theta\sin\theta\cdot(\cos\theta-\sin\theta)}{\left(1+\frac{\sin(2\theta)}{2}\right)^{\alpha-1}}$$

$$\varphi(\theta) = \frac{\cos\theta\sin\theta\cdot(\cos\theta-\sin\theta)}{\left(1+\frac{\sin(2\theta)}{2}\right)^{\alpha-1}}$$

puisque $\frac{3}{2} \geq 1+\frac{\sin(2\theta)}{2} \geq \frac{1}{2}$, alors

$\theta \mapsto \varphi(\theta)$ est bornée. donc

* si $\alpha < \frac{5}{2}$: $\lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta) = 0$

* si $\alpha = \frac{5}{2}$: $\lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \varphi(\theta)$

la limite dépend de θ

~~donc~~ pas de limite dans ce cas.

Si $\alpha > \frac{5}{2}$, on a :

$$f\left(r\cos\left(\frac{\pi}{4}\right), r\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = r^{5-2\alpha} \cdot \overset{0}{\overbrace{\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right)}} = 0 \xrightarrow[r \to 0]{} 0$$

$$f\left(r\cos\left(\frac{\pi}{6}\right), r\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = r^{5-2\alpha} \underbrace{\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)}{\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)^{\alpha-1}}}_{>0}$$

$$\xrightarrow[r \to 0]{} +\infty$$

Donc f n'a pas de limite en $(0,0)$