

POLITECHNIKA ŁÓDZKA

WYDZIAŁ FIZYKI TECHNICZNEJ, INFORMATYKI
I MATEMATYKI STOSOWANEJ

Kierunek: Matematyka Stosowana

Specjalność: Analiza Danych w Biznesie i Logistyce

Matematyczne modele wykorzystywane w systemach rekomendacji.

Anita Kudaj

Nr albumu: 220020

Praca magisterska

napisana w Instytucie Matematyki Politechniki Łódzkiej

Promotor: dr, mgr inż. Piotr Kowalski

ŁÓDŹ, ?????

Spis treści

1	Wstęp	3
2	Preliminaria	4
2.1	Elementy rachunku prawdopodobieństwa i statystyki	4
2.2	Elementy algebry liniowej	5
3	Eksploracja danych w systemach rekomendujących	9
3.1	Preprocesing danych	9
3.1.1	Miary podobieństwa	9
3.1.2	Redukcja wymiaru	11
3.2	Metody eksploracji danych	16
3.2.1	k - Najbliższych Sąsiadów	17
3.2.2	k-średnich	18
3.2.3	drzewa decyzyjne-?	21
3.2.4	regresja wielowymiarowa - logistyczna - ?	21
3.2.5	sztuczna sieć neuronowa	21
3.2.6	Support Vector Machines	21
3.3	Szacowanie Błędów Obliczeń	21
3.3.1	Ocena Dokładności Metody	21
3.3.2	Ocena Precyzji Użyteczności	22
3.3.3	Ocena Rankingów	22
4	Modele tworzenia rekomendacji	24
4.1	Systemy rekomendujące oparte na treści (Content-based recommender systems):	24
4.1.1	Problem	24
4.1.2	Algorytm	24
4.1.3	Wygenerowanie profilu produktu	25
4.1.4	Wygenerowanie profilu użytkownika	27
4.1.5	Rozpoznanie cech produktu odpowiednich dla użytkownika	27

4.1.6	Przykład	28
4.1.7	Wady i zalety systemu rekomendującego opartego na treści	30
4.2	Filtrowanie kolaboratywne (Collaborative filtering)	31
4.2.1	Filtrowanie kolaboratywne oparte na użytkowniku	31
4.2.2	Filtrowanie kolaboratywne oparte na elementach	33
4.2.3	Wady i zalety filtrowania kolaboratywnego	34
4.2.4	Porównanie filtrowania kolaboratywnego opartego na użyt- kownikach i filtrowania kolaboratywnego opartego na elemtach: .	35
4.3	Systemy rekomendujące kontekstowe (Context – aware recommender systems):	36
4.3.1	Algorytm	36
4.3.2	Przykład	37
4.3.3	Wady i zalety systemów rekomendujących kontekstowych . .	38
4.4	Hybrydowe systemy rekomendujące ():	38
4.5	Systemy rekomendujące oparte na modelach():	38
5	Eksperymenty / część praktyczne	39
6	Podsumowanie	40

Rozdział 1

Wstęp

Rozdział 2

Preliminaria

2.1 Elementy rachunku prawdopodobieństwa i statystyki

Niech F oznacza σ - algebrę podzbiorów z przestrzeni Ω oraz niech X oznacza funkcję rzeczywistą określoną na przestrzeni Ω , to znaczy:

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Definicja 1 Zmienna losowa

Zmienną losową nazywamy funkcję X , która jest F - mierzalna, to znaczy jeżeli dla każdego $a \in \mathbb{R}$ zachodzi:

$$\{\omega : X(\omega) < a\} = X^{-1}((-\infty, a)) \in F,$$

gdzie X^{-1} jest operacją przeciwobrazu zbioru przez funkcję X .

Definicja 2 Kowariancja

Kowariancją zmiennych losowych X, Y nazywamy liczbę:

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))],$$

gdzie $E(X)$ oznacza wartość oczekiwaną zmiennej losowej X .

Definicja 3 Odchylenie standardowe

Wariancją zmiennej losowej X nazywamy liczbę:

$$\text{Var}(X) = E[(X - E(X))^2],$$

jeżeli po prawej stronie równości wartość oczekiwana istnieje.

Odchyleniem standardowym zmiennej losowej X nazywamy liczbę:

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}.$$

Definicja 4 **Współczynnik korelacja**

Współczynnikiem korelacji nazywamy charakterystykę ilościową stopnia zależności dwóch zmiennych losowych X i Y zdefiniowaną następująco:

$$\rho(x, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

W statystyce do przedstawienia poziomu zależności liniowej między dwoma zmiennymi losowymi używamy Współczynnika Korelacji Pearsona.

Definicja 5 **Współczynnik Korelacji Pearsona**

Niech $X, Y \in \mathbb{R}^n$ będą zmiennymi losowymi o rozkładach ciągłych oraz niech x_k, y_k , gdzie $k \in \{1, \dots, n\}$ oznaczają wartości prób losowych tych zmiennych.

Przez \bar{x} i \bar{y} oznaczmy:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k, \\ \bar{y} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k.\end{aligned}$$

Wówczas Współczynnikiem Korelacji Pearsona nazywamy:

$$\rho(X, Y) = \frac{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n (y_k - \bar{y})^2}}.$$

2.2 Elementy algebry liniowej

Definicja 6 **Iloczyn skalarny**

Niech U oznacza przestrzeń liniową nad ciałem \mathbb{R} . Iloczynem skalarnym nazywamy formę dwuliniową

$$d : U \times U \longrightarrow \mathbb{R},$$

gdy:

- dla każdego $u \in U$ zachodzi:

$$d(u, u) \geq 0$$

- jest symetryczna, oznacza to, że dla dowolnych $u, v \in U$ zachodzi:

$$d(u, v) = d(v, u)$$

- $(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = \Theta_U$

Przestrzeń liniową U nad ciałem liczb rzeczywistych z iloczynem skalarnym $d : U \times U \longrightarrow \mathbb{R}$ nazywamy przestrzenią euklidesową.

Definicja 7 Miara odległości

Miarą odległości (funkcją odległości) nazywamy rzeczywistą funkcję d , która dla każdego $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ spełnia warunki:

- $d(x, y) \geq 0$
- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- $d(x, y) = d(y, x)$
- $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$

Definicja 8 Odległość euklidesowa

Niech $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Normą x nazywamy:

$$||x|| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

Jeśli $x, y \in \mathbb{R}^n$ to liczbę: $||x - y||$ nazywamy odległością euklidesową punktów x i y , gdzie:

$$(x - y) = (x_1 - y_1, \dots, x_n - y_n).$$

Definicja 9 Odległość kosinusowa

Niech $x, y \in \mathbb{R}^n$ (x, y są n -wymiarowymi wektorami). Odległością kosinusową nazywamy:

$$d(x, y) = 1 - \text{sim}(x, y),$$

gdzie $\text{sim}(x, y)$ to współczynnik podobieństwa wektorów x i y :

$$\text{sim}(x, y) = \frac{x \cdot y}{||x|| ||y||},$$

zatem

$$\text{sim}(x, y) = \frac{\sum_{k=1}^n x_k y_k}{\sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n y_k^2}}.$$

Definicja 10 Macierz transponowana

Niech dana będzie macierz $A \in M_{m,n}(K)$ o n kolumnach i m wierszach:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Macierzą transponowaną nazywamy macierz $A^T \in M_{n,m}(K)$:

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Twierdzenie 1 Własności transpozycji macierzy

Niech A i B będą macierzami o współczynnikach z K oraz niech posiadają tyle kolumn i wierszy, że operacje występujące powyżej są określone. Niech $\lambda \in K$.

Zachodzą następujące równości:

- $(A^T)^T = A$,
- $(A + B)^T = A^T + B^T$,
- $(\lambda A)^T = \lambda A^T$,
- $(AB)^T = B^T A^T$.

Definicja 11 Macierz ortogonalna

Macierzą ortogonalną nazywamy macierz kwadratową $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ spełniającą nierówność:

$$A^T \cdot A = A \cdot A^T = I_n,$$

gdzie A^T oznacza macierz transponowaną względem A , natomiast I_n oznacza macierz jednostkową.

Definicja 12 Macierz diagonalna

Macierzą diagonalną nazywamy macierz $A \in M_{n,n}(K)$ taką, że:

$$A = (a_{ij}) \text{ dla } i, j = 1, 2, \dots, n$$

oraz

$$a_{ij} = 0 \text{ gdy } i \neq j.$$

Definicja 13 Macierz nieosobliwa

Macierzą nieosobliwą nazywamy macierz kwadratową $A \in M_{n,n}(K)$, jeżeli istnieje macierz $B \in M_{n,n}(K)$ taka, że:

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n,$$

gdzie I_n jest macierzą jednostkową.

Definicja 14 Macierz osobliwa

Macierzą osobliwą nazywamy macierz kwadratową $A \in M_{n,n}(K)$, której wyznacznik jest równy zero.

Definicja 15 Rozkład wartości osobliwych

Rozkładem wartości osobliwych nad \mathbb{R} nazywamy przedstawienie macierzy A w postaci:

$$A = U \Sigma V^T,$$

gdzie U i V są macierzami ortogonalnymi. Natomiast Σ jest macierzą diagonalną, która zawiera kolejne wartości osobliwe.

Definicja 16 Macierz odwrotna**Definicja 17 Ślad macierzy**

Śladem macierzy $A \in M_{n,n}(K)$ nazywamy wielkość:

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

Definicja 18 Rząd macierzy

Rzędem macierzy nazywamy liczbę wiodących jedynek w dowolnej postaci zredukowanej macierzy. Rząd macierzy A oznaczamy symbolem $\text{rz}A$ lub $R(A)$.

Rząd macierzy wyznacza maksymalną liczbę wektorów niezależnych, które są kolumnami lub wierszami tej macierzy.

Definicja 19 Zakres macierzy**Definicja 20 Jądro macierzy****Definicja 21 Przestrzeń generowana przez układ wektorów**

Przestrzenią generowaną przez układ wektorów X nazywamy zbiór wszystkich kombinacji liniowych skończonych podukładów X .

Oznaczamy ją symbolem $\text{span}(X)$ i definiujemy ją następująco:

$$\text{span}(X) := \left\{ \sum_{i=1}^n a_i x_i : (\forall i \in [1;n] \cap \mathbb{N}) a_i \in \mathbb{K} \wedge (\forall i \in [1;n] \cap \mathbb{N}) x_i \in X \wedge n \in \mathbb{N} \right\},$$

gdzie $X = (x_i)_{i=1}^n$ jest układem wektorów przestrzeni wektorowej V nad ciałem \mathbb{K} .

Rozdział 3

Eksploracja danych w systemach rekomendujących

Większość systemów rekomendujących opiera swój rdzeń na algorytmach, które możemy rozumieć jako konkretne przypadki technik eksploracji danych.

Proces eksploracji danych składa się zazwyczaj z trzech kroków:

1. Preprocessing Danych,
2. Analiza Danych,
3. Interpretacja Wyników.

W tym rozdziale zostaną przeanalizowane najważniejsze i najczęściej używane w regułach rekomendujących metody. Zaczniemy od miar podobieństw i redukcji wymiaru. W kolejnym etapie spojrzymy na metody klasyfikacji, grupowania i regresji, aby zakończyć interpretacją wyników i oceną błędów obliczeń.

3.1 Preprocessing danych

Przed przystąpieniem do kroku analizy dane wymagają przygotowania: wyczyszczenia, przefiltrowania, transformacji. Dopiero tak przygotowane dane mogą zostać poddane zadaniom uczenia maszynowego. W tej sekcji zostaną przedstawione problemy, które spotkamy przy tworzeniu reguł rekomendujących.

3.1.1 Miary podobieństwa

W systemach rekomendujących, jak filtrowanie kolaboratywne bardzo częstym podejściem jest używanie metod klasyfikacji i grupowania. Metody te bardzo ściśle opierają się na obliczaniu podobieństwach i odległości.

Najprostszym i jednocześnie najczęściej używanym podejściem jest tu **Odległość Euklidesowa**:

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2},$$

gdzie n oznacza liczbę atrybutów elementów x i y przy czym x_k oznacza k -ty atrybut elementu x .

Innym przykładem jest **Odległość Minkowskiego**, która jest uogólnioną wersją Odległości Euklidesowej:

$$d(x, y) = (\sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^r)^{\frac{1}{r}}.$$

W zależności od wartości stopnia odległości r Odległość Minkowskiego przyjmuje konkretne nazwy:

- $r = 1$ - Odległość Manhatan (norma L_1),
- $r = 2$ - wspomniana wcześniej Odległość Euklidesowa,
- $r \rightarrow \infty$ - supremum (norma L_{max} , norma L_∞).

Kolejnym podejściem, gdzie poszczególne elementy są postrzegane jako n - wymiarowe wektory, a podobieństwo między nimi jest obliczane na podstawie kątów, który tworzą jest **podobieństwo kosinusów**:

$$\cos(x_u, x_v) = \frac{x_u^T x_v}{\|x_u\| \|x_v\|},$$

gdzie x_u i x_v oznaczają wektory preferencji użytkowników u oraz v .

Inną miarą jest **Korelacja Pearsona**, zdefiniowana następująco:

$$\rho(u, v) = \frac{\sum_{i \in I_{uv}} (r_{ui} - \bar{r}_u)(r_{vi} - \bar{r}_v)}{\sqrt{\sum_{i \in I_{uv}} (r_{ui} - \bar{r}_u)^2 \sum_{i \in I_{uv}} (r_{vi} - \bar{r}_v)^2}}$$

I_{uv} oznacza w tym przypadku zbiór elementów, które zostały ocenione przez użytkownika u i użytkownika v , r_{ui} natomiast ocenę elementu i przez użytkownika u .

Indeks Jaccarda (Współczynnik podobieństwa Jaccarda) to kolejny wskaźnik opisujący podobieństwo. Jeżeli oznaczymy przez A i B wektory to:

$$J(A, B) = \frac{|A \cap B|}{|A \cup B|}.$$

Z racji tego, że użytkowników i elementy możemy przedstawić za pomocą wektorów łatwo zastosować współczynnik Jaccarda do obliczania podobieństwa.

3.1.2 Redukcja wymiaru

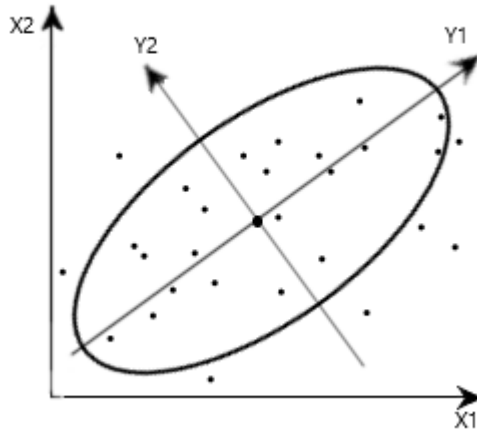
Wraz ze wzrostem ilości obserwacji rośnie ich dokładność. Warto zauważyć, że tym samym rośnie stopień komplikacji w interpretacji otrzymanych wyników. Zbyt duża ilość zmiennych, które opisują obserwacje powoduje wzrost prawdopodobieństwa, że zmienne te są ze sobą skorelowane, a informacje wnoszone przez część zmiennych są redundantne. Podobne zjawiska możemy dostrzec także w regułach rekomendujących. Proces redukcji wymiaru pozwala przezwyciężyć ten problem poprzez transformację przestrzeni danych do przestrzeni o mniejszej liczbie wymiarów. W poniższym rozdziale przyjrzymy się dwóm najczęściej wybieranym algorytmom redukcji wymiarów w kontekście reguł rekomendujących. Są to Analiza Głównych Składowych oraz Rozkład Według Wartości Osobliwych.

Analiza Głównych Składowych

Definicja 22 *Analiza Głównych Składowych (ang. Principal Component Analysis (PCA))*

Analizę głównych składowych nazywamy procedurę statystyczną, która polega na ortogonalnej transformacji układu badanych zmiennych X w zbiór nowych zmiennych Y . W rzeczywistość zmienne Y są kombinacją liniową zmiennych X .

Niech dane będą dwie zmienne X_1, X_2 oraz n pomiarów, które oznaczmy (X_{i1}, X_{i2}) dla $i \in 1, 2, 3, \dots, n$. Pomiarów przedstawmy na układzie współrzędnych w formie diagramu korelacyjnego. Możemy zauważyć, że wzdłuż jednej osi dane są bardziej rozproszone - jest to pierwsza główna składowa Y_1 . Druga biegnąca pod kątem prostym do pierwszej oś, wyznacza kierunek drugiej składowej - Y_2 . Osie X_1, X_2 są transformowane przez przesunięcie środka do nowego punktu $(\overline{X_1}, \overline{X_2})$, a następnie obrócone w ten sposób, by otrzymać współrzędne Y_1 i Y_2 głównych składowych.



Rysunek 3.1: Diagram korelacyjny wyodrębnienia głównych składowych.

Punktem wyjścia rozważanego algorytmu jest macierz kowariancji lub macierz korelacji utworzone ze zbioru wejściowego. Zawierają one informację niezbędną do wyznaczenia głównych składowych.

W przypadku użycia macierzy kowariancji największy wpływ na wynik przeprowadzanego algorytmu mają zmienne o największej wariancji. Stąd też rozwiązanie to świetnie sprawdzi się w przypadku, gdy rozważane zmienne mają porównywalne wielkości:

$$A = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix},$$

gdzie:

- σ_{ii} - wariancja zmiennej X_i ,
- $\sigma_{ij} = Cov(X_i, X_j)$ - kowariancja między zmiennymi X_i i X_j .

W przypadku, gdy zmienne różnią się znacznie w wyrażonych jednostkach, lub gdy nie są proporcjonalne zastosujemy macierz korelacji:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \cdots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix},$$

gdzie:

- $\rho_{ij} = \frac{\text{Cov}(X_i, X_j)}{\sigma_i \sigma_j}$ - współczynnik korelacji X_i i X_j .

Własności głównych składowych:

- są kombinacją liniową pierwotnych zmiennych,
- względem siebie są ortogonalne,
- suma wariancji pierwotnych zmiennych jest równa sumie wariancji zmiennych składowych.

Dla wspomnianej transformacji ortogonalnej, w przypadku gdy znamy wektory własne macierzy istnieje bezpośrednie równanie.

Twierdzenie 2 Niech W będzie macierzą wektorów własnych przekształcenia XX^T uporządkowaną malejąco. Wtedy transformacja PCA jest dana wzorem $Y = W^T X$.

Dowód 1 Bez utraty ogólności założmy, że X ma średnią zero.

Niech $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ będą wartościami własnymi przekształcenia XX^T oraz v_i odpowiadającą bazą ortogonalną. Założmy, że $\omega = \sum_{i=1}^n a_i v_i$ maksymalizuje wariancję oraz $\omega \neq v_i$.

Wtedy:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \operatorname{argmax}_{\|\omega\|=1} \omega^T X X^T \omega = \operatorname{argmax}_{\|\omega\|=1} (\sum a_i v_i)^T X X^T (\sum a_i v_i) \\ &= \operatorname{argmax}_{\|\omega\|=1} (\sum a_i v_i)^T (\sum a_i \lambda_i v_i) = \operatorname{argmax}_{\|\omega\|=1} (\sum a_i)^2.\end{aligned}$$

Stąd ω_1 maksymalizuje wariancję wtedy i tylko wtedy, gdy $\omega_1 = v_1$.

Znajdąc $k-1$ głównych składowych k -tą znajdziemy postępując z transformacją:

$$X_{k-1} = X - \sum_{i=1}^{k-1} \omega_i \omega_i^T X.$$

Podstawiając X_{k-1} otrzymujemy:

$$\omega_k = \operatorname{argmax}_{\|\omega\|=1} \omega^T X_{k-1} X_{k-1}^T \omega.$$

□

Twierdzenie przedstawia użyteczną interpretację algorytmu PCA, jednakże nie jest wydajną metodą przy odnajdowaniu wektorów własnych. Poniżej zostanie przedstawiony proces odnalezienia transformacji.

Założmy, że średnia X to zero. Naszym celem jest znaleźć transformację ortogonalną W taką, że WX jest losowym wektorem z parami niezależnych komponentów:

$$\text{cov}(WX) = \mathbb{E}[WX(WX)^T] = \mathbb{E}[WXX^TW^T] = W\mathbb{E}[XX^T]W^T = W\text{cov}(X)W^{(-1)}$$

Dopóki $\text{cov}(X)$ jest macierzą o wartościach dodatnich istnieje W , które spełnia powyższe równanie.

PCA jest klasyczną metodą, która pozwala odnaleźć zależności w zbiorach danych o wielu wymiarach. W wyniku tej metody otrzymujemy uporządkowaną listę cech wyznaczoną dla największych wartości wariancji przy jednocześnie najmniejszym błędzie kwadratowym (podrozdział 3.3.1). W ten sposób spośród wielu cech opisujących nasze elementy jesteśmy w stanie wybrać te najbardziej dla nas istotne w procesie rekomendacji.

Rozkład Według Wartości Osobliwych (ang. Singular Value Decomposition (SVD))

Definicja 23 *Rozkład Według Wartości Osobliwych*

Rozkładem według wartości osobliwych $m \times n$ - wymiarowej macierzy \mathbb{X} , gdzie $m \geq n$ oraz $r \in \mathbb{N}$ jest rzędem macierzy A nazywamy rozkład:

$$\mathbb{X} = \mathbb{U} \Sigma \mathbb{V}^T,$$

gdzie:

- \mathbb{U} jest macierzą ortogonalną $m \times m$ - wymiarową,
- Σ jest macierzą diagonalną, $m \times n$ - wymiarową o nieujemnych wartościach, $\Sigma = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$, $n \in \mathbb{N}$ taką, że $d_i > 0$ dla $1 \leq i \leq r$ i $d_i = 0$ dla $i \geq r + 1$,
- \mathbb{V} są macierzą ortogonalną $n \times n$ - wymiarową.

Definicja 24 *Norma Frobeniusa*

Normą Frobeniusa nazywamy:

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2} = \sqrt{\text{tr} A^T A},$$

gdzie A jest macierzą $m \times n$ - wymiarową. A^T jest sprzężeniem macierzy, a $\text{tr}(A)$ śladem macierzy A .

Twierdzenie 3 *Następstwa SVN*

Niech rozkład według wartości osobliwych macierzy A będzie dany wzorem

$$\mathbb{X} = \mathbb{U} \Sigma \mathbb{V}^T$$

gdzie $U = [u_1, u_2, \dots, u_m]$, $V = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ oraz

$$d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_r > d_{r+1} = \dots = d_n = 0.$$

$R(A)$ i $N(A)$ oznaczają zakres i jądro macierzy.

Wtedy:

1. właściwości rzędu macierzy: $\text{rank}(A) = r$, $N(A) = \text{span}\{v_{r+1}, \dots, v_n\}$, $R(A) = \text{span}\{u_1, u_2, \dots, u_r\}$,
2. $A = \sum_{i=1}^r u_i \cdot d_i \cdot v_i^T$,
3. $\|A\|_F^2 = d_1^2 + \dots + d_r^2$ i $\|A\|_2^2 = d_1^2$.

Twierdzenie 4 Twierdzenie Eckart - Younga

Niech X będzie macierzą $m \times n$ - wymiarową z rozkładem według wartości osobliwych $\mathbb{X} = U \Sigma V^T$, $r \in \mathbb{N} = \text{rank}(A)$ niech będzie rzędem macierzy i $r \leq p = \min(m, n)$.

Zdefiniujmy:

$$A_k = \sum_{i=1}^k u_i \cdot d_i \cdot v_i^T,$$

wtedy

$$\min_{\text{rank}(B)=k} \|A - B\|_F^2 = \|A - A_k\|_F^2 = d_{k+1}^2 + \dots + d_p^2.$$

Dowód 2 Niech $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ będzie macierzą o wartościach rzeczywistych, gdzie $m \geq n$.

Założmy, że

$$\mathbb{X} = U \Sigma V^T$$

jest rozkładem według wartości osobliwych macierzy A .

Chcemy pokazać, że najlepszym przybliżeniem macierzy A w normie Frobeniusa (oznaczamy $\|\cdot\|_F$) jest

$$A_k = \sum_{i=1}^k u_i \cdot d_i \cdot v_i^T,$$

gdzie u_i i v_i oznaczają odpowiednio i -te kolumny macierzy U i V .

Zauważmy, że

$$\|A - A_k\|_F^2 = \|\sum_{i=k+1}^n u_i \cdot d_i \cdot v_i^T\|_F^2 = \sum_{i=k+1}^n d_i^2.$$

Stąd należy udowodnić, że $B_k = XY^T$, gdzie X i Y są macierzami oraz

$$\|A - A_k\|_F^2 = \sum_{i=k+1}^n d_i^2 = \|A - B_k\|_F^2.$$

Z nierówności trójkąta, jeżeli $A = A' + A''$ wtedy $d_1(A) \leq d_1(A') + d_1(A'')$.

Przez A'_k i A''_k oznaczmy przybliżenia SVD odpowiednio macierzy A' i A'' .

Stąd dla każdego $i, j \geq 1$

$$d_i(A') + d_j(A'') = d_1(A' - A'_{i-1}) + d_1(A'' - A''_{j-1}) \geq d_1(A - A'_{i-1} - A''_{j-1}) \geq d_1(A - A_{i+j-2})(\text{rank}(A'_{i-1} + A''_{j-1})) \geq d_{i+j-1}(A),$$

gdy $\text{rank}(A'_{i-1} + A''_{j-1}) \leq \text{rank}(A_{i+j-2})$.

Jeżeli

$$d_{k+1}(B_k) = 0,$$

kiedy $A' = A - B_k$ i $A'' = B_k$ wnioskujemy, że dla $i \geq 1, j = k + 1$

$$d_i(A - B_k) \geq d_{k+1}(A).$$

Stąd:

$$\|A - B_k\|_F^2 = \sum_{i=1}^n d_i(A - B_k)^2 \geq \sum_{k+1}^n d_i(A)^2 = \|A - A_k\|_F^2.$$

□

Zawsze jest możliwe dokonać dekompozycji macierzy A do postaci $\mathbb{X} = \mathbb{U} \Sigma \mathbb{V}^T$.

Zakładamy, że naszą macierzą wejściową jest macierz danych A $m \times n$ -wymiarowa odzwierciedlająca m elementów oraz n cech dla każdego z nich. Po przeprowadzeniu rozkładu według wartości osobliwych otrzymamy:

- macierz U o wymiarach $m \times r$ prezentującą m elementów i r kategorii,
- macierz diagonalną Σ o wymiarach $r \times r$ prezentującą istotność poszczególnych kategorii,
- macierz V o wymiarach $n \times r$ prezentującą n cech i r kategorii.

Macierz Σ zawiera pojedyncze wartości uporządkowane zawsze w porządku malejącym. Macierz U jest tu interpretowana jako macierz podobieństwa elementów i kategorii, macierz V natomiast jako macierz podobieństwa cech i kategorii.

SVD jest powszechnie używane w celu odkrycia relacji występujących między użytkownikami i produktami.

3.2 Metody eksploracji danych

Termin eksploracja danych jest często używany jako określenie procesu odkrywania wiedzy z danych. Coraz częściej jednak terminem "proces odkrywania wiedzy" określamy cały proces pracy z danymi, natomiast termin "eksploracja danych" odnosi się do etapu odkrywania pewnego rodzaju reguł.

Jak podaje w jednym ze swoich artykułów "Eksploracja danych: problemy i rozwiązania" Tadeusz Morzy metody eksploracji można podzielić na sześć klas:

- Odkrywanie asocjacji,
- Klastrowanie,
- Odkrywanie wzorców sekwencji,
- Odkrywanie klasyfikacji,
- Odkrywanie podobieństw w przebiegach czasowych,
- Wykrywanie zmian i odchyień.

W tym podrozdziale skupimy się tylko na tych, które są najczęściej stosowane w regułach rekomendujących.

3.2.1 k - Najbliższych Sąsiadów

Algorytm k-najbliższych sąsiadów (k-NN) jest najczęściej używanym algorytmem klasyfikacji. Przyporządkowanie nowych elementów zostaje przeprowadzone na podstawie porównania obserwacji z k najbardziej podobnymi jej obiektami ze zbioru treningowego. Podstawowa idea algorytmu mówi, że jeżeli nowy rekord znajduje się w pewnym otoczeniu, to na podstawie k - najbliższych mu obserwacji zostanie przyporządkowana do niego etykieta (klasa), której pojawienie się w rozważanym zbiorze jest najliczniejsze.

Niech q będzie punktem dla którego chcemy odnaleźć jego klasę l .

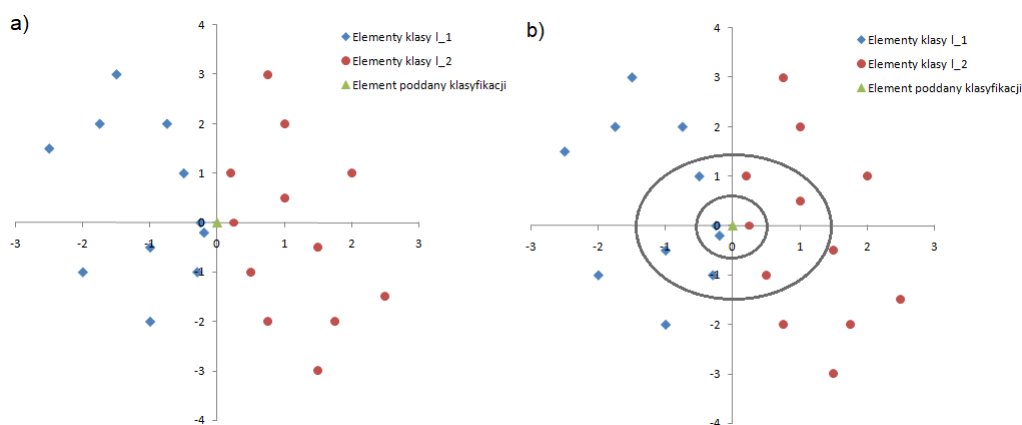
$X = \{\{x_1, l_1\}, \dots, \{x_n, l_n\}\}$ niech będzie zbiorem treningowym, gdzie x_j jest j -tym elementem zbioru, natomiast l_j etykietką klasy do której zbiór należy, $j \in \{1, \dots, n\}$.

W metodzie k-NN zostaje wybrany podzbiór

$$Y = \{\{y_1, l_1\}, \dots, \{y_k, l_k\}\}, k \in \{1, \dots, n\}$$

taki, że $Y \in X$ oraz $\sum_1^k d(q, y_k)$ jest minimalna. Y zawiera więc k punktów z X , które leżą najbliżej rozważanego punktu q . Następnie do punktu q zostaje przyporządkowana klasa taka, że:

$$l = f(\{l_1, \dots, l_k\}).$$



Rysunek 3.2: Metoda k - Najbliższych Sąsiadów.

Na powyższym rysunku widzimy przykładowe zastosowanie algorytmu k-NN. W części a) przedstawiony został zbiór treningowy z podziałem na dwie klasy (rąby, koła) oraz punkt, który będziemy chcieli przyporządkować do jednej z nich (trójkąt). W części b) przedstawiono dwa koła jedno prezentuje najbliższe sąsiedztwo dla $k = 3$, drugie dla $k = 9$. W obu przypadkach nowy punkt (trójkąt) zostanie przyporządkowany do klasy l_1 . Warto również zauważyć, że znajduje się on na granicy dwóch klastrów.

Jak wyżej opisana metoda przyporządkowuje wybranemu rekordowi najbardziej mu podobne w przypadku, gdy dane są więcej niż dwuwymiarowe?

Wykorzystywane są tutaj wcześniej opisane miary odległości z których najczęściej stosowaną jest odległość euklidesowa.

Najtrudniejszym zadaniem przy przeprowadzaniu algorytmu k-NN jest wybór k . Jeżeli k będzie zbyt małe - klasyfikator stanie się bardzo wrażliwy, jeżeli jednak k będzie zbyt duże sąsiedztwo może zawierać zbyt dużo punktów z innych klas. Rozważając przykład z Rysunku 3.2 łatwo zauważyć, że nawet mała zmiana w obserwacjach zbioru treningowego może doprowadzić do zmiany wyniku.

3.2.2 k-średnich

Algorytm k-średnich jest prostym i zarazem efektywnym algorytmem grupowania. Głównym celem algorytmu jest podział pewnego zbioru X :

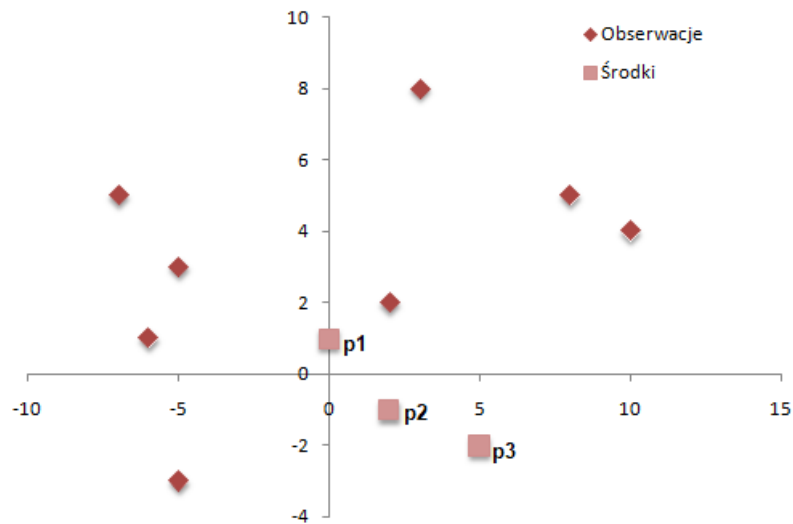
$$X = \{x_i = (x_{i1}, \dots, x_{id}) : i \in \{1, \dots, N\}\},$$

gdzie x_i jest d -wymiarowym wektorem cech opisującym obiekt na podzbiory.

W wyniku grupowania n - elementowego zbioru X na k podgrup jest macierz podziału

A o wymiarach $k \times n$. Każdy z elementów tej macierzy a_{ik} oznacza stopień w jakim wektor x_k przynależy do grupy.

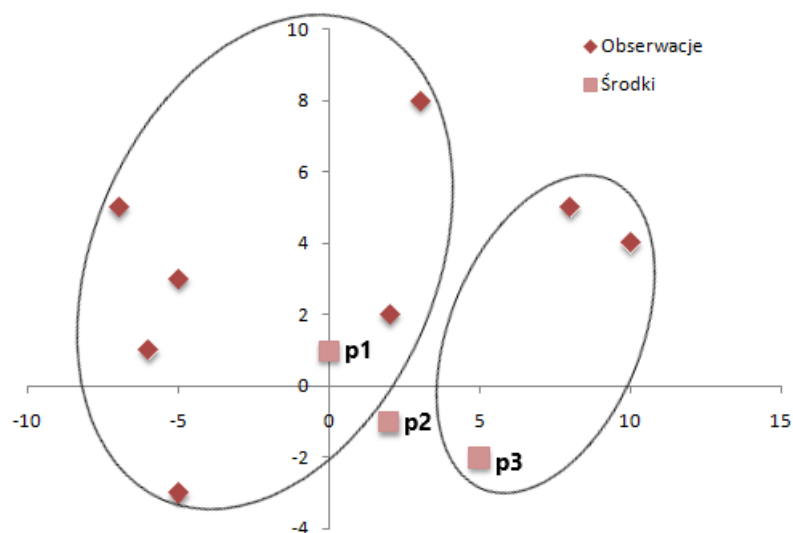
Na wstępie algorytmu ustalamy wartość parametru k jako liczbę grup, które zostaną wyodrębnione. Wybieramy k reprezentantów, które stanowią prototypy grup.



Rysunek 3.3: Metoda k-średnich. Wybór początkowych środków.

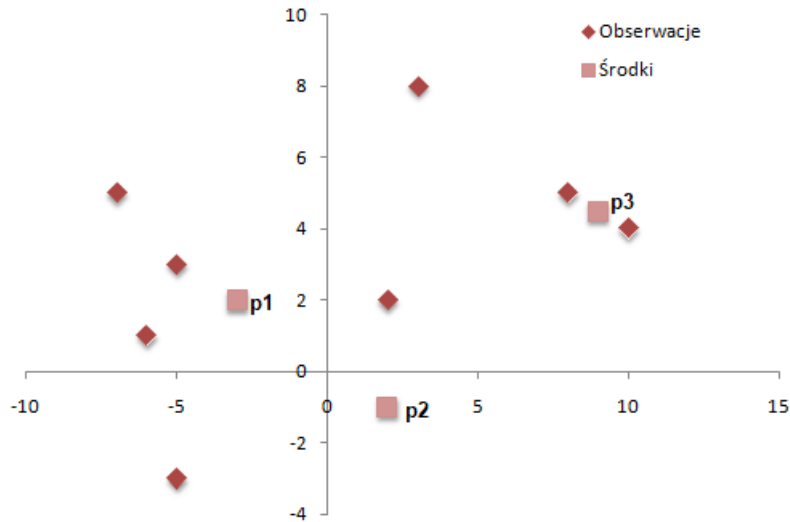
W powyższym przykładzie (Rysunek 3.3) wybranymi środkami są punkty p1, p2, p3.

Kolejnym krokiem jest przypisanie każdego z elementów do najbliższej mu grupy.



Rysunek 3.4: Metoda k-średnich. Przypisanie elementów do grup.

Dla każdej z tak ustalonych grup obliczamy średnią arytmetyczną współrzędnych, które staną się kolejnymi środkami.



Rysunek 3.5: Metoda k-średnich. Wybór nowych środków.

Kroki te są wykonywane do momentu występowania migracji między obiektami. W algorytmie k-średnich liczba grup pozostaje więc niezmienną, zmienna jest tylko przynależność do grup.

W metodzie tej poszukiwanie optymalnego podziału odpowiada wyznaczaniu takich grup, które minimalizują następującą funkcję:

$$J(u, A) = \sum_{i=1}^k \sum_{k=1}^N b_{ki} d^2(u_i, x_k),$$

gdzie

- $d(u, x)$ oznacza odległość elementu x od grupy wyznaczonej przez środek u ,
- N to liczebność zbioru X ,
- A oznacza macierz podziału.

3.2.3 drzewa decyzyjne-?

3.2.4 regresja wielowymiarowa - logistyczna - ?

3.2.5 sztuczna sieć neuronowa

3.2.6 Support Vector Machines

3.3 Szacowanie Błędów Obliczeń

3.3.1 Ocena Dokładności Metody

Kolejna kwestia często poruszana w regułach rekomendujących to dokładność przewidywań. Jak oceniamy, czy uzyskany przez nas wynik jest wystarczająco dokładny?

Założmy, że dla użytkownika u i elementu i ze zbioru testowego P dostarczamy predykcję $\widehat{r_{(u,i)}}$. Aby ocenić jakość wyniku należy porównać ją ze znaną wartością $r_{(u,i)}$.

Najczęściej używanymi miarami dokładności modelu są:

- Średni Błąd (Mean Error)

$$ME = \frac{1}{|P|} \sum_{(u,i) \in P} (\widehat{r_{(u,i)}} - r_{(u,i)})$$

- Średni Błąd Bezwzględny (Mean Absolute Error)

$$MAD = \frac{1}{|P|} \sum_{(u,i) \in P} |\widehat{r_{(u,i)}} - r_{(u,i)}|$$

- Średni Błąd Kwadratowy (Mean Squared Error)

$$MSE = \frac{1}{|P|} \sum_{(u,i) \in P} (\widehat{r_{(u,i)}} - r_{(u,i)})^2$$

Funkcja kwadratowa jest funkcją monotoniczną co pozwala na dość częste zastępowanie średniego błędu kwadratowego przez średnią kwadratową błędów (**Root Mean Squared Error (RMSE)**).

$$RMSE = \sqrt{MSE}$$

Normalized RMSE (NRMSE) oraz **Normalized MAE (NMAE)** są znormalizowanymi, przez użycie zakresu wartości $r_{max} - r_{min}$, wersjami błędów RMSE i MAE. Kolejnym rodzajem powszechnie używanego błędu jest **Average RMSE**, który pozwala na użycie sum ważonych. Niech $w_i > 0$ będzie wagę dla elementu i i $\sum w_i = 1$.

$$ARMSE = \sqrt{\sum_{(u,i) \in P} w_i (\widehat{r_{(u,i)}} - r_{(u,i)})^2}$$

3.3.2 Ocena Precyzji Użyteczności

W regułach rekomendujących częstymi są przypadki, gdzie systemy nie będą przewidywać konkretnych preferencji użytkownika, jak oceny ale samo prawdopodobieństwo podjęcia przez użytkownika akcji.

Oceniając taki model wybieramy przykładowego użytkownika i ukrywamy kilka wybranych przez niego elementów aby spróbować przewidzieć zestaw elementów jakie użytkownik będzie chciał wybrać. W poniższej tabeli zostały zaprezentowane rezultaty jakie są możliwe do otrzymania przy przeprowadzaniu takiego testu:

	Zarekomendowane	Niezarekomendowane
Wybrane przez użytkownika	prawda-pozytywnie (pp)	fałsz-negatywnie (fn)
Niewybrane przez użytkownika	fałsz-pozytywnie (fp)	prawda-negatywnie (pn)

Zakładamy, że elementy nieużyte przez użytkownika nie zostałyby użyte również w przypadku gdy zostałyby zarekomendowane. Założenie to może okazać się jednak błędne, ponieważ w wyniku rekomendacji możemy otrzymać interesujące propozycje, których użytkownik nie brał pod uwagę. Jest to powód dlaczego wynik fp jest bardzo często przeszacowany.

W celu porównania algorytmów możemy posłużyć się następującymi statystykami:

$$\begin{aligned}\text{Precyzja (ang. Precision)} &= \frac{|pp|}{|pp|+|fp|}, \\ \text{Wskaźnik } pp \text{ (ang. Recall / True Positive Rate)} &= \frac{|pp|}{|pp|+|fn|}, \\ \text{Wskaźnik } fp \text{ (ang. False Positive Rate)} &= \frac{|fp|}{|fp|+|pn|}.\end{aligned}$$

Często jednak jest tu obserwowana zależność, która pokazuje, że przy wydłużaniu się listy rekomendacji rośnie wartość *wskaźnika pp* i jednocześnie maleje *precyzja*. Dla stałej długości listy rekomendacji porównanie precyzji algorytmów jest jak najbardziej miarodajne. Niemniej jednak porównanie precyzji, gdzie długości list rekomendacji są różne jest często bardzo trudne. Zostaje zatem wyznaczona krzywa przedstawiająca kompromis między *wskaźnikiem pp* i *precyzją*, lub między *wskaźnikiem pp* i *wskaźnikiem fp*. Formalnie pierwsza krzywa jest nazywana **krzywą precyzji (ang. precision - recall curve)** natomiast druga **krzywą ROC (ang. Receiver Operating Characteristic)**.

3.3.3 Ocena Rankingów

W poprzedniej sekcji została omówiona metoda wyboru odpowiedniego modelu rekomendującego. Każdy z takich modeli kończy się przedstawieniem pewnej listy rekomendowanych elementów. Często jednak również kolejność elementów jest bardzo ważna i

ma duży wpływ na wybory użytkowników.

W tej części zostaną zaprezentowane metody służące do oceny otrzymanych na podstawie modelu rankingów i pomagające zapewnić odpowiedni porządek rekomendowanych elementów. Jeżeli elementy posiadają oceny (np. użytkowników) intuicyjnym jest stworzyć ranking przez uporządkowanie tych ocen w malejący sposób. W przypadku gdy jednak nie mamy takich danych lub nie jest odpowiednie tworzenie takiego rankingu użyjemy **znormalizowanej miary opartej na odległości (ang. Normalized Distance-based Performance Measure (NDPM))**:

Niech r_{ui} będzie rankingiem odniesienia i \hat{r}_{ui} rankingiem stworzonym przez wybrany system rekomendujący n_u elementów i użytkownikowi u .

Ponadto niech:

$$\begin{aligned} C^+ &= \sum_{i < j} \text{sgn}(r_{ui} - r_{uj}) \text{sgn}(\hat{r}_{ui} - \hat{r}_{uj}) \\ C^- &= \sum_{i < j} \text{sgn}^2(r_{ui} - r_{uj}) \text{sgn}(\hat{r}_{uj} - \hat{r}_{ui}) \\ C^u &= \sum_{i < j} \text{sgn}^2(r_{ui} - r_{uj}) \\ C^s &= \sum_{i < j} \text{sgn}(\hat{r}_{ui} - \hat{r}_{uj}) \\ C^0 &= C^u - (C^+ - C^-), \text{ gdzie} \end{aligned}$$

C^u jest liczbą par dla których ranking referencyjny okazuje się lepszą możliwością,

C^+ i C^- to liczba par z poprawną i niepoprawną kolejnością,

C^0 jest liczbą par dla których ranking referencyjny nie jest wiążący, kiedy ranking systemu rekomendującego jest.

Ostatecznie NDPM definiujemy w następujący sposób:

$$NDPM = \frac{C^- + 0.5C^0}{C^u}$$

Powiązania w rankingu referencyjnym pojawiają się naturalnie, kiedy znamy preferencje użytkownika (np. przydziela on oceny). Czasami jednak rankingi są bardziej specyficzne (np. kiedy dajemy użytkownikowi wybór między dwoma elementami). Wtedy też system rekomendujący nie powinien tworzyć rankingu klasyfikując jedne elementy wyżej niż inne. W takich przypadkach przychodzą nam z pomocą

miara Kendall's τ :

$$\tau = \frac{C^+ - C^-}{\sqrt{C^u} \sqrt{C^s}}$$

oraz **miara Spearman's ρ :**

$$\rho = \frac{1}{n_u} \frac{\sum_i (r_{iu} - \bar{r})(\hat{r}_{iu} - \bar{\hat{r}})}{\sigma(r) \sigma(\hat{r})},$$

gdzie \bar{r} i $\bar{\hat{r}}$ oznaczają średnie, natomiast $\sigma(r)$ i $\sigma(\hat{r})$ odchylenia standardowe.

Rozdział 4

Modele tworzenia rekomendacji

Systemy rekomendujące mogą zostać podzielone na systemy oparte na kontekście i systemy oparte na użytkownikach. W pierwszym przypadku eksploracja danych jest dokonywana pod względem zawartych w treści rozważanego elementu cech. Główne założenie mówi, że jeżeli użytkownik wybrał przedmiot A w przeszłości oraz przedmiot B jest podobna do A, to użytkownik będzie skłonny wybrać również przedmiot B. W systemach opartych na użytkownikach badaniu podlegają natomiast zależności, które występują między produktami, a użytkownikami. Idea rozważana pod tym hasłem mówi, że jeżeli użytkownicy A i B wykazują podobieństwo oraz użytkownik A zaopiniuje pewien przedmiot, którego użytkownik B jeszcze nie ocenił, to prawdopodobnie opinia użytkownika B będzie podobna do opinii użytkownika A.

4.1 Systemy rekomendujące oparte na treści (Content-based recommender systems):

4.1.1 Problem

Rozważmy sytuację w której szukamy przyjemnej lektury na zimowy wieczór. Zaczynamy od przeglądania tytułów wśród interesujących nas gatunków. Następnie spojrzymy zapewne na oceny jakie inni czytelnicy wydali na temat danej pozycji. Analizując wartość uzyskanych ocen ostatecznie podejmujemy na ich podstawie najbardziej odpowiednią dla nas decyzję.

4.1.2 Algorytm

Metody rozwiązywania podobnych problemów często spotykane są w matematyce. Jednym z przykładów są systemy oparte na treści, które wyróżnia ukierunkowanie na sper-

sonalizowany poziom użytkownika oraz treści produktu. Głównym celem tej metody jest scharakteryzowanie cech, które użytkownik ceni, a następnie zasugerowanie mu produktów, które te cechy posiadają. Wspomniana metoda opiera się na obliczaniu podobieństw oraz wykorzystuje zadania uczenia maszynowego, takie jak klasyfikacja.

W typie rekomendacji opartym na treści stworzenie rekomendacji i wygenerowanie listy elementów, które mogą być odpowiednie użytkownikowi możemy przedstawić w trzech krokach:

1. Wygenerowanie profilu produktu
2. Wygenerowanie profilu użytkownika
3. Rozpoznanie cech produktu odpowiednich dla użytkownika

4.1.3 Wygenerowanie profilu produktu

W większość systemów rekomendacji opartych na treści można zauważyć użycie prostych modeli wyszukiwujących. Jednym z najbardziej popularnych jest Model Przestrzeni Wektorowej (*ang. Vector Space Model*) z algorytmem TF-IDF (*ang. TF – term frequency, IDF – inverse document frequency*). Jest to przestrzenna forma reprezentacji dokumentów, gdzie dokument i jest reprezentowany przez wektor w przestrzeni n -wymiarowej x_i , a każdy z n wymiarów stanowi rozważaną cechę produktu. Dla danych w formie dokumentów tekstowych cechami, które pomagają scharakteryzować temat dokumentu, np. artykułu na stronie internetowej są słowa. Dla każdego ze słów zostaje obliczona wartość funkcji TFIDF (została ona dokładnie omówiona poniżej). W końcowym etapie słowa, które otrzymały najwyższe wyniki zostają uznane za charakteryzujące rozważany dokument.

Formalnie rzecz ujmując każdy z dokumentów jest przedstawiony za pomocą wektora wag, gdzie waga w odpowiedni sposób wyraża zależność między dokumentem, a badanym terminem.

Niech $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}, n \in \mathbf{N}$ będzie zestawem dokumentów / analizowanych przedmiotów. Natomiast $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}, n \in \mathbf{N}$ zestawem cech rozważanych w przedmiotach. Każdy z dokumentów $p_j, j \in \{1, \dots, n\}$ jest reprezentowany jako wektor w przestrzeni wektorowej n -wymiarowej. Zatem $p_j = [w_{1j}, w_{2j}, \dots, w_{nj}]$, gdzie w_{kj} jest wagą dla cechy c_k w dokumencie p_j .

Do generowania profilu produktu używany jest wspomniany wcześniej algorytm TFIDF pozwalający policzyć względną wagę powiązania cechy z przedmiotem. Zakładamy tu, że:

- rzadkie cechy są równie istotne jak częste (założenie IDF),
- kilkukrotne wystąpienie terminu w rozważanym dokumencie jest równie istotne jak pojedyncze (założenie TF),
- długość dokumentu (filmu, książki) nie ma znaczenia (założenie normalizacji).

Możemy więc powiedzieć, że jeżeli termin występuje często w konkretnym przedmiocie rozważań (TF) i równocześnie rzadko w pozostałych elementach zbioru (IDF) ma większe prawdopodobieństwo stać się jedną z istotnych cech rozważanych w temacie. Ponadto normalizacja wektorów wag pozwala zrównoważyć wartość wyników i umożliwia ich porównywanie w dalszej analizie.

Powyższe założenia odzwierciedla funkcja TFIDF:

$$TFIDF(t_k, d_j) = TF(c_k, p_j) * IDF,$$

gdzie:

- $TF(c_k, p_j)$ (macierz *term frequency*) przedstawia odniesienie każdego z podanych terminów do każdego z badanych elementów:

$$TF(c_k, p_j) = \frac{f_{k,j}}{\max_z f_{z,j}},$$

$\max_z f_{z,j}$ - maksymalna w odniesieniu do wszystkich cech c_z , które pojawiły się w dokumencie p_j częstotliwość wystąpień ($f_{z,j}$)

- IDF (*inverse document frequency*) wyraża się formułą:

$$IDF = \log \frac{N}{n_k}$$

N - całkowita liczba dokumentów w zbiorze,

n_k - liczba dokumentów w których cecha c_k wystąpiła przynajmniej raz.

Ponadto w związku z założeniem o normalizacji wagi, które zostały uzyskane w wyniku $TFIDF(t_k, d_j)$ poddane zostaną metodzie transformacji kosinusowej:

$$w_{k,j} = \frac{TFIDF(t_k, d_j)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{|T|} TFIDF(t_i, d_j)^2}}.$$

Tak wygenerowany został zbiór słów, które są reprezentacją danego dokumentu oraz jego tematu. Ostatnim krokiem przed zarekomendowaniem pozycji czytelnikom jest wyestymowanie podobieństw występujących między poszczególnymi dokumentami. Naturalnymi miarami odległości, które można tu wykorzystać są:

- współczynnik Jaccarda mierzący odległość między zbiorami słów,
- podobieństwa kosinusów mierzące odległość między wektorami:

$$\text{sim}(p_i, p_j) = \frac{\sum_{k=1}^n w_{k,i} \cdot w_{k,j}}{\sqrt{\sum_{k=1}^n w_{k,i}^2} \cdot \sqrt{\sum_{k=1}^n w_{k,j}^2}}.$$

Przy estymowaniu odległości kosinusów między dwoma dokumentami elementami wektora są słowa, które zostały wybrane na podstawie wcześniej przeprowadzonego algorytmu. W wektorze tym wartość 1 oznacza, że słowo pojawiło się w zbiorze opisującym dokument, natomiast 0 oznacza sytuację przeciwną.

4.1.4 Wygenerowanie profilu użytkownika

Przy generowaniu wektora opisującego rozważane dokumenty należy uwzględnić komponenty opisujące preferencje użytkowników. Dla każdego użytkownika u przedstawiamy jego preferencje w postaci wektora x_u , gdzie użytkownik pozycjonuje element i poprzez wektor cech x_i .

4.1.5 Rozpoznanie cech produktu odpowiednich dla użytkownika

Proces rekomendacji bazuje na dopasowaniu cech profilu użytkownika i wartości opisujących treść obiektu. Rezultatem jest stwierdzenie czy rozważany kandydat jest zainteresowany analizowanym przedmiotem. Zainteresowanie użytkownika danym przedmiotem można wyestymować używając podobieństwa kosinusów. Rozważmy dokument, gdzie użytkownik wyraża zainteresowanie większością cech w wektorze x_i opisującym dokument i . Otrzymamy cosinus kąta między użytkownikiem i dokumentem będący dodatnim ułamkiem. Oznacza to, że kąt będzie bliski 0° a tym samym odległość między wektorami będzie mała. W przypadku przeciwnym otrzymamy cosinus bliski zeru lub mniejszy od zera, oznacza to kąt należący do przedziału $(90^\circ; 180^\circ)$ oraz małe podobieństwo między rozważanymi wektorami.

4.1.6 Przykład

Aby dokładnie przyjrzeć się metodom opartym na treści rozważmy wcześniej przytoczony problem oparty na książkach. Poniższa tabela przedstawia tytuły kilku randomowo wybranych książek wraz z gatunkami.

Książka	Gatunek
Władza Absolutna	Kryminał
Patrioci	Proza współczesna
Proxima	Powieść fantastycznonaukowa
Strażacy	Literatura faktu
Gra o Śmierć	Romans
Cyrk	Komedia

Przez wykorzystanie algorytmu TFIDF stworzymy profil każdej z książek. Pierwszym etapem algorytmu jest stworzenie macierzy „term frequency”. W tym przypadku jej wypełnienie przedstawia odniesienie każdego z podanych terminów do każdej z książek. Założmy, że 1 oznacza iż książka reprezentuje cechy danego gatunku, natomiast 0 oznacza brak takich cech.

Książka / Gatunek	Kry- minał	Proza współ- czesna	Powieść fantastycz- nonaukowa	Litera- tura faktu	Romans	Komedia	Książka akcji	Thriller
Władza Absolutna	1	0	0	0	0	0	1	0
Patrioci	0	1	0	0	0	0	1	0
Proxima	0	1	1	0	0	0	0	0
Strażacy	0	0	0	1	0	0	1	0
Gra o Śmierć	0	0	0	0	1	0	0	1
Cyrk	1	0	0	0	0	1	0	0

Zbadajmy teraz ”inverse dokument frequency”.

$$IDF = \log \frac{N}{n_k}$$

W rozważanym przypadku N to liczba książek, natomiast n_k to całkowita liczba wystąpień ”term frequency”, uzyskana dla wszystkich dokumentów.

Kry- minał	Proza współ- czesna	Powieść fantastycz- nonaukowa	Litera- tura faktu	Romans	Komedia	Książka akcji	Thriller
1.098612	1.098612	1.791759	1.791759	1.791759	1.791759	0.693147	1.791759

Mając stworzona macierz "term frequency" oraz wektor "inverse dokument frequency" przejdźmy do ostatniego kroku i stwórzmy macierz TFIDF dla rozważanego przypadku:

Książka / Gatunek	Kry- minał	Proza współ- czesna	Powieść fantastycz- nonaukowa	Litera- tura faktu	Romans	Komedia	Książka akcji	Thriller
Władza Absolutna	1.098612	0	0	0	0	0	0.693147	0
Patrioci	0	1.098612	0	0	0	0	0.693147	0
Proxima	0	1.098612	1.791759	0	0	0	0	0
Strażacy	0	0	0	1.791759	0	0	0.693147	0
Gra o Śmierć	0	0	0	0	1.791759	0	0	1.791759
Cyrk	1.098612	0	0	0	0	1.791759	0	0

Zakończyliśmy generowanie profilu przedmiotu, przejdźmy więc do wygenerowania profilu użytkownika.

Rozważmy zbiór danych, który przedstawia informacje o czytelnikach i książkach. W poniższym zestawieniu 1 oznacza, że dana osoba przeczytała książkę, natomiast puste miejsce, że nie podjęła się lektury.

Książka/Czytelnik	Anna	Maciej	Bartek	Ewa	Sandra	Kacper
Władza Absolutna	1	1		1	1	
Patrioci		1	1	1	1	
Proxima	1	1	1	1	1	1
Strażacy	1	1	1	1	1	1
Gra o Śmierć	1	1	1	1	1	
Cyrk	1	1	1	1	1	1

Profil użytkownika powinien zawierać jego preferencje dotyczące cech danego przedmiotu, w tym przypadku będą to preferencje dotyczące gatunku książki. Iloczyn skalarny zbudowany na TFIDF i macierzy preferencji użytkowników przedstawi powinowactwo każdego z użytkowników do każdego z rozważanych gatunków książki.

Książka / Gatunek	Kry- minał	Proza współ- czesna	Powieść fantastycz- nonaukowa	Litera- tura faktu	Romans	Komedia	Książka akcji	Thriller
Anna	2.197224	1.098612	1.791759	1.791759	1.791759	1.791759	1.3862944	1.791759
Maciej	2.197224	2.197224	1.791759	1.791759	1.791759	1.791759	2.0794416	1.791759
Bartek	1.098612	2.197224	1.791759	1.791759	1.791759	1.791759	1.3862944	1.791759
Ewa	2.197224	2.197224	1.791759	1.791759	1.791759	1.791759	2.0794416	1.791759
Sandra	2.197224	2.197224	1.791759	1.791759	1.791759	1.791759	2.0794416	1.791759
Kacper	1.098612	1.098612	1.791759	1.791759	0	1.791759	0.6931472	0

Kolejnym krokiem po wygenerowaniu profilu przedmiotu i profilu użytkownika jest przedstawienie w jakim stopniu każdy z użytkowników będzie zainteresowany każdą z książek. Do tego wykorzystane zostanie, wcześniej już wspomniane, podobieństwo kosinusów.

(macierz zainteresowań)

4.1.7 Wady i zalety systemu rekomendującego opartego na treści

Badacze Francesco Ricci, Lior Rokach, Bracha Shapira i Paul B. Kantor w swojej publikacji :”Recommender Systems Handbook” wyróżniają następujące zalety filtrowania opartego na treści:

- **Niezależność użytkowników:** Jest metodą ukierunkowaną na indywidualne rozważanie każdego użytkownika, a budowanie jego profilu odbywa się na podstawie ocen, które zostały przez niego wydane. W metodzie filtrowania kolaboratywnego rekomendacja była dokonana po uwzględnieniu ocen innych użytkowników oraz znalezieniu użytkowników najbardziej podobnych pod względem preferencji.
- **Transparentność:** W celu przedstawienia zaproponowanej rekomendacji opartej na treści możemy przedstawić listę kontekstów, które zostały poddane analizie. Stanowią one listę wskaźników na podstawie których możemy ocenić wartość i prawdziwość rekomendacji. W przypadku filtrowania kolaboratywnego jedyną informacją jaka doprowadziła nas do reprezentowanych wniosków jest podobieństwo między nieznanymi użytkownikami, którzy charakteryzują się podobnym gustem.
- **Nowy przedmiot:** Systemy rekomendacji oparte na treści umożliwiają stworzenie rekomendacji przedmiotu, który nie został wcześniej oceniony przez użytkowników. Istnieje bowiem możliwość szybkiego ustalenia cech w rozważanych przez rekomendację aspektach.

Niemniej jednak, rozważając ten rodzaj systemów rekomendujących możemy dostrzec następujące niedociągnięcia:

- **Ograniczona analiza treści:** Techniki rekomendacji oparte na treści posiadają ograniczenia w postaci liczby i typów cech, które są powiązane z rekomendowanymi obiektami. Przyporządkowanie pewnych kontekstów do przedmiotów może okazać się niewystarczające aby zbadać zainteresowania użytkowników.

- **Nadmierne wyspecjalizowanie:** Stosując rekomendacje oparte na treści nie posiadamy możliwości do odnalezienia wyjątkowo nieoczekiwanych wniosków. Systemy te sugerują bowiem przedmioty, których noty są wysokie w stosunku do profilu użytkownika, skąd wynikiem rekomendacji zawsze będą przedmioty podobne do tych przez użytkownika już ocenionych. Na tej podstawie też często zarzuca się rozważanym systemom niski poziom nowości przy dostarczaniu rekomendacji.
- **Nowy użytkownik:** W przypadku użytkowników, gdzie możemy analizować dużą liczbę wystawionych ocen i dobrze zrozumieć ich preferencje stworzenie odpowiedniej rekomendacji nie stanowi problemu. Jednakże, gdy ocen jest tylko kilka lub użytkownik jest nowy system nie będzie w stanie stworzyć niezawodnej rekomendacji.

4.2 Filtrowanie kolaboratywne (Collaborative filtering)

Idea rozważana pod tym hasłem mówi, że jeżeli użytkownicy A i B wykazują podobieństwo oraz użytkownik A zaopiniuje pewien przedmiot, którego użytkownik B jeszcze nie ocenił, to prawdopodobnie opinia użytkownika B będzie podobna do opinii użytkownika A. Wyróżniamy dwa podstawowe typy filtrowania kolaboratywnego:

- filtrowanie kolaboratywne oparte na użytkowniku (ang. user-based)
- filtrowanie kolaboratywne oparte na elementach (ang. item-based)

Cechą wspólną dla obu powyższych metod jest fakt, że oceny jednych użytkowników są podstawą do tworzenia rekomendacji dla innych.

Podejście kolaboratywne omija niektóre ograniczenia występujące w metodach kontekstowych. Rekomendacje są dokonywane tylko na podstawie ocen. Dzięki temu systemowi możemy również dokonywać rekomendacji na przestrzeni kilku kontekstów, co pozwala uniknąć nam konkretne wyspecjalizowanej przestrzeni obecnej w metodach kontekstowych.

4.2.1 Filtrowanie kolaboratywne oparte na użytkowniku

Algorytm

Stworzenie rekomendacji opartej na użytkowniku wykonamy w kolejnych krokach:

1. Znalezienie podobieństwa między czytelnikami opierającego się na informacji o przeczytanych książkach. Najczęstszymi stosowanymi podejściami do obliczania szukanego podobieństwa są Metryka Euklidesowa i Współczynnik Korelacji Pearsona.
2. Wyestymowanie ocen, które czytelnicy (w szczególności osoba dla której tworzymy rekomendację) mogliby wystawić dla nieprzeczytanych książek z rozważanego zbioru.

W celu dokładniejszego zrozumienia tego typu filtrowania został przedstawiony poniższy przykład.

3.1.3.2 Przykład

Zakładamy, że tabela przedstawia oceny czytelników dla kilku wybranych książek oraz, że każda z zapytanych osób mogła wystawić ocenę z zakresu 1 -10. Istotne jest, że nie wszyscy zapytani wystawili ocenę dla każdej z książek:

Książka/Czytelnik	Anna	Maciej	Bartek	Ewa	Sandra	Kacper
Władza Absolutna	6	3		6	4	
Patrioci		6	6	5	6	
Proxima	7	7	8	7	8	9
Strażacy	8	10	10	7	6	8
Gra o Śmierć	9	6	6	6	6	
Cyrk	5	7	7	5	4	2

W tym przykładzie zastosujemy pierwsze ze wspomnianych rozwiązań. Używając wzoru:

$$d_e(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2}$$

obliczymy szukane odległości:

(tabela)

Bazując na podobieństwach między poszczególnymi użytkownikami, przez obliczenie średniej ważonej, zostaje przewidziana ocena jaką Bartek zaproponuje dla książki „Władza Absolutna”. W poniższym równaniu wartość podobieństwa między Bartkiem i innymi użytkownikami została pomnożona przez ocenę jaką dany użytkownik wystawił dla książki „Władza Absolutna”. Następnie, w celu normalizacji, wynik został podzielony przez sumę wartości wszystkich podobieństw.

(obliczenie)

Ostatecznie, gdy znane są oceny dla wszystkich książek dokonana zostaje rekomendacja dla naszego użytkownika.

4.2.2 Filtrowanie kolaboratywne oparte na elementach

W przypadku filtrowania kolaboratywnego opartego na elementach wartości podobieństwa między użytkownikami zostaje zastąpiona przez wartości podobieństwa między elementami.

W tym przypadku założenie mówi, że jeżeli użytkownik wybrał przedmiot A w przeszłości oraz przedmiot B jest podobna do A, to użytkownik będzie skłonny wybrać również przedmiot B.

Algorytm

Podobnie jak w przypadku opartym na użytkowniku, w tym również należy wykonać dwa kroki.

1. Pierwszym etapem jest znalezienie podobieństw występujących między elementami. Najczęstszą miarą podobieństwa w tym przypadku jest podobieństwo kosinusów. Miara ta wyraża podobieństwo między n-wymiarowymi wektorami poprzez kąt między nimi w przestrzeni wektorowej. Wraz ze wzrostem wartości kąta rośnie podobieństwo.
2. Następnie, na podstawie wydanych przez użytkownika ocen, należy wyestymować noty dla elementów przez niego nieocenionych.

Przykład

Chcąc zastosować ten rodzaj filtrowania kolaboratywnego do rozważanego problemu i przewidzieć ocenę użytkownika dla pewnej wybranej książki należy na wstępie zdefiniować wszystkie książki podobne do wybranej. Można to zrobić używając wspomnianego wcześniej, podobieństwa kosinusów. W tym przypadku elementami wektorów są oceny wystawione przez użytkowników dla poszczególnych książek, np.: (7,7,8,7,8,9) dla książki "Proxima". Poniższa tabela przedstawia natomiast podobieństwa występujące między wszystkimi książkami obliczone za pomocą wzoru:

$$sim(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

	Władza Absolutna	Patrioci	Proxima	Strażacy	Gra o Śmierć	Cyrk
Władza Absolutna	1	0.6339	0.7372	0.7195	0.8935	0.7599
Patrioci	0.6339	1	0.7951	0.8150	0.7977	0.8898
Proxima	0.7372	0.7951	1	0.9780	0.8586	0.9200
Strażacy	0.7195	0.8150	0.9780	1	0.8860	0.9681
Gra o Śmierć	0.8935	0.7977	0.8586	0.8860	1	0.9413
Cyrk	0.7599	0.8898	0.9200	0.9681	0.9413	1

Znając podobieństwa między pozycjami oraz noty wystawione przez Kacpra możemy więc wyestymować jak Kacper oceni inne pozycje z naszego spisu.

Rozważmy książkę "Patrioci". Ustalone podobieństwa między pozycją "Patrioci" a każdą z innych książek ocenianych przez Kacpra wymnożymy przez oceny, które nadał pozycjom. Następnie sumę iloczynów dzielimy przez sumę wszystkich podobieństw.

$$\frac{(0.7951 \cdot 9 + 0.8150 \cdot 8 + 0.8898 \cdot 2)}{(0.7951 + 0.8150 + 0.8898)} = 6.16$$

Na podstawie przeprowadzonych obliczeń zakładamy, że ocena jaką wystawiłby po przeczytaniu Kacper książce "Patrioci" to 6.16. Powtarzając powyższe obliczenia dla każdej z pozycji nieocenionych przez Kacpra otrzymamy wszystkie brakujące opinie. Następnie bazując na zdobytych danych z łatwością odnajdziemy pozycję najbardziej odpowiednią do zarekomendowania naszemu użytkownikowi.

4.2.3 Wady i zalety filtrowania kolaboratywnego

Mając przed sobą dwa typy filtrowania kolaboratywnego możemy zadać pytanie o efektywność, czy precyzyjność tego rozwiązania.

Poniżej kilka wniosków i informacji, opartych na rozważaniach Christian Desrosiers i George Karypis [44] [file:///C:/Users/akuda/Downloads/NbrRSSurvey2011.pdf] [strona 7] [A comprehensive survey of neighborhood-based recommendation methods] [Christian Desrosiers, George Karypis] które pozwalają dostrzec zalety i wady tego rozwiązania.

Zalety:

- Opisywane podejście tworzenia rekomendacji jest intuicyjne i łatwe implementacji zarówno w przypadku metody opartej na użytkownikach jak i metody opartej na elementach.
- Metody filtrowania kolaboratywnego pozwalają ponadto na zwięzłe i intuicyjne wyjaśnienie obliczeń prognostycznych, które wykonujemy.

- W rozważanych metodach filtrowania nie są wykorzystywane informacje o wartościach produktów, czy informacje o profilu użytkownika. Kiedy więc wzrośnie liczba ocen dla konkretnego produktu zmiana ulegnie jedynie wartość podobieństwa między elementami.

Z drugiej strony:

- Filtrowanie kolaboratywne jest kosztowne obliczeniowo, ponieważ wykorzystywane są tu informacje o użytkownikach, produktach oraz ocenach produktów przez użytkowników.
- Podejście to zawodzi, kiedy istnieje potrzeba stworzenia rekomendacji dla nowego użytkownika o którego ocenach nie ma informacji.
- Zarówno metoda oparta na użytkownikach, jak i metoda oparta na elementach jest mało wiarygodna kiedy zasób danych na którym bazujemy jest mały.

4.2.4 Porównanie filtrowania kolaboratywnego opartego na użytkownikach i filtrowania kolaboratywnego opartego na elementach:

Warty rozważenie jest również fakt wyboru między rekomendacją opartą na użytkownikach, a rekomendacją opartą na elementach. Według Christian Desrosiers, George Karypis [44] [file:///C:/Users/akuda/Downloads/NbrRSSurvey2011.pdf] [strona 7] [A comprehensive survey of neighborhood-based recommendation methods] [Christian Desrosiers, George Karypis] jest kilka obszarów, które należy rozważyć przed ostatecznym wyborem toku postępowania:

- **Precyzyjność:** Metodę wybieramy w zależności od stosunku między użytkownikami a przedmiotami w rozważanych danych. Mianowicie, jeżeli rozważany zbiór zawiera dużą liczbę użytkowników i jednocześnie małą liczbę elementów preferowanym rozwiązaniem jest metoda oparta na elementach.
- **Sprawność:** Złożoność rozważanych algorytmów zależy od stosunku między liczbą użytkowników, a liczbą elementów. Przyjmując O , U , E jako liczbę odpowiednio ocen, użytkowników i elementów zdefiniujemy $p = O/U$ i $q = O/E$. Wtedy też złożoność metody opartej na użytkownikach wyrażona zostaje przez p^2/E , a złożoność metody opartej na elementach przez q^2/U .
- **Stabilność:** Rozważając ten aspekt przed wyborem metody należy rozważyć co wzrasta szybciej – liczba użytkowników, czy liczba elementów. Jeżeli liczba

elementów wydaje się bardziej statyczna wtedy też lepszym wyborem jest metoda oparta na elementach i odwrotnie.

- **Uzasadnienie:** Pod tym względem lepszym wyborem będzie system rekomendacji oparty na elementach. W przypadku bowiem potrzeby wyjaśnienia naszej rekomendacji przedstawienie listy rozważanych elementów jest łatwiejsze niż przedstawienie listy użytkowników.
- **Serendipity:** Patrząc pod kontem możliwości wyszukiwania zaskakujących rekomendacji lepszym wyborem byłby system oparty na użytkowniku. Pozwala on bowiem dojść do znacznie ciekawszych wniosków niż system oparty na elementach.

4.3 Systemy rekomendujące kontekstowe (Context – aware recommender systems):

4.3.1 Algorytm

Systemy rekomendujące kontekstowe są systemami rekomendującymi opartymi na treści w których zostaje uwzględniony dodatkowy wymiar zwany kontekstem.

Definicja 25 (*Kontekst*)

Kontekstem w rozumieniu eksploracji danych nazywamy obecny stan użytkownika. Autorzy książki "Recommender Systems Handbook" definiują kontekst jako wydarzenie charakteryzujące etap życia użytkownika i wpływające na jego preferencje, status. Pod pojęciem tym kryje się nie tylko miejsce, czas, pogoda, dzień, ale także fakt, że użytkownik spędza czas samotnie lub w gronie innych osób, narodziny dziecka, zmiana pracy, małżeństwo. Wiedza na temat kontekstowych informacji pozwala zbudować wzorce i algorytmy w odniesieniu do konkretnych, istotnych danych.

Przykładem, który dobrze obrazuje podejście kontekstowe w tworzeniu rekomendacji są biura podróży, które w tworzeniu ofert uwzględniają sezon, miejsca, czas, sytuację finansową klienta oraz czas, kiedy oferta zostaje przedstawiona.

Warto zauważyć również, że uprzednio opisane metody opierały się głównie na rozważaniu problemów dwu-wymiarowych. W tym podejściu, przez dodanie nowego wymiaru, jakim jest kontekst, zaczynamy rozważać problemy trój-wymiarowe:

$$R: \text{Użytkownik} \times \text{element} \times \text{kontekst} \Rightarrow \text{Rekomendacja}$$

W modelu kontekstowym rekomendacje są generowane w dwóch krokach:

1. Metody systemów rekomendujących opartych na treści służące do wygenerowania listy rekomendacji bazującej na preferencjach użytkownika.
2. Odfiltrowanie rekomendacji, które odpowiadają przyjętemu kontekstowi.

Wyróżniamy tutaj dwa warianty. W pierwszym etapie filtrowania zostaje dokonany na końcu, natomiast w drugim filtrowanie jest etapem wstępnym do tworzenia rekomendacji.

Filtrowanie jako etap wstępny (ang. Pre-Filtering)

W tym podejściu informacje kontekstowe używane są do odfiltrowania najbardziej istotnych informacji i skonstruowania dwuwymiarowego zbioru danych. Bardzo dużą zaletą tego podejścia jest możliwość implementacji w kolejnym kroku wcześniej opisanych metod rekomendacji.

Filtrowanie jako etap końcowy (ang. Post-Filtering)

Informacje o kontekście są ignorowane w wejściowych danych, a rekomendacja dokonywana jest na całym zbiorze. To w następnym kroku lista rekomendacji stworzona dla użytkownika jest zawężana przez uwzględnienie kontekstu.

4.3.2 Przykład

Wracając do przykładu rozważanego w przykładzie systemów rekomendacyjnych opartych na treści, gdzie oceny dla filmów generowano na podstawie wcześniej stworzonych profili przedmiotów i użytkowników dołożmy kontekst. Niech kontekstem w tym przypadku będą procenty odzwierciedlające preferencje użytkownika do poszczególnych gatunków książek, czytanych w różnych porach roku.

(tabela)(zostanie dodana po rozwikłaniu zagadki z metody wyżej)

(tabelka)

Na początku należy utworzyć profil użytkownika uwzględniający każdy z kontekstów i każdy z gatunków książek. Iloczyn skalarny macierzy kontekstu i macierzy profilu użytkownika przedstawia preferencje użytkownika w stosunku do każdego z kontekstów.

(tabela po iloczynie)

Następnym krokiem jest przedstawienie rankingu książek uwzględniającego kontekst

dla wybranego użytkownika. Do stworzenia takiego rankingu zostanie użyte, dobrze już znane w zakresie reguł rekomendacyjnych prawdopodobieństwo kosinusów.

Podobieństwo kosinusów(matrix, item profile).

Po uzyskaniu rankingu można przejść do zasugerowania odpowiedniej książki dla wybranego użytkownika. Oczywiście, w tym przypadku, uwzględniając rozważany kontekst.

4.3.3 Wady i zalety systemów rekomendujących kontekstowych

Metody kontekstowe są bardziej zaawansowane niż wcześniej omawiane systemy rekomendujące. Dzięki temu rekomendacje oparte na metodach kontekstowych:

- zawsze pozostają w zgodzie z użytkownikiem i generują informacje uwzględniając jego aktualne potrzeby,
- są najczęściej stosowane przy generowaniu rekomendacji w czasie rzeczywistym.

Podobnie jak w poprzednio rozważanych systemach rekomendujących również i w tym brak jednak serendipity i proponowania nowych, zaskakujących użytkownika rekomendacji.

4.4 Hybrydowe systemy rekomendujące ():

(Czy potrzebny mi jeszcze ten podrozdział?)

4.5 Systemy rekomendujące oparte na modelach():

(Czy potrzebny mi jeszcze ten podrozdział?)

Rozdział 5

Eksperymenty / część praktyczne

Rozdział 6

Podsumowanie