Efectos de la fricción atmosférica sobre la órbita de un satélite en baja altitud

José Nicolás Rodríguez Montoya [1], Sara Calle Muñoz[1]

[1] *Pregrado de Astronomía, Instituto de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Antioquia UdeA, Calle 70 No. 52-21, Medellín, Colombia*

(Dated: 17 de julio de 2025)

Resumen

Cuando un satélite orbita la Tierra a baja altitud (por ejemplo, $< 500\,\mathrm{km}$), existe una pequeña fricción atmosférica que provoca la pérdida de energía mecánica del sistema. Nuestro proyecto busca modelar cómo esta fricción afecta el radio orbital del satélite a lo largo del tiempo.

Usamos una aproximación simplificada:

$$\frac{dr}{dt} = -k \cdot \frac{1}{r^2} \tag{1}$$

donde $r(t)$ es el radio orbital en función del tiempo, y k es una constante proporcional a la densidad atmosférica, la velocidad orbital y el área del satélite.

1. Introducción

Partimos de la segunda ley de Newton y del principio de conservación de la energía. Suponemos una órbita circular, donde la velocidad orbital es constante para un radio r.

El trabajo realizado por la fuerza de fricción produce una pérdida de energía mecánica.

La energía total de un satélite en órbita circular es:

$$E = -\frac{GMm}{2r} \tag{2}$$

donde:

- G es la constante de gravitación universal,
- M es la masa de la Tierra,
- m es la masa del satélite,
- r es el radio orbital (distancia al centro de la Tierra).

Si el satélite pierde energía debido a la fricción, E disminuye y, por lo tanto r también disminuye. Este cambio en r se puede modelar mediante la ecuación:

$$\frac{dr}{dt} = -k \cdot \frac{1}{r^2} \tag{3}$$

donde k es una constante que agrupa múltiples parámetros:

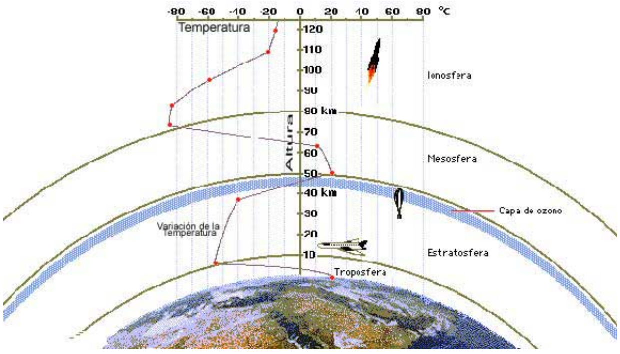
$$k = \frac{C_d A \rho_0 v_0 r_0^2}{m} \tag{4}$$

y donde:

- C_d: coeficiente de arrastre
- A: área frontal del satélite
- ρ_0: densidad del aire a la altitud inicial
- v_0: velocidad orbital inicial
- r_0: radio inicial de la órbita
- m: masa del satélite

Este modelo corresponde a una ecuación diferencial ordinaria (EDO) de primer orden no lineal.

La fricción atmosférica en órbitas bajas (LEO) induce un decaimiento progresivo en la trayectoria de satélites, afectando su vida útil y operatividad. En este proyecto buscamos desarrollar un modelo en Python para entender el comportamimento del fenomeno.



2. Objetivos

2.1. Objetivo General

Simular el decaimiento orbital de un satélite en LEO debido a la presencia de la atmosféra

2.2. Objetivos especificos

- Modelar la densidad atmosférica
- Visualizar la evolucion de la órbita
- Comparar con algún modelo teórico

3. Metodología

3.1. Modelado de la Densidad Atmosférica

- Modelo simplificado exponencial

$$\rho(h) = \rho_0 . e^{-\frac{h-h_0}{H}} \tag{5}$$

donde ρ_0 es la densidad a una altitud de referencia h_0 y H es la altura de escalas

3.2. Dinámica orbital con arrastre

- Ecuaciones del Movimiento

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^3}\vec{r} + \vec{a}_{\text{arrastre}} \tag{6}$$

donde

$$\vec{a}_{\text{arrastre}} = -0{,}5\,\frac{C_d A}{m}\,\rho(h)\,v^2\,\hat{v} \tag{7}$$

- Integración numérica: Se usara la librería de SciPy para resolver las ecuaciones que asi lo requieran y se tomaran en cuenta las condiciones, como el estado orbital(posición y velocidad)

3.3. Parametros

Variable	Valores Tipicos
Altura inicial	300-1000 km
Cd(Coeficiene de arrastre)	2.2 (Para satélites)
A/m	0.01 - 0.1 m^2/kg

3.4. Validación del modelo

Comparar el modelo usando datos de satélites reales (ej. ISS) tomando datos de Celestrak y ver como se compara con lo obtenido en la simulacón

3.5. Metodología computacional

1. Resolución de la ecuación diferencial

Se utilizarán dos métodos numéricos para resolver la ecuación diferencial que describe la evolución del radio orbital del satélite: el método de Euler y el método de Runge-Kutta). Esto permitirá obtener el valor de $r(t)$ en distintos instantes de tiempo y analizar su comportamiento.

Posteriormente, se compararán los resultados obtenidos con ambos métodos para evaluar:

- Las diferencias en la precisión numérica.
- El comportamiento de la órbita a lo largo del tiempo.
- El tiempo de ejecución y la eficiencia computacional.

2. Interpolación y búsqueda de raíces

Una vez obtenida la solución numérica, se buscará el momento exacto de reentrada del satélite, es decir, cuando $r(t) = R_T$, siendo R_T el radio de la Tierra (aproximadamente 6371 km).

Para encontrar este tiempo con mayor precisión se aplicarán las siguientes herramientas:

- `scipy.interpolate`, para interpolar los resultados y suavizar el comportamiento de $r(t)$ entre puntos.
- `scipy.optimize.root_scalar`, para resolver la ecuación $r(t) - R_T = 0$ y determinar con exactitud el instante de reentrada.

3. Visualización de los resultados

Se graficará la función $r(t)$ para observar cómo disminuye el radio orbital con el tiempo debido a la fricción atmosférica. También se presentarán gráficas comparativas entre los métodos de Euler y Runge-Kutta, así como para diferentes valores de los parámetros k y r_0 (radio inicial).

Bibliotecas de Python a utilizar

- NumPy: para cálculos matemáticos y manejo de arreglos.
- SciPy:
  - solve_ivp: para resolver la EDO con el método de Runge-Kutta.
  - interpolate: para interpolar los datos obtenidos.
  - root_scalar: para hallar el tiempo exacto de reentrada.
- Matplotlib: para graficar la evolución del radio orbital $r(t)$.
- Pandas: para organizar y mostrar resultados en tablas.
- Astropy: efemerides y unidades

4. Resultados esperados

- Gráficas con curvas de decaimiento
- Simulación acertada de del decaimiento orbital con graficas
- Gráficas de $r(t)$para ambos métodos.
- Tiempo estimado de reentrada (cuando $r(t) = R_T$).
- Comparación entre métodos numéricos: estabilidad, precisión, eficiencia.
- Sensibilidad del sistema ante variaciones de los parámetros.

Referencias

[1] Wikipedia contributors. (s.f.).
Orbital decay.
https://en.wikipedia.org/wiki/Orbital_decay

[2] *Vallado, D.A. (2013) Fundamentals of astrodynamics and applications*

[3] *Picone, J.M., et al (2002). *NRLMSISE -00 Empirical Atmosphere Model*