Introdução e Revisão de Álgebra Linear

Anizio Silva Correia Júnior
Mariana Tiemi Yoshioka

14 de dezembro de 2025

Sumário

Prefácio

Este documento aborda os conteúdos do curso de Álgebra Linear, ministrado no período 2025.1 do curso Bacharelado em Matemática da Tecnologia e Inovação, do Instituto de Matemática Pura e Aplicada e Tecnologia – IMPA Tech. O objetivo deste material é auxiliar os discentes do IMPA Tech que estão no primeiro ano da graduação nos estudos da presente matéria, bem como servir de revisão para as demais turmas. Sua construção foi feita com a orientação da professora Nara Bobko, em seu projeto de extensão para elaboração de materiais de estudo para Álgebra Linear.

Assim como o curso de Álgebra Linear do IMPA Tech, este material não apresenta pré-requisitos, a não ser um nivelamento de matemática em conceitos básicos do Ensino Médio, que podem ser facilmente resgatados durante a leitura.

No capítulo 1, o foco será, principalmente, resgatar e abordar assuntos básicos, necessários ao discente para o aproveitamento completo do curso de Álgebra Linear, e que possivelmente não foram apresentados no Ensino Médio. Isso inclui noções básicas de vetores, bem como de objetos geométricos como retas e planos. Além disso, tem-se um resgate do conceito de matrizes, em uma perspectiva voltada principalmente para matrizes como vetores, e vice-versa.

No capítulo 2 em diante, conceitos da Álgebra Linear são de fato apresentados, iniciando com sistemas lineares, combinação linear e dependência linear. Em seguida, o capítulo 3 apresenta o coração da Álgebra Linear, que são os espaços vetoriais, a partir de ideias como base de um espaço vetorial e ortogonalidade; e o capítulo 4 segue com outro conceito fundamental, que são as transformações lineares. Por fim, no capítulo 5, autovalores e autovetores são apresentados, trazendo aplicações diretas em diagonalização de matrizes, por exemplo.

Espera-se um bom aproveitamento deste material, que apresenta tópicos de Álgebra Linear de forma direta e clara, com algumas motivações geométricas.

Capítulo 1

Introdução

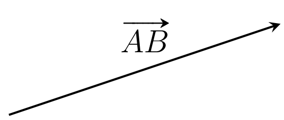
Para iniciar os estudos de Álgebra Linear, é interessante apresentar, inicialmente, conceitos básicos para visualizar e estruturar o conhecimento. Nesse sentido, entender vetores na perspectiva geométrica, ou seja, no plano ($\mathbb{R}^2$) ou no espaço ($\mathbb{R}^3$), é mais intuitivo em um primeiro contato. Nos próximos capítulos, em especial no capítulo 3, a definição de vetores será ampliada para outros espaços vetoriais, com um maior nível de abstração.

1.1 Álgebra Vetorial

Embora iniciemos com Álgebra Vetorial e não Geometria Analítica, é interessante começar com um ponto de vista mais geométrico, para criar intuição.

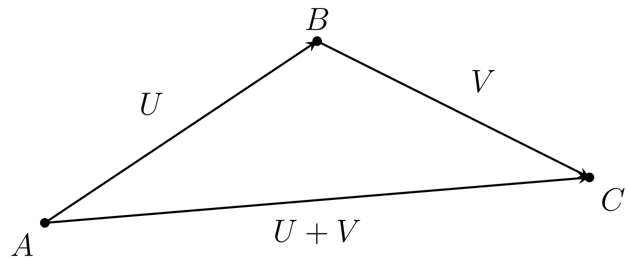
Definição 1.1.1. ***Vetores (geometricamente)*** *são objetos matemáticos que possuem módulo, direção e sentido.*

Usualmente, um vetor é representado por segmentos de retas orientados equipolentes, ou seja, que apresentam mesmo tamanho, direção e sentido.



Note que, pela definição, um vetor não possui "origem fixa"e pode ser representado por diferentes segmentos de reta orientados.

Definição 1.1.2. *Sejam U e V vetores representados por $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$, respectivamente. A* ***soma de vetores*** *$U+V$ é definida como o vetor representado pelo segmento de reta orientado $\overrightarrow{AC}$*



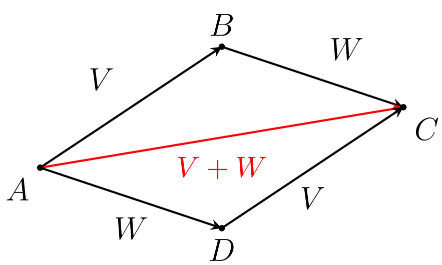
Proposição 1.1.3. *Sejam V, W e U vetores. A soma de vetores segue as seguintes propriedades:*

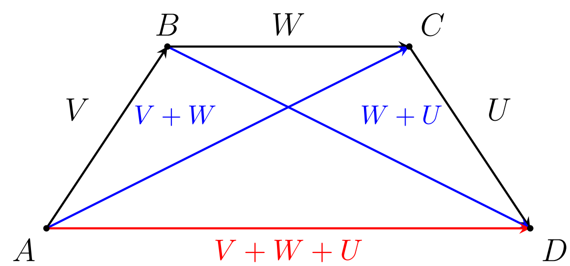
i) $V + W = W + V$ *(comutatividade)*

ii) $V + (W + U) = (V + W) + U$ *(associatividade)*

iii) $\exists$ *vetor* $\bar{0}$, *tal que* $V + \bar{0} = V$ *(existência do elemento neutro/vetor nulo)*

Abaixo seguem ilustrações das propriedades i) e ii).





Definição 1.1.4. *Seja V um vetor. Seu* ***simétrico****, denotado por $-V$, é o vetor tal que*

$$V + (-V) = \bar{0}$$

Definição 1.1.5. *Sejam V e W vetores. A* ***diferença*** W ***menos*** V *é definida como*

$$W - V = W + (-V)$$

Definição 1.1.6. *Sejam $V \neq \bar{0}$ um vetor e $\alpha \neq 0$ um escalar (ou seja, um número real). A* ***multiplicação do vetor*** V ***por um escalar*** α, *denotada por αV, é definida pelo vetor tal que:*

i) seu módulo é $|\alpha||V|$, onde $|V|$ é o módulo de V;

ii) a direção é a mesma de V;

iii) tem sentido de V se $\alpha > 0$, e sentido de $-V$ se $\alpha < 0$.

Caso $V = \bar{0}$ *ou* $\alpha = 0$, $\alpha V = \bar{0}$

Note, portanto, que, para um vetor qualquer W ser paralelo (ou seja, ter a mesma direção que) a outro vetor V, baste que exista um $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $W = \alpha V$.

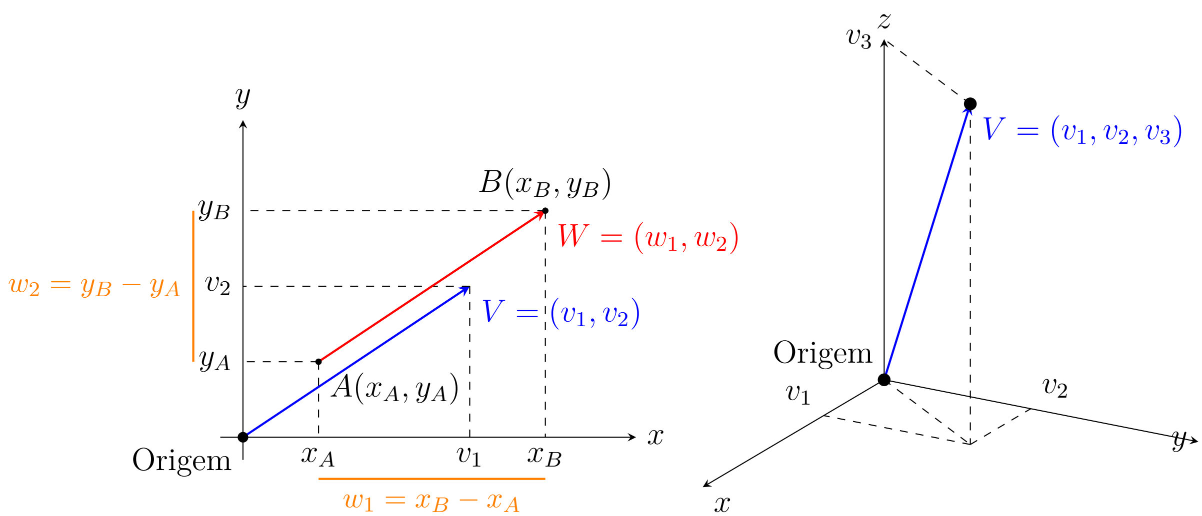
Definição 1.1.7. *Seja V um vetor. As **componentes de V** são cada elemento das coordenadas que representam o ponto final com relação à origem do sistema de coordenadas escolhido.*

*Se V está no plano ($\mathbb{R}^2$ ou **espaço euclidiano bidimensional**), então suas coordenadas são uma trupla de dois números reais, denotadas usualmente por (v_1, v_2).*

*Se V está no espaço ($\mathbb{R}^3$ ou **espaço euclidiano tridimensional**), então suas coordenadas são uma tupla de três números reais, denotadas usualmente por (v_1, v_2, v_3).*

*Se V está em "dimensões maiores"($\mathbb{R}^n$ ou **espaço euclidiano n-dimensional**), então suas coordenadas são uma tupla de n números reais, denotadas usualmente por $(v_1, \ldots, v_n)$.*

Abaixo seguem ilustrações de como coordenadas funcionam no plano e no espaço.



(a) Representação no $\mathbb{R}^2$. (b) Representação no $\mathbb{R}^3$.

Figura 1.1: Componentes de vetores em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

Perceba que, para verificar as componentes de um vetor qualquer W representado por um segmento $\overrightarrow{AB}$, basta subtrair as suas coordenadas, de modo que:

$$W = \overrightarrow{AB} \Rightarrow \begin{cases} w_1 = x_B - x_A \\ w_2 = y_B - y_A \end{cases} \Rightarrow W = (x_B - x_A,\, y_B - y_A)$$

Para o $\mathbb{R}^3$, a subtração ocorre da mesma forma.

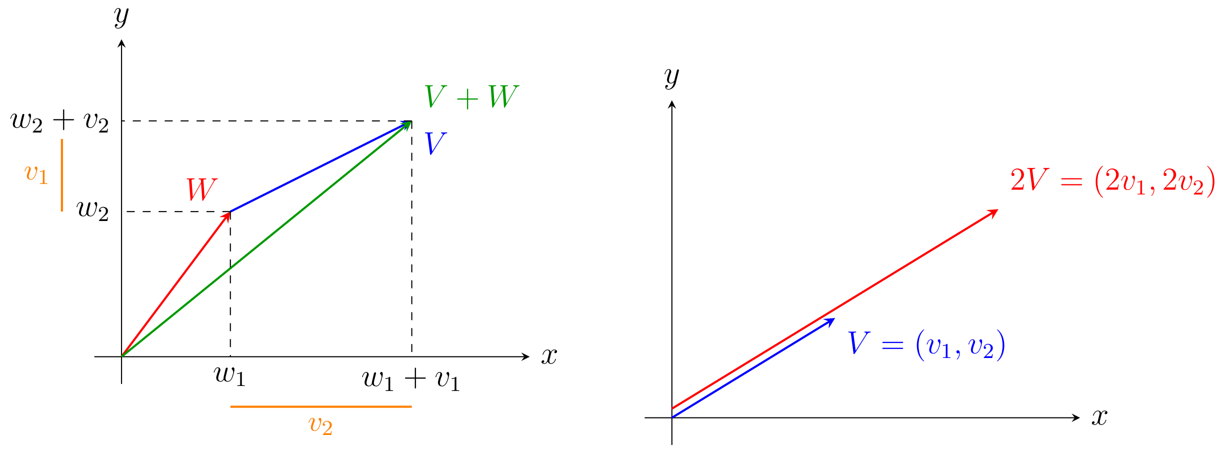
Com isso, note que as operações ficam muito mais fáceis, sem depender sempre do apelo geométrico. Assim, podemos buscar uma nova forma de fazer as operações básicas entre vetores (soma e multiplicação por escalar):

Proposição 1.1.8. *Sejam* $V, W \in \mathbb{R}^2$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Então,*

i) $V + W = (v_1 + w_1,\, v_2 + w_2)$

ii) $\alpha V = (\alpha v_1,\, \alpha v_2)$

Abaixo temos uma ilustração disso.



(a) Soma de vetores: $V+W = (v_1+w_1,\ v_2+w_2)$. (b) Multiplicação escalar: $\alpha V = (\alpha v_1, \alpha v_2)$.

Figura 1.2: Ilustração da soma de vetores e multiplicação escalar em $\mathbb{R}^2$.

Para o $\mathbb{R}^3$, essas operações ocorrem da mesma forma. Generalizando para qualquer dimensão ($\mathbb{R}^n$), temos:

Proposição 1.1.9. *Sejam* $V, W \in \mathbb{R}^n$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Então,*

i) $V + W = (v_1 + w_1, \ldots,\, v_n + w_n)$

ii) $\alpha V = (\alpha v_1, \ldots,\, \alpha v_n)$

E se quisermos fazer ambas as operações ao mesmo tempo? Então teremos uma combinação linear!

Definição 1.1.10. *Sejam* $V_1, \ldots, V_k \in \mathbb{R}^n$ *vetores e* $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ *escalares. Seja* W *um vetor tal que*

$$W = \alpha_1 V_1 + \cdots + \alpha_k V_k$$

Então, W *é* ***combinação linear*** *de* $V_1, \ldots, V_k$.

Abordaremos melhor esse conceito em tópicos mais a frente, como em sistemas lineares.

A partir da definição de coordenadas e da soma/multiplicação de vetores por meio delas, podemos provar as seguintes propriedades:

Teorema 1.1.11. *Sejam U, V e W vetores e α e β escalares. Então,*

i) $U + V = V + U$;

ii) $(U + V) + W = U + (V + W)$;

iii) $U + \bar{0} = U$;

iv) $U + (-U) = \bar{0}$;

v) $\alpha(\beta U) = (\alpha\beta)U$;

vi) $\alpha(U + V) = \alpha U + \alpha V$;

vii) $(\alpha + \beta)U = \alpha U + \beta U$;

viii) $1U = U$.

Outra ideia muito importante é saber o módulo do vetor a partir de seus componentes. Para isso, vamos definir o que chamamos de norma euclidiana.

Definição 1.1.12. *Seja $V \in \mathbb{R}^n$. O seu comprimento, também chamado de* ***norma de*** V *e denotado por $\|V\|$, é dado por*

$$\|V\| = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2}$$

Exemplo 1.1.13. Para um vetor $V \in \mathbb{R}^2$, temos que

$$\|V\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

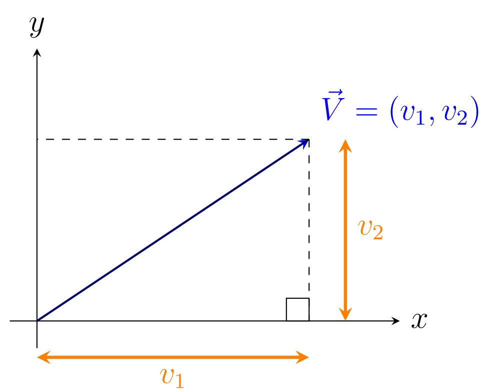


Figura 1.3: Norma de um vetor $\vec{V}$ em $\mathbb{R}^2$.

Essa forma de calcular a norma está ligada ao cálculo do tamanho de vetores no $\mathbb{R}^2$ e no $\mathbb{R}^3$, utilizando o Teorema de Pitágoras.

A partir dessa definição de norma, podemos definir outro conceito fundamental: o produto escalar. Este produto pega dois vetores e devolve um escalar (número real), que vai indicar o "nível de alinhamento entre eles".

Definição 1.1.14. *Sejam $V, W \in \mathbb{R}^n$, onde $n \in \{2,3\}$. O* ***produto escalar*** *(também conhecido como* ***produto interno****) entre esses vetores, denotado por $V \cdot W$, é dado por*

$$V \cdot W = \begin{cases} 0, \ se\ V = \bar{0}\ ou\ W = \bar{0} \\ \|V\|\|W\|\cos(\theta), \ caso\ contrário. \end{cases}$$

onde θ é o ângulo no intervalo $[0, \pi]$ entre eles.

Note, no entanto, que o ângulo entre dois vetores só é bem definido para vetores em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$. Para resolver esse problema, podemos encontrar uma definição equivalente para o produto escalar e depois generalizá-la para dimensões maiores.

Proposição 1.1.15. *Sejam V e W vetores. Então, seu produto escalar é dado por*

$$V \cdot W = \begin{cases} v_1w_1 + v_2w_2, \ se\ V, W \in \mathbb{R}^{\nvDash} \\ v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3, \ se\ V, W \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

A partir disso, podemos definir o produto escalar da seguinte forma generalizada.

Definição 1.1.16. *Sejam $V, W \in \mathbb{R}^n$. O produto escalar entre esses vetores, denotado por $V \cdot W$, é dado por*

$$V \cdot W = v_1w_1 + \cdots + v_nw_n$$

Com essa definição, podemos facilmente provar as seguintes propriedades (que futuramente definirão de forma ainda mais abrangente o produto interno).

Proposição 1.1.17. *Sejam U, V, $W \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então:*

i) $U \cdot V = V \cdot U$;

ii) $U \cdot (V + W) = U \cdot V + U \cdot W$;

iii) $\alpha(U \cdot V) = (\alpha U) \cdot V = U \cdot (\alpha V)$;

iv) $V \cdot V = \|V\|^2 \geq 0, \forall V$ e $V \cdot V = 0 \Leftrightarrow V = \bar{0}$.

As ideias de norma e produto escalar são essenciais e possuem interpretação geométrica. O produto escalar, por exemplo, mostra a relação entre dois vetores e seus tamanhos e "alinhamento"(ângulo entre eles). Isso é muito bem visualizado ao tentarmos entender projeções de um vetor sobre outro: a projeção ortogonal.

Definição 1.1.18. *Sejam V e W vetores. A* ***projeção ortogonal de V sobre W****, denotada por $proj_W V$ é o vetor tal que*

- $proj_W V \,/\!/\, W$;
- $V - proj_W V \perp W$.

Abaixo segue uma ilustração da projeção ortogonal. A partir dessa definição, podemos

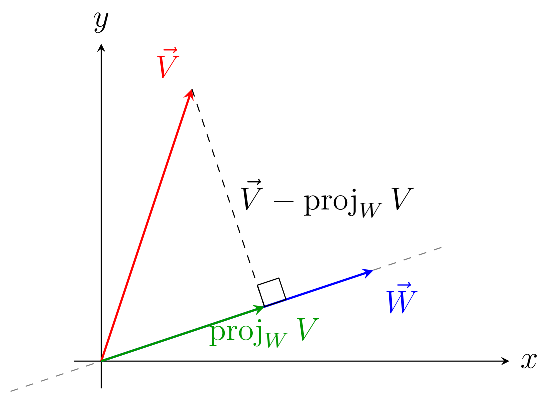


Figura 1.4: Projeção ortogonal de $\vec{V}$ sobre $\vec{W}$.

provar o seguinte teorema.

Teorema 1.1.19. *Seja $W \neq \bar{0}$ um vetor. Então,*

$$proj_W V = \left(\frac{V \cdot W}{\|W\|^2}\right) W$$

Além do produto escalar, existem outros dois produtos essenciais da Álgebra Vetorial. Enquanto o produto escalar trabalha com "alinhamentos"e projeções, o produto vetorial e misto representam, respectivamente, área e volume.

Definição 1.1.20. *Sejam V, $W \in \mathbb{R}^3$. O* ***produto vetorial*** *(também conhecido como* ***produto externo****) entre esses vetores, denotado por $V \times W$, é dado por*

$$V \times W = \begin{cases} \bar{0}, \text{ se } V = \bar{0} \text{ ou } W = \bar{0} \\ U, \text{ caso contrário.} \end{cases}$$

onde U é definido como o vetor tal que:

i) $\|U\| = \|V\|\|W\| \sin(\theta)$;

ii) $U \perp V$ *e* $U \perp W$;

iii) o sentido é dado pela regra da mão direita.

A regra da mão direita estabelece que os dedos giram de V para W e o polegar aponta na direção de U, representada na Figura 1.5.

Utilizando as componentes dos vetores, podemos obter as coordenadas do seu produto vetorial de uma forma mais simples.

Proposição 1.1.21. *Sejam V, $W \in \mathbb{R}^3$. Então,*

$$V \times W = \left(\det \begin{bmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{bmatrix}, -\det \begin{bmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{bmatrix}, \det \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{bmatrix} \right)$$

Ou, utilizando um abuso de notação, temos

$$V \times W = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{bmatrix}$$

onde $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$ e $\vec{k} = (0, 0, 1)$ são os ***vetores canônicos****.*

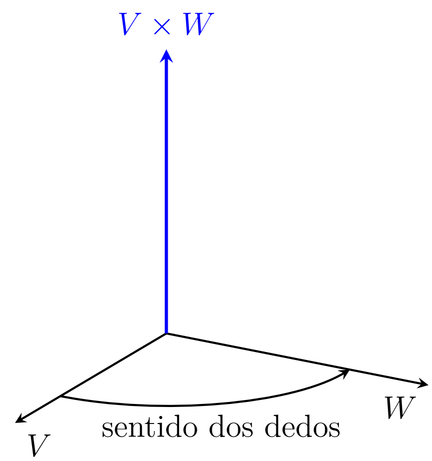


Figura 1.5: Regra da mão direita

Note que, no abuso de notação para representar o produto vetorial, temos que os componentes da matriz são ora vetores, ora números reais, o que indica uma matriz inválida. A ideia dessa representação é de que, se considerássemos $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ números reais e fizéssemos a conta de tal determinante, e a multiplicação entre reais fosse igual à multipliação por escalar, teríamos o equivalente à primeira forma do produto vetorial, apresentada imediatamente antes. Em suma, essa segunda representação é, na verdade, um "macete"para decorar o produto vetorial.

A partir dessas definições equivalentes do produto vetorial, podemos demonstrar as seguintes propriedades.

Proposição 1.1.22. *Sejam U, V, $W \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então:*

i) $V \times W = -(W \times V)$*;*

ii) $V \times W = \bar{0} \Leftrightarrow V = \alpha W$ *ou* $W = \alpha V$ *(ou seja, caso sejam paralelos);*

iii) $(V \times W) \cdot V = (V \times W) \cdot W = 0$*;*

iv) $\alpha(V \times W) = (\alpha V) \times W = V \times (\alpha W)$*;*

v) $V \times (W + U) = V \times W + V \times U$ *e* $(V + W) \times U = V \times U + W \times U$*.*

Já o produto misto é dado pela "mistura"dos dois conceitos apresentados anteriormente.

Definição 1.1.23. *Sejam V, W, $U \in \mathbb{R}^3$. Então, o **produto misto**, denotado por $[V, W, U]$, é dado por*

$$[V, W, U] = (V \times W) \cdot U$$

A partir dos conceitos de produto vetorial e escalar, podemos descrever o misto de uma forma facilitada, bem como ressaltar algumas propriedades interessantes.

Proposição 1.1.24. *Sejam V, W, $U \in \mathbb{R}^3$. Então,*

$$[V, W, U] = \det \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}$$

Proposição 1.1.25. *Sejam V, W, $U \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então,*

i) $[U + Z, V, W] = [U, V, W] + [Z, V, W]$

$[U, V + Z, W] = [U, V, W] + [U, Z, W]$

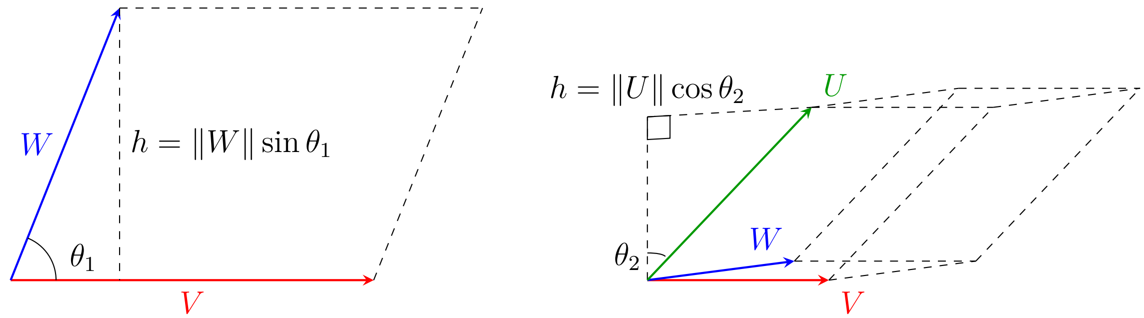
$[U, V, W + Z] = [U, V, W] + [U, V, Z]$*;*

ii) $[U, V, W] = -[U, W, V] = -[W, V, U] = -[V, U, W]$*;*

iii) $[U, V, W] = U \cdot (V \times W)$*;*

iv) $\alpha[U, V, W] = [\alpha U, V, W] = [U, \alpha V, W] = [U, V, \alpha W]$*.*

Como dito, anteriormente, os produtos vetorial e misto possuem uma interpretação geométrica interessante. Isso se deve ao fato de que, quando os vetores V, W e U são não nulos, temos $\|V \times W\| = \|V\|\|W\| \sin(\theta_1)$ e $|[V, W, U]| = \|V \times W\|\|U\| \cos(\theta_2)$.



(a) Área do paralelogramo. (b) Volume do paralelepípedo.

Figura 1.6: Produto vetorial e produto misto.

Essas definições permitem o entendimento de que a norma do produto vetorial é a área do paralelogramo formado pelos vetores V e W, e o módulo do produto misto é o volume do paralelepípedo.

Como sabemos, a área do paralelogramo é dada pelo produto da base com a altura, enquanto o volume do paralelepípedo é dado pelo produto da área da base com a altura. Assim seguem as relações abaixo.

$$A_{VW} = \|V\|\|W\| \sin(\theta_1) = \|V \times W\|$$

$$V_{VWU} = A_{VW}\|U\| \cos(\theta_2) = \|V \times W\|\|U\| \cos(\theta_2) = |[V, W, U]|$$

Além das suas normas representarem áreas e volumes, os produtos vetorial e misto, assim como o escalar, são indicadores de "alinhamento"entre vetores. A essas características damos o nome de colinearidade e coplanaridade.

Definição 1.1.26. *Dois ou mais vetores são* ***colineares*** *se pertencem a uma mesma reta (ou seja, se são paralelos).*

Definição 1.1.27. *Dois ou mais vetores são* ***coplanares*** *se pertencem a um mesmo plano.*

Na próxima seção de Geometria Analítica, ficará mais claro o que significa um vetor pertencer a uma reta ou a um plano. De forma intuitiva, isso significa que o segmento de reta orientado que representa um vetor é paralelo à reta ou ao plano em questão.

Como dito anteriormente, ao definir a multiplicação por escalar, implicitamente entendemos as condições de colinearidade no plano.

Proposição 1.1.28. *Sejam $V, W \in \mathbb{R}^2$.*

- *V e W são colineares $\Leftrightarrow \exists\, \alpha \in \mathbb{R}$, tal que $V = \alpha W$, ou seja, se um for múltiplo escalar do outro;*

- *V e W são sempre coplanares (pertencem ao $\mathbb{R}^2$).*

Já para o espaço, é possível utilizar as ideias de senos e cossenos que os produtos vetorial e misto trazem, garantindo as propriedades abaixo.

Proposição 1.1.29. *Sejam V, W, $U \in \mathbb{R}^3$.*

- *V e W são colineares $\Leftrightarrow V \times W = \bar{0}$;*
- *Dois vetores V e W são sempre coplanares;*
- *V, W e U são coplanares $\Leftrightarrow [V, W, U] = 0$.*

Outra forma de verificar colinearidade ou coplanaridade, é utilizando a ideia de combinação linear.

Corolário 1.1.30. *Sejam U, V, $W \in \mathbb{R}^3$ coplanares não nulos. Então,*

i) um dos vetores é combinação linear dos outros dois;

ii) V e W não paralelos $\Rightarrow U$ combinação linear de V e W.

Um fato interessante é que, a partir do item *i)* do corolário acima, obtemos que a equação $xV + yW + zU = \bar{0}$ tem solução não trivial, ou seja, tem solução onde $x, y, z \neq 0$. Isso porque, se existem reais α, β tais que $\alpha V + \beta W = U$ (definição de combinação linear), então basta tomar $x = \alpha$, $y = \beta$ e $z = -1$.

Com isso, finalizamos a parte de Álgebra Vetorial. Seguem abaixo os exercícios da seção.

Exercícios

1. (SANTOS, R; 2014; p. 154) Verifique se o vetor U é combinação linear de V e W:

   a) $V = (9, -12, -6)$, $W = (-1, 7, 1)$, $U = (-4, -6, 2)$;

   b) $V = (5, 4, -3)$, $W = (2, 1, 1)$, $U = (-3, -4, 1)$.

2. (SANTOS, R; 2014; p. 177) Demonstre que, se V e W são vetores quaisquer, então:

   a) $|V \cdot W| \leq \|V\|\|W\|$;

   b) $\|V + W\| \leq \|V\| + \|W\|$; (Sugestão: mostre que $\|V + W\|^2 = (V + W) \cdot (V + W) \leq (\|V\| + \|W\|)^2$, usando o item anterior)

   c) $\big|\|V\| - \|W\|\big| \leq \|V - W\|$. (Sugestão: defina $U = V - W$ e aplique o item anterior a U e W)

3. (SANTOS, R; 2014; p. 199) Calcule o volume do paralelepípedo que tem um dos vértices no ponto $A = (2, 1, 6)$ e os três vértices adjacentes nos pontos $B = (4, 1, 3)$, $C = (1, 3, 2)$ e $D = (1, 2, 1)$.

4. (SANTOS, R; 2014; p.201) Prove a identidade de Lagrange

$$\|V \times W\|^2 = \|V\|^2\|W\|^2 - (V \cdot W)^2$$

1.2 Geometria Analítica

Na Geometria Analítica, estudamos objetos geométricos, como retas e planos, a partir de um sistema de coordenadas. Nesse capítulo, vamos focar nossa atenção principalmente em retas e planos, ampliando a abordagem anterior de vetores. Primeiramente, podemos tentar definir esses objetos do ponto de vista da geometria analítica.

Equações da reta e do plano

Definição 1.2.1. *Uma* ***reta*** $r \subset \mathbb{R}^2$ *(ou* $\mathbb{R}^3$*) é o conjunto dos pontos* P *dados por*

$$P = P_0 + tV, \quad t \in \mathbb{R}$$

onde P_0 *é um ponto fixo e* $V \in \mathbb{R}^2$ *(ou* $\mathbb{R}^3$*) é o vetor diretor não nulo.*

Definição 1.2.2. *Um* ***plano*** $\pi \subset \mathbb{R}^3$ *é o conjunto dos pontos* P *dados por*

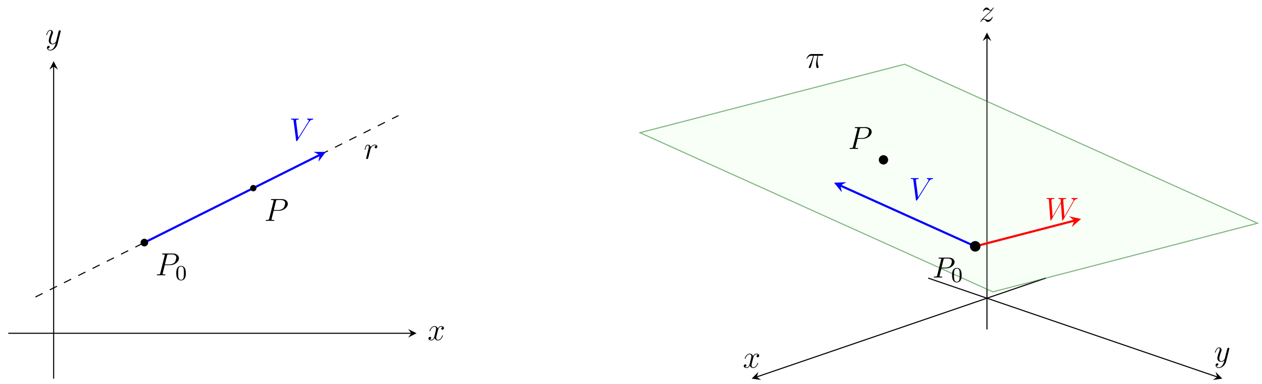
$$P = P_0 + tV + sW, \quad t, s \in \mathbb{R},$$

onde P_0 *é um ponto fixo e* $V, W \in \mathbb{R}^3$ *são vetores diretores não nulos e não colineares.*

Note que, de fato, para definir uma reta somente precisamos da sua direção, dada pelo vetor diretor, e de um ponto para "fixar a reta". Igualmente, para definir um plano, basta determinar sua "angulação", dada por dois vetores diretores de direções distintas, e fixá-lo com um ponto.

As equações apresentadas essas definições são o que chamamos de **equações vetoriais** desses objetos geométricos. Além delas, existem outras formas de representar retas e planos: as equações paramétricas e as equações gerais. As retas, em especial, possuem outras duas formas particulares, que são a reduzida (muito conhecida no Ensino Médio no formato de função) e a simétrica.

Inicialmente, das equações vetoriais podemos derivar facilmente as equações paramétricas, ou seja, as equações que dependem de parâmetros.



(a) Reta $r \subset \mathbb{R}^2$ dada por $P = P_0 + tV$. (b) Plano $\pi \subset \mathbb{R}^3$ dado por $P = P_0 + tV + sW$.

Figura 1.7: Representação de reta e plano por pontos e vetores diretores.

Seja $P = (x, y, z)$ as coordenadas de um ponto P qualquer, e seja $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ as coordenadas do ponto fixo P_0. Então, para uma reta, temos

$$\begin{aligned}
P = P_0 + tV &\Rightarrow (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(v_1, v_2, v_3) \\
&\Rightarrow (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + (tv_1,\, tv_2,\, tv_3) \\
&\Rightarrow (x, y, z) = (x_0 + tv_1,\, y_0 + tv_2,\, z_0 + tv_3) \\
&\Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + tv_1 \\ y = y_0 + tv_2 \\ z = z_0 + tv_3 \end{cases} \quad \textbf{(equações paramétricas da reta no } \mathbb{R}^3\textbf{)}
\end{aligned}$$

Note que, caso $v_1, v_2, v_3 \neq 0$, podemos isolar o parâmetro t e obter as **equações simétricas da reta**.

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}$$

De modo semelhante podemos obter as equações da reta caso $r \subset \mathbb{R}^2$, apresentadas abaixo.

$$\begin{cases} x = x_0 + tv_1 \\ y = y_0 + tv_2 \end{cases} \quad \textbf{(equações paramétricas da reta no } \mathbb{R}^2\textbf{)}$$

Analogamente, para o plano, temos

$$\begin{aligned}
P = P_0 + tV + sW &\Rightarrow (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + t(v_1, v_2, v_3) + s(w_1, w_2, w_3)\\
&\Rightarrow (x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + (tv_1,\, tv_2,\, tv_3) + (sw_1,\, sw_2,\, sw_3)\\
&\Rightarrow (x, y, z) = (x_0 + tv_1 + sw_1,\, y_0 + tv_2 + sw_2,\, z_0 + tv_3 + sw_3)\\
&\Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + tv_1 + sw_1\\ y = y_0 + tv_2 + sw_2\\ z = z_0 + tv_3 + sw_3 \end{cases} \quad \textbf{(equações paramétricas do plano)}
\end{aligned}$$

Em outras palavras, obtemos equações onde o conjunto de pontos denominados reta e plano são determinados por parâmetros ($t, s \in \mathbb{R}$).

$$\begin{cases} r = \{P \in \mathbb{R}^3 \mid P = (x_0 + tv_1,\, y_0 + tv_2,\, z_0 + tv_3)\}\\ \pi = \{P \in \mathbb{R}^3 \mid P = (x_0 + tv_1 + sw_1,\, y_0 + tv_2 + sw_2,\, z_0 + tv_3 + sw_3)\} \end{cases}$$

No entanto, em ambos os tipos de representação, precisamos de um parâmetro, o que pode nem sempre ser útil. Nesse sentido, também vale a pena definir equações gerais, ou seja, equações que não necessitam de parâmetros e definem os pontos P de forma menos explícita. Para a reta, temos o seguinte.

Proposição 1.2.3. *A* ***equação geral de uma reta*** *r no $\mathbb{R}^2$ que passa por um ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ é*

$$ax + by + c = 0,$$

em que $a^2 + b^2 \neq 0$ e $c = -(ax_0 + by_0)$.

No entanto, esse formato da reta raramente é apresentado, devido a outros formatos mais convenientes de descrever uma reta. Por exemplo, uma definição equivalente de reta é dada por $y = mx + n$, com $m, n \in \mathbb{R}$ **(equação reduzida da reta no $\mathbb{R}^2$)**, muito conhecida no Ensino Médio ao tratar de funções lineares.

Note que essa definição, para o $\mathbb{R}^3$, na verdade descreve um plano! Para o espaço, a descrição é um pouco diferente.

$$\begin{cases} y = mx + n\\ z = px + q \end{cases} , \quad m, n, p, q \in \mathbb{R} \quad \textbf{(equações reduzidas da reta no } \mathbb{R}^3\textbf{)}$$

Já partindo para o caso do plano, é interessante apresentar antes a definição de vetor normal.

Definição 1.2.4. *O* ***vetor normal ao plano*** *é o vetor não nulo perpendicular a ele.*

Em outras palavras, o normal é o vetor paralelo ao produto vetorial dos vetores diretores, podendo ser ele próprio o produto vetorial em questão.

Assim, note que, fixado um ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e um vetor normal ao plano $N = (a, b, c)$, temos que o plano pode ser definido como $\pi = \{P \in \mathbb{R}^3 \mid N \perp \overrightarrow{PP_0}\}$, ou seja, como o conjunto de pontos cujo vetor com o ponto fixo P_0 é sempre perpendicular ao normal. Lembre, no entanto, que

$$\begin{aligned} N \perp \overrightarrow{PP_0} \Rightarrow N \cdot \overrightarrow{PP_0} &= 0 \\ &\Rightarrow (a, b, c) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0 \\ &\Rightarrow a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \end{aligned}$$

Com isso, conseguimos a seguinte proposição.

Proposição 1.2.5. *A* ***equação geral de um plano*** *π no $\mathbb{R}^3$ que passa por um ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e tem vetor normal $N = (a, b, c)$ é*

$$ax + by + cz + d = 0$$

em que $d = -(ax_0 + by_0 + cz_0)$.

Ângulos e distâncias

Proposição 1.2.6. *Sejam duas retas*

$$r_1 : \begin{cases} x = x_1 + ta_1 \\ y = y_1 + tb_1 \\ z = z_1 + tc_1 \end{cases} \quad r_2 : \begin{cases} x = x_2 + ta_2 \\ y = y_2 + tb_2 \\ z = z_2 + tc_2 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

O cosseno do ângulo entre r_1 e r_2 é

$$\cos(r_1, r_2) = |\cos(\theta)| = \frac{|V_1 \cdot V_2|}{\|V_1\|\|V_2\|}$$

em que $V_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e $V_2 = (a_2, b_2, c_2)$.

Proposição 1.2.7. *Sejam dois planos*

$$\pi_1 : \ a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \pi_2 : \ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$

O cosseno do ângulo entre π_2 e π_2 é

$$\cos(\pi_1, \pi_2) = \frac{|N_1 \cdot N_2|}{\|N_1\|\|N_2\|}$$

em que $N_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e $N_2 = (a_2, b_2, c_2)$ são os vetores normais de π_1 e π_2, respectivamente.

Proposição 1.2.8. *Sejam $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto qualquer e $\pi : ax + by + cz + d = 0$ um plano. A distância de P_0 a π é dada por*

$$dist(P_0, \pi) = \|proj_N \overrightarrow{P_1P_0}\| = \frac{|\overrightarrow{P_1P_0} \cdot N|}{\|N\|}$$

em que $N = (a, b, c)$ e $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ é um ponto de π (isto é, um ponto que satisfaz a equação de π).

Proposição 1.2.9. *Sejam $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ um ponto qualquer e*

$$r : \begin{cases} x = x_1 + ta \\ y = y_1 + tb \\ z = z_1 + tc \end{cases} \quad \forall\, t \in \mathbb{R}$$

uma reta. A distância de P_0 a r é dada por

$$dist(P_0, r) = \frac{\|\overrightarrow{P_1P_0} \times V\|}{\|V\|}$$

em que $V = (a, b, c)$ é um vetor diretor e $P_1 = (x_1, b_1, c_1)$ é um ponto da reta r.

Para a distância entre dois planos π_1 e π_2, temos dois casos.

- Planos paralelos: $\text{dist}(\pi_1, \pi_2) = \text{dist}(P_1, \pi_2) = \text{dist}(\pi_2, P_2)$, onde $P_1 \in \pi_1$ e $P_2 \in \pi_2$.
- Planos não paralelos: $\text{dist}(\pi_1, \pi_2) = 0$.

Para a distância entre duas retas r_1 e r_2, temos três casos.

- Retas concorrentes: $\text{dist}(r_1, r_2) = 0$.
- Retas paralelas (mesmo caso dos planos): $\text{dist}(r_1, r_2) = \text{dist}(P_1, r_2) = \text{dist}(r_1, P_2)$, onde $P_1 \in r_1$ e $P_2 \in r_2$
- Retas reversas: sejam $r_1 \subset \pi_1$ e $r_2 \subset \pi_2$ tal que π_1 é paralelos a r_2 e π_2 é paralelo a r_1. Então, $\text{dist}(r_1, r_2) = \text{dist}(\pi_1, \pi_2)$.

Capítulo 2

Sistemas Lineares e Matrizes

Além das ideias de vetores e da própria Geometria Analítica, compreender Sistemas Lineares fundamenta os principais problemas que a Álgebra Linear busca responder. No entanto, antes de apresentar sistemas lineares ou outros conceitos (como combinação e dependência linear), vamos iniciar com matrizes.

2.1 Matrizes

As matrizes permitem uma manipulação facilitada dos sistemas lineares e uma abstração maior de diversos conceitos, o que é muito útil para a Álgebra Linear. Fundamentalmente, elas são tabelas de números ou variáveis, que se assemelham, por exemplo, com sistemas lineares, apresentados na seção seguinte. Além disso, também podem ser interpretadas como vetores ou até mesmo Transformações Lineares, entrelaçando todos os elementos de interesse dessa área.

Iniciando, vamos definir matrizes formalmente e nomear seus elementos, para facilitar o entendimento e a manipulação dessas tabelas.

Definição 2.1.1. *Seja $m, n \in \mathbb{N}^*$. Uma* ***matriz*** $A_{m\times n}$*, ou simplesmente A, é uma tabela de mn números dispostos em m linhas e n colunas.*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Definição 2.1.2. *Denotamos por a_{ij} o elemento na i-ésima linha e j-ésima coluna da matriz A.*

Um ponto importante dessa definição são os objetos m e n, que são, na verdade, a **ordem** da matriz. Isso é importante para entender as operações entre matrizes e até mesmo separá-las em conjuntos ou classificações, apresentados abaixo.

Definição 2.1.3. *Denotamos por* $\mathbb{M}_{m\times n}$ *o conjunto de todas as matrizes de ordem* $m \times n$.

Definição 2.1.4. *Segue abaixo nomenclaturas de matrizes:*

- ***Matriz Quadrada***: $m = n$, *i.e., mesmo número de linhas e colunas.*
- ***Matriz Linha***: $m = 1$, *i.e., uma linha.*
- ***Matriz Coluna***: $n = 1$, *i.e., uma coluna.*
- ***Matriz Nula*** ($\bar{0}$): $a_{ij} = 0 \,\forall\, i, j$.

Para matrizes quadradas, onde a ordem é do tipo $n \times n$, temos classificações específicas.

Definição 2.1.5. *Seja* A *uma matriz quadrada. Então,*

- ***Matriz Diagonal***: $a_{ij} = 0, \,\forall\, i \neq j$;
- ***Matriz Triangular Superior***: $a_{ij} = 0, \,\forall\, i > j$;
- ***Matriz Triangular Inferior***: $a_{ij} = 0, \,\forall\, i < j$.
- ***Matriz Identidade*** (I): $a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } i = j \\ 0, \text{ se } i \neq j \end{cases}$.

A seguir, finalmente definiremos as operações com matrizes.

Definição 2.1.6. *A* ***soma de matrizes*** $A_{m\times n}$ *e* $B_{m\times n}$ *é definida pela matriz* $C_{m\times n} = A + B$ *tal que*

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \,\forall\, i, j$$

Note que a operação da soma só é definida para matrizes de mesmo tamanho.

Definição 2.1.7. *A* ***multiplicação de uma matriz*** $A_{m\times n}$ ***por um escalar*** α *é definida pela matriz* $B_{m\times n} = \alpha A$ *tal que*

$$b_{ij} = \alpha a_{ij} \,\forall\, i, j$$

Dizemos que B *é* ***múltiplo escalar*** *de* A.

Perceba que ambas estas operações são basicamente fazer o "esperado", elemento por elemento.

A grosso modo, podemos fazer um paralelo com os vetores do $\mathbb{R}^n$ apresentados no capítulo 1, em que as operações mais relevantes eram a soma de vetores e a multiplicação por escalar. Isso será apresentado mais a frente com detalhes, ao falarmos de espaços vetoriais.

Além desses dois, também temos outras operações importantes.

Definição 2.1.8. *A* ***multiplicação de matrizes*** *$A_{m\times p}$ e $B_{p\times n}$ é definida pela matriz $C_{m\times n} = AB$ tal que*

$$c_{ij} = \sum_{1}^{p} a_{ip}b_{pj} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}\,\forall\, i, j$$

Segue abaixo uma representação visual da multiplicação de matrizes, e depois um exemplo.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}\,b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}.$$

Exemplo 2.1.9. Sejam $A_{2\times 3}$ e $B_{3\times 2}$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{bmatrix}$$

Note que a multiplicação desse exemplo só é possível por a quantidade de colunas de A é a mesma que a quantidade de linhas de B (3). Além disso, perceba que, como resultado, temos uma matriz de ordem 2×2 (quantidade de linhas de A e de colunas de B).

Definição 2.1.10. *A* ***transposta*** *de uma matriz $A_{m\times n}$ é definida pela matriz $B_{m\times n} = A^T$, tal que*

$$b_{ij} = a_{ji},\ \forall\, i, j$$

Definição 2.1.11. *O* ***traço*** *de uma matriz quadrada $A_{m\times m}$ é dado pela soma dos elementos da diagonal:*

$$tra(A) = \sum_{1}^{m} a_{ii}$$

Com essas operações, podemos provar algumas propriedades interessantes. Primeiro temos as 8 seguintes, que possuem grande semelhança com o Teorema 1.1.11 para vetores.

Teorema 2.1.12. *Sejam A, B e C matrizes com ordem apropriada para cada propriedade. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Então,*

i) $A + B = B + A$;

ii) $A + (B + C) = (A + B) + C$;

iii) $\forall\, A_{m\times n}$, $\exists\, \bar{0}_{m\times n}$, *tal que* $A + \bar{0} = A$;

iv) $\forall\, A$, $\exists\, -A$, *tal que* $A + (-A) = \bar{0}$;

v) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$;

vi) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;

vii) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;

viii) $\forall\, A_{m\times n}$, $\exists\, I_m$, I_n, *tal que* $A = AI_n = I_m A$;

ix) $A(BC) = (AB)C$;

x) $A(B + C) = AB + AC$
$(B + C)A = BA + CA$;

xi) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$;

xii) $(A^T)^T = A$;

xiii) $(A + B)^T = A^T + B^T$;

xiv) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$;

xv) $(AB)^T = B^T A^T$.

2.1.1 Matriz Inversa

Definição 2.1.13. *Uma matriz quadrada $A_{n\times n}$ é **invertível** ou não singular, se existe uma matriz inversa, denotada por $A^{-1}_{n\times n}$, tal que*

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

*Se A não tem inversa, então A é não invertível ou **singular**.*

Teorema 2.1.14. *Se A é invertível, então A^{-1} é única.*

Teorema 2.1.15. *Sejam A e B matrizes.*

i) A *invertível* $\Rightarrow A^{-1}$ *invertível, e* $(A^{-1})^{-1} = A$;

ii) A *e* B *invertíveis* $\Rightarrow AB$ *invertível, e* $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;

iii) A *invertível* $\Rightarrow A^T$ *invertível e* $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Teorema 2.1.16. *Sejam $A_{n\times n}$ e $B_{n\times n}$ matrizes. Então,*

$$BA = I_n \Leftrightarrow AB = I_n$$

2.1.2 Determinante

Existem as formas clássicas, aprendidas no Ensino Médio, de calcular o determinante de uma matriz de ordem 2 ou 3. No entanto, para matrizes de ordem superior, precisamos utilizar a definição generalizada de determinante, que é calculado por meio da **expansão em cofatores do determinante de A**. Abaixo segue essa expansão em termos da primeira linha.

Definição 2.1.17. *Seja $A_{n\times n}$ uma matriz. O* ***determinante*** *de A, denotado por $\det(A)$, é definido por*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\tilde{a}_{1j}$$

onde

- *$\tilde{A}_{ij}$, dado pela submatriz de A de ordem $(n-1)\times(n-1)$ eliminando a i-ésima linha e a j-ésima coluna, é o* ***menor*** *do elemento a_{ij};*
- *$_{1j} = (-1)^{1+j}\det\left(\tilde{A}_{1j}\right)$ é o* ***cofator*** *de a_{1j}.*

Segue abaixo uma representação mais visual da matriz menor $\tilde{A}_{ij}$ da matriz original A.

$$\tilde{A}_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{(i-1)1} & & \ddots & & & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & & & \ddots & & a_{(i+1)n} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Teorema 2.1.18. *Seja a matriz $A_{n\times n}$ escrita em termos das suas linhas, denotadas por $A_i = [a_{i1}\ \dots\ a_{in}]$. Se existe uma linha A_k tal que $A_k = \alpha X + \beta Y$, para algum $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e algum $X = [x_1\ \dots\ x_n]$ e $Y = [y_1\ \dots\ y_n]$, então,*

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{k-1} \\ \alpha X + \beta Y \\ A_{k+1} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = \alpha \det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{k-1} \\ X \\ A_{k+1} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} + \beta \det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{k-1} \\ Y \\ A_{k+1} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}$$

Teorema 2.1.19. *O determinante de uma matriz pode ser calculado com a expansão em cofatores de qualquer linha i ou qualquer coluna j. Em outras palavras,*

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij ij}, \ \textit{para } i = 1, \dots, n \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ij ij}, \ \textit{para } j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Corolário 2.1.20. *Seja $A_{n\times n}$ uma matriz.*

$$\exists A_i,\ A_j,\ \textit{tal que}\ A_i = A_j \Rightarrow \det(A) = 0$$

Teorema 2.1.21. *Sejam $A_{n\times n}$ e $B_{n\times n}$ matrizes.*

i) *Se B é obtida de A multiplicando-se uma linha por um escalar α, então*

$$\det(B) = \alpha \det(A);$$

ii) *Se B é obtida de A pela troca de duas linhas, então*

$$\det(B) = -\det(A);$$

iii) *Se B é obtida de A substituindo uma linha A_l por ela somada um múltiplo escalar de outra linha A_k, ou seja, substituindo A_l por $A_l + \alpha A_k$, então*

$$\det(B) = \det(A).$$

Teorema 2.1.22. *Sejam $A_{n\times n}$ e $B_{n\times n}$ matrizes.*

i) $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

ii) $\det(A) = \det\Big(A^T\Big)$.

Teorema 2.1.23. *Seja $A_{n\times n}$ uma matriz. A invertível $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.*

2.2 Sistemas Lineares

Definição 2.2.1. *Sejam $b, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ fixos e $x_1, \ldots, x_n$ variáveis. Então, uma* ***equação linear*** *é uma igualdade da forma*

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b.$$

Definição 2.2.2. *Um* ***sistema linear*** *é um conjunto de equações lineares.*

Definição 2.2.3. *Uma* ***solução*** *de um sistema linear é o conjunto $\{s_1, \ldots, s_n\}$ que satisfaz todas as equações ao substituir cada variável ($x_1 = s_1, \ldots, x_n = s_n$).*

Definição 2.2.4. *O* ***conjunto solução*** *ou a* ***solução geral*** *do sistema é o conjunto de todas as soluções do sistema linear.*

Dessa forma, se tivermos um sistema de m equações e de soluções com n entradas, então temos algo no formato abaixo.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Para encontrar as soluções de um sistema linear, são utilizadas três operações fundamentais, chamadas de **operações elementares**:

1. Trocar a posição de duas equações;
2. Multiplicar uma equação por um escalar $\alpha \neq 0$;
3. Somar uma equação ao "múltiplo escalar"de outra.

Um tipo especial de sistema linear é o homogêneo.

Definição 2.2.5. *Um sistema tal que $b_1, \ldots, b_m = 0$ é chamado* ***sistema linear homogêneo****.*

Definição 2.2.6. *Uma solução onde*

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ \vdots x_n = 0 \end{cases}$$

é chamada de ***solução trivial****.*

Proposição 2.2.7. *Se um sistema linear é homogêneo, então ele admite pelo menos solução trivial.*

Teorema 2.2.8. *Se um sistema linear homogêneo tem menos equações do que incógnitas, então ele tem infinitas soluções.*

2.2.1 Matrizes como Sistemas Lineares

Relembrando novamente Sistemas Lineares, eles possuem o seguinte formato:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

No entanto, esse tipo de "multiplicação e soma ordenadas"lembra muito um dos conceitos apresentados anteriormente: a multiplicação entre matrizes. De fato, note que, definindo matrizes $A_{m\times n}$ e $B_{m\times 1}$ de constantes reais, e uma matriz $X_{n\times 1}$ de variáveis, podemos dizer que

$$AX = B \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Ou, mais explicitamente, que

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Além disso, podemos novamente definir as operações elementares para matrizes.

Definição 2.2.9. *Seguem abaixo as* ***operações elementares sobre as linhas de uma matriz****.*

1. *Trocar a posição de duas linhas;*
2. *Multiplicar uma linha por um escalar $\alpha \neq 0$;*
3. *Somar uma linha ao "múltiplo escalar"de outra.*

Definição 2.2.10. *Sejam A e B matrizes. A é* ***equivalente por linhas*** *a B, se B pode ser obtida aplicando operações elementares sobre A.*

Uma forma de representar os sistemas lineares com matrizes, omitindo as variáveis e obtendo algo mais conciso, temos a **matriz aumentada** abaixo.

$$[A \mid B] = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Teorema 2.2.11. *Sejam os sistemas $AX = B$ e $CX = D$. Se $[A \mid B]$ é equivalente por linhas a $[C \mid D]$, então o conjunto solução de ambos é a mesma.*

Definição 2.2.12. *O* ***pivô*** *da i-ésima linha de uma matriz A é o primeiro elemento não nulo de A_i.*

Definição 2.2.13. *Seja $A_{m\times n}$ uma matriz. Ela está na forma* ***escalonada reduzida****, se satisfaz todas as condições abaixo.*

i) Todas as linhas nulas ($A_i = [0, \dots, 0]$) estão abaixo das não nulas;

ii) O pivô de cada linha não nula é 1;

iii) Se o pivô da linha A_i ocorre na j-ésima coluna, então o pivô da linha A_{i+1} ocorre na $(j+1)$-ésima coluna;

iv) Se uma coluna contém pivô, então todos os outros elementos são 0.

Proposição 2.2.14. *Sejam $A_{m\times n}$ e $B_{m\times 1}$ matrizes. Se o sistema $AX = B$ possui duas soluções distintas $X_0 \neq X_1$, então ele tem infinitas soluções.*

Teorema 2.2.15. *Um sistema linear pode ter:*

- *Nenhuma solução;*
- *Uma única solução;*
- *Infinitas soluções.*

Teorema 2.2.16. *$\forall$ matriz $A_{m\times n}$, $\exists!$ matriz escalonada reduzida $R_{m\times n}$.*

Proposição 2.2.17. *Seja $R_{n\times n}$ uma matriz escalonada reduzida. $R \neq I_n \Rightarrow R$ tem uma linha nula.*

Teorema 2.2.18. *$A_{m\times n}$ é uma matriz tal que $m < n \Rightarrow$ o sistema homogêneo $AX = \bar{0}$ tem infinitas soluções.*

Proposição 2.2.19. *Seja $A_{n\times n}$ uma matriz. Então,*

i) X e Y são soluções do sistema homogêneo $AX = \bar{0} \Rightarrow X + Y$ também é solução.

ii) X é solução do sistema homogêneo $AX = \bar{0} \Rightarrow \alpha X$ também é solução, $\forall\, \alpha \in \mathbb{R}$.

Teorema 2.2.20. *Seja $A_{n\times n}$ uma matriz. A invertível $\Leftrightarrow$ A é equivalente por linhas a I_n.*

Teorema 2.2.21. *Seja $A_{n\times n}$ uma matriz.*

i) O sistema $AX = B$ tem solução única $\Leftrightarrow$ A invertível (a solução é $X = A^{-1}B$).

ii) O sistema homogêneo $AX = \bar{0}$ tem solução não trivial $\Leftrightarrow$ A é singular.

Teorema 2.2.22. *O sistema homogêneo $AX = \bar{0}$ tem solução não trivial $\Leftrightarrow$ $\det(A) \neq 0$.*

2.3 Combinação Linear e Dependência Linear

Vamos retomar a definição de combinação linear.

Definição 2.3.1. *Sejam* $V_1, \ldots, V_k \in \mathbb{R}^n$ *vetores e* $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ *escalares. Seja* W *um vetor tal que*

$$W = \alpha_1 V_1 + \cdots + \alpha_k V_k$$

Então, W *é combinação linear de* $V_1, \ldots, V_k$.

Proposição 2.3.2. *Sejam* $A_{m\times n}$ *e* $B_{m\times 1}$ *matrizes.*

O B *é combinação linear das colunas de* $A \Leftrightarrow$ *O sistema* $AX = B$ *tem solução.*

Definição 2.3.3. *Sejam* $V_1, \ldots, V_k \in \mathbb{R}^n$. *Seja* $V_{n\times k} = [V_1 \quad \ldots \quad V_k]$.

O conjunto S *desses vetores é* ***linearmente independente (LI)*** *se* $VX = \bar{0}$ *possui somente solução trivial.*

Caso contrário, o conjunto S *é* ***linearmente dependente (LD)***.

Proposição 2.3.4. *Seja* $A_{m\times n}$ *uma matriz.*

i) As colunas de A *são LI* $\Leftrightarrow$ *o sistema* $AX = \bar{0}$ *possui somente solução trivial.*

ii) Seja $m = n$. *Então as colunas de* A *são LI* $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.

Corolário 2.3.5. *Sejam* $V_1, \ldots, V_k \in \mathbb{R}^n$. *Se* $k > n$, *então o conjunto* S *desses vetores é LD.*

Teorema 2.3.6. *Seja o conjunto* $S = \{V_1, \ldots, V_k\}$, *com* $k > 1$. *Então,* S *é LD* $\Leftrightarrow \exists V_j$ *tal que* V_j *é combinação linear de* $V_1, \ldots, V_{j-1}, V_{j+1}, \ldots, V_k$.

Capítulo 3

Espaços Vetoriais

Videoaula 12 - Espaços Vetoriais

https://www.youtube.com/watch?v=UkKQEYRdiks

Videoaula 18 - Espaços Vetoriais Abstratos

https://www.youtube.com/watch?v=dkaUQG1Ic3A

Videoaula 13 - Subespaços Vetoriais

https://www.youtube.com/watch?v=4D-q8OIXa94

Videoaula 16 - Base e Dimensão

https://www.youtube.com/watch?v=wSXwQ3gM7Eo

Videoaula 17 - Coordenadas

https://www.youtube.com/watch?v=GPnZsHawg6A

Videoaula 20 - Ortogonalidade

https://www.youtube.com/watch?v=QxsxaQrCHww

Videoaula 21 - Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt

https://www.youtube.com/watch?v=GbQ-pjpsY9Q

3.1 Espaços Vetoriais

Espaços vetoriais são, basicamente, a nossa bancada de trabalho, e os vetores, as ferramentas com as quais construímos muitas funcionalidades. Exemplos disso são as LLMs (ChatGPT, Gemini, DeepSeek) e os sites de busca (Google, DuckDuckGo). Eles utilizam vetores para executar suas tarefas: todas as entradas são convertidas para dentro de um espaço vetorial e, de acordo com a posição do seu vetor, o sistema aproxima os resultados mais relevantes para você.

Além das aplicações na vida real, também temos na matemática pura, espaços vetoriais são muito necessário em cálculo de múltiplas variáveis e uma das bases de análise funcional.

Definição 3.1.1. ***Espaços vetorial*** *é um conjunto V não vazio no qual existe as operações de adição (entre vetores) e multiplicação por um número real (escalar), respeitando as seguintes propriedades com as operações citadas:*

Adição:

(A1) $u + v = v + u$ *(Comutatividade);*

(A2) $(u + v) + w = u + (v + w)$ *(Associatividade);*

(A3) $\exists v : v + u = u + v = u$ *denotamos* v *por* $\vec{0}$ *(Vetor nulo);*

(A4) $\forall u \; \exists v : u + v = v + u = \vec{0}$ *denotamos* v *por* $-u$ *(Inverso aditivo).*

Multiplicação por Escalar:

(M1) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$ *(Distributividade de um escalar);*

(M2) $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$ *(Distributividade de um vetor);*

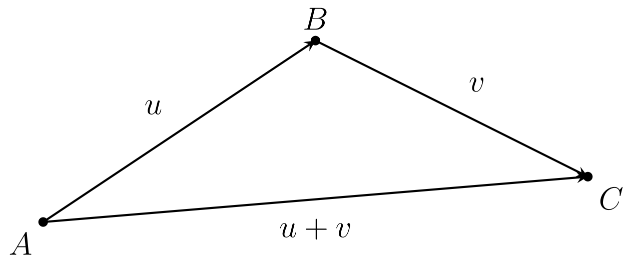
(M3) $v \cdot 1 = v$ *(Multiplicação por 1);*

(M4) $\alpha(\beta \cdot v) = (\alpha \cdot \beta)v$ *(Associatividade).*

Definição 3.1.2. *Elementos de um espaço vetorial V são denominados* ***vetores****.*

Exemplo 3.1.3 (Exemplo de espaço vetorial)*.* O plano euclidiano de dimensão n ($\mathbb{R}^n$) é um dos exemplos mais clássicos de espaço vetorial, seja dois vetores $u = (\eta_1, ..., \eta_n)$ e $v = (\delta_1, ..., \delta_n)$ e também dois escales α e β, com sua soma e multiplicação definido por:

$$u + v = (\eta_1 + \delta_1, \dots, \eta_n + \delta_n)$$
$$\alpha \cdot u = (\alpha\eta_1, \dots, \alpha\eta_n)$$



(Exemplo no $\mathbb{R}^2$)

Exemplo 3.1.4 (Exemplo de espaço vetorial)*.* O conjunto das matrizes $n \times m$ com soma entre vetores e multiplicação por escalar definido da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2m} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nm} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & ... & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & ... & b_{2m} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_{n1} & b_{n2} & ... & b_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a+b)_{11} & (a+b)_{12} & ... & (a+b)_{1m} \\ (a+b)_{21} & (a+b)_{22} & ... & (a+b)_{2m} \\ ... & ... & ... & ... \\ (a+b)_{n1} & (a+b)_{n2} & ... & (a+b)_{nm} \end{bmatrix}$$

$$\alpha \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2m} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\alpha a)_{11} & (\alpha a)_{12} & ... & (\alpha a)_{1m} \\ (\alpha a)_{21} & (\alpha a)_{22} & ... & (\alpha a)_{2m} \\ ... & ... & ... & ... \\ (\alpha a)_{n1} & (\alpha a)_{n2} & ... & (\alpha a)_{nm} \end{bmatrix}$$

é um espaço vetorial, chamado de espaço vetorial da matrizes $n \times m$.

Exercícios

1. Descreva o vetor nulo dos seguintes espaços vetoriais, considerando as operações usuais:

   a)$\mathbb{R}^5$ b)$\mathbb{M}_{3\times 2}$

2. Mostre que o espaço $\mathbb{P}_n = p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n : a_0, a_1, a_2, a_3, ..., a_n \in \mathbb{R}$ dos polinômios reais de grau menor ou igual a n é um espaço vetorial real, com as operações usuais de soma e multiplicação por escalar.

3. Verifique se $V = x \in \mathbb{R} : x > 0$ é um espaço vetorial com as operações de adição ($\oplus$) e a multiplicação por escalar ($\odot$) dadas abaixo. Em caso positivo, prove e indique o vetor nulo (neutro aditivo) e o inverso aditivo.

   $$x \oplus y = xy \qquad \text{e} \qquad \alpha \cdot x = x^\alpha$$

3.2 Subespaços Vetoriais

Subespaços vetoriais são subconjuntos de um espaço vetorial maior que ainda utilizam das mesmas operações e são "independentes" do espaço vetorial original, sendo mais exato:

Definição 3.2.1. *Seja E um espaço vetorial. Um* ***subespaço vetorial*** *(ou simplesmente* ***subespaço****) de E é um subconjunto $F \subset E$ com as seguintes propriedades:*

(P1) $\vec{0} \in F$;

(P2) Se $u, v \in F$ então $u + v \in F$;

(P3) Se $v \in F$ então, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha v \in F$.

Decorrendo da definição, percebemos que todo subespaço é um espaço vetorial em si mesmo, também percebemos que em todo espaço vetorial existe o **subespaço trivial**, composto somente pelo vetor nulo.

Exercícios

1. Prove que um plano é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ se, e somente se, o plano passa pela origem.

2. Sejam $A_{m\times n}$ e $B_{n\times 1}$ matrizes. Prove que o conjunto solução de $AX = B$ é subespaço vetorial de $M_{n\times 1}$ se, e somente se, $B = 0$.

3.3 Base, Dimensão e Coordenadas

3.4 Produto Interno

3.5 Ortogonalidade

3.5.1 Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt

Capítulo 4

Transformações Lineares

4.1 Teorema Núcleo-Imagem

4.2 Matriz de uma Transformação Linear

Capítulo 5

Autovalores e Autovetores

5.1 Polinômios

5.2 Diagonalização

Apêndice A

Aplicações (Cônicas)

Referências Bibliográficas

[1] Lang, Serge. *Linear Algebra*. 3a ed.

[2] Hoffman, Kenneth; Kunze, Ray. *Linear Algebra*. 2a ed.

[3] Lima, Elon Lages. *Álgebra Linear*. 10a ed.

[4] Axler, Sheldon. *Linear Algebra Done Right*. 4a ed.

[5] Santos, Reginaldo. *Um Curso de Geometria Analítica e Álgebra Linear*. Cópia digital.