Rapport de Devoir Algorithmique

Présenté par :

Anis Trabelsi

Année universitaire : 2023/2024

18 décembre 2023

Intercalaire n° : ______ NOM, Prénom : Trabelsi Amir ______ Date : ______

Algorithmique

② Objectifs et résultats préliminaires

① Supposons que A est une matrice réelle inversible $m \times m$.

ⓐ × Pour démontrer que A^TA est symétrique, il faut montrer que $(A^TA)^T = A^TA$

× $(A^TA)^T = (A^T)^T A^T = A^TA$

$\Rightarrow$ Donc A^TA est symétrique

ⓑ A^TA est définie positive ? $\forall x \neq 0 \in \mathbb{R}^m$, $x^TA^TAx > 0$

× Posons $y = Ax$ avec $y \in \mathbb{R}^m$ / $y = (y_1, \dots, y_m)$

× Puisque x est non nul et A est inversible donc $y \neq 0$

× avec $x^TA^TAx = (Ax)^TAx = y^Ty$

× On a : $y^Ty = \sum_{i=1}^{m} y_i^2 > 0$ car $y \neq 0$ alors $x^TA^TAx > 0$

Donc A^TA est définie positive

② A est inversible
A^TA est symétrique et définie positive $\Bigg\}$ A^TA est inversible donc $(A^TA)^{-1} \times (A^TA) = I_m$

$(A^TA)^{-1} \times A^TA = I_m$

$\Leftrightarrow A^{-1} = (A^TA)^{-1} \times A^T$

$\Rightarrow$ Ce résultat montre qu'au lieu de calculer l'inverse d'une matrice ~~quelquonque~~ quelconque, on peut calculer l'inverse d'une matrice définie positive et faire une transposition et 2 multiplications.

③ $\forall x \neq 0 \in \mathbb{R}^n \quad x^T A^T A x > 0 \iff A^T A$ est définie positive

* On pose $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ et $x^T = (x_1^T \ x_2^T)$

$$x^T A^T A x = (x_1^T \ x_2^T) \begin{pmatrix} B & C^T \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= (x_1^T \ x_2^T) \begin{pmatrix} Bx_1 + C^T x_2 \\ Cx_1 + D x_2 \end{pmatrix}$$

$$= x_1^T B x_1 + x_1^T C^T x_2 + x_1 C x_2^T + x_2 D x_2^T$$

$$= x_1^T B x_1 + x_1^T \underbrace{BB^{-1}}_{I} C^T x_2 + x_1 BB^{-1} C x_2^T + x_2 D x_2^T + x_2 CB^{-1}BB^{-1}C^T x_2$$

$$- x_2^T CB^{-1}C^T x_2$$

$$= x_2^T (D - CB^{-1}C^T) x_2 + (x_1 + B^{-1}C^T x_2)^T B (x_1 + B^{-1}C^T x_2)$$

il existe x tq $x_1 + B^{-1}C^T x_2 = 0$

et par suite $x^T A^T A x > 0$

$$\Updownarrow$$

$$x_2^T (D - CB^{-1}C^T) x_2 > 0$$

$\Rightarrow$ Donc $A^T A$ est définie positive équivaut à $S = D - CB^{-1}C^T$ est définie positive

Question 4 :

- Effectuons la substitution de l'expression de S^{-1} dans la formulation de l'inverse de $A^T \cdot A$:

$$(A^T \cdot A)^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} + B^{-1}C^T(D - CB^{-1}C^T)^{-1}CB^{-1} & -B^{-1}C^T(D - CB^{-1}C^T)^{-1} \\ -S^{-1}CB^{-1} & S^{-1} \end{bmatrix}$$

- Maintenant, nous avons $S = D - CB^{-1}C^T$, donc $S^{-1} = (D - CB^{-1}C^T)^{-1}$. Substituons cela dans la matrice :

$$(A^T \cdot A)^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} + B^{-1}C^T(D - CB^{-1}C^T)^{-1}CB^{-1} & -B^{-1}C^T(D - CB^{-1}C^T)^{-1} \\ -(D - CB^{-1}C^T)^{-1}CB^{-1} & (D - CB^{-1}C^T)^{-1} \end{bmatrix}$$

- Maintenant, multiplions $A^T \cdot A$ par $(A^T \cdot A)^{-1}$ pour vérifier que le produit est l'identité :

$$\begin{bmatrix} B & C^T \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B^{-1} + B^{-1}C^T(D - CB^{-1}C^T)^{-1}CB^{-1} & -B^{-1}C^T(D - CB^{-1}C^T)^{-1} \\ -(D - CB^{-1}C^T)^{-1}CB^{-1} & (D - CB^{-1}C^T)^{-1} \end{bmatrix}$$

- Calculons chaque terme de ce produit :
  - **E**n haut à gauche :

$$B(B^{-1} + B^{-1}C^T(D - CB^{-1}C^T)^{-1}CB^{-1}) + C^T(-(D - CB^{-1}C^T)^{-1}CB^{-1})$$

    Simplifions en utilisant $S = D - CB^{-1}C^T$:

$$I - C^TS^{-1}CB^{-1} + C^TS^{-1}CB^{-1} = I$$

    Cela correspond à l'élément en haut à gauche de l'identité.
  - **E**n haut à droite :

$$B(-B^{-1}C^T(D - CB^{-1}C^T)^{-1}) + C^T((D - CB^{-1}C^T)^{-1})$$

    Simplifions en utilisant $S = D - CB^{-1}C^T$:

$$-C^T(D - CB^{-1}C^T)^{-1} + (D - CB^{-1}C^T)^{-1}C^T = 0$$

    Cela donne le terme en haut à droite de l'identité.
  - **E**n bas à gauche :

$$C(B^{-1} + B^{-1}C^T(D - CB^{-1}C^T)^{-1}CB^{-1}) - D(D - CB^{-1}C^T)^{-1}CB^{-1}$$

    Simplifions en utilisant $S = D - CB^{-1}C^T$:

$$\begin{aligned} CB^{-1}(1 + C^TS^{-1}CB^{-1} - DS^{-1}) &= CB^{-1}(1 + C^TS^{-1}CB^{-1} - (S + CB^{-1}C^T)S^{-1}) \\ &= CB^{-1}(C^TS^{-1}CB^{-1} - 1 - C^TS^{-1}CB^{-1} + 1) = 0 \end{aligned}$$

    Cela donne le terme en bas à gauche de l'identité.
  - **E**n bas à droite :

$$-CB^{-1}C^TS^{-1} + DS^{-1}$$

    avec

$$D = S + CB^{-1}C^T$$

    Donc

$$= S^{-1}(-B^{-1}CC^T + D) = S^{-1}(-B^{-1}CC^T + S + B^{-1}CC^T) = SS^{-1} = I$$

    Cela donne le terme en bas à droite de l'identité.
- En combinant tous ces termes, nous obtenons la matrice identité. Ainsi, la multiplication de $A^T \cdot A$ par $(A^T \cdot A)^{-1}$ donne bien l'identité, confirmant que l'expression obtenue pour l'inverse de $A^T \cdot A$ est correcte :

$$(A^T \cdot A)^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} + B^{-1}C^T(D - CB^{-1}C^T)^{-1}CB^{-1} & -B^{-1}C^T(D - CB^{-1}C^T)^{-1} \\ -S^{-1}CB^{-1} & S^{-1} \end{bmatrix}$$

- Prouvé;

Intercalaire n° : NOM, Prénom : Date :

3 Algorithmes et analyse de sa complexité

(a) Dans le cas de la multiplication standard :

- On a 4 multiplications. Chacune ~~avec~~ avec une complexité de $O\left(\left(\frac{n}{2}\right)^3\right)$
- On a 3 transpositions. Chacune avec une complexité de $O\left(\left(\frac{n}{2}\right)^2\right)$
- On a une addition et une substitution. Chacune avec une complexité de $O\left(\left(\frac{n}{2}\right)^2\right)$

⇒ La relation de récurrence :

$$C(n) = \underbrace{2\,C\left(\frac{n}{2}\right)}_{\substack{\text{2 appels récursifs} \\ \text{(les 2 inversions de B et S)}}} + \underbrace{4\left(\frac{n}{2}\right)^3}_{\text{multiplications}} + \underbrace{3\left(\frac{n}{2}\right)^2}_{\text{transpositions}} + \underbrace{2\left(\frac{n}{2}\right)^2}_{\text{addition et substitution}}$$

$$C(n) = 2\,C\left(\frac{n}{2}\right) + 4n^3 + 5n^2$$

puisque $\left(\frac{n}{2}\right)^3 \in O(n^3)$

et $\left(\frac{n}{2}\right)^2 \in O(n^2) \in O(n^3)$

$$\Rightarrow C(n) = 2\,C\left(\frac{n}{2}\right) + \beta n^3 \quad \text{avec } \beta \in \mathbb{N}$$

D'après le théorème maître :

$$C(n) = a\,C\left(\frac{n}{b}\right) + c\,n^k$$

par identification : $a = 2$, $b = 2$ et $k = 3$

$$\boxed{\text{Si } \boxed{a < b^k} \Rightarrow C(n) = O(n^k)}$$

Dans notre cas : $a < b^k$

$2 < 2^3$

$\Rightarrow$ Donc la complexité ... de l'algorithme d'inversion d'une matrice $n \times n$ par la multiplication standard est de $O(n^3)$

ⓑ Dans le cas de la multiplication de strassen :

- On a 4 multiplications : chacune avec une complexité de $O((\frac{n}{2})^{\log_2(7)}) \in O(n^{\log_2(7)})$

- On a 3 transpositions. chacune avec une complexité de $O((\frac{n}{2})^2) \in O(n^2)$

- Une addition et une soustraction. Chacune avec une complexité de $O((\frac{n}{2})^2) \in O(n^2)$

$$\Rightarrow \quad C(n) = 2\, C(\frac{n}{2}) + 4\, n^{\log_2(7)} + 3n^2 + 2n^2$$
$$= 2\, C(\frac{n}{2}) + 4\, n^{\log_2(7)} + 5n^2$$

avec $n^2 \in O(n^{\log_2(7)}) \Longleftrightarrow n^2 \in O(n^{2,8})$

$$\Rightarrow \quad C(n) = 2\, C(\frac{n}{2}) + O(n^{\log_2(7)})$$
$$= 2\, C(\frac{n}{2}) + \beta\, n^{\log_2(7)}$$

D'après le théorème maître :

On a $2^{\log_2(7)} = 2^{2,8} > 2$

$b^k > a$

Intercalaire n° : NOM, Prénom : Date :

=> Donc la complexité de l'algorithme d'inversion d'une matrice de taille $2^k \times 2^k$ tel que $k \in \mathbb{N}$ par la multiplication de Strassen est de $O(n^{\log_2(7)})$

$\Leftrightarrow O(n^{2,8})$

Ce qui est moins couteux que l'utilisation de la multiplication standard.

Scanné avec CamScanner