Introdução e Revisão de Álgebra Linear

Anizio Silva Correia Júnior
Mariana Tiemi Yoshioka

30 de novembro de 2025

Sumário

Prefácio

Este documento aborda os conteúdos do curso de Álgebra Linear, ministrado no período 2025.1 do curso Bacharelado em Matemática da Tecnologia e Inovação, do Instituto de Matemática Pura e Aplicada e Tecnologia – IMPA Tech. O objetivo deste material é auxiliar os discentes do IMPA Tech que estão no primeiro ano da graduação nos estudos da presente matéria, bem como servir de revisão para as demais turmas. Sua construção foi feita com a orientação da professora Nara Bobko, em seu projeto de extensão para elaboração de materiais de estudo para Álgebra Linear.

Assim como o curso de Álgebra Linear do IMPA Tech, este material não apresenta pré-requisitos, a não ser um nivelamento de matemática em conceitos básicos do Ensino Médio, que podem ser facilmente resgatados durante a leitura.

No capítulo 1, o foco será, principalmente, resgatar e abordar assuntos básicos, necessários ao discente para o aproveitamento completo do curso de Álgebra Linear, e que possivelmente não foram apresentados no Ensino Médio. Isso inclui noções básicas de vetores, bem como de objetos geométricos como retas e planos. Além disso, tem-se um resgate do conceito de matrizes, em uma perspectiva voltada principalmente para matrizes como vetores, e vice-versa.

No capítulo 2 em diante, conceitos da Álgebra Linear são de fato apresentados, iniciando com sistemas lineares, combinação linear e dependência linear. Em seguida, o capítulo 3 apresenta o coração da Álgebra Linear, que são os espaços vetoriais, a partir de ideias como base de um espaço vetorial e ortogonalidade; e o capítulo 4 segue com outro conceito fundamental, que são as transformações lineares. Por fim, no capítulo 5, autovalores e autovetores são apresentados, trazendo aplicações diretas em diagonalização de matrizes, por exemplo.

Espera-se um bom aproveitamento deste material, que apresenta tópicos de Álgebra Linear de forma direta e clara, com algumas motivações geométricas.

Capítulo 1

Álgebra Vetorial e Geometria Analítica

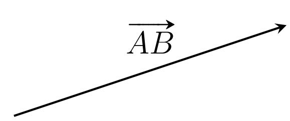
Para iniciar os estudos de Álgebra Linear, é interessante apresentar, inicialmente, conceitos básicos para visualizar e estruturar o conhecimento. Nesse sentido, entender vetores na perspectiva geométrica, ou seja, no plano ($\mathbb{R}^2$) ou no espaço ($\mathbb{R}^3$), é mais intuitivo em um primeiro contato. Nos próximos capítulos, em especial no capítulo 3, a definição de vetores será ampliada para outros espaços vetoriais, com um maior nível de abstração.

1.1 Álgebra Vetorial

Embora iniciemos com Álgebra Vetorial e não Geometria Analítica, é interessante começar com um ponto de vista mais geométrico, para criar intuição.

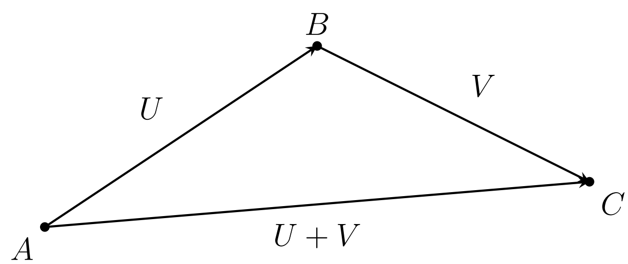
Definição 1.1.1. ***Vetores (geometricamente)*** *são objetos matemáticos que possuem módulo, direção e sentido.*

Usualmente, um vetor é representado por segmentos de retas orientados equipolentes, ou seja, que apresentam mesmo tamanho, direção e sentido.



Note que, pela definição, um vetor não possui "origem fixa"e pode ser representado por diferentes segmentos de reta orientados.

Definição 1.1.2. *Sejam U e V vetores representados por $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$, respectivamente. A* ***soma de vetores*** *$U+V$ é definida como o vetor representado pelo segmento de reta orientado $\overrightarrow{AC}$*



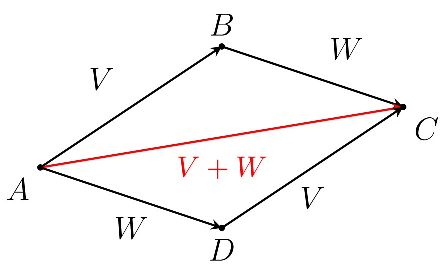
Proposição 1.1.3. *Sejam V, W e U vetores. A soma de vetores segue as seguintes propriedades:*

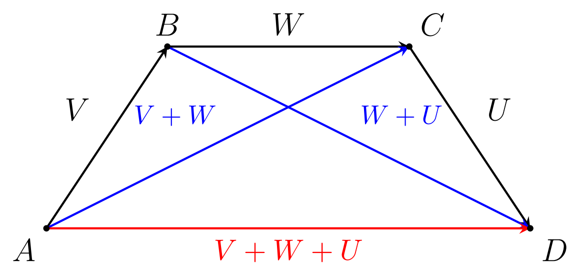
i) $V + W = W + V$ *(comutatividade)*

ii) $V + (W + U) = (V + W) + U$ *(associatividade)*

iii) $\exists$ *vetor* $\bar{0}$, *tal que* $V + \bar{0} = V$ *(existência do elemento neutro/vetor nulo)*

Abaixo seguem ilustrações das propriedades i) e ii).





Definição 1.1.4. *Seja V um vetor. Seu* ***simétrico***, *denotado por $-V$, é o vetor tal que*

$$V + (-V) = \bar{0}$$

Definição 1.1.5. *Sejam V e W vetores. A* ***diferença*** W ***menos*** V *é definida como*

$$W - V = W + (-V)$$

Definição 1.1.6. *Sejam $V \neq \bar{0}$ um vetor e $\alpha \neq 0$ um escalar (ou seja, um número real). A* ***multiplicação do vetor*** V ***por um escalar*** α, *denotada por αV, é definida pelo vetor tal que:*

i) seu módulo é $|\alpha||V|$, onde $|V|$ é o módulo de V;

ii) a direção é a mesma de V;

iii) tem sentido de V se $\alpha > 0$, e sentido de $-V$ se $\alpha < 0$.

Caso $V = \bar{0}$ *ou* $\alpha = 0$, $\alpha V = \bar{0}$

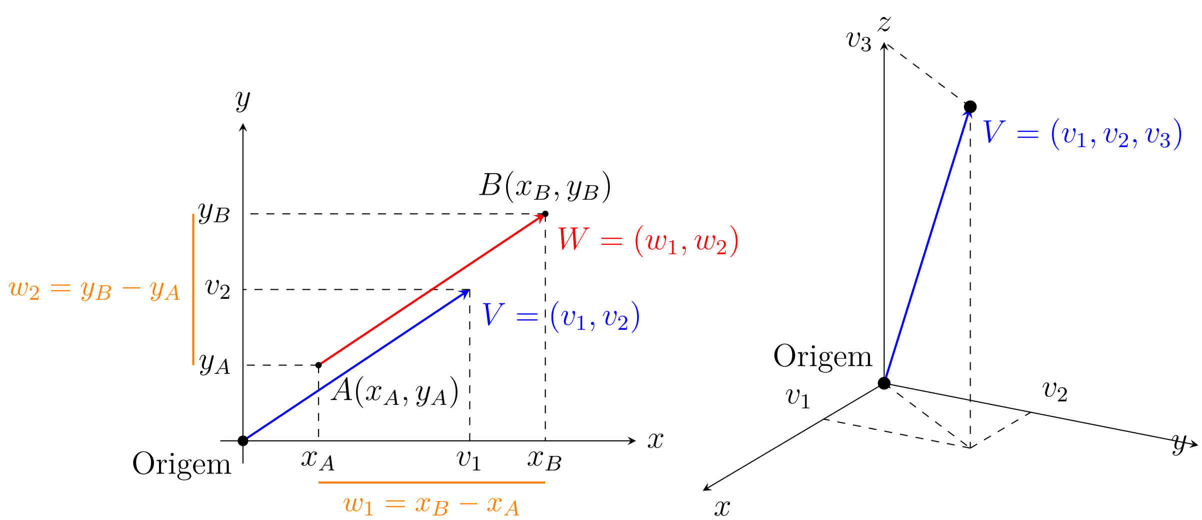
Definição 1.1.7. *Seja* V *um vetor. As* ***componentes de V*** *são cada elemento das coordenadas que representam o ponto final com relação à origem do sistema de coordenadas escolhido.*

Se V *está no plano (*$\mathbb{R}^2$ *ou* ***espaço euclidiano bidimensional****), então suas coordenadas são uma trupla de dois números reais, denotadas usualmente por* (v_1, v_2)*.*

Se V *está no espaço (*$\mathbb{R}^3$ *ou* ***espaço euclidiano tridimensional****), então suas coordenadas são uma tupla de três números reais, denotadas usualmente por* (v_1, v_2, v_3)*.*

Se V *está em "dimensões maiores"(*$\mathbb{R}^n$ *ou* ***espaço euclidiano n-dimensional****), então suas coordenadas são uma tupla de* n *números reais, denotadas usualmente por* $(v_1, \ldots, v_n)$*.*

Abaixo seguem ilustrações de como coordenadas funcionam no plano e no espaço.



(a) Representação no $\mathbb{R}^2$. (b) Representação no $\mathbb{R}^3$.

Figura 1.1: Componentes de vetores em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

Perceba que, para verificar as componentes de um vetor qualquer W representado por um segmento $\overrightarrow{AB}$, basta subtrair as suas coordenadas, de modo que:

$$W = \overrightarrow{AB} \Rightarrow \begin{cases} w_1 = x_B - x_A \\ w_2 = y_B - y_A \end{cases} \Rightarrow W = (x_B - x_A,\, y_B - y_A)$$

Para o $\mathbb{R}^3$, a subtração ocorre da mesma forma.

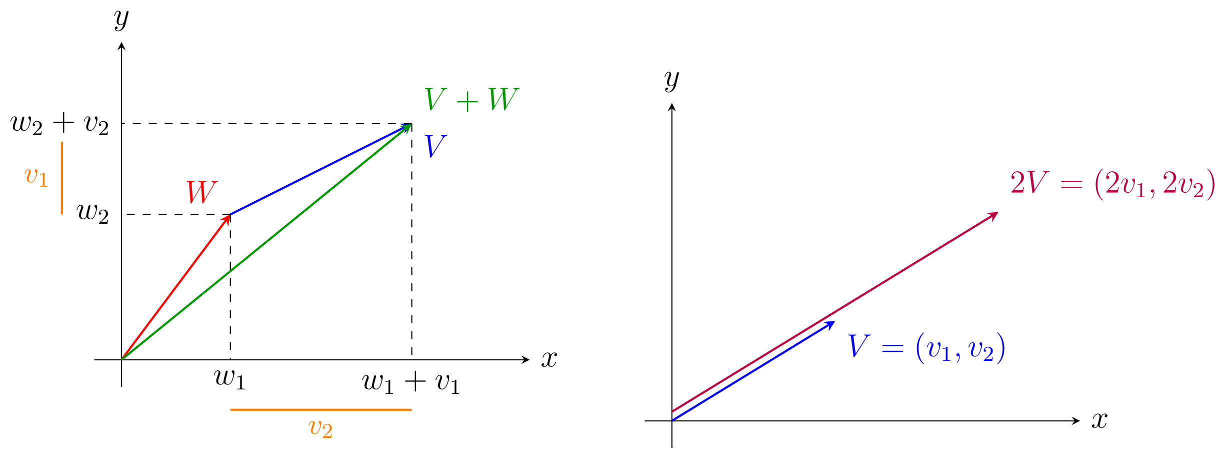
Com isso, note que as operações ficam muito mais fáceis, sem depender sempre do apelo geométrico. Assim, podemos buscar uma nova forma de fazer as operações básicas entre vetores (soma e multiplicação por escalar):

Proposição 1.1.8. *Sejam $V, W \in \mathbb{R}^2$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então,*

i) $V + W = (v_1 + w_1,\ v_2 + w_2)$

ii) $\alpha V = (\alpha v_1,\ \alpha v_2)$

Abaixo temos uma ilustração disso:



(a) Soma de vetores: $V+W = (v_1+w_1,\ v_2+w_2)$.

(b) Multiplicação escalar: $\alpha V = (\alpha v_1, \alpha v_2)$.

Figura 1.2: Ilustração da soma de vetores e multiplicação escalar em $\mathbb{R}^2$.

Para o $\mathbb{R}^3$, essas operações ocorrem da mesma forma. Generalizando para qualquer dimensão ($\mathbb{R}^n$), temos:

Proposição 1.1.9. *Sejam $V, W \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então,*

i) $V + W = (v_1 + w_1, \ldots, v_n + w_n)$

ii) $\alpha V = (\alpha v_1, \ldots, \alpha v_n)$

E se quisermos fazer ambas as operações ao mesmo tempo? Então teremos uma combinação linear!

Definição 1.1.10. *Sejam $V_1, \ldots, V_k \in \mathbb{R}^n$ vetores e $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ escalares. Seja W um vetor tal que*

$$W = \alpha_1 V_1 + \cdots + \alpha_k V_k$$

Então, W é ***combinação linear*** *de $V_1, \ldots, V_k$.*

Abordaremos melhor esse conceito em tópicos mais a frente, como em sistemas lineares.

A partir da definição de coordenadas e da soma/multiplicação de vetores por meio delas, podemos provar as seguintes propriedades:

Teorema 1.1.11. *Sejam U, V e W vetores e α e β escalares. Então:*

i) $U + V = V + U$;

ii) $(U + V) + W = U + (V + W)$;

iii) $U + \bar{0} = U$;

iv) $U + (-U) = \bar{0}$;

v) $\alpha(\beta U) = (\alpha\beta)U$;

vi) $\alpha(U + V) = \alpha U + \alpha V$;

vii) $(\alpha + \beta)U = \alpha U + \beta U$;

viii) $1U = U$.

Outra ideia muito importante é saber o módulo do vetor a partir de seus componentes. Para isso, vamos definir o que chamamos de norma euclidiana.

Definição 1.1.12. *Seja $V \in \mathbb{R}^n$. O seu comprimento, também chamado de* ***norma de V*** *e denotado por $\|V\|$, é dado por*

$$\|V\| = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2}$$

Exemplo 1.1.13. Para um vetor $V \in \mathbb{R}^2$, temos que

$$\|V\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

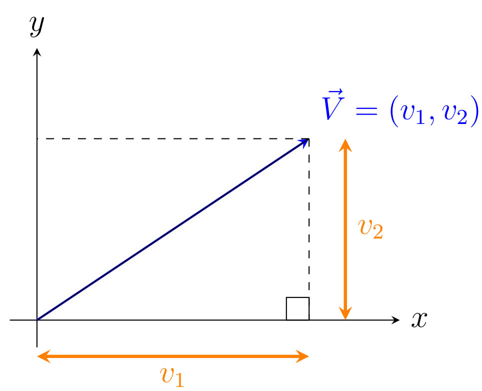


Figura 1.3: Norma de um vetor $\vec{V}$ em $\mathbb{R}^2$.

Essa forma de calcular a norma está ligada ao cálculo do tamanho de vetores no $\mathbb{R}^2$ e no $\mathbb{R}^3$, utilizando o Teorema de Pitágoras.

A partir dessa definição de norma, podemos definir outro conceito fundamental: o produto escalar.

Definição 1.1.14. *Sejam $V, W \in \mathbb{R}^n$, onde $n \in 2, 3$. O* ***produto escalar*** *ou* ***produto interno*** *entre esses vetores, denotado por $V \cdot W$, é dado por*

$$V \cdot W = \begin{cases} 0, \text{ se } V = \bar{0} \text{ ou } W = \bar{0} \\ \|V\|\|W\|\cos(\theta), \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

onde θ é o ângulo entre eles.

Note, no entanto, que o ângulo entre dois vetores só é bem definido para vetores em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. Para resolver esse problema, podemos encontrar uma definição equivalente para o produto interno e depois generalizá-la para dimensões maiores.

Teorema 1.1.15. *Sejam V e W vetores. Então, seu produto interno é dado por*

$$V \cdot W = \begin{cases} v_1w_1 + v_2w_2v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3, \textbf{\textit{ se }} V, W \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

1.2 Geometria Analítica

1.3 Matrizes como Vetores

Capítulo 2

Sistemas Lineares

2.1 Matrizes como Sistemas Lineares

2.2 Combinação Linear

2.3 Dependência Linear

Capítulo 3

Espaços Vetoriais

Videoaula 12 - Espaços Vetoriais

https://www.youtube.com/watch?v=UkKQEYRdiks

Videoaula 18 - Espaços Vetoriais Abstratos

https://www.youtube.com/watch?v=dkaUQG1Ic3A

Videoaula 13 - Subespaços Vetoriais

https://www.youtube.com/watch?v=4D-q8OIXa94

Videoaula 16 - Base e Dimensão

https://www.youtube.com/watch?v=wSXwQ3gM7Eo

Videoaula 17 - Coordenadas

https://www.youtube.com/watch?v=GPnZsHawg6A

Videoaula 20 - Ortogonalidade

https://www.youtube.com/watch?v=QxsxaQrCHww

Videoaula 21 - Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt

https://www.youtube.com/watch?v=GbQ-pjpsY9Q

3.1 Espaços Vetoriais

Espaços vetoriais são, basicamente, a nossa bancada de trabalho, e os vetores, as ferramentas com as quais construímos muitas funcionalidades. Exemplos disso são as LLMs (ChatGPT, Gemini, DeepSeek) e os sites de busca (Google, DuckDuckGo). Eles utilizam vetores para executar suas tarefas: todas as entradas são convertidas para dentro de um espaço vetorial e, de acordo com a posição do seu vetor, o sistema aproxima os resultados mais relevantes para você.

Além das aplicações na vida real, também temos na matemática pura, espaços vetoriais são muito necessário em cálculo de múltiplas variáveis e uma das bases de análise funcional.

Definição 3.1.1. ***Espaços vetorial*** *é um conjunto V não vazio no qual existe as operações de adição (entre vetores) e multiplicação por um número real (escalar), respeitando as seguintes propriedades com as operações citadas:*

Adição:

(A1) $u + v = v + u$ *(Comutatividade);*

(A2) $(u + v) + w = u + (v + w)$ *(Associatividade);*

(A3) $\exists v : v + u = u + v = u$ *denotamos v por $\vec{0}$ (Vetor nulo);*

(A4) $\forall u\ \exists v : u + v = v + u = \vec{0}$ *denotamos v por $-u$ (Inverso aditivo).*

Multiplicação por Escalar:

(M1) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$ *(Distributividade de um escalar);*

(M2) $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$ *(Distributividade de um vetor);*

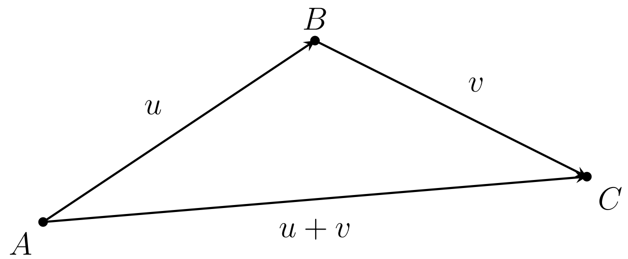
(M3) $v \cdot 1 = v$ *(Multiplicação por 1);*

(M4) $\alpha(\beta \cdot v) = (\alpha \cdot \beta)v$ *(Associatividade).*

Definição 3.1.2. *Elementos de um espaço vetorial V são denominados* ***vetores****.*

Exemplo 3.1.3 (Exemplo de espaço vetorial). O plano euclidiano de dimensão n ($\mathbb{R}^n$) é um dos exemplos mais clássicos de espaço vetorial, seja dois vetores $u = (\eta_1, ..., \eta_n)$ e $v = (\delta_1, ..., \delta_n)$ e também dois escales α e β, com sua soma e multiplicação definido por:

$$u + v = (\eta_1 + \delta_1, \dots, \eta_n + \delta_n)$$
$$\alpha \cdot u = (\alpha\eta_1, \dots, \alpha\eta_n)$$



(Exemplo no $\mathbb{R}^2$)

Exemplo 3.1.4 (Exemplo de espaço vetorial). O conjunto das matrizes $n \times m$ com soma entre vetores e multiplicação por escalar definido da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2m} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2m} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_{n1} & b_{n2} & ... & b_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a+b)_{11} & (a+b)_{12} & ... & (a+b)_{1m} \\ (a+b)_{21} & (a+b)_{22} & ... & (a+b)_{2m} \\ ... & ... & ... & ... \\ (a+b)_{n1} & (a+b)_{n2} & ... & (a+b)_{nm} \end{bmatrix}$$

$$\alpha \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2m} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\alpha a)_{11} & (\alpha a)_{12} & ... & (\alpha a)_{1m} \\ (\alpha a)_{21} & (\alpha a)_{22} & ... & (\alpha a)_{2m} \\ ... & ... & ... & ... \\ (\alpha a)_{n1} & (\alpha a)_{n2} & ... & (\alpha a)_{nm} \end{bmatrix}$$

é um espaço vetorial, chamado de espaço vetorial da matrizes $n \times m$.

Exercícios

1. Descreva o vetor nulo dos seguintes espaços vetoriais, considerando as operações usuais:

   a)$\mathbb{R}^5$ b)$\mathbb{M}_{3\times 2}$

2. Mostre que o espaço $\mathbb{P}_n = p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n : a_0, a_1, a_2, a_3, ..., a_n \in \mathbb{R}$ dos polinômios reais de grau menor ou igual a n é um espaço vetorial real, com as operações usuais de soma e multiplicação por escalar.

3. Verifique se $V = x \in \mathbb{R} : x > 0$ é um espaço vetorial com as operações de adição ($\oplus$) e a multiplicação por escalar ($\odot$) dadas abaixo. Em caso positivo, prove e indique o vetor nulo (neutro aditivo) e o inverso aditivo.

$$x \oplus y = xy \qquad \text{e} \qquad \alpha \cdot x = x^{\alpha}$$

3.2 Subespaços Vetoriais

Subespaços vetoriais são subconjuntos de um espaço vetorial maior que ainda utilizam das mesmas operações e são ”independentes” do espaço vetorial original, sendo mais exato:

Definição 3.2.1. *Seja E um espaço vetorial. Um* ***subespaço vetorial*** *(ou simplesmente* ***subespaço****) de E é um subconjunto $F \subset E$ com as seguintes propriedades:*

(P1) $\vec{0} \in F$;

(P2) Se $u, v \in F$ então $u + v \in F$;

(P3) Se $v \in F$ então, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha v \in F$.

Decorrendo da definição, percebemos que todo subespaço é um espaço vetorial em si mesmo, também percebemos que em todo espaço vetorial existe o **subespaço trivial**, composto somente pelo vetor nulo.

Exercícios

1. Prove que um plano é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ se, e somente se, o plano passa pela origem.

2. Sejam $A_{m\times n}$ e $B_{n\times 1}$ matrizes. Prove que o conjunto solução de $AX = B$ é subespaço vetorial de $M_{n\times 1}$ se, e somente se, $B = 0$.

3.3 Base e Coordenadas

3.4 Ortogonalidade

3.4.1 Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt

Capítulo 4

Transformações Lineares

4.1 Teorema Núcleo-Imagem

4.2 Matriz de uma Transformação Linear

Capítulo 5

Autovalores e Autovetores

5.1 Polinômios

5.2 Diagonalização

Apêndice A

Aplicações (Cônicas)

Referências Bibliográficas

[1] Lang, Serge. *Linear Algebra*. 3ł ed.

[2] Hoffman, Kenneth; Kunze, Ray. *Linear Algebra*. 2ł ed.

[3] Lima, Elon Lages. *Álgebra Linear*. 10ł ed.

[4] Axler, Sheldon. *Linear Algebra Done Right*. 4ł ed.

[5] Santos, Reginaldo. *Um Curso de Geometria Analítica e Álgebra Linear*. Cópia digital.