Ecole **S**upérieure en **S**ciences et **T**echnologies

de l'**I**nformatique et du **N**umérique (ESTIN)

Deuxième Année.CP

Année 2021/2022

Exercices suplémentaires

Sur les fonctions à plusieurs variables

Exercice 1. . *Etudier l'existence d'une éventuelle limite de f, g et h en* $(0,0)$

· $f(x,y)=\frac{1-\cos xy}{x^2+xy+y^2}$ · $g(x,y)=\frac{\sqrt{x^4+y^4}}{(x^2+y^2)^\alpha}$ ·. $h(x,y)=\frac{|xy|^\alpha}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Exercice 2. *Etudier la continuité des fonctions suivantes*

a) $f(x,y)=\begin{cases}\sin\left(\frac{xy^2}{x^4+y^2}\right), & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & sinon\end{cases}$, *b)* $g(x,y)=\begin{cases}\frac{e^{(xy)^2}-1}{x^2+y^2} & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & sinon\end{cases}$

Exercice 3. *Soit* $D=\left]0,\frac{\pi}{2}\right]\times\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$, *et soit la fonction f définie sur D par*

$$f(x,y)=\frac{\sin(1-\cos(xy))}{(xy)^2+\sin(x^2)\left|\sin^3(y)\right|}$$

Peut-on prolonger par continuité la fonction f sur $\overline{D}$?

Exercice 4. *Soit la fonction f définie par*

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{y^3}{\sqrt{x^2+y^4}} & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & sinon\end{cases}$$

1. *Montrer que f est continue en* $(0,0)$.
2. *Calculer les dérivée partielles de f en* $(0,0)$.
3. *La fonction f est elle différentiable en* $(0,0)$?

Exercice 5. *En utilisant le changement de variables*

$$\begin{cases} u = \frac{3x-2y}{5} \\ v = \frac{x+y}{5} \end{cases}$$

Déterminer les fonctions de classe C^1 solutions des l'équations aux dérivées partielles suivante

$$\cdot \ \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} \ \textit{...(1)}, \qquad \cdot \ 2\frac{\partial f}{\partial x} + 3\frac{\partial f}{\partial y} = f \ \textit{...(2)}$$

Exercice 6. *Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $(x, y) \to f(x, y)$ différentiable*

et soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $g(u, v) = \log\left(\left(f(uv, v^2)\right)^2 + e^{-u}\right)$.

- Calculer les dérivées partielles premières de g en fonction de celles de f.

Exercice 7. *On onsidère la fonction $f(x, y) = x^3 - 2xy + 2y^2 - 1$*

1. Montrer que l'équation $f(x, y) = 0$ définit, au voisinage de $(1, 1)$, une fonction implicite $y = \varphi(x)$

2. Calculer le développement limité d'ordre 2 de φ en 1.