

Techniques de transmission et traitement du signal: Simulation d'une chaîne de transmission numérique avec Matlab

Thierry Sartenaer

Février 2012

1 Introduction

Dans le cadre de cet exercice, on considère un système de transmission numérique multi-utilisateurs destiné à fonctionner sur un réseau câblé. Seule la *couche physique* du système sera abordée, et d'un point de vue strictement *fonctionnel*: un flux binaire se présente à l'un des émetteurs et doit être transmis par des moyens adéquats à l'un des récepteurs situés sur le réseau. Le système fonctionne convenablement si le même flux binaire peut être reproduit à la sortie du récepteur de destination.

Les aspects suivants ne sont donc pas pris en compte:

- la signification des bits transmis et donc l' *application* desservie par le système de transmission;
- le protocole d' *accès multiple* permettant à plusieurs utilisateurs de partager une même ressource physique sur le réseau;
- l'implémentation des différents modules constituant le système au moyen de *composants électroniques*.

L'exercice proposé consiste à simuler la chaîne de transmission numérique, correspondant au réseau câblé décrit dans ce document, à l'aide du logiciel matlab. L'exercice pourra être réalisé individuellement, ou bien par groupes de 2 étudiants. Un rapport complet et soigné devra être remis, obligatoirement au format électronique, à l'adresse `stn@ecam.be`. Ce rapport devra contenir:

- Un exposé de 15 à 25 pages, illustré de résultats graphiques commentés (fichier pdf),
- Le code matlab utilisé pour obtenir les résultats (fichiers .m).

Des rapports intermédiaires seront exigés, selon le calendrier suivant:

- Rapport provisoire relatif à la simulation de l'émetteur: **lundi 21 mars 2011**
- Rapport provisoire relatif à la simulation du canal et du récepteur: **lundi 25 avril 2011**
- Séance de questions-réponses: **lundi 2 mai 2011**
- Rapport final: **lundi 16 mai 2011**

En outre, chaque étudiant sera interrogé sur le contenu de son rapport lors de l'examen oral de juin 2011.

2 Topologie du réseau

On considère un canal multi-utilisateurs (câble partagé) auquel accède un ensemble de K modules répartis spatialement en différents points du canal. Chaque module est géré par un utilisateur déterminé. Les utilisateurs disposent de N ressources physiques, caractérisées par une bande de fréquences déterminée: un premier niveau d'accès multiple est donc implémenté au niveau de la couche physique par la méthode de *répartition en fréquence*. Comme on suppose que $K > N$, ces ressources devront être elles-mêmes partagées entre plusieurs utilisateurs, et un second niveau d'accès multiple devra être mis en oeuvre selon un protocole déterminé (qui ne concerne pas la couche physique). L'utilisation d'une bande de fréquences déterminée sur le canal partagé donne lieu à la définition d'un *canal fréquentiel*.

A un moment donné, chaque module sera capable d'effectuer simultanément les opérations suivantes:

- transmettre un signal sur un des N canaux fréquentiels (ou ne rien transmettre du tout), soit 0 ou 1 *émission*;
- recevoir un signal sur chaque canal fréquentiel, soit N *réceptions*.

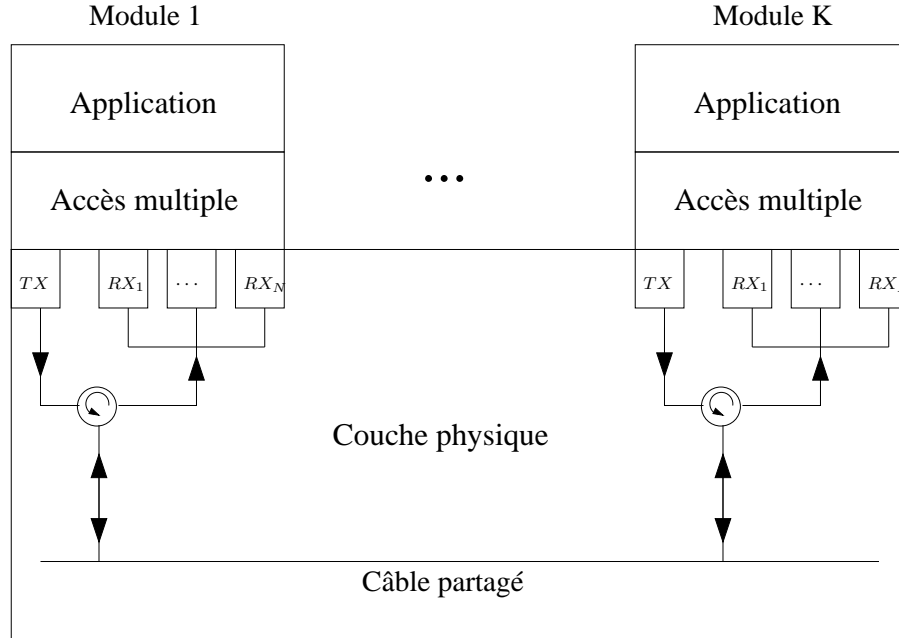


Figure 1: Topologie du réseau et modèle en couches

3 Émetteur

L'émetteur a pour fonction de transmettre un signal analogique susceptible de se propager convenablement sur le canal physique, occupant la bande de fréquences voulue, et avec le niveau de puissance voulu, en fonction des bits d'information fournis à son entrée. Intéressons-nous au message qui sera transmis sur la $n^{\text{ème}}$ ressource physique.

Les messages à transmettre se présentent sous la forme de trames de M bits: $x_n(k) = 0/1$ avec $k \in [0 \cdots M-1]$. Le débit binaire est de R bits/s, soit une durée de $T_b = \frac{1}{R}$ seconde par bit.

Les bits sont ensuite 'codés' sous forme de symboles $a_n(k)$. Le codage choisi est le plus simple qui soit: les symboles $a_n(k) = +1, -1$ correspondent aux bits $x_n(k) = 1, 0$ respectivement. Pour ce codage binaire, la durée d'un symbole est évidemment la même que la durée d'un bit, soit T_b , et le nombre de symboles dans chaque trame est simplement M .

Le signal transmis aura la forme générale suivante:

$$s_n(t) = A \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_n(k) p_n(t - kT_b) \quad (1)$$

Les symboles transmis modulent donc en amplitude une forme d'onde $p_n(t)$ avec $n \in [0 \cdots N-1]$ qui dépend du canal fréquentiel sélectionné. On s'attend effectivement à ce que le spectre du signal transmis dépende directement de la forme de l'impulsion $p_n(t)$ modulée par les symboles. On peut montrer que pour une trame de longueur infinie, la densité spectrale de puissance du signal $s(t)$ est donnée par:

$$\Gamma_s(\omega) = \frac{A^2}{T_b} |P_n(\omega)|^2 \quad (2)$$

Le choix des différentes formes d'onde $p_n(t)$ devra donc permettre de positionner le signal $s(t)$ dans une bande de fréquences correspondant à l'une des N ressources physiques disponibles.



Le choix effectué est le suivant:

$$p_0(t) = g(t) \quad (3)$$

$$p_n(t) = g(t) \cos(\omega_n t) \quad n \in [1 \cdots N-1] \quad (4)$$

avec $\omega_n = 2\pi \frac{2n}{T_b}$. Le filtre de base $g(t)$ un filtre de type 'racine de Nyquist', c'est-à-dire tel que $g(t) \otimes g(-t) = u(t)$ est un filtre de Nyquist. Le filtre de Nyquist sera plus précisément un filtre en cosinus surélevé, avec un facteur de descente α (compris entre 0 et 1). Pour rappel, ce filtre de base a un spectre limité à $|f| \leq \frac{1+\alpha}{2T_b}$. Le choix des fréquences centrales ω_n indiquées plus haut permet donc d'obtenir N spectres disjoints pour les signaux transmis sur les N canaux fréquentiels, quelle que soit la valeur du facteur de descente α .

Théoriquement, un tel signal se construit en attaquant un filtre de réponse impulsionnelle $p_n(t)$ au moyen d'une séquence d'impulsions espacées de T_b et d'amplitudes $a_n = +1, -1$. Il n'est cependant pas facile d'implémenter un filtre analogique ayant la réponse souhaitée, surtout si l'on veut que cette réponse soit programmable en fonction de n . Une solution consiste à générer une version échantillonnée du signal $s(t)$ au moyen d'un filtre numérique à réponse impulsionnelle finie (FIR) et à coefficients programmables, puis à interpoler le signal ainsi construit au moyen d'un convertisseur numérique-analogique (DAC). On construit un signal à cadence $\frac{1}{T_n} = \frac{\beta}{T_b}$, soit β fois plus rapide que la cadence des symboles:

$$s_n(lT_n) = A \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_n(k) p_n(lT_n - kT_b) = A \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_n(k) p_n([l - k\beta]T_n) \quad (5)$$

Le facteur de suréchantillonnage β doit être choisi de manière à respecter le critère de Shannon par rapport à l'échantillonnage du signal continu $s_n(t)$. Autrement dit, le passage de $s_n(lT_n)$ dans un interpolateur idéal doit bien restituer le signal $s(t)$. Considérant le canal fréquentiel le plus élevé et le plus grand facteur de descente, on trouve $\beta \geq 4N - 2$.

Le filtre de Nyquist idéal est de longueur infinie. Or, nous souhaitons l'implémenter au moyen d'un FIR. Une solution consiste à tronquer la réponse impulsionnelle des $p_n(t)$ sur un intervalle $[-LT_b, LT_b]$ symétrique par rapport à l'origine et couvrant un nombre entier de durées symbole. Notons que plus le facteur de descente α est élevé, moins la troncature aura d'effet sur le spectre des formes d'onde $P_n(\omega)$. Les échantillons de la réponse tronquée sont ensuite quantifiés sur n_b bits et stockés dans la mémoire du système. Il y aura N jeux de coefficients pour couvrir les N canaux fréquentiels disponibles, soit au total N jeux de $(2L\beta + 1)$ échantillons codés sur n_b bits.

A la sortie du FIR, on trouve donc une séquence d'échantillons à cadence $\frac{1}{T_n}$, qui sont interpolés au moyen d'un DAC suivi d'un filtre passe-bas responsable de limiter le spectre hors-bande du signal émis. Un amplificateur de gain A permettra enfin d'ajuster la puissance du signal au niveau prévu.

4 Canal

Le canal physique (câble) peut être la source de distorsions linéaires sur le signal transmis à cause du caractère dispersif des câbles (effet de peau et autres pertes qui varient en fonction de la fréquence) et des réflexions multiples des signaux sur les terminaisons mésadaptées ou aux dérivations. On fera l'hypothèse que ces dégradations sont négligeables si l'on choisit de travailler sur une bande de fréquences très étroite (de l'ordre du kHz). Le canal sera simplement modélisé comme un délai τ_n (très petit par rapport à T_b), un facteur d'affaiblissement $\alpha_n < 1$, et l'adjonction d'un bruit blanc gaussien $n(t)$ de densité spectrale bilatérale $N_0/2$. Le signal reçu $r(t)$ s'écrit:

$$r(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \alpha_n s_n(t - \tau_n) + n(t) \quad (6)$$

Notons que les paramètres α_n et τ_n dépendent de la paire émetteur-récepteur considérée, et que le bruit $n(t)$ est propre au récepteur considéré.

5 Récepteur

5.1 Filtres analogiques

La première fonction à réaliser au niveau du récepteur est la séparation du signal reçu en N composantes fréquentielles correspondant aux N bandes susceptibles de contenir un signal d'information en provenance de l'un des K émetteurs. Cette séparation s'effectue au moyen de N filtres analogiques. Le premier sera de type passe-bas, les $N - 1$ suivants seront de type passe-bande. Chacun de ces filtres doit être conçu pour éliminer au mieux les signaux présents dans les $N - 1$ bandes adjacentes, tout en apportant un minimum de distorsion sur le signal contenu dans la bande utile. Pour éviter la distorsion du signal utile, on veillera à ce que l'amplitude de la transmittance et le délai de groupe des filtres soient aussi constants que possible dans la bande passante.

Le filtre idéal aurait une transmittance unitaire dans la bande passante et nulle en dehors. Ce filtre n'est malheureusement pas physiquement réalisable. Les familles de filtres analogiques physiquement réalisables les plus connues sont les filtres de Butterworth, Chebyshev, Bessel et les filtres elliptiques. L'ordre k_n du filtre (qui détermine le nombre de cellules élémentaires à mettre en cascade), les fréquences de coupure à 3 dB f_n^- et f_n^+ , le niveau d'oscillation dans la bande passante ('ripple') et l'affaiblissement hors-bande sont autant de paramètres à prendre éventuellement en compte lors du dimensionnement de ces filtres.

Le signal filtré par le $n^{\text{ème}}$ récepteur s'écrit:

$$r_n(t) = r(t) \otimes f_n(t) \quad (7)$$

avec $f_n(t)$ la réponse impulsionnelle du filtre analogique correspondant au $n^{\text{ème}}$ canal fréquentiel.

5.2 Récepteur idéal

On sait que le récepteur idéal du point de vue du bruit additif est constitué d'un filtre adapté à $\alpha_n p_n(t - \tau_n)$ suivi d'un échantillonneur qui produit une estimée des symboles $\hat{a}_n(k)$ aux instants $kT_b + \tau_n$. Ce filtrage adapté peut être réalisé en échantillonnant d'abord le signal sur n_b bits à une cadence $\frac{1}{T_n}$ (ADC), puis en effectuant le filtrage en numérique au moyen d'un FIR adapté au FIR d'émission.

L'estimée ainsi produite s'écrit:

$$\hat{a}_n(k) = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{l=-\infty}^{+\infty} h_{mn}(l) a_m(k-l) + \nu_n(k) \quad (8)$$

Le filtre adapté maximise en fait le rapport signal-à-bruit (SNR), c'est-à-dire le rapport entre la puissance du terme utile $h_{nn}(0)a_n(k)$ et la puissance du bruit additif $\nu_n(k)$ qui résulte du passage du bruit $n(t)$ dans le filtre analogique et le filtre adapté.

Les termes du type $h_{mn}(l) a_m(k-l)$ avec $m \neq n$ représentent l'influence des signaux transmis sur les canaux adjacents, qui n'ont pas été complètement éliminés par le filtrage analogique. Augmenter la sélectivité des filtres analogiques permettra donc de diminuer l'importance de ces termes.

Les termes du type $h_{nn}(l) a_m(k-l)$ avec $l \neq 0$ représentent l'interférence entre symboles voisins. Ces termes seront nuls si le critère de Nyquist est respecté. Le choix d'un filtre de type 'demi-Nyquist' pour le filtre de base $g(t)$ permet effectivement d'avoir un canal équivalent $p_n(t) \otimes p_n(-t)$ qui satisfait à ce critère. Certaines imperfections du système, cependant, nous éloigneront de ces conditions idéales:

- Les FIR utilisés sont tronqués et leurs échantillons quantifiés. Augmenter la longueur $2L + 1$ du FIR, diminuer le pas de quantification des échantillons et augmenter la valeur du facteur de descente α permettra de limiter l'interférence entre symboles.
- Les filtres analogiques influencent le canal équivalent en déformant le signal situé dans la bande passante. Le canal équivalent s'écrit en fait $p_n(t) \otimes f_n(t) \otimes p_n(-t)$. Diminuer les distorsions linéaires dans la bande passante du filtre permettra donc aussi de limiter l'interférence entre symboles.

5.3 Synchronisation

La sortie du filtre adapté doit être échantillonnée aux bons instants pour produire une estimée correcte des symboles transmis. Si l'instant d'échantillonnage est mal choisi, on n'a plus la bonne propriété $h_{nn}(l) = \delta(l)$ assurée par le critère de Nyquist et l'interférence entre symboles devient énorme.

Une méthode de synchronisation consiste à démarrer le message avec une courte séquence de symboles connus (séquence pilote de longueur M_s). Le récepteur engendre localement le signal à cadence $\frac{1}{T_n}$ correspondant à la séquence pilote, puis effectue la corrélation du signal reçu avec ce signal local. L'instant où la corrélation est maximale donne l'instant de démarrage k_0 . Les estimées des symboles suivants (inconnus, ceux-là) sont simplement localisées par comptage, en considérant les échantillons aux numéros $k_0 + k\beta$.

5.4 Récepteur simplifié



Les opérations de filtrage adapté et de synchronisation par corrélation sont très coûteuses à mettre en oeuvre si l'on dispose d'un récepteur aux ressources matérielles limitées. Les modifications suivantes sont proposées:

- Le filtre adapté est abandonné. L'estimée d'un symbole donné est obtenue simplement en choisissant un échantillon bien placé du signal reçu. La résistance au bruit est donc diminuée. En outre, le filtre en racine de Nyquist de l'émetteur doit être remplacé par un filtre de Nyquist entier si l'on veut que le critère de Nyquist soit respecté.
- L'ADC sur n_b bits est abandonné. Il est remplacé par un simple comparateur à 2 seuils symétriques qui classe les échantillons selon les ensembles $S_- = [-\infty, -V]$, $S_0 = [-V, +V]$ et $S_+ = [+V, +\infty]$. Le choix du seuil V doit être fait judicieusement par rapport à la dynamique du signal reçu.
- La synchronisation se fait toujours sur base de la séquence pilote, mais simplement en étudiant au préalable l'effet de cette séquence pilote sur le comparateur à seuils, et en comparant la position des déclenchements positifs et négatifs aux instants d'échantillonnage idéaux.

5.5 Prise de décision

L'opération finale consiste à prendre une décision relative aux bits transmis $x_n(k)$ sur base des symboles estimés $\hat{a}_n(k)$. La règle de décision est la suivante: $\hat{x}_n(k) = 1$ si $\hat{a}_n(k) \in S_+$, et $\hat{x}_n(k) = 0$ si $\hat{a}_n(k) \in S_-$. Dans le troisième cas, on a une indétermination. C'est cette règle de décision qui minimise la probabilité d'erreur. Les sources d'erreur sont le bruit additif, les interférences entre canaux, entre symboles, et les erreurs de synchronisation.

6 Exemple

L'exemple suivant est destiné à illustrer les signaux définis plus haut. On a pris $N = 4$ canaux et un débit binaire de $R = 1$ kbits/s. La séquence pilote commune à tous les canaux est $[1, 0, 1, 1, 0]$. Les séquences d'information sur les 4 canaux sont respectivement $[0, 1, 1, 0]$, $[1, 1, 1, 0]$, $[1, 1, 1, 0]$ et $[1, 0, 1, 0]$. Le filtre FIR de base est un filtre en cosinus surélevé avec un facteur de descente $\alpha = 0.4$, à cadence $\frac{1}{T_n} = \frac{64}{T_b}$, et tronqué sur une fenêtre $[-2T_b, 2T_b]$. La bande totale occupée par les canaux passe-bande est donc de 1.4 kHz. Les 2 premiers FIR sont illustrés sur la figure 2, ainsi que les 2 seuils de quantification utilisés au récepteur. Les filtres analogiques utilisés sont des filtres de Butterworth d'ordre 4 dont les fréquences de coupure correspondent aux extrémités de la bande occupée par les FIR. Les gains et délais de groupe des 4 filtres sont illustrés sur la figure 3 en fonction de la fréquence. La figure 4 illustre le signal reçu par les 2 premiers récepteurs, ainsi que leur version quantifiée. Les étoiles donnent les positions choisies par la synchronisation pour localiser les estimées des symboles. Les décisions prises sont toutes correctes.

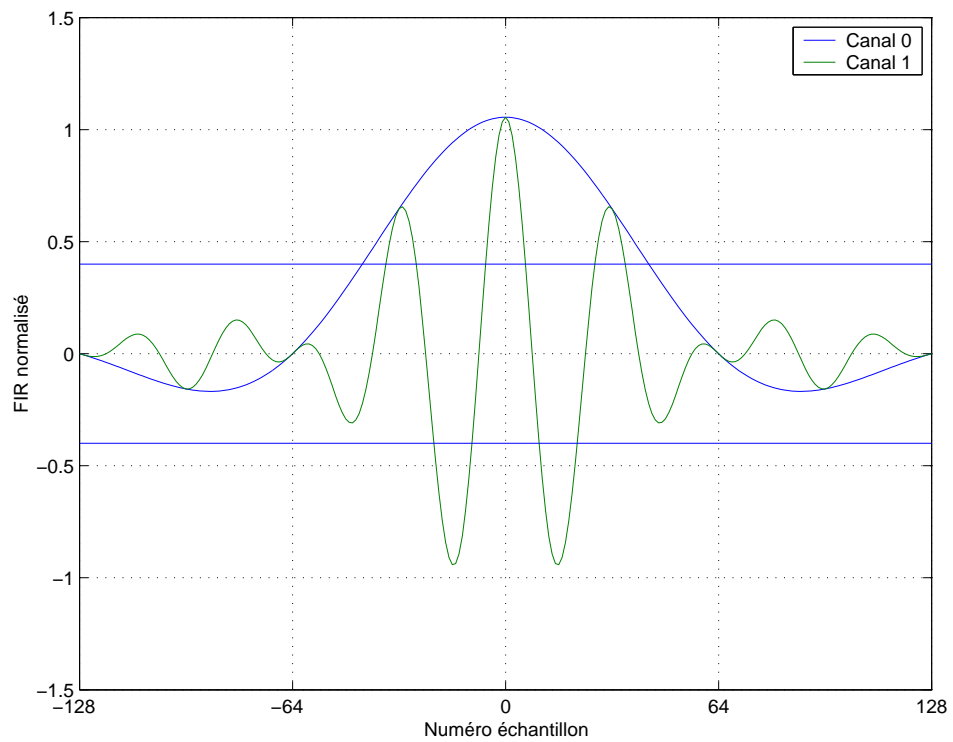


Figure 2: Filtres FIR

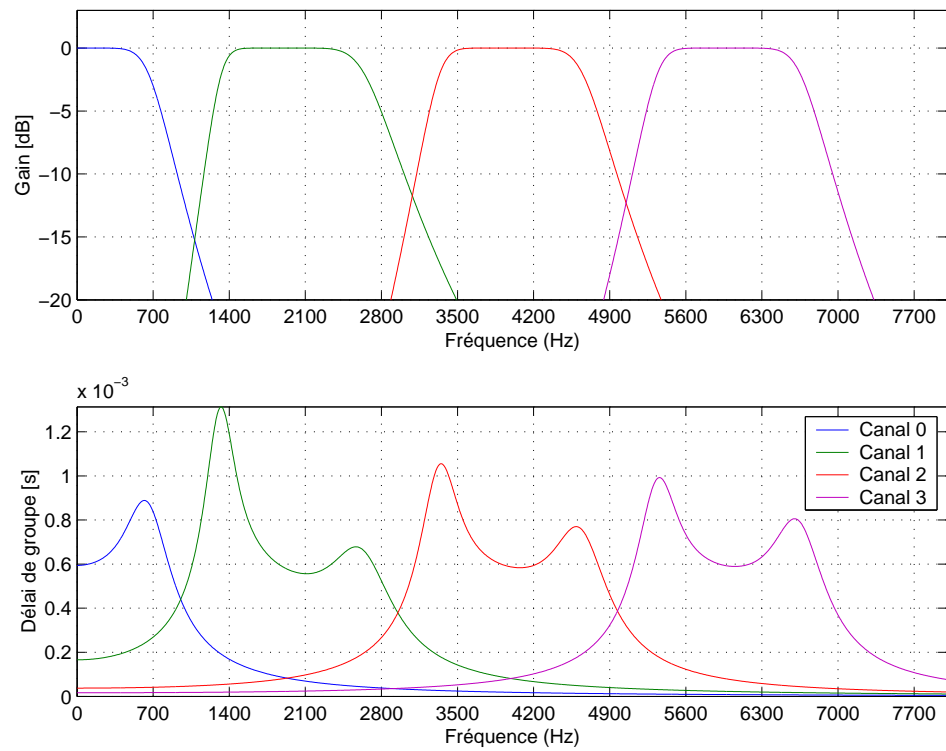


Figure 3: Filtres analogiques

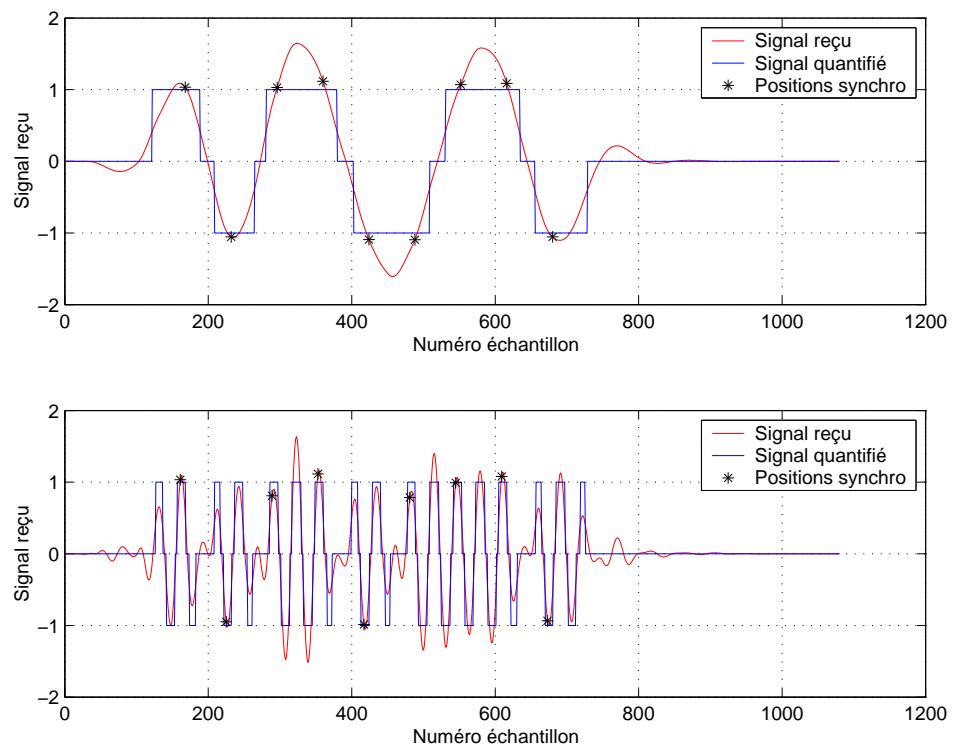


Figure 4: Signaux reçus

7 Exercice principal: simulation Matlab

7.1 Conseils de style

- Veillez à structurer vos programmes au maximum. Un script principal (fichier de commandes, avec extension '.m') reprendra l'ensemble de la simulation, et fera lui-même appel à des scripts secondaires. En particulier, un script rassemblera l'ensemble des paramètres que l'on peut régler 'à la main' et un autre s'occupera de l'affichage des résultats. Un exemple de script principal est donné ici:

```
clear all;
% Définition des paramètres de la simulation
paramètres;
% Calcul des variables utiles dépendant de ces paramètres
setup;
% Calcul des signaux dans l'émetteur
émetteur;
% Passage à travers le canal
canal;
% Calcul des opérations effectuées dans le récepteur
récepteur;
% Affichage des résultats
résultats;
```

- Faites appel aux fonctions (réutilisables!) à chaque fois qu'un résultat doit être calculé sur base de paramètres bien identifiés:

```
function [out1,out2,...] = mafonction(arg1,arg2,...)
```

- Commentez vos programmes. Définissez les entrées et sorties de vos fonctions directement après leur déclaration.
- Un signal, un spectre, etc. sera représenté par une suite de n échantillons stockés dans un vecteur colonne de taille $n \times 1$. S'il y a plusieurs signaux semblables à calculer (par exemple $k \times k$ signaux représentant l'influence de chacun des k utilisateurs sur chacun des k autres) on utilisera une matrice multi-dimensionnelle de taille $n \times k \times k$.
- Ajoutez une grille, un titre, des légendes à vos figures. Choisissez proprement les échelles, en particulier des échelles identiques si vous souhaitez effectuer des comparaisons.

7.2 Calculs à effectuer

Le simulateur devra considérer le scénario général suivant:

- Un sous-ensemble de N modules transmettent simultanément, chacun utilisant un canal fréquentiel spécifique
- Chaque message est constitué d'une trame de M bits, (M_s bits pour la séquence pilote et M_d bits pour les données avec $M = M_s + M_d$)
- Un $N + 1$ ème module 'écoute' le canal et cherche à récupérer les N messages

Matlab ne peut évidemment gérer que des vecteurs d'échantillons, et non des signaux en temps continu. Pour calculer les signaux dans la partie analogique de la chaîne de transmission, on travaillera donc à une cadence d'échantillonnage γ fois plus grande que la cadence des échantillons numériques, soit $\frac{1}{T_a} = \frac{\gamma}{T_n}$.

Voici une liste non-exhaustive des opérations à programmer, avec un certain nombre de fonctions matlab disponibles qui peuvent éventuellement vous aider:

- Définition des paramètres principaux:
 - Taille des messages (M_s , M_d)

- Nature des messages (séquence imposée, séquence générée aléatoirement, ...)
- Nombre de modules sur le réseau (K)
- Nombre de ressources physiques disponibles (N)
- Débit binaire ou durée d'un bit ($R = 1/T_b$)
- Facteur de suréchantillonnage du FIR β
- Paramètres du FIR: α , L , n_b
- Puissance transmise sur le câble P_t , impédance caractéristique du câble Z_c
- Facteur de suréchantillonnage pour les signaux continus (γ)
- Paramètres du canal: gains α_n , délais τ_n
- Rapport E_b/N_0 souhaité au récepteur
- Paramètres des filtres analogiques: nature, ordre, oscillation dans la bande passante ('ripple'), atténuation dans la bande stoppante.
- Seuil V pour le récepteur simplifié
- Calcul de variables utiles dépendant de ces paramètres:
 - Durée d'échantillon numérique $T_n = T_b/\beta$, durée d'échantillon analogique $T_a = T_n/\gamma$
 - Vecteur de fréquences $f = [0, \dots, \frac{0.5}{T_a}]$
 - Fréquences centrales f_n
 - etc.
- Génération des N messages binaires de longueur M .

`rand.m`, `round.m`

- Codage des bits en symboles selon le schéma de codage choisi.
- Calcul des coefficients des N FIR. Normaliser ces coefficients pour que le signal à la sortie du DAC soit de variance unité.

`rcosfir.m`

- Calcul des séquences produites à la sortie des filtres numériques.
- Calcul des signaux analogiques à la sortie des DAC (à considérer ici comme des interpolateurs idéaux): passage à la cadence $1/T_a$.

`interpft.m`

- Réglage du niveau des signaux émis (en volts) pour obtenir une puissance de transmission P_t sur un câble d'impédance caractéristique Z_c à la sortie de chaque émetteur.
- Calcul des signaux atténués et retardés par le canal de transmission $s'_n(t) = \alpha_n s_n(t - \tau_n)$. On supposera un facteur d'affaiblissement α_n identique pour tous les canaux, et des délais τ_n choisis aléatoirement dans l'intervalle $[0, T_b]$. Ces délais reflètent le fait que les différents émetteurs ne transmettent pas leur trame de données de manière synchrone: ces trames arrivent en ordre dispersé au niveau du récepteur.
- Génération du bruit filtré $n_f(t)$ correspondant au bruit blanc $n(t)$ passé dans un filtre passe-bas idéal de bande $2N/T_b$. La variance σ_n^2 des échantillons de bruit générés ici devra permettre d'obtenir le rapport E_b/N_0 souhaité.

`randn.m`

- Calcul du signal total se présentant à l'entrée du récepteur: $r(t) = \sum s'_n(t) + n_f(t)$.
- Calcul des réponses impulsionnelles $f_n(t)$ des N filtres analogiques:
 - Calcul des coefficients a_i , b_i des polynômes des fonctions de transfert $F_n(f)$ en fonction des caractéristiques souhaitées des filtres:

`butter.m`, `cheby1.m`, `cheby2.m`, `ellip.m`, `besself.m`
 - Calcul des fonctions de transfert $F_n(f)$:

`freqs.m`
 - Calcul des réponses impulsionnelles $f_n(t)$ par transformée de Fourier inverse (à effectuer avec précaution!). Tronquer ces réponses impulsionnelles (conserver par exemple 99 % de leur énergie).

`fft.m`, `ifft.m`

- Filtrage du signal reçu par convolution: $r_n(t) = r(t) \otimes f_n(t)$.

`conv.m`

- Mise à l'échelle des signaux (contrôle automatique de gain) pour correspondre à la dynamique de l'ADC.
- Echantillonnage: retour à la cadence $1/T_n$.
- Quantification des signaux sur n_b bits.

`quantiz.m`

- Récepteur adapté:
 - Passage dans un filtre adapté numérique
 - Synchronisation par corrélation avec la séquence pilote
 - Calcul des $M \times N$ symboles estimés $\hat{a}_n(k)$
 - Prise de décision
- Récepteur simplifié:
 - Quantification sur 3 niveaux
 - Synchronisation par observation des flancs montants et descendants et comparaison avec la séquence pilote
 - Calcul des $M \times N$ symboles estimés $\hat{a}_n(k)$
 - Prise de décision
- Calcul du taux d'erreur obtenu sur chaque canal fréquentiel.

`xor.m`

- Affichage graphique des résultats.

`plot.m`, `grid`, `hold`, `zoom`, `axis.m`, `xlabel.m`, `ylabel.m`, `legend.m`, `title.m`,
`gtext.m`, `stem.m`, `subplot.m`

8 Exercices complémentaires

8.1 Diagramme de l'oeil

Le diagramme de l'oeil est un outil permettant d'évaluer qualitativement la qualité d'une transmission numérique corrompue par du bruit et de l'interférence entre symboles. Ce diagramme est défini comme la superposition de toutes les réalisations possibles du signal reçu dans un intervalle bien défini autour de l'instant d'échantillonnage T_0 sélectionné par l'algorithme de synchronisation, par exemple $[T_0 - T_b, T_0 + T_b]$. Pour des signaux binaires, ce diagramme ressemble à un oeil. L'ouverture de l'oeil donne une mesure de la qualité de la transmission.

Action: Afficher le diagramme de l'oeil à la sortie du filtre adapté pour un canal parfait ($N=1$, pas de filtre analogique, pas de bruit). Etudier l'influence du facteur de descente α et de la longueur $2LT_b$ du FIR sur ce diagramme. Observer ensuite l'influence du bruit, du filtre analogique, et enfin de l'interférence en provenance des autres canaux.

8.2 Taux d'erreur binaire sur un canal BBGA

Le taux d'erreur binaire théorique pour un canal BBGA et un filtre adapté est donné par:

$$p_e = 0.5 \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right)$$

Action: Calculer le taux d'erreur obtenu à la sortie du simulateur pour des valeurs faibles du rapport $\frac{E_b}{N_0}$. Ajuster les paramètres de la simulation pour se trouver dans les conditions d'un canal BBGA. Comparer à la courbe théorique. Expliquer comment vous avez ajusté la variance des échantillons de bruit pour obtenir le rapport $\frac{E_b}{N_0}$ souhaité.

8.3 Filtres analogiques

Un filtre analogique (de type passe-bas, passe-haut, passe-bande ou stoppe-bande) est caractérisé par une fonction de transfert polynomiale $H(f)$:

$$H(f) = \frac{b_0 + b_1(j\omega) + b_2(j\omega)^2 + \dots + b_m(j\omega)^m}{a_0 + a_1(j\omega) + a_2(j\omega)^2 + \dots + a_n(j\omega)^n}$$

où les coefficients a_i et b_i sont réels et dépendent des composants électroniques choisis pour implémenter le filtre. En outre, on a des contraintes de causalité et de stabilité sur $H(f)$, ce qui implique notamment que $n \geq m$ et que les pôles soient situés dans la partie gauche du plan s . Le paramètre n est l'ordre du filtre: il donne le nombre de cellules élémentaires à mettre en cascade pour implémenter le filtre.

La conception d'un filtre analogique sélectif en fréquence consiste à trouver des coefficients a_i et b_i permettant d'approximer au mieux la réponse d'un filtre idéal tout en respectant les critères de causalité et stabilité. On effectue généralement la conception pour un filtre passe-bas, puis on utilise une transformation de fréquence pour en déduire le filtre passe-haut, passe-bande ou stoppe-bande correspondant. Pour un ordre donné, le critère d'optimisation choisi pourra varier, ce qui donne lieu à plusieurs familles de filtres:

- Filtres de Butterworth: le module de la fonction de transfert est la plus plate possible ('maximally flat') à l'origine, soit les $n - 1$ premières dérivées de $|H(f)|$ sont nulles en $f = 0$.

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^{2n}}}$$

où f_c est la fréquence de coupure à 3 dB.

- Filtres de Chebyshev, type 1: pour un niveau d'atténuation maximal autorisé dans la bande passante de $|H(f)|$, la raideur de $|H(f)|$ est la plus grande possible dans la zone de transition. $|H(f)|$ oscille dans la bande passante ('ripple').

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2 C_n^2\left(\frac{f}{f_p}\right)}}$$

où $C_n(x)$ est le polynôme de Chebyshev d'ordre n défini par la récurrence $C_n(x) = 2xC_{n-1}(x) - C_{n-2}(x)$ avec $C_0(x) = 1$ et $C_1(x) = x$.

- Filtres de Chebyshev, type 2: pour un niveau d'atténuation minimal imposé dans la bande stoppante de $|H(f)|$, la raideur de $|H(f)|$ est la plus grande possible dans la zone de transition. $|H(f)|$ oscille dans la bande stoppante ('ripple').

$$|H(f)| = \frac{\epsilon^2 C_n^2(\frac{f_s}{f})}{\sqrt{1 + \epsilon^2 C_n^2(\frac{f_s}{f})}}$$

où $C_n(x)$ est le polynôme de Chebyshev d'ordre n .

- Filtres de Caue ou filtres elliptiques: pour un niveau d'atténuation maximal autorisé dans la bande passante de $|H(f)|$ et un niveau d'atténuation minimal imposé dans la bande stoppante de $|H(f)|$, la raideur de $|H(f)|$ est la plus grande possible dans la zone de transition. $|H(f)|$ oscille à la fois dans la bande passante et dans la bande stoppante ('ripple').

$$|H(f)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon_p^2 R_n^2(f, f_p, f_s, \epsilon_p, \epsilon_s)}}$$

où R_n est appelée fraction rationnelle de Chebyshev.

- Filtres de Bessel: la phase de la fonction de transfert est maintenue aussi linéaire que possible dans la bande passante.

$$H(f) = \frac{K_n}{B_n(\frac{f}{f_b})}$$

avec la récurrence de Bessel $B_n(x) = (2n-1)B_{n-1}(x) - x^2 B_{n-2}(x)$ et $B_0(x) = 1$, $B_1(x) = 1 + jx$.

Action: Afficher le module de la fonction de transfert, le délai de groupe et la réponse impulsionnelle de ces différents filtres pour les 3 premiers ordres.

`abs.m`, `angle.m`, `unwrap.m`

8.4 Synchronisation

Action: Illustrer le résultat de la synchronisation: afficher le signal reçu (en sortie de filtre adapté ou à l'entrée du récepteur simplifié) et mettre en évidence les échantillons choisis pour prendre une décision sur chacun des M symboles.

