

Título: Estudio Computacional del Movimiento de Rotación, Precesión y Nutación de un Trompo

Integrantes: Miguel Ángel Perdomo Gaitán – 1077227862 y Jesús Armando Cañas Gamboa 1093855087.

Descripción:

El trompo es un objeto que divierte tanto a niños como adultos, su movimiento parece simple, pero es más complejo de lo que parece...

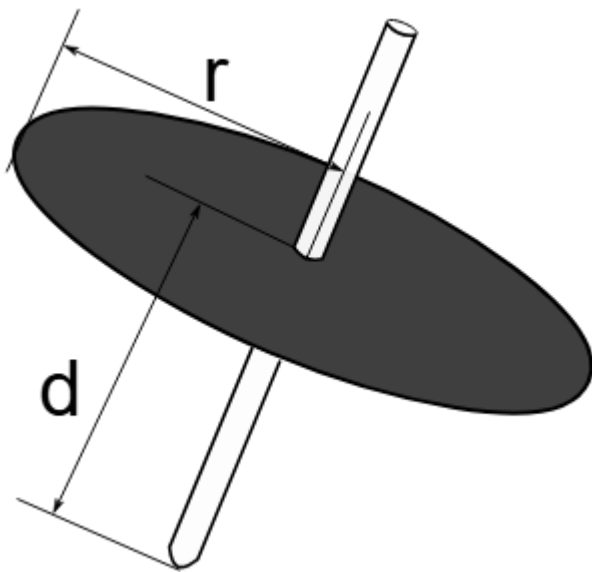
Estudio del movimiento de varios trompos de distintas geometrías usando un sistema de coordenadas basado en los ángulos de Euler.

ψ : *Ángulo de Giro del trompo*

ϕ : *Precesión (la rotación de todo el sistema alrededor del punto fijo)*

θ : *Nutación (el ángulo en el que la parte superior se gira lejos de la vertical)*

Trompo simple



Momentos de inercia

$$I_z = \frac{1}{2}mr^2$$

$$I = I_x = I_y = \frac{1}{4}mr^2 + md^2$$

Las ecuaciones de movimiento que describen el comportamiento del trompo torque son:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}(I_o (\sin \theta)^2 + I_o (\cos \theta)^2) + I_z \dot{\psi} \cos \theta = p_\phi = \text{constante}$$

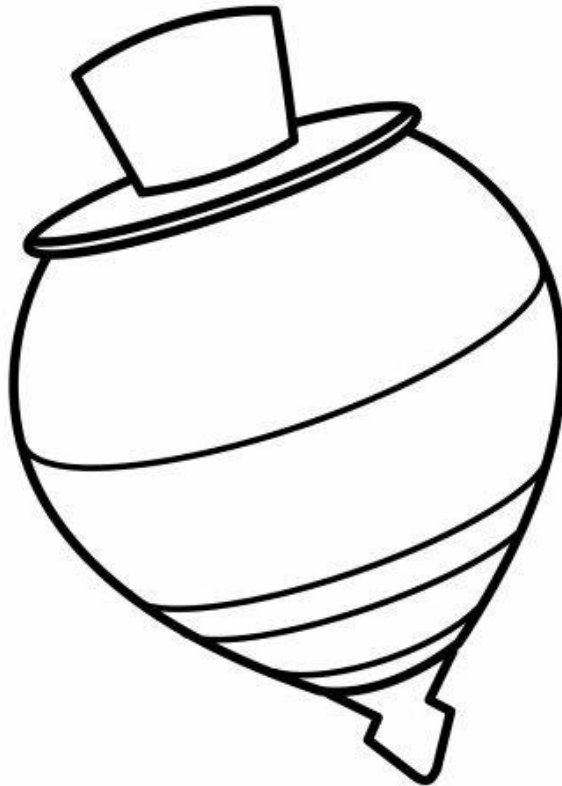
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_z(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) = \text{constante} = p_\psi$$

$$I_o \ddot{\theta} - \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta (I_o - I_z) + \dot{\phi} \dot{\psi} I_z \sin \theta - mgd \sin \theta = 0$$

El vector velocidad angular se define como

$$\text{Trompo con geometría } \vec{\omega} = \dot{\theta} \hat{i}' + \dot{\phi} \sin \theta \hat{j}' + (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})$$

$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \hat{i}' + \dot{\phi} \sin \theta \hat{j}' + (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})$$



Los momentos de Inercia del trompo son:

$$I_{zz} = \rho \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R r^4 (\sin \theta)^2 \theta \, dr d\theta d\phi$$

Como se supone un trompo simétrico luego los momentos de inercia en el eje x y y son iguales:

$$I_{xx} = I_{yy} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R r^4 [\sin \theta - (\sin \theta)^3 (\sin \phi)^2] \, dr d\theta d\phi$$

Matriz de Rotación

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \psi - \cos \theta \sin \phi \sin \psi & -\cos \phi \sin \psi - \cos \theta \sin \phi \cos \psi & \sin \theta \sin \phi \\ \sin \phi \cos \psi + \cos \theta \cos \phi \sin \psi & -\sin \phi \sin \psi + \cos \theta \cos \phi \cos \psi & -\sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \psi & \sin \theta \cos \psi & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Centro de Masa

$$\vec{R}_{cm} = \frac{1}{M} \int_V \vec{r} \rho(\vec{r}) \, dV$$

El centro de masa en coordenadas cartesianas se multiplica con la matriz de los ángulos en cada instante de tiempo, así se encuentra el movimiento del centro de masa

Conceptos Por Aplicar:

Para poder solucionar las ecuaciones que rigen el movimiento de un trompo, es necesario, conocer cómo cambia el sistema punto a punto, por tanto, es necesario solucionar un sistema de ecuaciones diferenciales (EDOs); para encontrar cosas como momentos de inercia el centro de masa del trompo es necesario usar integración. Además, se necesitan conceptos de álgebra lineal como las matrices para poder observar la posición en función del tiempo del centro de masa del trompo.

Metodología:

Primero se darán las condiciones iniciales del sistema, se calculará los momentos de inercia del trompo junto a su centro de masa. Luego, se resolverán las ecuaciones diferenciales que rigen el movimiento del trompo para varios instantes de tiempo, se realizará las gráficas con los resultados obtenidos de la rotación, nutación y precesión del trompo, por último, aplicar la matriz de transformación para ver cómo se mueve el centro de masa en función del tiempo en coordenadas cartesianas.

Además de Python básico, se empleará el uso de diferentes librerías como lo son matplotlib para la graficación de los resultados, numpy para trabajar con arrays de datos como lo serían condiciones iniciales y evolución del sistema (ángulos de Euler en la evolución del tiempo) y también para operaciones vectoriales y matriciales, sympy para escribir las ecuaciones de manera estética, scipy para integración numérica y resolución de ecuaciones diferenciales.

Resultados Esperados:

Se esperan los resultados de la precesión, rotación y nutación del trompo en diferentes instantes de tiempo, se presentarán los datos en gráficos con interpolación lineal (por defecto en matplotlib) además de un gráfico en 3D del movimiento del centro de masa a lo largo de la trayectoria del trompo, adicionalmente, para presentar los resultados, se realizará una presentación con diapositivas con todos los resultados obtenidos (gráficas) y una breve explicación de lo realizado.

Referencias:

Rojas, M. (n.d.). Movimiento rotacional tridimensional de un cuerpo rígido: El trompo. Scribd. <https://es.scribd.com/document/416254687/Movimiento-Rotacional-Tridimensional-de-Un-Cuerpo-Rigido-El-Trompo>

Education 4u. (2018, 26 septiembre). *Top (Gyroscope) | Torque and Angular Momentum | Examples*. YouTube. <https://www.youtube.com/watch?v=PyExwBFaC3A>

Cooper, R. (n.d.). *Spinning Top – Nonlinear Equations of Motion*. Retrieved from https://cooperrc.github.io/advanced-dynamics/model_results/spinning_top-nonlinear.html

Goldstein, H., Poole, C., & Safko, J. (2002). *Classical mechanics* (3rd ed.). Addison-Wesley.