

# Trayectoria de un Proyectoil Esférico Propulsado

Martin Calvo Dominguez CC 1153463271

Benjamín Escobar Jaramillo CC 1001228411

---

## Planteamiento del Problema

A la hora de abordar problemas físicos en nivel básico universitario, se suelen idealizar los conceptos a modelar, simplificando así los cálculos, los cuales, a su vez, pueden ser solucionados algebraicamente de manera *analítica*, ignorando así, elementos naturales de nuestra realidad, como lo pueden ser las aceleraciones variables, la viscosidad del medio, la geometría de los objetos no puntuales, entre otros.

Es allí donde se introduce el problema a estudiar; la trayectoria de un proyectil, cuya geometría esférica, al estar en movimiento, incide en las fuerzas de rozamiento del aire (*drag*), como también su propulsión, la cual, a su vez, depende de un combustible, lo que implica un cambio de masa a través del tiempo y, consecuentemente, de velocidad. De igual manera, el proyectil se propone intercontinental (modelando el espacio de análisis como nuestro planeta) de modo que la fuerza gravitacional también es propuesta variable, influyendo así la altura del proyectil, como el cambio de su masa a través del tiempo.

El proyecto de análisis, toma vital importancia en los datos que se obtendrán en la resolución del problema, esto es; las condiciones iniciales necesarias y mínimas (las mas optimizadas posibles) para realizar el viaje intercontinental del proyectil, y al emplear datos lo mas precisos posibles, los resultados, más que didácticos y aproximados, como suelen proporcionar los ejercicios de física, estarán mas de la mano del comportamiento natural del proyectil en nuestra realidad, proporcionando información precisa para la realización de un proyecto real en una escala natural, destacando limitaciones, materiales necesarios (como masa y combustible) trayectorias mas optimas, entre otras cosas, es decir, todo un preámbulo realmente preciso a la hora de realizar un proyecto realista, evitando así la necesidad experimental de prueba y error.

Ecuaciones Relevantes;

$$Re = \frac{vR\rho}{2\mu}$$

$$\text{Si } Re \ll 1 \quad F_{\text{aire}} = 6\pi\mu Rv$$

$$\text{Si } Re \gtrsim 10^3 \quad F_{\text{aire}} = \frac{0.47\rho v^2 \pi R^2}{2}$$

$$\mu \approx 18.37 \times 10^{-6} \text{ N s/m}^2$$

$$\rho \approx 1.184 \text{ Kg/m}^3$$

A) Fuerzas de rozamiento [1]

Re (cte, número de Reynolds)

$\rho$ =Densidad del aire

$\mu$ =Viscosidad dinámica

$$-mg = m \frac{dv}{dt} + u \frac{dm}{dt} \quad \text{B) Dinámica en y (cohetes) [2]$$

$u$ =velocidad de expulsión del combustible

$$x = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 + u t \ln m_0 + \frac{u}{D} [(m_0 - Dt) \ln (m_0 - Dt) + Dt - m_0 \ln m_0]$$

C) Posición vertical (cohetes) [2], donde  $D = -dm/dt$

$$g(y) = G \frac{M_T}{y^2}$$

D) Cambio de la gravedad con respecto a la altura [1]

### ***Objetivo General***

Hallar los componentes más optimizados como lo son la masa (distribuidas en combustible y objeto), el tiempo mínimo de alcance y su mejor trayectoria asociada, a la hora de lanzar un misil esférico hacia un punto coordinado específico.

### ***Objetivos Específicos***

- Analizar simplificaciones del sistema coordinado (el planeta) de modo que se pueda calcular una trayectoria parabólica en un plano sin perder rigurosidad del fenómeno natural.

- Obtener una expresión para las aceleraciones variables asociadas a las fuerzas en la descomposición de coordenadas (plano xy asociado a la trayectoria)

-Describir en dos etapas (ascenso y descenso) la trayectoria del proyectil con el propósito de analizar el caso específico de aceleración por propulsión, y la aceleración proporcionada por la gravedad (variable).

### ***Conceptos a Aplicar***

Dado el carácter algebraico del problema se emplearán métodos asociados a resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales (EDO's). De igual manera, se empleará métodos de raíces como el de Newton, para hallar las fuerzas que actúan sobre el cuerpo conforme varían, en puntos clave del problema (altura máxima, eyección), dado su carácter recursivo.

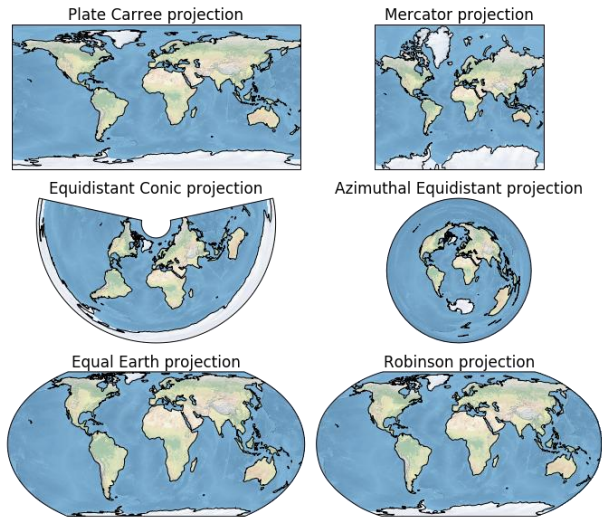
### ***Metodología y Resultados esperados***

El propósito del proyecto consiste en crear una función, cuyas entradas constan de un par de coordenadas (latitud y longitud), una masa inicial proporcionada, y un radio asociado a la geometría del proyectil (esférico). Posterior a esto, dado que el planeta es una esfera, se hará una simplificación de la mejor trayectoria, transformando esta en un plano de coordenadas polares (con sus respectivas distancias ajustadas), donde nuestro punto de referencia será nuestra ubicación. Para esta simplificación y ajuste con latitudes y longitudes realistas, se hará uso de la biblioteca *Cartopy*[3]. Posteriormente, teniendo entonces una distancia asociada, se tratará esta como un único plano en  $R^2$ , de modo que los cálculos se reducen al sistema de ecuaciones diferenciales, separando nuestra trayectoria en dos etapas; ascenso y descenso, cada una con su respectiva descomposición x,y, siendo un análogo de un cálculo de tiro parabólico más minucioso. Estos cálculos harán uso de las bibliotecas de *SciPy* (.integrate por ejemplo). De igual manera, a la hora de manejar datos y hacer cálculos veloces, siempre es conveniente vectorizar nuestros datos (*Numpy*).

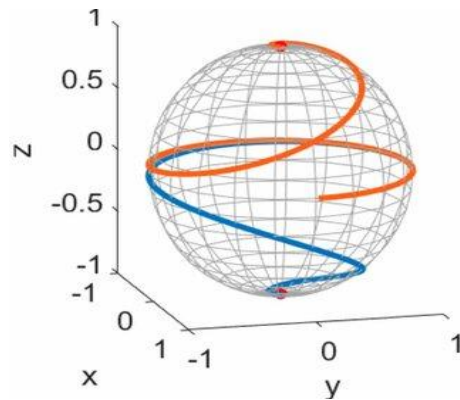
Finalmente, se espera que la función proporcione, A) Los porcentajes de masa, es decir; al ingresar una masa inicial, tras realizar la trayectoria, se indicará de esta masa proporcionada, cuanta debe ser empleada en el combustible. Si la masa proporcionada es menor al mínimo posible, será notificado por la función. B) El tiempo de alcance; cual fue el tiempo en llegar del origen a la coordenada final asociada. Note que estos dos numerales iniciales son datos netamente numéricos.

C) Gráfica asociada; se proporcionará una gráfica tanto tridimensional, como bidimensional, donde se muestren los detalles visuales de la trayectoria, denotando el camino más optimizado (*Matplotlib*), idealmente se espera que pueda ser presentada en forma de animación.

### ***Ejemplificación de Gráficas asociadas.***



Uso de Cartopy para “planificar” coordenadas



Trayectorias sobre una esfera

### ***Referencias***

[1] NASA Glenn Research Center. (s.f.). *Drag of a sphere*. NASA Glenn Research Center – Beginner’s Guide to Aeronautics. <https://www1.grc.nasa.gov/beginners-guide-to-aeronautics/drag-of-a-sphere/>

[2] Franco García, Á. (s.f.). *Movimiento vertical de un cohete*. Universidad del País Vasco. Extraído de <http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/dinamica/cohete3/cohete3.html>

[3] Met Office (SciTools). (n.d.). *Cartopy: a cartographic Python library with a Matplotlib interface*. Extraído de <https://scitools.org.uk/cartopy/docs/latest/>