Capítulo 1

Álgebra Vetorial e Geometria Analítica

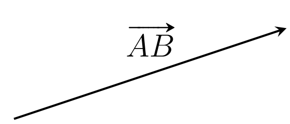
Para iniciar os estudos de Álgebra Linear, é interessante apresentar, inicialmente, conceitos básicos para visualizar e estruturar o conhecimento. Nesse sentido, entender vetores na perspectiva geométrica, ou seja, no plano ($\mathbb{R}^2$) ou no espaço ($\mathbb{R}^3$), é mais intuitivo em um primeiro contato. Nos próximos capítulos, em especial no capítulo 3, a definição de vetores será ampliada para outros espaços vetoriais, com um maior nível de abstração.

1.1 Álgebra Vetorial

Embora iniciemos com Álgebra Vetorial e não Geometria Analítica, é interessante começar com um ponto de vista mais geométrico, para criar intuição.

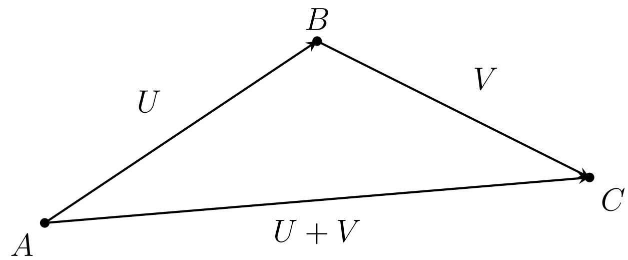
Definição 1.1.1. ***Vetores (geometricamente)*** *são objetos matemáticos que possuem módulo, direção e sentido.*

Usualmente, um vetor é representado por segmentos de retas orientados equipolentes, ou seja, que apresentam mesmo tamanho, direção e sentido.



Note que, pela definição, um vetor não possui "origem fixa"e pode ser representado por diferentes segmentos de reta orientados.

Definição 1.1.2. *Sejam U e V vetores representados por $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$, respectivamente. A* ***soma de vetores*** *$U+V$ é definida como o vetor representado pelo segmento de reta orientado $\overrightarrow{AC}$*



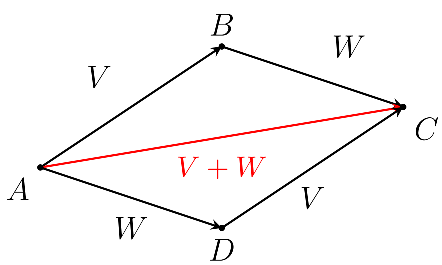
Proposição 1.1.3. *Sejam V, W e U vetores. A soma de vetores segue as seguintes propriedades:*

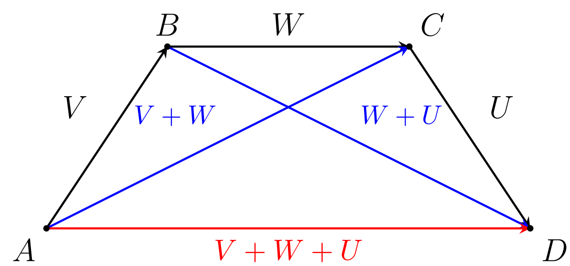
i) $V+W=W+V$ *(comutatividade)*

ii) $V+(W+U)=(V+W)+U$ *(associatividade)*

iii) $\exists$ *vetor* $\bar{0}$, *tal que* $V+\bar{0}=V$ *(existência do elemento neutro/vetor nulo)*

Abaixo seguem ilustrações das propriedades i) e ii).





Definição 1.1.4. *Seja V um vetor. Seu* ***simétrico****, denotado por $-V$, é o vetor tal que*

$$V+(-V)=\bar{0}$$

Definição 1.1.5. *Sejam V e W vetores. A* ***diferença W menos V*** *é definida como*

$$W-V=W+(-V)$$

Definição 1.1.6. *Sejam $V\neq\bar{0}$ um vetor e $\alpha\neq 0$ um escalar (ou seja, um número real). A* ***multiplicação do vetor V por um escalar α****, denotada por αV, é definida pelo vetor tal que:*

i) seu módulo é $|\alpha||V|$, onde $|V|$ é o módulo de V;

ii) a direção é a mesma de V;

iii) tem sentido de V se $\alpha>0$, e sentido de $-V$ se $\alpha<0$.

Caso $V = \bar{0}$ *ou* $\alpha = 0$, $\alpha V = \bar{0}$

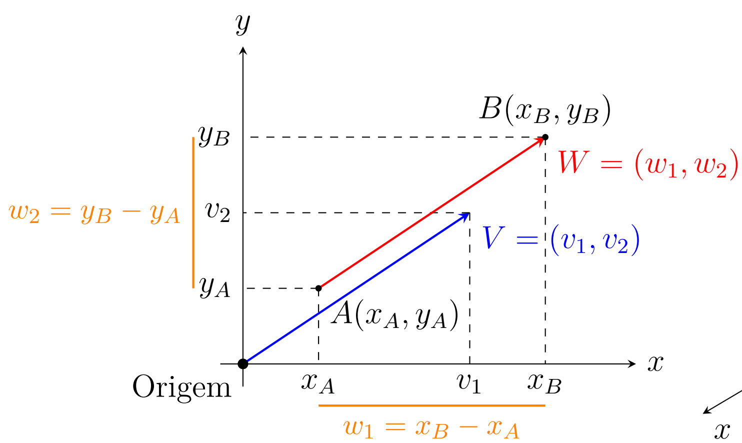
Definição 1.1.7. *Seja* V *um vetor. As* ***componentes de V*** *são cada elemento das coordenadas que representam o ponto final com relação à origem do sistema de coordenadas escolhido.*

Se V *está no plano (*$\mathbb{R}^2$ *ou* ***espaço euclidiano bidimensional****), então suas coordenadas são uma trupla de dois números reais, denotadas usualmente por* (v_1, v_2).

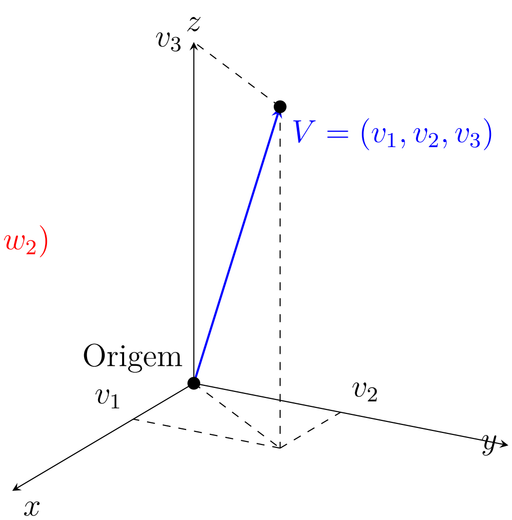
Se V *está no espaço (*$\mathbb{R}^3$ *ou* ***espaço euclidiano tridimensional****), então suas coordenadas são uma tupla de três números reais, denotadas usualmente por* (v_1, v_2, v_3).

Se V *está em "dimensões maiores"(*$\mathbb{R}^n$ *ou* ***espaço euclidiano n-dimensional****), então suas coordenadas são uma tupla de* n *números reais, denotadas usualmente por* $(v_1, \ldots, v_n)$.

Abaixo seguem ilustrações de como coordenadas funcionam no plano e no espaço.



(a) Representação no $\mathbb{R}^2$.



(b) Representação no $\mathbb{R}^3$.

Figura 1.1: Componentes de vetores em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

Perceba que, para verificar as componentes de um vetor qualquer W representado por um segmento $\overrightarrow{AB}$, basta subtrair as suas coordenadas, de modo que:

$$W = \overrightarrow{AB} \Rightarrow \begin{cases} w_1 = x_B - x_A \\ w_2 = y_B - y_A \end{cases} \Rightarrow W = (x_B - x_A,\, y_B - y_A)$$

Para o $\mathbb{R}^3$, a subtração ocorre da mesma forma.

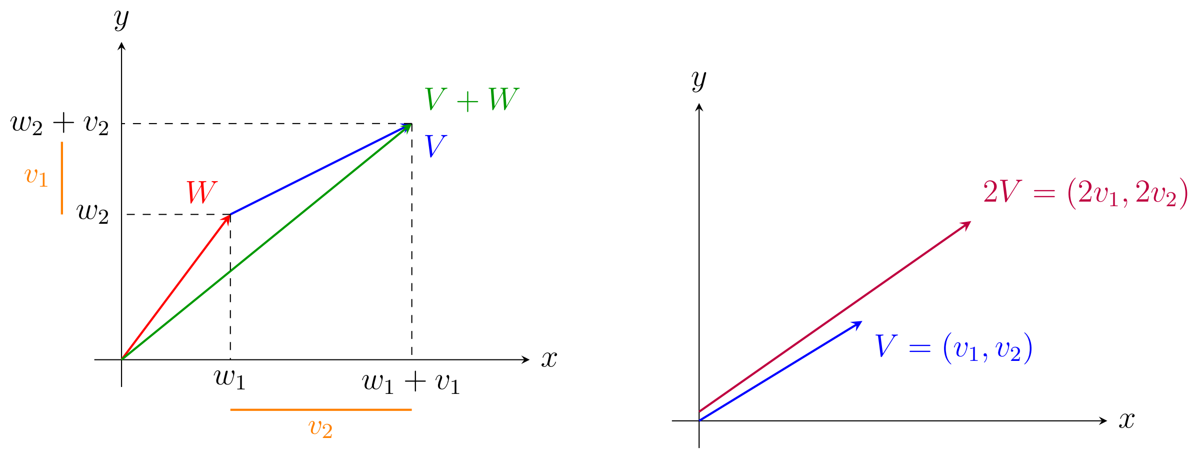
Com isso, note que as operações ficam muito mais fáceis, sem depender sempre do apelo geométrico. Assim, podemos buscar uma nova forma de fazer as operações básicas entre vetores (soma e multiplicação por escalar):

Proposição 1.1.8. *Sejam* $V, W \in \mathbb{R}^2$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Então,*

i) $V + W = (v_1 + w_1,\ v_2 + w_2)$

ii) $\alpha V = (\alpha v_1,\ \alpha v_2)$

Abaixo temos uma ilustração disso:



(a) Soma de vetores: $V+W = (v_1+w_1,\ v_2+w_2)$. (b) Multiplicação escalar: $\alpha V = (\alpha v_1, \alpha v_2)$.

Figura 1.2: Ilustração da soma de vetores e multiplicação escalar em $\mathbb{R}^2$.

Para o $\mathbb{R}^3$, essas operações ocorrem da mesma forma. Generalizando para qualquer dimensão ($\mathbb{R}^n$), temos:

Proposição 1.1.9. *Sejam* $V, W \in \mathbb{R}^n$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Então,*

i) $V + W = (v_1 + w_1, \ldots,\ v_n + w_n)$

ii) $\alpha V = (\alpha v_1, \ldots,\ \alpha v_n)$

E se quisermos fazer ambas as operações ao mesmo tempo? Então teremos uma combinação linear!

Definição 1.1.10. *Sejam* $V_1, \ldots, V_k \in \mathbb{R}^n$ *vetores e* $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ *escalares. Seja* W *um vetor tal que*

$$W = \alpha_1 V_1 + \cdots + \alpha_k V_k$$

Então, W *é* ***combinação linear*** *de* $V_1, \ldots, V_k$.

Abordaremos melhor esse conceito em tópicos mais a frente, como em sistemas lineares.

A partir da definição de coordenadas e da soma/multiplicação de vetores por meio delas, podemos provar as seguintes propriedades:

Teorema 1.1.11. *Sejam U, V e W vetores e α e β escalares. Então:*

i) $U + V = V + U$;

ii) $(U + V) + W = U + (V + W)$;

iii) $U + \bar{0} = U$;

iv) $U + (-U) = \bar{0}$;

v) $\alpha(\beta U) = (\alpha\beta)U$;

vi) $\alpha(U + V) = \alpha U + \alpha V$;

vii) $(\alpha + \beta)U = \alpha U + \beta U$;

viii) $1U = U$.

Outra ideia muito importante é saber o módulo do vetor a partir de seus componentes.

Definição 1.1.12. *Seja $V \in \mathbb{R}^n$. O seu comprimento, também chamado de **norma de** V e denotado por $\|V\|$, é dado por*

$$\|V\| = \sqrt{v_1^2 + \cdots + v_n^2}$$

Essa forma de calcular a norma está ligada ao cálculo do tamanho de vetores no $\mathbb{R}^2$ e no $\mathbb{R}^3$, utilizando o Teorema de Pitágoras.

1.2 Geometria Analítica

1.3 Matrizes como Vetores