Statistiques Descriptives

L1 Économie

Seynabou Gueye, Mehdi Guelmamen, Emilien Macault

Faculté de Droit, Économie et Administration
Université de Lorraine

Chapitre 3: Les mesures de tendance centrale

Sommaire

Définition

- Les **indicateurs de tendance centrale** sont un ensemble de mesures faites sur une série statistique permettant de résumer l'information de toute une série à l'aide d'une seule valeur.
- Elles permettent d'avoir une première idée de l'aspect de la distribution d'une série (ou distribution) statistique.
- On distingue plusieurs mesures de tendance différentes, chacune ayant ses **avantages** et ses **inconvénients**.
- Une étude descriptive d'une variable nécessitera donc souvent de calculer **plusieurs** de ces mesures et de les **comparer**.

Sommaire

Définition

Soit une série statistique $X = x_1, \ldots, x_n$.

Le mode

Le mode, noté Mo, est la modalité x_i la plus fréquente dans les valeurs de X. C'est la valeur du caractère qui correspond à l'effectif **le plus grand**, ou la fréquence la plus importante. **Il s'exprime dans la même unité que la variable X étudiée.**

Sommaire

Variables qualitatives ou quantitatives discrètes

Dans le cas de variables qualitatives ou quantitatives discrètes, le mode est la modalité associée à l'effectif le plus élevé (ou la fréquence la plus élevée).

C.S.P. (x_i)	Effectif (n_i)	Fréquence (f_i) (%)
Cadres	40	10
Agents de maîtrise	80	20
Employés	100	25
Ouvriers spécialisés	160	40
Autres	20	5
	N = 400	F = 100 %

Enfants à charge (x_i)	Effectif (n_i)	Fréquence (f_i) (%)
0	40	10
1	80	20
2	100	25
3	160	40
4 et plus	20	5

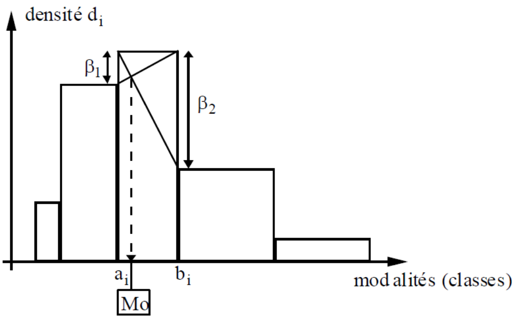
Sommaire

Variables quantitatives continues

- Pour une variable continue, le mode n'est pas toujours facilement observable, en particulier lorsque la variable est regroupée en classes.

Variables quantitatives continues

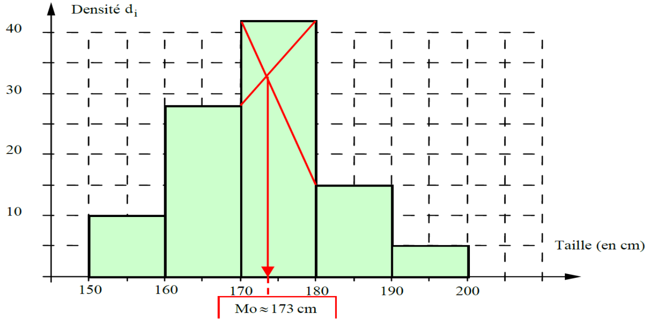
- Pour une variable continue, le mode n'est pas toujours facilement observable, en particulier lorsque la variable est regroupée en classes.
- **Détermination graphique du mode** : on repère la **clsse modale**, i.e. la classe $[a_i; b_i[$ associée à l'effectif le plus élevé. On trace les diagonales comme indiqué sur la figure. Le **mode Mo** est l'abscisse du point d'intersection des diagonales.



Variables quantitatives continues

- Exemple : On s'intéresse à la taille des candidats dans un concours

- Exemple : On s'intéresse à la taille des candidats dans un concours
- D'après ce graphique, la taille la plus fréquente est **173cm**



On peut également déterminer le mode par le calcul :

$$Mo = x_m + a\left[\frac{(n_m - n_{m-1})}{((n_m - n_{m-1}) + (n_m - n_{m+1}))}\right]$$

Avec :

- x_m : borne inférieure de la classe modale
- a : amplitude de la classe modale
- $(n_m - n_{m-1})$: différence entre la fréquence de la classe modale et la fréquence de la classe précédente
- $(n_m - n_{m+1})$: différence entre la fréquence de la classe modale et la fréquence de la classe suivante

Avantages et inconvénients

Le mode représente la valeur **la plus fréquente** d'une série statistique : il permet de faire ressortir une modalité majoritaire ou la valeur la plus probable d'une série.

Le mode est peu sensible aux observations parasites et aux valeurs extrêmes. Par exemple : en ville, la majorité des automobilistes roulent à 50km/h, peu importe les excès de vitesse.

Le mode n'est pas nécessairement unique, on distingue donc :

- Les variables **unimodales** qui n'ont qu'un seul mode;
- Les variables **multimodales** qui en ont plusieurs (effectifs identiques).

Dans le cas multimodal, on peut choisir un des modes, mais il est mieux d'utiliser d'autres mesures plus précises.

Sommaire

Sommaire

La médiane

- La médiane, notée **Mé**, est la modalité x_i du caractère partageant les N observations, classées dans l'ordre croissant, en deux groupes de même taille.

Remarques

- Les modalités d'un caractère qualitatif non-ordinal n'étant pas classables dans l'ordre croissant, il n'y a pas de médiane dans ce cas.
- La médiane **Mé** se détermine dans tous les cas l'aide des E.C.C ou des f.c.c (%)
- La médiane **Mé** s'exprime dans la même unité que la variable x étudiée.

La médiane

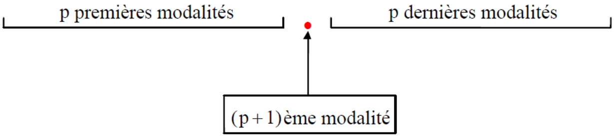
- La médiane coupant l'effectif total en deux parties égales, on a deux cas à distinguer :

La médiane

- La médiane coupant l'effectif total en deux parties égales, on a deux cas à distinguer :
  1. **1e cas:** l'effectif total N est impair: $N = 2p + 1$ avec p, un entier naturel. Si $N = 2p + 1$, la médiane est la modalité x_i associée à la $p + 1$ème observation. On a :

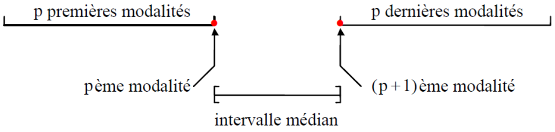
La médiane

- La médiane coupant l'effectif total en deux parties égales, on a deux cas à distinguer :
  1. **1e cas:** l'effectif total N est impair: $N = 2p + 1$ avec p, un entier naturel. Si $N = 2p + 1$, la médiane est la modalité x_i associée à la $p + 1$ème observation. On a :



  2. **2e cas:** l'effectif total N est pair : $N = 2p$ avec p un entier naturel

La médiane



- Si cela a un sens, la médiane Mé est le **centre de l'intervalle médian**. La médiane n'est pas forcément une modalité observée, mais peut être une modalité observable.

La médiane

Exemple 1 :

Nbre x_i d'enfants par ménage	Nbre n_i de ménages	E.C.C. $n_i \uparrow$
0	21	21
1	23	44
2	28	72
3	25	97
4	18	115
5	5	N = 120
	N = 120	

60ème observation

61ème observation

- Le caractère étant quantitatif discret, $N = 120$ est pair et $p = 60$.
- On détermine **l'intervalle médian** : $[\text{val } p^e\text{obs}; \text{val } p+1^e\text{obs}]$.
- On obtient $[2; 2[$. Le centre de l'intervalle médian est de 2, donc Mé=2. Il s'agit d'une modalité observée.

La médiane

Exemple 2 :

Nbre x_i d'enfants par ménage	Nbre n_i de ménages	E.C.C. $n_i \uparrow$
0	24	24
1	27	51
2	39	90
3	42	132
4	28	160
5	20	N = 180
	N = 180	

$90^{\text{ème}}$ observation

$91^{\text{ème}}$ observation

- $N = 180$ est pair, avec $p = 90$.
- On détermine l'intervalle médian : $[\text{val } p^e \text{obs}; \text{val } p+1^e \text{obs}]$.
- On obtient donc $[\text{val } 90^e \text{obs}; \text{val } 91^e \text{obs}]$, donc $[2;3[$.
- Le centre de l'intervalle médian est de 2,5 enfants par ménage. La modalité n'est ni observée, ni observable. La médiane n'est donc pas définie.

La médiane

Exemple 3 :

Nombre x_i de parts fiscales	Nombre n_i de foyers fiscaux	E.C.C. $n_i \uparrow$
1	24	24
2	53	77
2,5	65	142
3	54	196
3,5	17	213
4	10	N = 223
	N = 223	

112ème observation

La médiane

- La variable est quantitative discrète et $N = 223$ est impair, avec $N = 2p + 1$. Donc $p = 111$.
- La médiane est la valeur ou modalité de la $(p + 1)$ème observation, qui est l'observation centrale.
- Alors : Mé = valeur de la 112ème observation. Donc Mé = 2,5 parts fiscales.

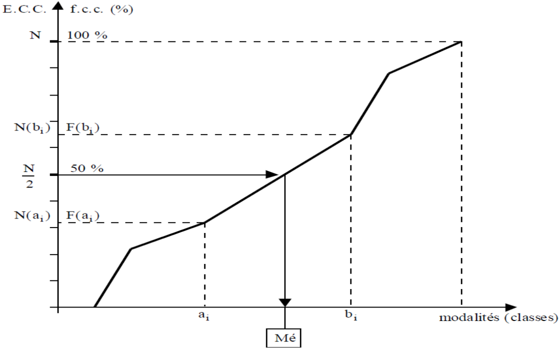
Sommaire

Détermination graphique de la médiane

On reprend la courbe cumulative croissante et on cherche la valeur qui correspond à la $N/2$ ème observation.

Remarque

La médiane Mé est l'abscisse du point d'intersection entre la courbe des ECC (ou FCC) et la courbe $y = N/2$ (ou $y = 50\%$).



Sommaire

Détermination de la médiane par le calcul

En règle générale, on ne peut pas calculer une valeur exacte de la médiane d'une série continue, même quand elle n'est pas regroupée en classes, car on n'observe qu'un nombre limité d'individus.

Pour déterminer une **valeur approchée**, on utilise l'**interpolation linéaire**:

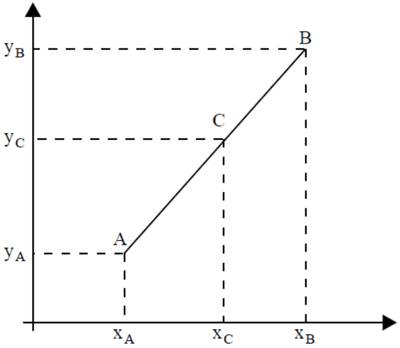
- On classe les individus par **valeur croissante** de la série;
- On fait l'hypothèse qu'entre deux individus i et j, ou au sein de chaque classe, la série est une **fonction affine**, c'est-à-dire du type:

  $$f(x) = ax + b$$

  où a et b sont deux valeurs fixes;
- On peut donc approcher la valeur de la série pour un individu j **compris entre deux autres individus** i et k par

$$x_j = aj + b = a(j - i + i) + b = ai + b + a(j - i) = x_i + a(j - i)$$

L'**interpolation linéaire** repose sur le théorème de Thalès.

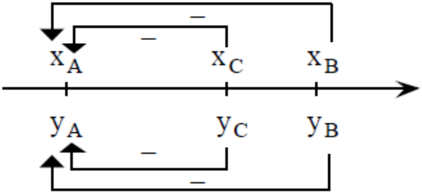


D'après le théorème de Thalès on a :

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{x_C - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y_C - y_A}{y_B - y_A}$$

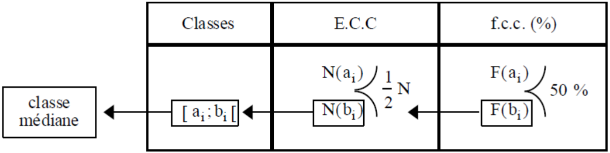
Détermination de la médiane par le calcul

On résume à l'aide du schéma suivant :

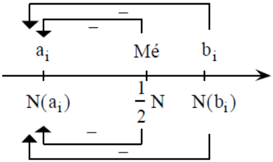


Détermination de la médiane par le calcul

On identifie la classe médiane et on utilise l'interpolation linéaire pour trouver la médiane:



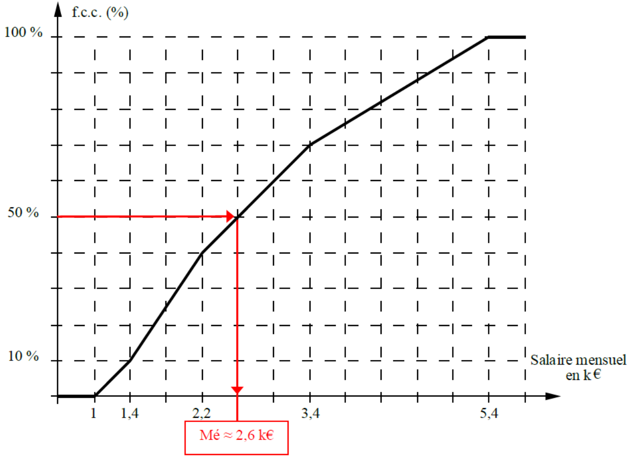
⁎ <u>avec les E.C.C.</u>



D'où : $$\boxed{\frac{\text{Mé} - a_i}{b_i - a_i} = \frac{\frac{N}{2} - N(a_i)}{N(b_i) - N(a_i)}}$$

Détermination de la médiane par le calcul

Exemple 1 :



50% des salariés ont un salaire inférieur (ou supérieur) à 2,6k euros.

Détermination de la médiane par le calcul

Exemple 2:

Salaire mensuel net (en Euros)	Effectifs n_i	E.C.C. $n_i \uparrow$
[1 000 ; 1 200 [	30	30
[1 200 ; 1 400 [	50	80
[1 400 ; 1 600 [	60	140
[1 600 ; 2 000 [	80	220
[2 000 ; 4 000 [	20	N = 240
	N = 240	

Classe médiane

On a N=240, donc la (1/2)*Nème observation = 120.

$$\frac{x_C - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y_C - y_A}{y_B - y_A} \Leftrightarrow \frac{Me - 1400}{1600 - 1400} \Leftrightarrow \frac{Me - 1400}{200} \Leftrightarrow Me = 1533,3 \text{ euros}$$

Détermination de la médiane par le calcul

On peut également utiliser la formule suivante :

$$Me = x_m + a\left[\frac{(\frac{N}{2} - N_{m-1})}{(N_m - N_{m-1})}\right]$$

Avec :

- x_m la borne inférieure de l'intervalle médian $[x_m; x_{m+1}]$.
- a l'amplitude de l'intervalle médian.
- N l'effectif total tel que $N = \sum_i n_i$.
- N_{m-1} l'ECC associé à la classe **précédant** la classe modale.
- N_m l'ECC associé à la classe modale.

Détermination de la médiane par le calcul

Dans notre cas, on a donc :

$$Me = x_m + a\left[\frac{(\frac{N}{2} - N_{m-1})}{(N_m - N_{m-1})}\right] = 1400 + 200\left[\frac{(\frac{240}{2} - 80)}{(140 - 80)}\right] = 1533,33 \text{ euros}$$

Sommaire

Sommaire

Généralisation de la médiane

Définition

Le quantile d'ordre α $(0 < \alpha < 1)$ est la modalité x_α telle qu'une proportion α des modalités observées soient inférieures à x_α : $F(x_\alpha) = \alpha$

Remarque

Les quantiles d'ordre α, comme la médiane Mé, se déterminent à l'aide des E.C.C et des F.c.c (%) par interpolation linéaire.

$\rightarrow$ La médiane correspond au quantile d'ordre $\alpha = 0,5$.

Définition

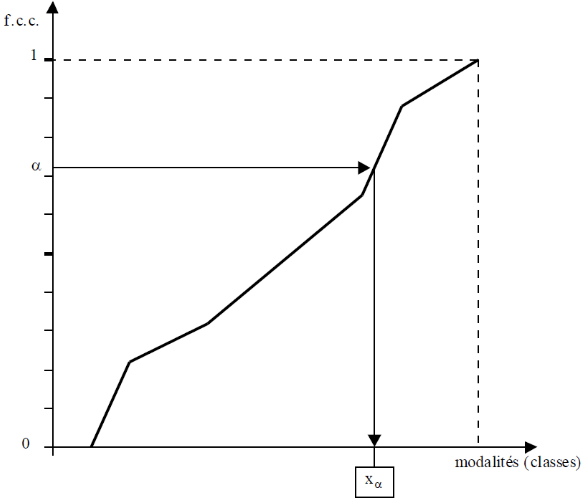
La médiane permet de savoir autour de quelle valeur se répartissent les observations en proportions 50/50.

De façon équivalent, c'est la valeur d'une variable qui permet de découper l'échantillon en deux parties de mêmes effectifs.

Il peut être informatif de mesurer la même chose mais pour une répartition différente: 10/90, 75/20, etc.

On généralise la notion de médiane grâce aux **quantiles**.

Interprétation On utilise la courbe cumulative croissante ou CCC



Sommaire

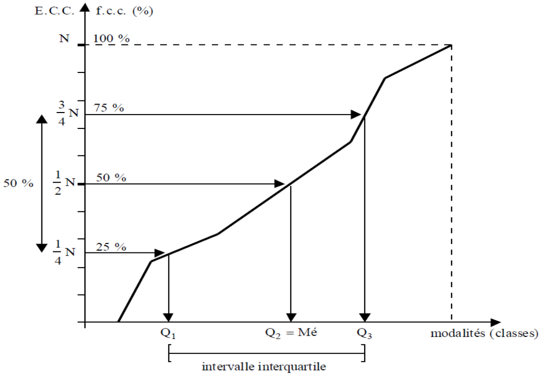
Les quartiles

Définition

Les **3 quartiles** $X_{0,25}, X_{0,5}, X_{0,75}$ notés Q_1, Q_2, Q_3 (Q_2= Mé) sont les modalités d'une variable qui séparent l'effectif total N en 4 parties égales.

Les quartiles

Graphiquement:



Remarque

L'intervalle interquartile $I_Q = [Q_1; Q_3]$ contient 50% des valeurs "centrales" du caractère x.

Sommaire

Les déciles

Définition

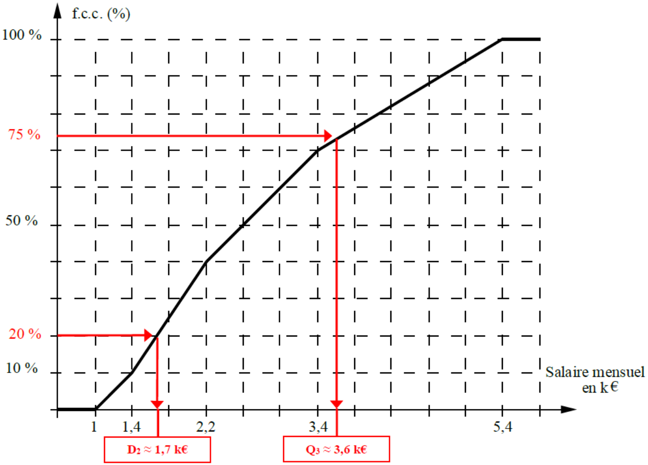
Les 9 déciles $X_{0,1}, X_{0,2}, ..., X_{0,9}$ notés $D_1, D_2, ..., D_{10}$ (D_5=Mé) sont les modalités du caractère qui séparent l'effectif total N en 10 parties égales.

Remarque

L'intervalle interdécile $I_D = [D_1; D_9]$ contient 80% des valeurs "centrales" du caractère x.

Les quantiles : exemples

Exemple 1 : déterminez le 2ème décile et le 3ème quartile



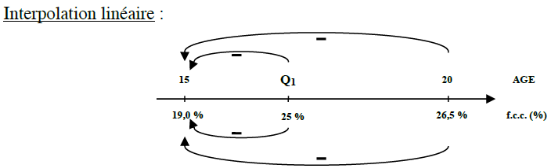
Les quantiles : exemples

Exemple 2 : déterminez le 1e quartile et le 7ème décile

	TRANCHE D'AGE	Fréquence f_i (%)	f.c.c. $f_i \uparrow$ (%)	
	[0 ; 15 [	19,0	19,0	25 %
Classe contenant Q_1	[15 ; 20 [	7,5	26,5	
	[20 ; 25 [	7,5	34,0	
	[25 ; 30 [	7,6	41,6	
	[30 ; 40 [	15,1	56,7	
	[40 ; 50 [	13.0	69,7	70 %
Classe contenant D_7	[50 ; 60 [	10,4	80,1	
	[60;100 [	19,9	100,0	
		100 %		

Les quantiles : exemples

1e quartile :



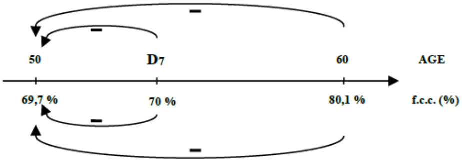
$$\frac{Q_1 - 15}{20 - 15} = \frac{25 - 19}{26,5 - 19} \Leftrightarrow \frac{Q_1 - 15}{5} = 0,8 \Leftrightarrow Q_1 = 19 \text{ ans}$$

- 19 correspond à la FCC associée à la classe **précédent** la classe contenant Q_1.
- 26,5 correspond à la FCC associée à la classe contenant Q_1.
- 15 correspond à la borne inférieure de l'intervalle contenant Q_1.
- 20 correspond à la borne supérieure de l'intervalle contenant Q_1.

Les quantiles: exemples

7e décile :

Interpolation linéaire :



$$\frac{D_7 - 50}{60 - 50} = \frac{70 - 69{,}7}{80{,}1 - 69{,}7} \Leftrightarrow \frac{D_7 - 50}{10} = \frac{0{,}3}{10{,}4} \Leftrightarrow D_7 = 50 + 10 \times \frac{0{,}3}{10{,}4} \Leftrightarrow D_7 \approx \underline{50{,}3 \text{ ans}}$$

- 69,7 correspond à la FCC associée à la classe **précédent** la classe contenant D_7.
- 80,1 correspond à la FCC associée à la classe contenant D_7.
- 50 correspond à la borne inférieure de l'intervalle contenant D_7.
- 60 correspond à la borne supérieure de l'intervalle contenant D_7.

Sommaire

Sommaire

Moyenne arithmétique

La **moyenne arithmétique** de la variable x est donnée par :

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\left(\sum_i n_i x_i\right)$$

Remarques:

- On a : $N\overline{x} = \sum_i n_i x_i$
  $\rightarrow si les N individus prenaient tous la mme valeur, celle-ci serait \overline{x}$
- C'est la moyenne **la plus utilisée** et la plus naturelle.

Propriétés:

- On a : $\sum_i n_i(x_i - a) = 0$ ssi $a = \overline{x}$
- La somme $\sum_i n_i(x_i - a)^2$ est minimale ssi $a = \overline{x}$

Exemple 1:

Voici une distribution de ménages selon le nombre d'enfants :

Nombre d'enfants x_i par ménage	Fréquences f_i (%)	$f_i \times x_i$
0	15	0
1	24	24
2	32	64
3	17	51
4	12	48
	100 %	187

Quel est le nombre moyen d'enfants par ménage?

Exemple 2:

Voici la distribution du salaire mensuel net dans une entreprise :

Salaire mensuel net (en k€)	Effectifs n_i	Centre de classe x_i	$n_i \times x_i$
[1 ; 1,2 [	30	1,1	33
[1,2 ; 1,4 [	50	1,3	65
[1,4 ; 1,6 [	60	1,5	90
[1,6 ; 2 [	80	1,8	144
[2 ; 4 [	20	3	60
	N = 240		392

Quel est le salaire mensuel moyen dans cette entreprise?

Sommaire

Définition

La moyenne quadratique d'une série statistique positive x_i, avec $i = 1, 2, ..., n$, est la racine carrée de la moyenne arithmétique des carrés des valeurs observées. On la note Q.

$$Q = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} n_i x_i^2}$$

La moyenne quadratique pondérée de la variable x:

$$Q = \left[\frac{1}{N}\left(\sum_{i} n_i x_i^2\right)\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} n_i x_i^2}$$

Par exemple : l'écart-type dans une population est la moyenne quadratique des distances à la moyenne.

Moyenne quadratique

Remarque

En général, le caractère x désigne un écart avec un nombre donné a. On l'emploie pour calculer la moyenne des écarts à une valeur afin de ne pas avoir à manipuler de valeurs négatives.

Calculez la moyenne quadratique des écarts à 10 des 20 notes suivantes

On considère la répartition ci-après de 20 élèves selon la note à un contrôle :

Notes sur 20 X_i	Effectifs n_i	écarts à 10 : $x_i = X_i - 10$	$n_i \times x_i^2$
7	4	7 - 10 = -3	36
9	8	- 1	8
12	2	2	8
15	6	5	150
	N = 20		202

Moyenne quadratique

$$Q = \left[\frac{1}{N}\left(\sum_i n_i x_i^{2}\right)\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{1}{20} \times 202\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10{,}1} \approx \underline{3{,}18}$$

Sommaire

Moyenne d'ordre r

Soit $(x_i; n_i)$ une série statistique associée au caractère quantitatif x avec x_i modalités. On pose, pour $r \neq 0$:

$$m_r = \left[\frac{1}{N}\left(\sum_i n_i x_i^r\right)\right]^{\frac{1}{r}}$$

Pour $r = 1$, on retrouve la moyenne arithmétique et pour $r = 2$ on retrouve la moyenne quadratique.

Remarque

La **moyenne d'ordre** r, ou **moyenne de Hölder**, s'exprime dans la même unité que la variable x mais n'est pas obligatoirement une modalité observée ou même observable de la variable x.

Moyenne d'ordre r

- On définit m_r pour $r = 0$ en posant : $m_0 = \lim_{r \to 0} m_r$ (prolongement par continuité);
- De même, on définit $m_{+\infty} = \lim_{r \to +\infty} m_r = \max_i x_i$;
- Similairement, $m_{-\infty} = \lim_{r \to -\infty} m_r = \min_i x_i$

Cas particuliers: lorsqu'on dispose de fréquences (%) au lieu d'effectifs, on a :

$$m_r = \left[\frac{1}{100} \left(\sum_i f_i x_i^r \right) \right]^{\frac{1}{r}}$$

Moyenne d'ordre r

Propriétés:

- On a $x_{min} \leq m_r \leq x_{max}$ avec x_{min} la plus petite modalité de x et x_{max} la plus grande
- L'application $r \to m_r$ est croissante telle que: $r < r' \Leftrightarrow m_r < m_{r'}$

Sommaire

Moyenne harmonique

- La **moyenne harmonique** est l'inverse de la moyenne arithmétique des inverses des valeurs d'une série.
- Elle permet de réduire l'influence des observations les plus grandes et d'augmenter celle des plus petites observations d'un ensemble de données.
- Elle est particulièrement utile lorsqu'on raisonne sur des rapports de proportions (p.ex. taux de change).
- Il s'agit de la moyenne d'ordre $r = -1$.

Moyenne harmonique

Remarques:

- Pour pouvoir calculer la moyenne harmonique H, il faut supposer que $\forall i, x_i \neq 0$
- La moyenne harmonique est l'inverse de la moyenne arithmétique des inverses:

$$H = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}} = \frac{N}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}} = m_{-1}$$

- Lorsque chaque modalité x_i est associée à un effectif n_i, alors :

$$H = \frac{N}{\sum_{i=1}^{n}\frac{n_i}{x_i}}$$

Exemple 1:

Tableau n°1

Nbre d'euros $\boxed{n_i}$	Cours de l'€ en DH $\boxed{x_i}$	**Valeur en DH** $\boxed{n_i\, x_i}$
500	10,4 DH	**5 200**
200	9,0 DH	**1 800**
300	9,8 DH	**2 940**
N = 1 000		$\sum_i n_i\, x_i = 9940$

Tableau n°2

Cours de l'€ en DH $\boxed{x_i}$	Valeur en DH $\boxed{n_i}$	**Nombre d'€** $\boxed{\frac{n_i}{x_i}}$
10,4 DH	4 160	**400**
9,0 DH	6 300	**700**
9,8 DH	4 900	**500**
	N = 15 360	$\sum_i \frac{n_i}{x_i} = 1600$

Quel est le cours moyen de l'EUR en DH?

Moyenne harmonique

Indépendamment des tableaux :

$$\text{Cours moyen de l'EUR en DH} = \frac{\text{Nombre total de DH}}{\text{Nombre total d'EUR}}$$

On peut traduire cette relation à l'aide des notations x_i, n_i et N:

- **Tableau 1**:

$$\text{Cours moyen de l'EUR en DH} = \frac{\sum_i n_i x_i}{N} = \overline{x} = \frac{9940}{1000} = 9,94\text{DH/EU}$$

- **Tableau 2**:

$$\text{Cours moyen de l'EUR en DH} = \frac{N}{\sum_i \frac{n_i}{x_i}} = H = \frac{15360}{1600} = 9,60\text{DH/EU}$$

Moyenne harmonique

- **Tableau 1**: le cours moyen de l'EUR en DH est la moyenne **arithmétique** $\overline{x}$ des cours x_i de l'EUR en DH pondérés par les nombres n_i d'euros.
- **Tableau 2**: le cours moyen de l'EUR en DH est la moyenne **harmonique** H des cours x_i de l'EUR en DH pondérés par les nombres n_i de dirhams.

Sommaire

Moyenne géométrique

Définition

La moyenne géométrique d'une série statistique positive x_i avec $i = 1, 2, ..., n$ est la racine n-ième du produit des x_i. On la note généralement G

On a donc :

$$G = \left[\prod_{i=1}^{n} x_i^{n_i}\right]^{\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} n_i}} = \left[\prod_{i=1}^{n} x_i^{n_i}\right]^{\frac{1}{N}}$$

Le calcul de G peut s'effectuer grâce à la relation:

$$\mathbf{ln}G = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i \mathbf{ln} x_i}{\sum_{i=1}^{n} n_i} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} n_i \mathbf{ln} x_i, \quad \forall i = 1, 2, ..., n \text{ si } x_i > 0$$

Moyenne géométrique

Remarques:

- On a toujours $x_{min} \leq H \leq G \leq \overline{x} \leq Q \leq x_{max}$
- Pour pouvoir calculer la moyenne G, il faut supposer que $\forall i, x_i > 0$
- Elle permet de calculer la moyenne de pourcentages consécutifs (taux de croissance moyen, rendement moyen d'un placement...)
- Rappel: le coefficient multiplicateur associé à un taux de croissance t_i est $c_i = 1 + t_i$

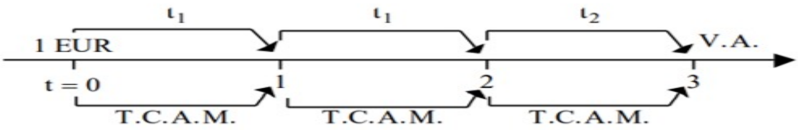
Exemples:

- $t_1 = +15\% \Rightarrow c_1 = 1 + 0,15 \ (> 1)$
- $t_2 = -7\% \Rightarrow c_2 = 1 - 0,07 = 0,93 \ (< 1)$
- $c_3 = 1,035 \Rightarrow t_3 = +3,5\%$
- $c_4 = 0,96 \Rightarrow t_4 = -4\%$

Moyenne géométrique: le TCAM

Définition

Le **taux de croissance annuel moyen** (TCAM) correspond au taux de croissance annualisé sur une période de temps donnée. Il permet une comparaison avec d'autres périodes qui peuvent être plus courtes ou plus longues. Mathématiquement, c'est **une moyenne géométrique des différents taux de croissance de la période étudiée**.



Moyenne géométrique: le TCAM

Soit une durée totale $N = 3$ ans, une durée d'application n_1 du taux t_1 de 2 ans et une durée d'application n_2 du taux t_2 d'un an. On peut écrire:

$$(1 + \text{TCAM})^N = (1 + t_1)^{n_1}(1 + t_2)^{n_2}$$

$$(1 + \text{TCAM})^N = \prod_i (1 + t_i)^{n_i}$$

$$(1 + \text{TCAM}) = \left[\prod_i (1 + t_i)^{n_i}\right]^{\frac{1}{N}} = G$$

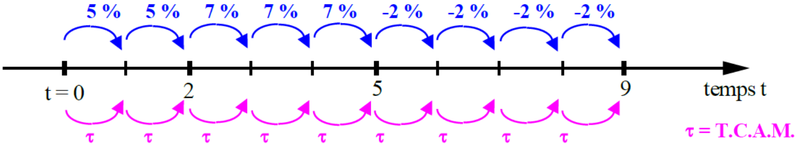
Le coefficient multiplicateur du TCAM est la moyenne géométrique des coefficients multiplicateurs des taux t_i pondérés par leur durée d'application n_i.

Moyenne géométrique: le TCAM

Exemple: le chiffre d'affaires d'une entreprise a augmenté de 5% par an pendant 2 ans, puis de 7% par an pendant 3 ans. Il a diminué de 2% par an pendant 4 ans. Calculez le TCAM sur cette période de 9 ans du chiffre d'affaires de cette entreprise.

Moyenne géométrique: le TCAM

Correction:



$$1 + \text{T.C.A.M.} = \left[\prod_i (1 + t_i)^{n_i}\right]^{\frac{1}{N}} \; (= G)$$

$$1 + \text{T.C.A.M} = \left[(1 + 0{,}05)^2\,(1 + 0{,}07)^3\,(1 - 0{,}02)^4\right]^{\frac{1}{9}}$$

$$1 + \text{T.C.A.M} = \left[1{,}05^2 \times 1{,}07^3 \times 0{,}98^4\right]^{\frac{1}{9}}$$

$$1 + \text{T.C.A.M} = \mathbf{1{,}0247}$$

D'où : T.C.A.M. = **0,0247** soit, en % : T.C.A.M. = **<u>2,47 %</u>**