



ÉCOLE CENTRALE DES ARTS ET MÉTIERS

RAPPORT DE LABORATOIRE

---

## Réglages échantillonnés

---

Thomas Anizet	14164
Hadrien Hachez	15306
Armen Hagopian	14040
Amaury Lekens	14027
Alexis Nootens	16139
Benoît Wéry	14256

Enseignant : B. Arnould

4 juin 2018

## Séance 1

# Étude d'un premier ordre par les 4 méthodes de discrétisation.

### 1.1 Introduction

Durant la première séance de laboratoire, il nous a été demandé de calculer l'expression récurrente d'un premier ordre par les 4 méthodes de discrétisation, à savoir :

- La méthode de Euler 1 ;
- La méthode de Euler 2 ;
- La méthode bilinéaire ;
- La méthode équivalent échantillonné bloqué.

Une fois les 4 expressions calculées, l'objectif était d'utiliser le logiciel MATLAB afin de représenter les réponses temporelles et fréquentielles de ces 4 expressions. Ceci, dans le but d'analyser les différents paramètres de ces 4 méthodes de discrétisation.

### 1.2 Rappels théoriques

#### 1.2.1 Discrétisation d'un signal

Actuellement, les méthodes de traitements numériques pour l'analyse des signaux ont largement pris le dessus comparé aux méthodes analogiques ancestrales. C'est pourquoi nous abordons les notions de procédés de discrétisation.

En effet, en traitement numérique, un signal analogique est tout d'abord échantillonné (= discrétisé) avant d'être quantifié et finalement codé. **La discrétisation est le procédé par lequel un signal continu est transformé en un signal discret.** Autrement dit, la discrétisation d'un signal continu  $f(t)$  revient à garder un certain nombre de valeurs discrètes ( $\dots, f(t_0), f(t_1), f(t_2), \dots$ ) correspondant aux valeurs ( $\dots, t_0, t_1, t_2, \dots$ ) de la variable  $t$ . On parle également d'échantillonnage pour les signaux. Les différentes valeurs discrètes ( $\dots, f(t_0), f(t_1), f(t_2), \dots$ ) varient en fonction de la période d'échantillonnage. La figure 1.1 ci-dessous présente le principe d'échantillonnage.

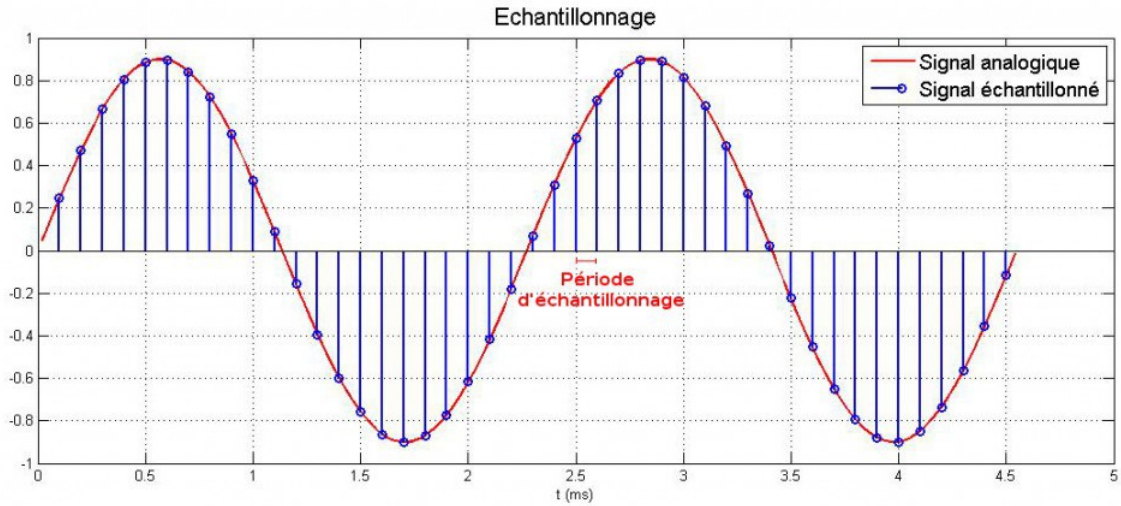


FIGURE 1.1 – Échantillonnage d'un signal continu sinusoïdal.

### 1.2.2 Liens entre les domaines continu et discret

En temps continu, nous pouvons travailler avec la transformée en  $s$  d'un signal, qui nous amène dans le plan complexe.

En temps discret, nous travaillons avec la transformée en  $z$  du signal et le plan  $z$  qui comprend un cercle trigonométrique unitaire.

Le lien entre les grandeurs  $s$  et  $z$  est le suivant :

$$z = e^{hs} = e^{(\sigma + j\omega)h} = e^{\sigma h} e^{j\omega h} \quad (1.1)$$

où  $h$  correspond à la période d'échantillonnage du signal.

On peut également réécrire  $z$  sous la forme complexe suivante :

$$r = e^{\sigma h}, \Omega = \omega h \rightarrow z = r e^{j\Omega} \quad (1.2)$$

où,

- $0 \leq r < \infty$ , le rayon, correspond au **facteur d'amortissement**
- $-\pi \leq \Omega \leq \pi$ , l'angle (radians), est la **pulsation discrète**

Dès lors, le lien entre le plan complexe de Laplace et le plan en  $z$  est celui donné à la figure 1.2.

Nous pouvons en déduire que la stabilité d'un système, qui s'obtient par l'analyse de la position de ses pôles dans les domaines d'existence, est définie par :

- en continu : des pôles dans la partie gauche du plan
- en discret : des pôles à l'intérieur du cercle unitaire

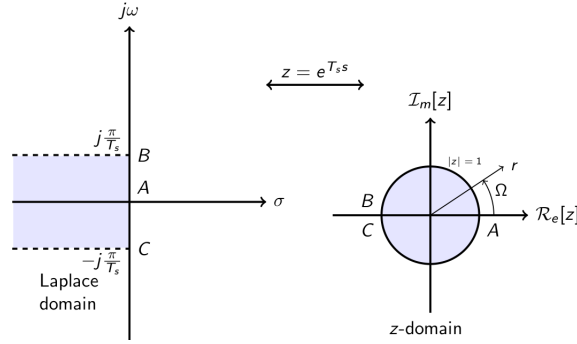


FIGURE 1.2 – Correspondance des plans  $s$  et  $z$   
*Signal and Systems : Z-transform*, F. De Bruyne

### 1.3 Analyse d'un système de 1<sup>er</sup> ordre

Nous allons maintenant présenter la discrétisation (suivant les méthodes citées précédemment) du système de 1<sup>er</sup> ordre dont la fonction de transfert est la suivante :

$$H(s) = \frac{1}{s + 1}$$

Ce système en continu est stable puisqu'il possède un pôle en  $s = -1$ , et sa réponse indicielle est donc un signal qui se stabilise autour d'une valeur finie après  $5 * \tau$  ( $\tau = 1\text{sec}$  étant la constante de temps du système) soit 5sec dans notre cas.

Comme le pôle est projeté en discret selon l'expression  $z = e^{sh}$ , sa position est directement liée à la période d'échantillonnage du système. Nous verrons que selon la méthode utilisée, la projection de  $s$  dans  $z$  varie, ce qui peut rendre le système instable (selon la méthode et le  $h$ ).

**Remarque :** le code Matlab utilisé se trouve à l'annexe A.

#### 1.3.1 Méthode de Euler 1 - Différences finies à gauche

La discrétisation s'obtient en remplaçant  $s$  par  $\frac{z-1}{h}$  dans l'expression du système.

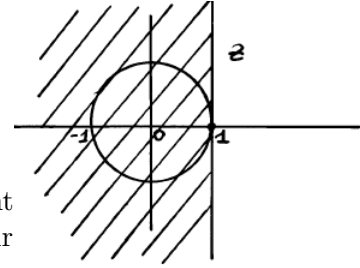
**Résolution par voie analytique :**

$$\begin{aligned} H(s) &= \frac{1}{s + 1} \\ &= \frac{1}{\frac{z-1}{h} + 1} \\ &= \frac{h}{z - 1 + h} \end{aligned} \tag{1.3}$$

La projection du pôle dans le domaine discret est donc :

$$P_z = 1 - h$$

Dès lors, puisque  $h > 0$  il vient que le pôle  $z_p$  se trouve forcément dans le plan  $z$  à gauche de la verticale en 1 et qu'il est possible d'obtenir un système instable.



### Prévisions des valeurs particulières du pôle :

- $h = 0 \rightarrow z_p = 1$  : limite de stabilité du système discret
- $h = 1 \rightarrow z_p = 0$  : système discret stable à temps minimum
- $h = 2 \rightarrow z_p = -1$  : limite de stabilité du système discret
- $h > 2 \rightarrow z < -1$  : le système est instable

Via les résultats du script Matlab, nous voyons que nous obtenons bien les prévisions analytiques attendues. La méthode des différences finies à gauche engendre un système à temps minimum pour une période d'échantillonnage  $h = 1$  (pôle  $z_p = 0$ ). Autrement dit, lorsqu'on applique un signal en entrée, la sortie atteint sa valeur finale directement après une période d'échantillonnage (fig. 1.4).

En augmentant la période d'échantillonnage, on constate bien que le pôle se déplace vers la gauche et qu'il quitte le cercle lorsque cette période dépasse  $2\text{sec}$ . Le système fini alors par être en instabilité et le signal de sortie diverge (fig. 1.6).

Nous pouvons voir sur la figure 1.7 la comparaison du système discrétisé ( $h=0.1$ ) avec sa réponse exacte. Pour cette période d'échantillonnage, nous obtenons un équivalent discret qui correspond bien au système réel, avec une erreur relative inférieure à  $2\%$ <sup>1</sup>.

En fréquentiel, nous constatons que le signal discrétisé suit bien le système réel, au moins jusqu'à la fréquence de coupure de 1Hz. Une verticale est présente à 5Hz, dont nous reparlerons à la section 1.4

---

1. Les courbes des systèmes discrétisés sont approximées à partir des valeurs des échantillons

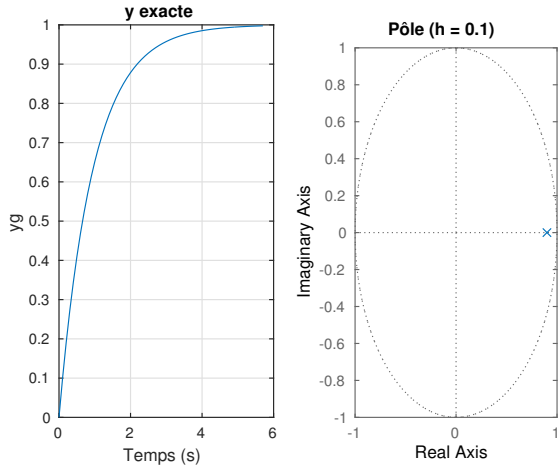


FIGURE 1.3 –  $h = 0.1$

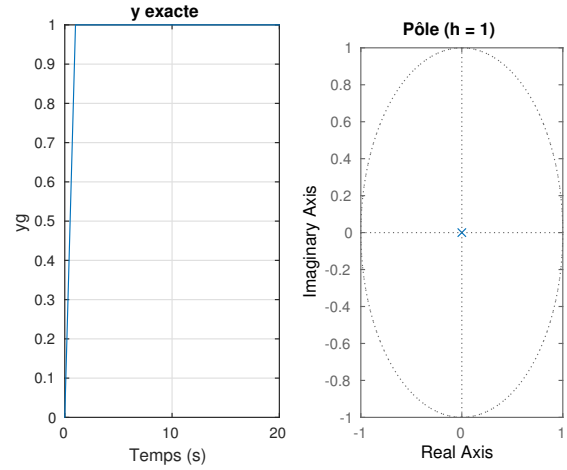


FIGURE 1.4 –  $h = 1$

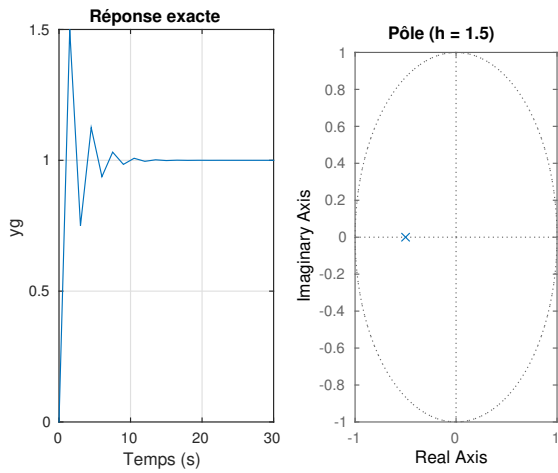


FIGURE 1.5 –  $h = 1.5$

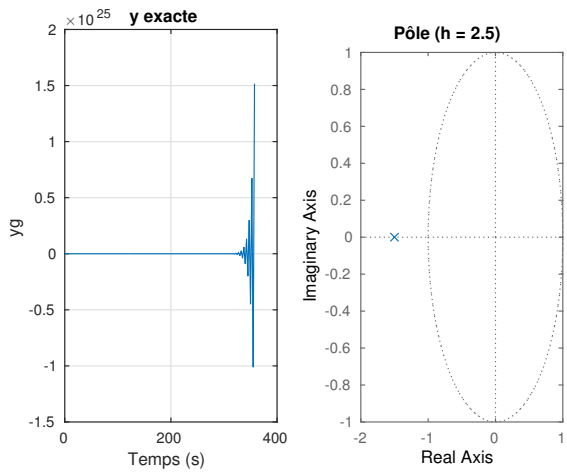
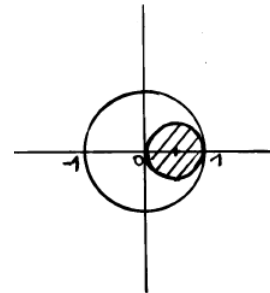


FIGURE 1.6 –  $h = 2.5$

### 1.3.2 Méthode de Euler 2 - Différences finies à droite

La discrétisation s'obtient donc en remplaçant  $s$  par  $\frac{z-1}{zh}$  dans l'expression du système.

La projection du pôle dans le domaine discret se trouve à l'intérieur d'un cercle, dans le cercle unitaire lui-même. Dès lors, il est impossible d'obtenir un système instable en le discrétisant par cette méthode.



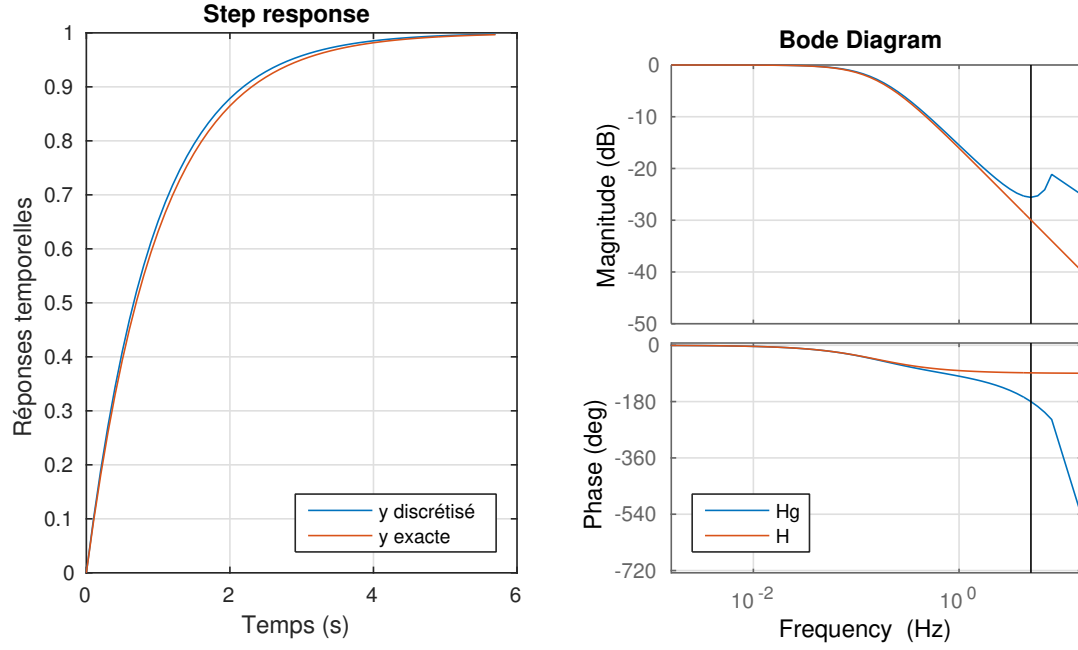


FIGURE 1.7 – Comparaison du système discrétisé et de sa réponse exacte en temporel et en fréquentiel, pour une période d'échantillonnage  $h=0.1$  (Euler 1)

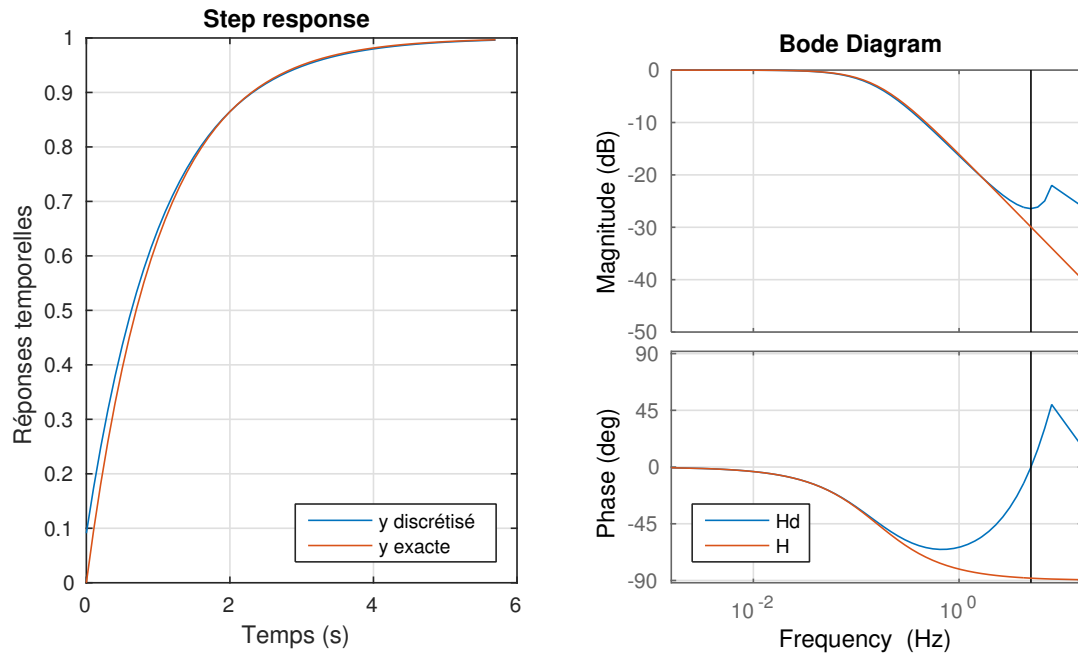


FIGURE 1.8 – Comparaison du système discrétisé et de sa réponse exacte en temporel et en fréquentiel, pour une période d'échantillonnage  $h=0.1$  (Euler 2)

### 1.3.3 Méthode bilinéaire - Différences finies centrales (Tustin)

La forme discrète du système est obtenue en remplaçant  $s$  par son approximation en  $z$  :  $s = \frac{2}{h} * \frac{z-1}{z+1}$ , ou encore

$$z = \frac{1 + \frac{j\omega h}{2}}{1 - \frac{j\omega h}{2}} \quad (1.4)$$

Pour une telle méthode, la projection des pôles se retrouvera toujours à l'intérieur du cercle unitaire lui-même. De nouveau, il est impossible que le système devienne instable suite à sa discrétisation.

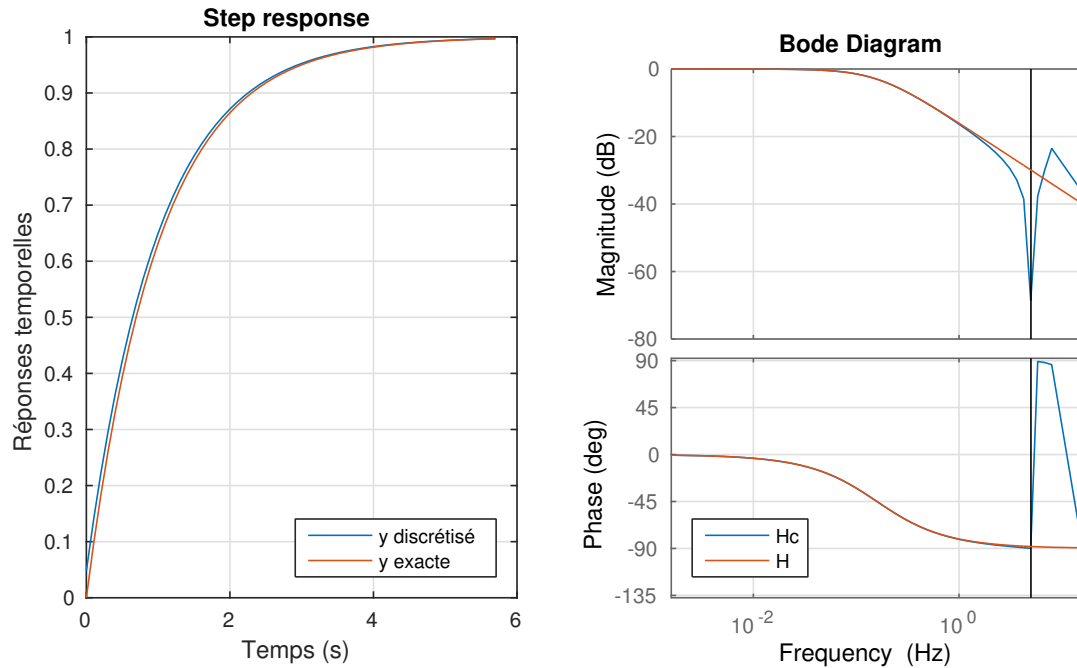
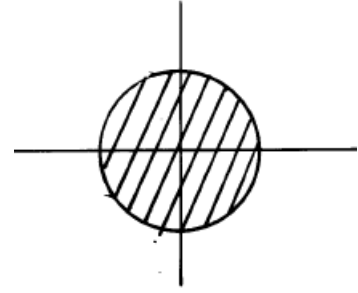


FIGURE 1.9 – Comparaison du système discrétisé et de sa réponse exacte en temporel et en fréquentiel, pour une période d'échantillonnage  $h=0.1$  (Bilinéaire)

### 1.3.4 Méthode de l'équivalent échantillonné bloqué

Cette méthode utilise un bloqueur d'ordre 0 dont le but est de maintenir en sortie une valeur pendant l'équivalent d'une période d'échantillonnage, après quoi il change la sortie pour la nouvelle valeur qu'il a reçue. La sortie de ce bloqueur est "en moyenne" en retard sur l'entrée d'une demi-période.

De plus, sa sortie à une impulsion discrète en entrée est un "palier" de la même amplitude qui est maintenu pendant une durée  $h$ .

Comme nous le constatons à la figure 1.10, la sortie indicielle du système discrétisé par cette méthode est confondue avec celle du système réel.



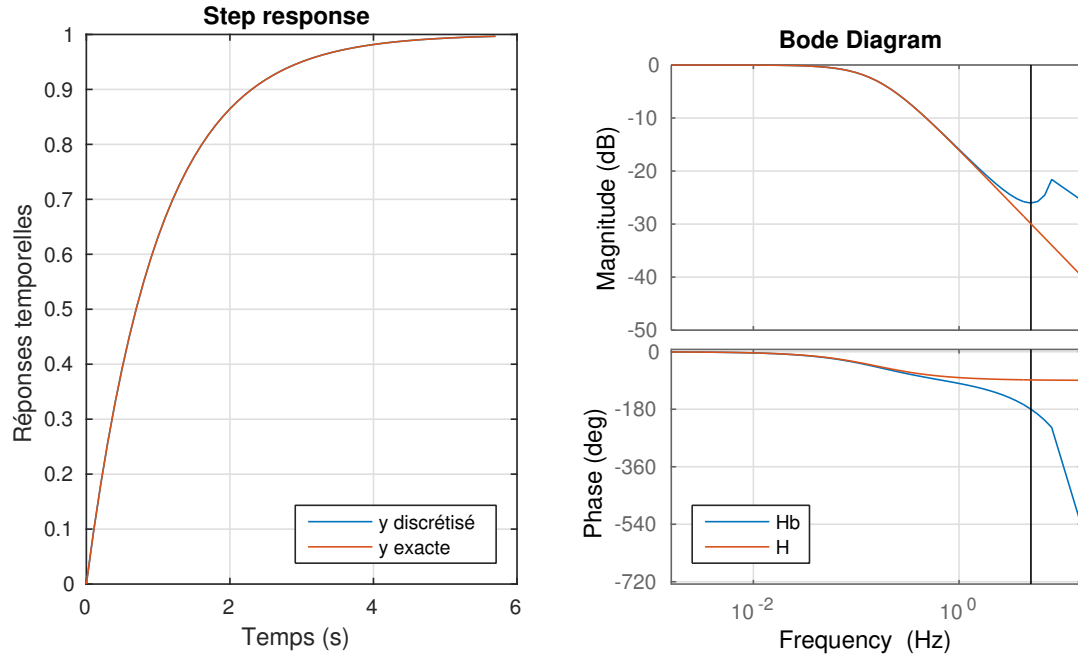


FIGURE 1.10 – Comparaison du système discrétisé et de sa réponse exacte en temporel et en fréquentiel, pour une période d'échantillonnage  $h=0.1$  (Equiv bloqué)

## 1.4 Comparaison des méthodes de discrétisation

### 1.4.1 Analyse fréquentielle

L'analyse des systèmes discrétisés en fréquentiel nous permet de voir qu'ils ont bien tous une fréquence de coupure à  $\frac{1}{2\pi}$  Hz, qui est bien la fréquence de coupure d'un simple système de 1<sup>er</sup> ordre avec comme constante de temps  $\tau = 1\text{sec}$

De plus, sur les figures 1.11 et 1.12, nous observons la présence d'une verticale, au-delà de laquelle les signaux discrétisés changent d'aspect.

Dans le cas d'un signal discrétisé, il y aura toujours une telle verticale qui se retrouve à la demi-fréquence d'échantillonnage. Au delà de celle-ci le signal "ne veut plus rien dire" et cela s'explique par le théorème de Nyquist-Shanon qui nous dit "*qu'il est impératif d'échantillonner un signal à une fréquence au moins supérieure (ou égale) au double de la fréquence maximale contenue dans le signal*".

En dessous de cette verticale, nous sommes donc en bande de base et au-delà, nous obtenons les répétitions du spectre du signal aux multiples de la fréquence d'échantillonnage.

	Gain ( $f_{ech} = 10\text{Hz}$ )	Gain ( $f_{ech} = 1\text{Hz}$ )
Système continu	Infini	Infini
Euler 1 (Diff gauche)	19dB	1dB
Euler 2 (Diff droite)	Infini	Infini
Bilinéaire (Diff centrale)	Infini	Infini
Equiv. bloqué	20.02dB	2.16dB

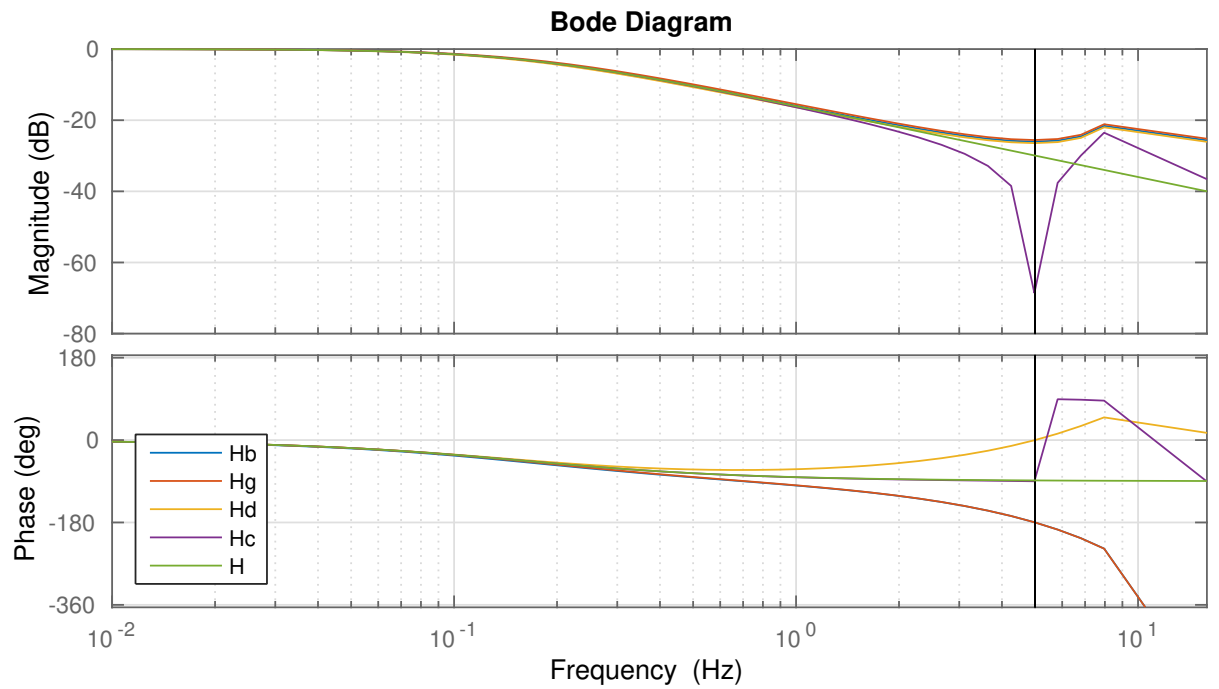


FIGURE 1.11 – Discrétisation du système à une fréquence d'échantillonnage de 10Hz

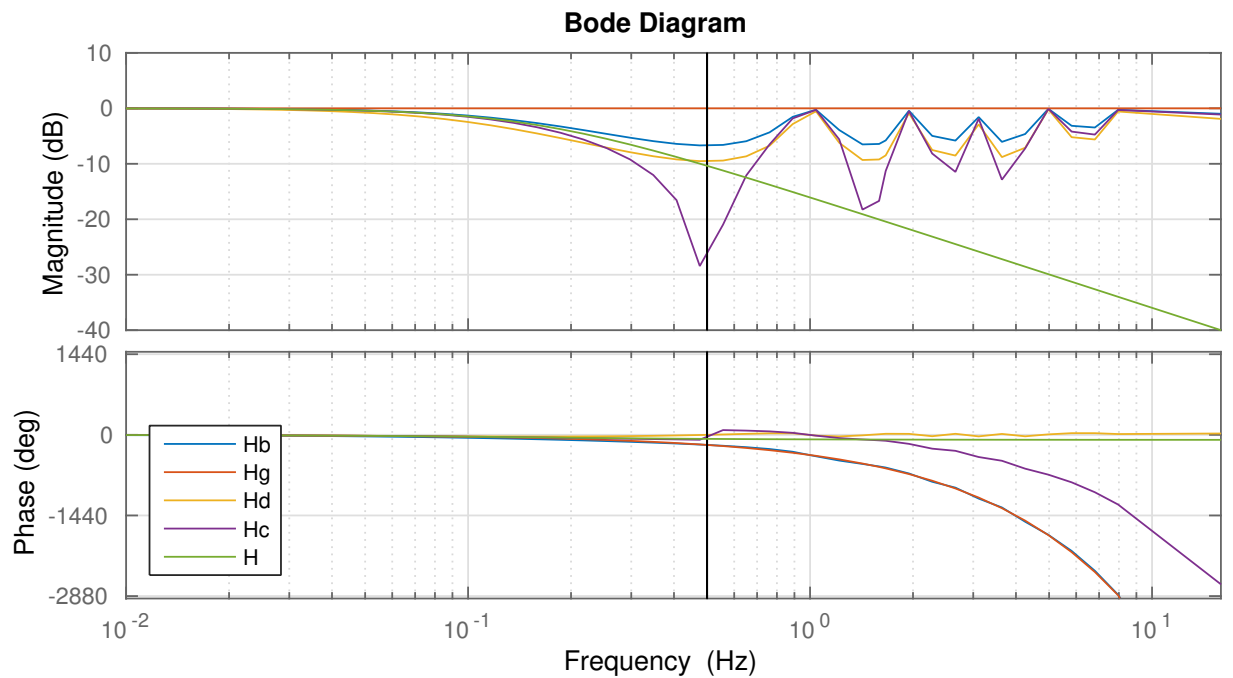


FIGURE 1.12 – Discrétisation du système à une fréquence d'échantillonnage de 1Hz

## 1.4.2 Analyse temporelle

L'analyse et la comparaison des réponses indicielles des systèmes discrétisés ( $h=0.1$ ), nous permettent d'observer que ceux-ci s'éloignent très légèrement de l'allure du système réel. Après une constante de temps  $\tau = 1\text{sec}$ , l'erreur passe en dessous de 2% pour toutes les méthodes, et elle est pratiquement nulle une fois la stabilité atteinte.

Lorsque la période d'échantillonnage augmente, le nombre d'échantillons diminuant, l'erreur augmente progressivement. Cela est d'autant plus vrai pour la méthode des différences finies à gauche.

Finalement, l'équivalent échantillonné bloqué présente une erreur relative qui est pratiquement nulle et ce quelle que soit la fréquence d'échantillonnage.

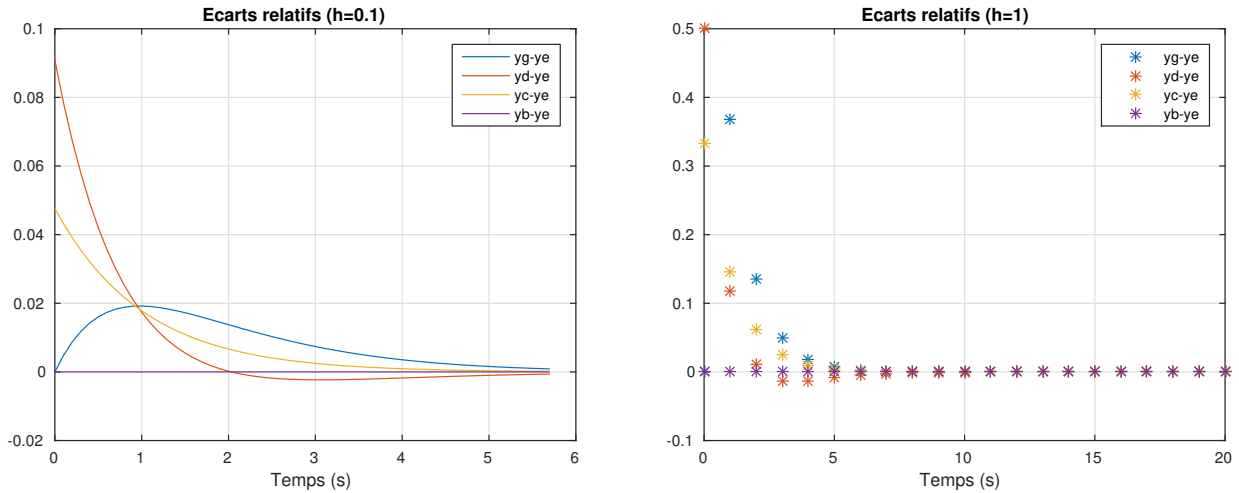


FIGURE 1.13 – Comparaison des écarts relatifs entre le système réel et les systèmes discrétisés.

## 1.5 Conclusion

1. Le résultat obtenu par la méthode de l'**équivalent échantillonné bloqué** est la plus satisfaisante, c'est celle qui permet d'obtenir le système discret avec un comportement le plus proche du système réel.
2. Par la méthode des différences finies à gauche, des pôles dans la partie gauche (système stable) du plan en continu peuvent être projetés en dehors du cercle dans le plan  $z$  et ce en fonction de la période d'échantillonnage. Dès lors, une telle discrétisation d'un système peut le rendre **instable**.
3. Lorsqu'on discrétise un système, il est important de prendre une période d'échantillonnage suffisamment petite pour éviter le phénomène de repli spectrale.
4. Le gain critique d'un système du 1<sup>er</sup> ordre bouclé vaut l'infini car la courbe des phases est asymptotique à  $-90$  et qu'on a toujours de la marge de phase.

## 1.6 Analyse d'un système d'ordre 3

Soit le système suivant d'ordre 3 :

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$$

Nous allons étudier le déplacement de ce système discrétisé, en fonction de la période d'échantillonnage.

La fonction que nous obtenons pour le système discrétisé par la méthode d'échantillonneur bloqué (c2d) est la suivante :

- $h = 0.1$

$$Hb(z) = \frac{0.0001547z^2 + 0.000574z + 0.0001331}{z^3 - 0.406z^2 + 0.05495z - 0.002479} \quad (1.5)$$

- $h = 1$

$$Hb(z) = \frac{0.0803z^2 + 0.1544z + 0.01788}{z^3 - 1.104z^2 + 0.406z - 0.04979} \quad (1.6)$$

- ...

Nous voyons bien que la discrétisation du système d'ordre 3 fait apparaître au numérateur un second degré en  $z$  et donc deux zéros dont la valeur varie avec la période d'échantillonnage. Ces zéros restent dans la partie gauche du plan, peu importe la période d'échantillonnage, et ils sont ramenés à l'intérieur du cercle unitaire pour une période supérieure à  $2\text{sec}$ .

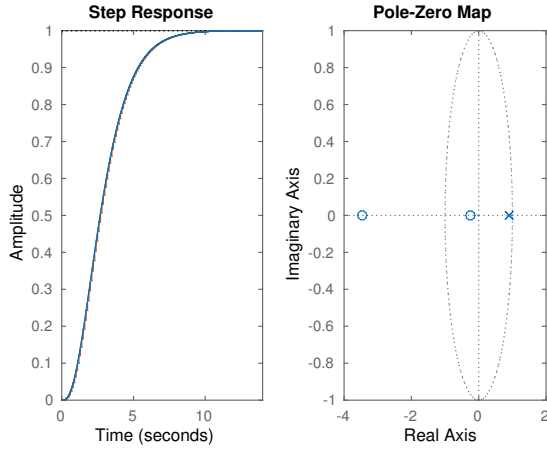


FIGURE 1.14 –  $h = 0.1$

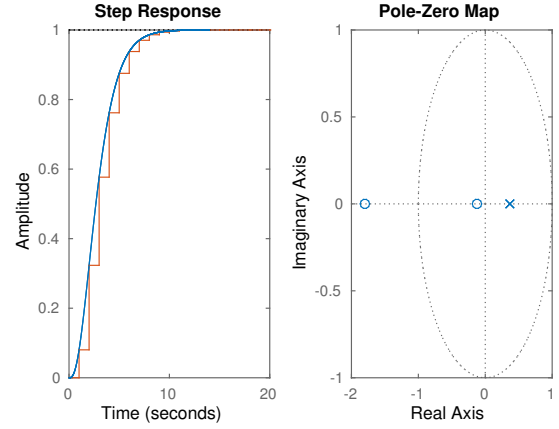


FIGURE 1.15 –  $h = 1$

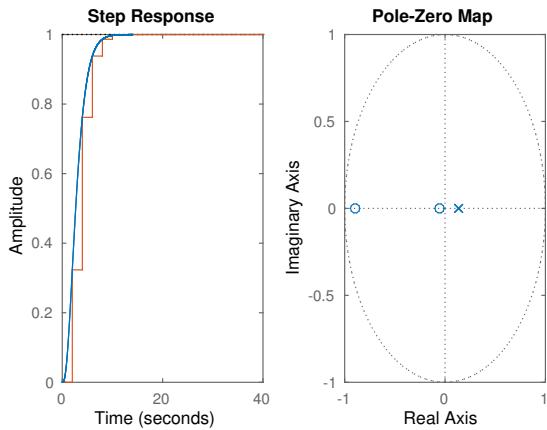


FIGURE 1.16 –  $h = 2$

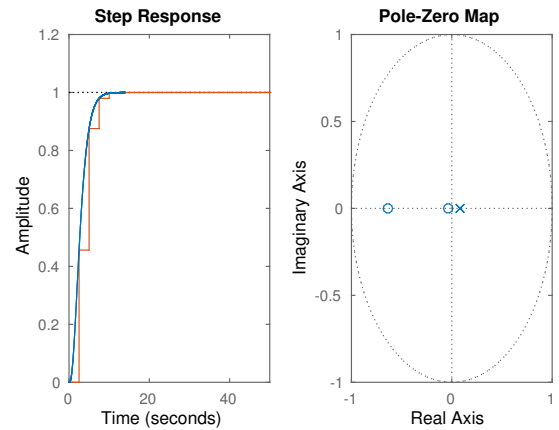


FIGURE 1.17 –  $h = 2.5$

## Séance 2

# Synthèse d'un régulateur continu

### 2.1 Introduction

Durant cette seconde séance de laboratoire, il a été demandé aux étudiants de synthétiser sur le logiciel MATLAB un régulateur continu en boucle fermée. Une fois cette étape réalisée, la discrétisation de ce régulateur selon 3 périodes d'échantillonnage a été effectuée afin d'obtenir 3 régulateurs discrets. Le but final était alors de comparer, grâce à Simulink, les performances du régulateur continu avec les 3 régulateurs discrets obtenus.

### 2.2 Notions théoriques

### 2.3 Analyse

Nous avons construit un régulateur continu par cancelation des poles et zeros en gardant l'intégrateur. Dans la chaine direct il reste un simple intégrateur avec un simple gain qu'il faut déterminer. Quand on reboucle un intégrateur avec un simple gain on a un filtre du premier ordre donc ça permet de placer la constante de temps.

On synthétise le régulateur continu et puis on discrétise. L'inconvénient de cette procedure est qu'on n'a pas pris en compte le bloqueur d'ordre 0. Ce bloqueur en moyenne entraine un retard d'une demi période. Cela veut dire que cela fera tomber la courbe des phases et qu'on pourra partir en instabilité à un moment. Plus la période d'échantillonnage est grande plus cela se dégrade. On fait le passage continu discret du régulateur par les différences finies à gauche et on sait qu'avec les pôles dans le plan gauche, on peut avoir une projection à l'extérieur du cercle. Donc des pôles stables continus peuvent devenir instables en discret. Ce sont les inconvénients de la méthode.

La deuxième étape était de discrétiser le système par l'équivalent échantillonné bloqué. Cela veut dire qu'on passe du domaine S vers Z en tenant compte du bloqueur et qu'on réalise une vraie synthèse discrète de la même façon en prenant les pôles du système pour les mettre aux zeros du régulateur et inversement. On maintient l'intégrateur discret avec le dénominateur. Et on reboucle pour aller placer les poles discrets à l'endroit voulu c'est à dire les poles continus projetés en Z avec  $Z = e^{sh}$ .

La deuxième réponse : la réponse du système souhaité et celle qu'on obtient sont quasiment les mêmes car la période d'échantillonnage est petite et que le temps mort supplémentaire ne nous embête pas trop.

La vraie synthèse discrète est lorsque le système est discrétisé avec c2d et là on a que la réponse est exactement celle qu'on souhaite. Si on augmente la période d'échantillonnage, **constante de temps au dénominateur est 3 secondes, c'est pas mal une période d'échantillonnage de 1 seconde.**

Avec la discrétisation du régulateur, on commence à avoir des problèmes car on ne tient pas compte du bloqueur.

Dans le dernier cas, aux instants d'échantillonnage, on est sur la valeur souhaitée. En dehors de ces instants, on ne maîtrise pas car on a imposé les pôles d'un système discret pour qu'aux instants d'échantillonnage on soit sur la réponse du filtre du premier ordre. La réponse souhaitée est la réponse avec un régulateur synthétisé en continu et discrétisé et donc on n'a pas tenu compte dans la synthèse du régulateur du bloqueur d'ordre 0. Mettre sur les scopes : ce qu'on souhaite et ce qu'on obtient et puis on voit ce qu'on souhaite On voit l'influence de l'intégrateur, le système part chercher une asymptote à l'infini, à la période d'échantillonnage qui suit on est sur le modèle de référence souhaité. On est sur la valeur.

## 2.4 Conclusion

Avec le régulateur discrétisé, on a des dépassements importants tandis qu'avec le vrai régulateur discret malgré que la période d'échantillonnage est importante, aux instants d'échantillonnage on est à nouveau sur la trajectoire. Cela était donc le but de ces exercices, se rendre compte qu'il faut se méfier quand on fait synthèses continues et qu'on discrétise.

## Séance 3

# Synthèse d'un régulateur discret

### 3.1 Introduction

Durant la troisième et dernière séance de laboratoire, il a été demandé aux élèves de synthétiser sur le logiciel MATLAB® un régulateur discret de compensation en boucle fermée et d'en analyser la réponse. Pour ce faire, il a tout d'abord fallu calculer l'équivalent échantillonné bloqué de ce régulateur (discrétisation). Et ensuite, imposer un intégrateur dans le régulateur discret de compensation.

### 3.2 Hypothèses

Soit le système défini par l'équation :

$$H_c(s) = \frac{1}{s(s+0,5)} = \frac{2}{s(2s+1)} \quad (3.1)$$

Nous cherchons à effectuer la synthèse d'un régulateur discret compensant le système (3.1) en boucle fermée, et respectant les spécifications suivantes :

1. Dépassement de 5% ( $\xi = 0,69$ )
2. Temps de réponse à 95% ( $3T$ ) de 1
3. Erreur de vitesse nulle
4.  $h = 0,1$

Notons avant tout que la spécification sur l'erreur de vitesse nulle implique un double intégrateur dans la chaîne directe. Ceci nous indique d'avance que le régulateur suivra la forme :

$$R(Z) = \frac{\dots}{(Z-\alpha)(Z-\beta)} \quad (3.2)$$

### 3.3 Analyse

La première étape est toujours la même, nous devons traduire la fonction de transfert dans le domaine discret. Pour cela nous utilisons la commande `c2d()` de MATLAB® qui équivaut à convoluer la fonction par un bloqueur d'ordre 1. C.-à-d. effectuer l'opération :

$$H_d(Z) = \mathcal{L}_{s \rightarrow Z} H_c(s) \quad (3.3)$$

$$= \frac{k}{(Z-1)(Z-p)} \quad (3.4)$$

Dans cette forme, les points sont distants de la période d'échantillonnage. Cela entraîne que l'influence de l'entrée sur la sortie est perçue après cette même période. Ceci implique également que la différence entre l'ordre du dénominateur et du numérateur doit être égale à 1. Pour imposer cet ordre, nous rajoutons un zéro au numérateur de (3.4). Ce qui donne :

$$H_d(Z) = \frac{k(Z - z)}{(Z - 1)(Z - p)} \quad (3.5)$$

De cette forme discrétisée, nous désirons extraire les pôles et les zéros. MATLAB® propose une fonction permettant de les extraire en un appel, `zpkdata()`. Nous employons par la suite ces coefficients obtenus dans le régulateur  $R(Z)$  pour compenser  $H_d(Z)$ .  $R(Z)$  est donc un régulateur de compensation.

$$R(Z) = k \frac{(Z - p)}{(Z - z)(Z - 1)} \quad (3.6)$$

On a un décalage car l'ordre du dénominateur est plus grand que l'ordre du numérateur. Quand le régulateur aperçoit un écart de réglage à sa consigne, il doit réagir immédiatement. Il « mouline » dans un temps qui est supposé très petit et négligeable sur la période puis il envoie. On rajoute un zéro au numérateur pour faire en sorte qu'il n'y ait pas de retard dans le régulateur.

$$R(Z) = k \frac{(Z - p)(Z - n)}{(Z - z)(Z - 1)} \quad (3.7)$$

Ensuite nous faisons le produit en boucle ouverte du régulateur avec le système.

$$R(Z)H_d(Z) = B_0(Z) = \frac{k(Z - n)}{(Z - 1)^2} \quad (3.8)$$

On constate que dans le chaîne directe, il y a bien un retard d'une période.

### 3.4 Synthèse

Dans le plan complexe les pôles continus sont sur une droite d'amortissement inclinée d'un certain angle  $\Theta$ ,  $\sin(\Theta) = 0,69$ . C'est le sin de l'angle d'inclinaison de la droite d'amortissement sur laquelle se trouvent les pôles. Le  $\sin(\Theta)$  détermine ainsi le dépassement de 5% cité dans l'énoncé du laboratoire et qui est une des spécifications du régulateur.

Ensuite, nous avons le temps de réponse à 95% de 1. Si nous traduisons cela sous forme de pôles et de zéro dans le cas d'un filtre du 1<sup>er</sup> ordre, nous trouvons que le lien entre un pôle et une constante de temps est l'inverse l'un de l'autre. La constante de temps vaut  $T=1/3$ . La partie réelle du pôle va donc se trouver à l'inverse (et signe opposé) de cette constante de temps. On peut le voir sur la Figure 3.1 où, comme on l'a dit,  $\delta = T^{-1}$  et donc  $\delta = 3$ . On trouve ainsi la paire de pôles complexes qui donne en boucle fermée une réponse pour que les deux premières conditions de l'énoncé soient respectées.

Nous pouvons également faire la synthèse du régulateur. Nous savons que  $H_s(Z)$  est sous la forme :

$$H_s(Z) = \frac{\dots}{(Z - P_{d1})(Z - P_{d2})} \quad (3.9)$$

Nous cherchons à trouver les valeurs de  $P_{d1}$  et  $P_{d2}$ . Nous allons les trouver par équivalences avec  $F(Z)$ , la transmittance en boucle fermée.

$$F(Z) = \frac{k(Z - n)}{(Z - 1)^2 + k(Z - n)} \quad (3.10)$$



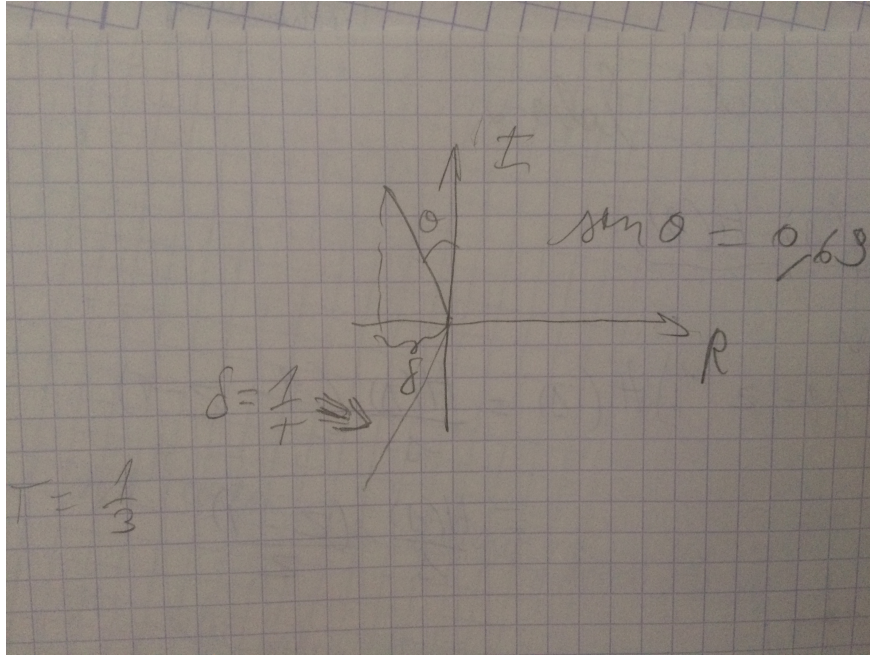


FIGURE 3.1 – Temps de réponse.

$$\begin{cases} k = 2 - P_{d1} - P_{d2} \\ n = \frac{(1 - P_{d1}P_{d2})}{k} \end{cases} \quad (3.11)$$

En utilisant la fonction `dtr2ord2o.m` fournie, nous avons pu générer la transmittance d'un système continu du second ordre répondant aux spécifications. Nous avons pu extraire les valeurs  $P_{d1}$  et  $P_{d2}$  de cette transmittance, et par résolution du système 3.11 nous avons obtenu la transmittance du système à synthétiser en boucle fermée.

Cette séquence d'opération a été réalisé sous MATLAB à l'aide du script suivant :

```
h = 0.1;
nH = 1;
dH = conv([1 0], [1,0.5]);
Hc = tf(nH, dH);
Hd = c2d(Hc, h, 'zoh');

% R(z) = [K(Z-p)(Z-n)]/[(Z-z)(Z-1)]
[z,p,~] = zpndata(Hd, 'v');
p = p(2);

[pc] = dtr2ord2o(1, 5, 5); % trouve les poles pd1 et pd2
pd = exp(pc*h);           % discretise les poles
K = 2-pd(1)-pd(2);        % calcul le gain d'Evans unite
n = (1-pd(1)*pd(2))/K;    % calcul du zero additionnel

Z = tf('z', h);
F = K*(Z-n)/((Z-1)^2+K*(Z-n)); % boucle fermee
R = K*(Z-p)*(Z-n)/((Z-z)*(Z-1)); % regulateur

% autre maniere de fermer la boucle
Bo = R*Hd;
Bf = feedback(Bo,1);
Bf = minreal(Bf);
```

### 3.5 Conclusion

Une fois les valeurs de  $k$  et  $n$  obtenues, la fonction de transfert du régulateur  $R(Z)$  et la transmittance en boucle fermée  $F(Z)$ . Nous pouvons finalement réaliser un modèle simulink pour simuler l'exactitude de nos calculs. Nous avons tenté de reproduire au mieux l'exemple présenté au laboratoire, notre version est présenté à la figure 3.2.

La partie supérieur du graphique représente l'action correctrice, on note ses oscillations du à la présence d'un zéro dans la partie gauche du cercle des pôles et des zéros.

Dans la partie inférieur du graphique, nous observons tout d'abord l'échelon unitaire en jaune s'exprimant à 0.5 unité de temps. La courbe en bleu est l'équivalent en  $S$  de la fonction  $F(Z)$ , on peut y noter sa réponse stable avec un très faible dépassement. Et pour finir en orange se trouve la sortie du système continue  $H_c(S)$  qui est placé en cascade à la suite du régulateur  $R(Z)$ . On désirait un dépassement de 5% mais nous obtenons à la place un dépassement monstrueux, cela est dû au zéro que nous avons du ajouter qui entraine également les oscillations de la réponse entre chaque instant d'échantillonnage. Afficher la sortie du système continue au lieu de  $F(Z)$  permet d'observer ces oscillations qui seraient cachées dans l'équivalent échantillonné.

On peut noter que le régulateur effectue correctement sa tâche puisque après une phase de stabilisation et à chaque instant d'échantillonnage, toutes les 0.1 unités de temps, la différence entre la courbe et la valeur attendue est 0!

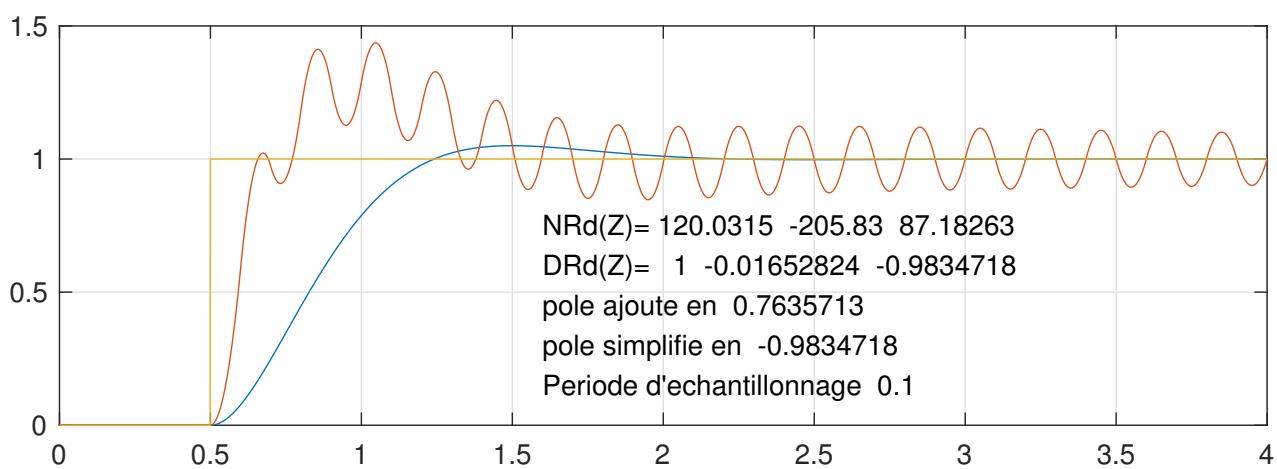
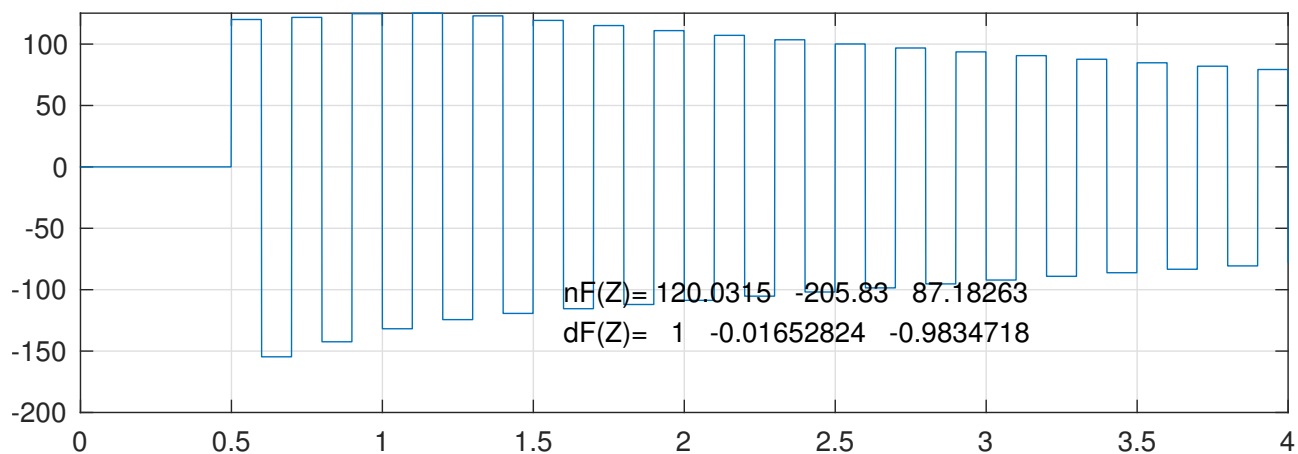


FIGURE 3.2 – Simulation de la transmittance en boucle fermée échantillonnée. On peut apercevoir sur la courbe orange les oscillations de la sortie entre chaque période d'échantillonnage qui dure 100 ms.

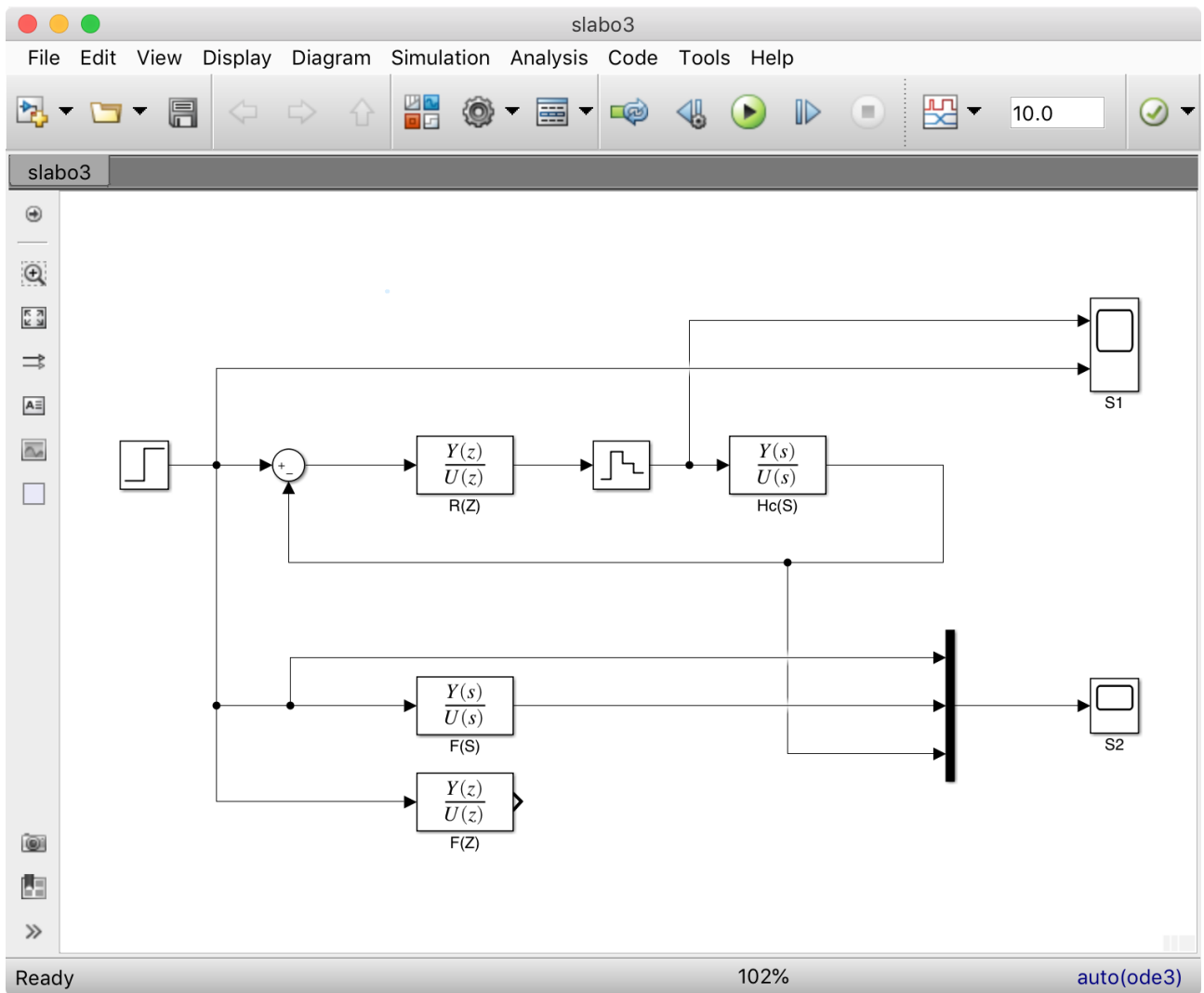


FIGURE 3.3 – Schéma-bloc assemblé dans simulink pour effectuer nos essais.

# Annexe A

## Séance 1 : Codes matlab

La fonction ci-dessous permet de discrétiser un système d'après les méthodes des différences finies (*gauche, droite centrale*) et par l'équivalent échantillonné bloqué.

Les paramètres utilisés sont :

- $H$  : expression (en  $s$ ) du système
- $pe$  : la période d'échantillonnage.

Les résultats obtenus sont ensuite comparés sous leur formes temporelles et fréquentielles.

```
%function s1_plot(H,pe)
z = tf('z',pe);

% équivalent bloqué & signal de base
Hb = c2d(H,pe);
[yb,t] = step(Hb);
ye = 1-exp(-t);

%Différences finies à gauche
sg = (z-1)/pe;
Hg = 1/(sg+1);
yg = step(Hg);

%Différences finies à droite
sd = (z-1)/(pe*z);
Hd = 1/(sd+1);
yd = step(Hd);

%Différences finies central
sc = (z-1)/(z+1)*2/pe;
Hc = 1/(sc+1);
yc = step(Hc);

[~,~,wout] = bode(H);

% PLOT
figure

subplot(1,3,1)
plot(t,ye,'-*',t,yg,'-*',t,yd,'-*',t,yc,'-*',t,yb,'-')
```

```

title(sprintf('réponse temporelle pour une pe = %f',pe))
legend('Hb','Hg','Hd','Hc','H','Location','southeast');grid
subplot(1,3,2)
title('erreur relative')
plot(t,yb-ye,'-*',t,yg-ye,'-*',t,yd-ye,'-*',t,yc-ye,'-*')
title('erreur relative')
legend('Hb','Hg','Hd','Hc','Location','southeast');grid
subplot(1,3,3)
bode(Hb,Hg,Hd,Hc,H,wout)
legend('Hb','Hg','Hd','Hc','H','Location','southwest');grid

```

La fonction précédente a été utilisée dans l'exercice 2 pour le système de premier ordre  $H(s) = \frac{1}{s+1}$

```

s = tf('s');
H = 1/(s+1);
pe = 1;

```

Ainsi qu'au point 4 pour un troisième ordre :

```

H2 = 1/(s+1)^3;
H2b = c2d(H2,pe);
subplot(1,2,1)
step(H2,H2b)
subplot(1,2,2)
pzmap(H2b)

```