Capítulo 1

Espaços Vetoriais

Videoaula 12 - Espaços Vetoriais

https://www.youtube.com/watch?v=UkKQEYRdiks

Videoaula 18 - Espaços Vetoriais Abstratos

https://www.youtube.com/watch?v=dkaUQG1Ic3A

Videoaula 13 - Subespaços Vetoriais

https://www.youtube.com/watch?v=4D-q8OIXa94

Videoaula 16 - Base e Dimensão

https://www.youtube.com/watch?v=wSXwQ3gM7Eo

Videoaula 17 - Coordenadas

https://www.youtube.com/watch?v=GPnZsHawg6A

Videoaula 20 - Ortogonalidade

https://www.youtube.com/watch?v=QxsxaQrCHww

Videoaula 21 - Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt

https://www.youtube.com/watch?v=GbQ-pjpsY9Q

1.1 Espaços Vetoriais

Espaços vetoriais são, basicamente, a nossa bancada de trabalho, e os vetores, as ferramentas com as quais construímos muitas funcionalidades. Exemplos disso são as LLMs (ChatGPT, Gemini, DeepSeek) e os sites de busca (Google, DuckDuckGo). Eles utilizam vetores para executar suas tarefas: todas as entradas são convertidas para dentro de um espaço vetorial e, de acordo com a posição do seu vetor, o sistema aproxima os resultados mais relevantes para você.

Além das aplicações na vida real, também temos na matemática pura, espaços vetoriais são muito necessário em cálculo de múltiplas variáveis e uma das bases de análise funcional.

Definição 1.1.1. ***Espaços vetorial*** *é um conjunto V não vazio no qual existe as operações de adição (entre vetores) e multiplicação por um número real (escalar), respeitando as seguintes propriedades com as operações citadas, sendo u, v e w vetores e α e β escalares:*

Adição:

(A1) $u + v = v + u$ *(Comutatividade);*

(A2) $(u + v) + w = u + (v + w)$ *(Associatividade);*

(A3) $\exists v : v + u = u + v = u$ *denotamos* v *por* $\vec{0}$ *(Vetor nulo);*

(A4) $\forall u\ \exists v : u + v = v + u = \vec{0}$ *denotamos* v *por* $-u$ *(Inverso aditivo).*

Multiplicação por Escalar:

(M1) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$ *(Distributividade de um escalar);*

(M2) $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$ *(Distributividade de um vetor);*

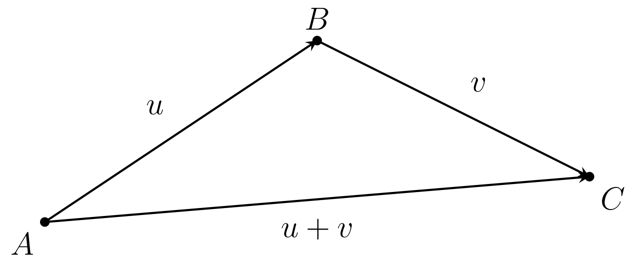
(M3) $v \cdot 1 = v$ *(Multiplicação por 1);*

(M4) $\alpha(\beta \cdot v) = (\alpha \cdot \beta)v$ *(Associatividade).*

Definição 1.1.2. *Elementos de um espaço vetorial V são denominados* ***vetores****.*

Exemplo 1.1.3 (Espaço real - $\mathbb{R}^n$). O plano euclidiano de dimensão n ($\mathbb{R}^n$) é um dos exemplos mais clássicos de espaço vetorial, seja dois vetores $u = (\eta_1, ..., \eta_n)$ e $v = (\delta_1, ..., \delta_n)$ e também α sendo escalar, com sua soma e multiplicação definido por:

$$u + v = (\eta_1 + \delta_1, \dots, \eta_n + \delta_n)$$
$$\alpha \cdot u = (\alpha\eta_1, \dots, \alpha\eta_n)$$



(Exemplo no $\mathbb{R}^2$)

Exemplo 1.1.4 (Espaço de matrizes $n \times m$). O conjunto das matrizes $n \times m$ com soma entre vetores e multiplicação por escalar definido da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2m} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2m} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_{n1} & b_{n2} & ... & b_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a+b)_{11} & (a+b)_{12} & ... & (a+b)_{1m} \\ (a+b)_{21} & (a+b)_{22} & ... & (a+b)_{2m} \\ ... & ... & ... & ... \\ (a+b)_{n1} & (a+b)_{n2} & ... & (a+b)_{nm} \end{bmatrix}$$

$$\alpha \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2m} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\alpha a)_{11} & (\alpha a)_{12} & ... & (\alpha a)_{1m} \\ (\alpha a)_{21} & (\alpha a)_{22} & ... & (\alpha a)_{2m} \\ ... & ... & ... & ... \\ (\alpha a)_{n1} & (\alpha a)_{n2} & ... & (\alpha a)_{nm} \end{bmatrix}$$

é um espaço vetorial, chamado de espaço vetorial da matrizes $n \times m$.

Exercícios

1. Descreva o vetor nulo dos seguintes espaços vetoriais, considerando as operações usuais:

   a)$\mathbb{R}^5$ b)$\mathbb{M}_{3\times 2}$

2. Mostre que o espaço $\mathbb{P}_n = p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n : a_0, a_1, a_2, a_3, ..., a_n \in \mathbb{R}$ dos polinômios reais de grau menor ou igual a n é um espaço vetorial real, com as operações usuais de soma e multiplicação por escalar.

3. Verifique se $V = x \in \mathbb{R} : x > 0$ é um espaço vetorial com as operações de adição ($\oplus$) e a multiplicação por escalar ($\odot$) dadas abaixo. Em caso positivo, prove e indique o vetor nulo (neutro aditivo) e o inverso aditivo.

$$x \oplus y = xy \qquad \text{e} \qquad \alpha \cdot x = x^{\alpha}$$

1.2 Subespaços Vetoriais

Subespaços vetoriais são subconjuntos de um espaço vetorial maior que ainda utilizam das mesmas operações e são ”independentes” do espaço vetorial original, sendo mais exato:

Definição 1.2.1. *Seja E um espaço vetorial. Um* ***subespaço vetorial*** *(ou simplesmente* ***subespaço****) de E é um subconjunto $F \subset E$ com as seguintes propriedades:*

(P1) $\vec{0} \in F$;

(P2) Se $u, v \in F$ *então* $u + v \in F$;

(P3) Se $v \in F$ *então, para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha v \in F$.

Decorrendo da definição, percebemos que todo subespaço é um espaço vetorial em si mesmo, também percebemos que em todo espaço vetorial existe o **subespaço trivial**, composto somente pelo vetor nulo.

Exercícios

1. Prove que um plano é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ se, e somente se, o plano passa pela origem.

2. Sejam $A_{m\times n}$ e $B_{n\times 1}$ matrizes. Prove que o conjunto solução de $AX = B$ é subespaço vetorial de $M_{n\times 1}$ se, e somente se, $B = 0$.

1.3 Base, Dimensão e Coordenadas

Os espaços vetoriais de dimensão finita (finitas coordenadas) são composto por uma estrutura algébrica simples, sendo principalmente evidenciados pelo conceito de base. Pense como a base sendo um gerador de espaços vetoriais, assim como um vetor (ou dois vetores) no $\mathbb{R}^n$ geram uma reta (ou um plano) é possível expandir isso para dimensões maiores ou outros conceitos utilizando de bases.

Recapitulando os conceitos da seção 2.3, mas agora com uma noção vetorial ao invés de matricial, temos que:

Definição 1.3.1. *Seja E um espaço vetorial. Dizemos que $X \subset E$ é* ***linearmente independente*** *quando nenhum vetor $v \in X$ é combinação linear de outros elementos de X.*

Observação. Perceba que dessa definição temos que caso $\vec{0}$ esteja no subconjunto X teremos consequentemente que X é L.D., pois $\vec{0}$ pode ser gerado por quaisquer combinação linear que seus coeficientes sejam todos nulos.

$$\vec{0} = 0 \cdot v_1 + ... + 0 \cdot v_m$$

Definição 1.3.2. *Dizemos que X é* ***linearmente dependente*** *quando* ***não é linearmente independente****.*

Fazendo ainda conexão com a seção 2.3, temos o seguinte teorema que faz a ligação com matrizes:

Teorema 1.3.3. *Seja X um subconjunto no espaço vetorial E. Se a única combinação linear de X que gera o vetor nulo é aquela cujos coeficientes são todos iguais a zero, então X é L.I.*

Prova. Suponha por absurdo que se tenha coeficientes nem todos nulos que podemos ter $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_m v_m = 0$ com $v_1, ..., v_m \in X$. Vamos supor que $\alpha_1 \neq 0$ por via de simplicidade. Então temos que $v_1 = -(\frac{\alpha_2}{\alpha_1})v_2 - ... - (\frac{\alpha_m}{\alpha_1})v_m = 0$, o que deixa v_1 como combinação linear de outros elementos de X. $\square$

Exemplo 1.3.4 (Vetores canônicos). Os vetores canônicos no $\mathbb{R}^n$ são L.I., basta observar que cada vetor difere um do outro em duas coordenadas, pegue $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ e $e_3 = (0, 0, 1)$ no $\mathbb{R}^3$ por exemplo, teremos que é impossível formar uma combinação linear de um a partir do outro.

Definição 1.3.5. *Dizemos que o conjunto $\mathcal{B}$ é uma* ***base*** *do espaço vetorial E se:*

1. *$\mathcal{B} \subset E$;*
2. *$\mathcal{B}$ é L.I;*
3. *$\mathcal{B}$ gera o espaço vetorial E.*

Observação. Isto significa que todos os vetores de E podem ser reescritos como combinação linear dos vetores da base $\mathcal{B}$ de E. Volto a trazer o que foi falado antes da reta e do plano, podemos representar todos os vetores de um plano como combinação linear de dois vetores não paralelos desse mesmo plano, o mesmo ocorre com o $\mathbb{R}^3$, mas com 3 vetores não coplanares.

Definição 1.3.6. *Se $\mathcal{B}$ é uma base de E e w é um vetor formado pela combinação linear $\alpha_1 v_1 + ... + \alpha_m v_m$ com $v_1, ..., v_m \in \mathcal{B}$ então dizemos que $\alpha_1, ..., \alpha_m$ são as **coordenadas** de w.*

Observação. Também pode ser reinterpretado como os coeficientes dados aos vetores da base para se obter o vetor w.

Definição 1.3.7. *A **dimensão** de um espaço vetorial é a cardinalidade de alguma base desse mesmo espaço, ou seja, a quantidade de elementos que uma base desse espaço tem.*

Com o teorema a seguir vemos que podemos sim escolher qualquer base para obtermos a dimensão de um espaço vetorial, por conta que todas as bases de um mesmo espaço vetorial obtém de uma mesma quantidade de elementos.

Lema. Todo sistema linear homogêneo que o número de incógnitas é maior do que o número de equações admite uma solução não trivial.
Prova: Use o teorema 2.2.18. □

Teorema 1.3.8.

Exemplo 1.3.9 (Vetores canônicos). Novamente trazendo os vetores canônicos, como dito antes eles são L.I. e sempre estarão contidos no $\mathbb{R}^n$, podemos reescrever qualquer vetor $v = (a_1, ..., a_n)$ com $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}^n$ como:

$$v = a_1 \cdot e_1 + ... + a_n \cdot e_n$$

Exemplo 1.3.10 (Base nula). Como vimos antes sabemos que existe o espaço vetorial trivial, i.e. que só contém o vetor nulo, este é o único espaço vetorial

1.4 Produto Interno

1.5 Ortogonalidade

1.5.1 Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt