

Capítulo 1

Sistemas Lineares e Matrizes

Além das ideias de vetores e da própria Geometria Analítica, compreender Sistemas Lineares fundamenta os principais problemas que a Álgebra Linear busca responder. No entanto, antes de apresentar sistemas lineares ou outros conceitos (como combinação e dependência linear), vamos iniciar com matrizes.

1.1 Matrizes

As matrizes permitem uma manipulação facilitada dos sistemas lineares e uma abstração maior de diversos conceitos, o que é muito útil para a Álgebra Linear. Fundamentalmente, elas são tabelas de números ou variáveis, que se assemelham, por exemplo, com sistemas lineares, apresentados na seção seguinte. Além disso, também podem ser interpretadas como vetores ou até mesmo Transformações Lineares, entrelaçando todos os elementos de interesse dessa área.

Iniciando, vamos definir matrizes formalmente e nomear seus elementos, para facilitar o entendimento e a manipulação dessas tabelas.

Definição 1.1.1. *Seja $m, n \in \mathbb{N}^*$. Uma **matriz** $A_{m \times n}$, ou simplesmente A , é uma tabela de mn números dispostos em m linhas e n colunas.*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Definição 1.1.2. *Denotamos por a_{ij} o elemento na i -ésima linha e j -ésima coluna da matriz*

A.

Um ponto importante dessa definição são os objetos m e n , que são, na verdade, a **ordem** da matriz. Isso é importante para entender as operações entre matrizes e até mesmo separá-las em conjuntos ou classificações, apresentados abaixo.

Definição 1.1.3. Denotamos por $\mathbb{M}_{m \times n}$ o conjunto de todas as matrizes de ordem $m \times n$.

Definição 1.1.4. Segue abaixo nomenclaturas de matrizes:

- **Matriz Quadrada:** $m = n$, i.e., mesmo número de linhas e colunas.
- **Matriz Linha:** $m = 1$, i.e., uma linha.
- **Matriz Coluna:** $n = 1$, i.e., uma coluna.
- **Matriz Nula ($\bar{0}$):** $a_{ij} = 0 \forall i, j$.

Para matrizes quadradas, onde a ordem é do tipo $n \times n$, temos classificações específicas.

Definição 1.1.5. Seja A uma matriz quadrada. Então,

- **Matriz Diagonal:** $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$;
- **Matriz Triangular Superior:** $a_{ij} = 0, \forall i > j$;
- **Matriz Triangular Inferior:** $a_{ij} = 0, \forall i < j$.
- **Matriz Identidade (I):** $a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$.

A seguir, finalmente definiremos as operações com matrizes.

Definição 1.1.6. A **soma de matrizes** $A_{m \times n}$ e $B_{m \times n}$ é definida pela matriz $C_{m \times n} = A + B$ tal que

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \forall i, j$$

Note que a operação da soma só é definida para matrizes de mesmo tamanho.

Definição 1.1.7. A **multiplicação de uma matriz** $A_{m \times n}$ **por um escalar** α é definida pela matriz $B_{m \times n} = \alpha A$ tal que

$$b_{ij} = \alpha a_{ij} \forall i, j$$

Dizemos que B é **múltiplo escalar** de A .

Perceba que ambas estas operações são basicamente fazer o "esperado", elemento por elemento.

A grosso modo, podemos fazer um paralelo com os vetores do \mathbb{R}^n apresentados no capítulo 1, em que as operações mais relevantes eram a soma de vetores e a multiplicação por escalar.

Com ambas as operações somente, podemos provar algumas propriedades interessantes. Primeiro, temos as 8 seguintes, que possuem grande semelhança com o Teorema ?? para vetores, do capítulo 1. Tudo isso se conectará no capítulo 3 de espaços vetoriais.

Teorema 1.1.8. *Sejam A e B matrizes com ordem apropriada para cada propriedade. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Então,*

- | | |
|---|--|
| i) $A + B = B + A$; | v) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$; |
| ii) $A + (B + C) = (A + B) + C$; | vi) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$; |
| iii) $\forall A_{m \times n}, \exists \bar{0}_{m \times n}$, tal que $A + \bar{0} = A$; | vii) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$; |
| iv) $\forall A, \exists -A$, tal que $A + (-A) = \bar{0}$; | viii) $\forall A_{m \times n}, \exists I_m, I_n$, tal que
$A = AI_n = I_m A$; |

Além dessas duas, também temos outras operações importantes.

Definição 1.1.9. A **multiplicação de matrizes** $A_{m \times p}$ e $B_{p \times n}$ é definida pela matriz $C_{m \times n} = AB$ tal que

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + \cdots + a_{ip} b_{pj} \forall i, j$$

Segue abaixo uma representação visual da multiplicação de matrizes, e depois um exemplo.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix}$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj}.$$

Exemplo 1.1.10. Sejam $A_{2 \times 3}$ e $B_{3 \times 2}$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{bmatrix}$$

Note que a multiplicação desse exemplo só é possível porque a quantidade de colunas de A é a mesma que a quantidade de linhas de B . Além disso, perceba que, como resultado, temos uma matriz de ordem 2×2 (quantidade de linhas de A e de colunas de B).

Além da multiplicação de matrizes, também temos a ideia da transposta e do traço.

Definição 1.1.11. A **transposta** de uma matriz $A_{m \times n}$ é definida pela matriz $B_{n \times m} = A^T$, tal que

$$b_{ij} = a_{ji}, \forall i, j$$

Definição 1.1.12. O **traço** de uma matriz quadrada $A_{m \times m}$ é dado pela soma dos elementos da diagonal:

$$\text{tra}(A) = \sum_{i=1}^m a_{ii}$$

Com todas as operações apresentadas, podemos provar as seguintes propriedades de matrizes.

Teorema 1.1.13. Sejam A , B e C matrizes com ordem apropriada para cada propriedade. Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Então,

- | | |
|---|--|
| <i>i)</i> $A(BC) = (AB)C$; | <i>iv)</i> $(A^T)^T = A$; |
| <i>ii)</i> $A(B + C) = AB + AC$
$(B + C)A = BA + CA$; | <i>v)</i> $(A + B)^T = A^T + B^T$; |
| <i>iii)</i> $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$; | <i>vi)</i> $(\alpha A)^T = \alpha A^T$; |
| | <i>vii)</i> $(AB)^T = B^T A^T$. |

1.1.1 Matriz Inversa

Outro conceito fundamental para matrizes é de invertibilidade. Isso se dá pela relativa dificuldade de determinar a inversa, mas também pelas propriedades que são adquiridas com elas, relacionadas a Sistemas Lineares por exemplo.

Definição 1.1.14. Uma matriz quadrada $A_{n \times n}$ é *invertível* ou não singular, se existe uma matriz inversa, denotada por $A_{n \times n}^{-1}$, tal que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

Se A não tem inversa, então A é não invertível ou *singular*.

Além da definição, temos quatro propriedades interessantes de matrizes invertíveis, envolvendo unicidade, invertibilidade, multiplicação e a transposta.

Teorema 1.1.15. Sejam A e B matrizes invertíveis.

- i) $\exists!$ matriz inversa A^{-1}
- ii) A^{-1} invertível e $(A^{-1})^{-1} = A$;
- iii) AB invertível e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
- iv) A^T invertível e $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Para a demonstração, basta utilizar a definição de inversa e as propriedades da multiplicação de matrizes (especialmente comutatividade e associatividade) apresentadas anteriormente. A prova completa fica de exercício para o leitor.

Outro teorema importante mostra que, se provarmos que duas matrizes A e B são tais que $AB = I$, então já está provado que uma é inversa da outra, sem a necessidade de demonstrar que $BA = I$.

Teorema 1.1.16. Sejam $A_{n \times n}$ e $B_{n \times n}$ matrizes. Então,

$$BA = I_n \Leftrightarrow AB = I_n$$

1.1.2 Determinante

Assim como a matriz inversa, o determinante é um objeto de estudo relevante, porém menos intuitivo que a noção de invertibilidade. Também só pode ser calculado para matrizes quadradas.

Existem as formas clássicas, aprendidas no Ensino Médio, de calcular o determinante de uma matriz de ordem 2 ou 3 (Regra de Sarrus), que seguem adiante.

No entanto, para matrizes de ordem superior, precisamos utilizar a definição generalizada de determinante, que é calculado por meio da **expansão em cofatores do determinante de A**. Abaixo segue essa expansão em termos da primeira linha.

Definição 1.1.17. *Seja $A_{n \times n}$ uma matriz. O **determinante** de A , denotado por $\det(A)$, é definido por*

$$\det(A) = \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{1j} \tilde{a}_{1j}, & \text{se } n > 1 \\ a_{11}, & \text{se } n = 1 \end{cases}$$

onde

- $\tilde{a}_{1j} = (-1)^{1+j} \det(\tilde{A}_{1j})$ é o **cofator** de a_{1j} ;
- \tilde{A}_{ij} é a submatriz de A de ordem $(n-1) \times (n-1)$ eliminando a i -ésima linha e a j -ésima coluna, denominada **matriz menor do elemento a_{ij}** .

Segue abaixo uma representação mais visual da matriz menor \tilde{A}_{ij} da matriz original A .

$$\tilde{A}_{ij} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{(i-1)1} & & \ddots & & & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & & & \ddots & & a_{(i+1)n} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Teorema 1.1.18 (Teorema de Laplace). *O determinante de uma matriz pode ser calculado com a expansão em cofatores de qualquer linha i ou qualquer coluna j . Em outras palavras,*

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{j=1}^n a_{ij} \tilde{a}_{ij}, \text{ para } i \in \{1, \dots, n\} \\ &= \sum_{i=1}^n a_{ij} \tilde{a}_{ij}, \text{ para } j \in \{1, \dots, n\} \end{aligned}$$

Corolário 1.1.19. *Seja $A_{n \times n}$ uma matriz.*

$$\exists \text{ linhas } A_i, A_j, \text{ tal que } A_i = A_j \Rightarrow \det(A) = 0$$

Teorema 1.1.20. *Seja a matriz $A_{n \times n}$ escrita em termos das suas linhas, denotadas por $A_i = [a_{i1} \dots a_{in}]$.*

Se existe uma linha A_k tal que $A_k = \alpha X + \beta Y$, para algum $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e algum $X = [x_1 \dots x_n]$ e $Y = [y_1 \dots y_n]$, então,

$$\det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{k-1} \\ \alpha X + \beta Y \\ A_{k+1} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = \alpha \det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{k-1} \\ X \\ A_{k+1} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} + \beta \det \begin{bmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_{k-1} \\ Y \\ A_{k+1} \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix}$$

Corolário 1.1.21. *Sejam $A_{n \times n}$ e $B_{n \times n}$ matrizes.*

i) *Se B é obtida de A multiplicando-se uma linha por um escalar α , então*

$$\det(B) = \alpha \det(A);$$

ii) *Se B é obtida de A pela troca de duas linhas, então*

$$\det(B) = -\det(A);$$

iii) *Se B é obtida de A substituindo uma linha A_l por ela própria somada ao múltiplo escalar de outra linha $(A_l + \alpha A_k)$, então*

$$\det(B) = \det(A).$$

Teorema 1.1.22. *Sejam $A_{n \times n}$ e $B_{n \times n}$ matrizes.*

i) $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.

ii) $\det(A) = \det(A^T)$.

Teorema 1.1.23. *Seja $A_{n \times n}$ uma matriz. A invertível $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.*

1.2 Sistemas Lineares

Definição 1.2.1. *Sejam $b, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ fixos e x_1, \dots, x_n variáveis. Então, uma **equação linear** é uma igualdade da forma*

$$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = b.$$

Definição 1.2.2. Um **sistema linear** é um conjunto de equações lineares.

Definição 1.2.3. Uma **solução** de um sistema linear é o conjunto $\{s_1, \dots, s_n\}$ que satisfaz todas as equações ao substituir cada variável ($x_1 = s_1, \dots, x_n = s_n$).

Definição 1.2.4. O **conjunto solução** ou a **solução geral** do sistema é o conjunto de todas as soluções do sistema linear.

Dessa forma, se tivermos um sistema de m equações e de soluções com n entradas, então temos algo no formato abaixo.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Para encontrar as soluções de um sistema linear, são utilizadas três operações fundamentais, chamadas de **operações elementares**:

1. Trocar a posição de duas equações;
2. Multiplicar uma equação por um escalar $\alpha \neq 0$;
3. Somar uma equação ao "múltiplo escalar" de outra.

Um tipo especial de sistema linear é o homogêneo.

Definição 1.2.5. Um sistema tal que $b_1, \dots, b_m = 0$ é chamado **sistema linear homogêneo**.

Definição 1.2.6. Uma solução onde

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ \vdots \\ x_n = 0 \end{cases}$$

é chamada de **solução trivial**.

Proposição 1.2.7. Se um sistema linear é homogêneo, então ele admite pelo menos solução trivial.

Teorema 1.2.8. Se um sistema linear homogêneo tem menos equações do que incógnitas, então ele tem infinitas soluções.

1.2.1 Matrizes como Sistemas Lineares

Relembrando novamente Sistemas Lineares, eles possuem o seguinte formato:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

No entanto, esse tipo de "multiplicação e soma ordenadas" lembra muito um dos conceitos apresentados anteriormente: a multiplicação entre matrizes. De fato, note que, definindo matrizes $A_{m \times n}$ e $B_{m \times 1}$ de constantes reais, e uma matriz $X_{n \times 1}$ de variáveis, podemos dizer que

$$AX = B \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Ou, mais explicitamente, que

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Além disso, podemos novamente definir as operações elementares para matrizes.

Definição 1.2.9. *Seguem abaixo as **operações elementares sobre as linhas de uma matriz**.*

1. Trocar a posição de duas linhas;
2. Multiplicar uma linha por um escalar $\alpha \neq 0$;
3. Somar uma linha ao "múltiplo escalar" de outra.

Definição 1.2.10. *Sejam A e B matrizes. A é **equivalente por linhas** a B , se B pode ser obtida aplicando operações elementares sobre A .*

Uma forma de representar os sistemas lineares com matrizes, omitindo as variáveis e obtendo algo mais conciso, temos a **matriz aumentada** abaixo.

$$[A \mid B] = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

Teorema 1.2.11. *Sejam os sistemas $AX = B$ e $CX = D$. Se $[A \mid B]$ é equivalente por linhas a $[C \mid D]$, então o conjunto solução de ambos é a mesma.*

Definição 1.2.12. O **pivô** da i -ésima linha de uma matriz A é o primeiro elemento não nulo de A_i .

Definição 1.2.13. Seja $A_{m \times n}$ uma matriz. Ela está na forma **escalonada reduzida**, se satisfaz todas as condições abaixo.

- i) Todas as linhas nulas ($A_i = [0, \dots, 0]$) estão abaixo das não nulas;
- ii) O pivô de cada linha não nula é 1;
- iii) Se o pivô da linha A_i ocorre na j -ésima coluna, então o pivô da linha A_{i+1} ocorre na $(j+1)$ -ésima coluna;
- iv) Se uma coluna contém pivô, então todos os outros elementos são 0.

Proposição 1.2.14. *Sejam $A_{m \times n}$ e $B_{m \times 1}$ matrizes. Se o sistema $AX = B$ possui duas soluções distintas $X_0 \neq X_1$, então ele tem infinitas soluções.*

Teorema 1.2.15. *Um sistema linear pode ter:*

- Nenhuma solução;
- Uma única solução;
- Infinitas soluções.

Teorema 1.2.16. \forall matriz $A_{m \times n}$, $\exists!$ matriz escalonada reduzida $R_{m \times n}$.

Proposição 1.2.17. *Seja $R_{n \times n}$ uma matriz escalonada reduzida. $R \neq I_n \Rightarrow R$ tem uma linha nula.*

Teorema 1.2.18. $A_{m \times n}$ é uma matriz tal que $m < n \Rightarrow$ o sistema homogêneo $AX = \bar{0}$ tem infinitas soluções.

Proposição 1.2.19. *Seja $A_{n \times n}$ uma matriz. Então,*

- i) X e Y são soluções do sistema homogêneo $AX = \bar{0} \Rightarrow X + Y$ também é solução.
- ii) X é solução do sistema homogêneo $AX = \bar{0} \Rightarrow \alpha X$ também é solução, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

Teorema 1.2.20. *Seja $A_{n \times n}$ uma matriz. A invertível $\Leftrightarrow A$ é equivalente por linhas a I_n .*

Teorema 1.2.21. *Seja $A_{n \times n}$ uma matriz.*

i) O sistema $AX = B$ tem solução única $\Leftrightarrow A$ invertível (a solução é $X = A^{-1}B$).

ii) O sistema homogêneo $AX = \bar{0}$ tem solução não trivial $\Leftrightarrow A$ é singular.

Teorema 1.2.22. *O sistema homogêneo $AX = \bar{0}$ tem solução não trivial $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.*

1.3 Combinação Linear e Dependência Linear

Vamos retomar a definição de combinação linear.

Definição 1.3.1. *Sejam $V_1, \dots, V_k \in \mathbb{R}^n$ vetores e $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ escalares. Seja W um vetor tal que*

$$W = \alpha_1 V_1 + \dots + \alpha_k V_k$$

Então, W é combinação linear de V_1, \dots, V_k .

Proposição 1.3.2. *Sejam $A_{m \times n}$ e $B_{m \times 1}$ matrizes.*

O B é combinação linear das colunas de $A \Leftrightarrow$ O sistema $AX = B$ tem solução.

Definição 1.3.3. *Sejam $V_1, \dots, V_k \in \mathbb{R}^n$. Seja $V_{n \times k} = [V_1 \ \dots \ V_k]$.*

*O conjunto S desses vetores é **linearmente independente (LI)** se $VX = \bar{0}$ possui somente solução trivial.*

*Caso contrário, o conjunto S é **linearmente dependente (LD)**.*

Proposição 1.3.4. *Seja $A_{m \times n}$ uma matriz.*

i) As colunas de A são LI \Leftrightarrow o sistema $AX = \bar{0}$ possui somente solução trivial.

ii) Seja $m = n$. Então as colunas de A são LI $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.

Corolário 1.3.5. *Sejam $V_1, \dots, V_k \in \mathbb{R}^n$. Se $k > n$, então o conjunto S desses vetores é LD.*

Teorema 1.3.6. *Seja o conjunto $S = \{V_1, \dots, V_k\}$, com $k > 1$. Então, S é LD $\Leftrightarrow \exists V_j$ tal que V_j é combinação linear de $V_1, \dots, V_{j-1}, V_{j+1}, \dots, V_k$.*