Introdução e Revisão de Álgebra Linear

Anizio Silva Correia Júnior
Mariana Tiemi Yoshioka

22 de novembro de 2025

Sumário

Prefácio

Este documento aborda os conteúdos do curso de Álgebra Linear, ministrado no período 2025.1 do curso Bacharelado em Matemática da Tecnologia e Inovação, do Instituto de Matemática Pura e Aplicada e Tecnologia – IMPA Tech. O objetivo deste material é auxiliar os discentes do IMPA Tech que estão no primeiro ano da graduação nos estudos da presente matéria, bem como servir de revisão para as demais turmas. Sua construção foi feita com a orientação da professora Nara Bobko, em seu projeto de extensão para elaboração de materiais de estudo para Álgebra Linear.

Assim como o curso de Álgebra Linear do IMPA Tech, este material não apresenta pré-requisitos, a não ser um nivelamento de matemática em conceitos básicos do Ensino Médio, que podem ser facilmente resgatados durante a leitura.

No capítulo 1, o foco será, principalmente, resgatar e abordar assuntos básicos, necessários ao discente para o aproveitamento completo do curso de Álgebra Linear, e que possivelmente não foram apresentados no Ensino Médio. Isso inclui noções básicas de vetores, bem como de objetos geométricos como retas e planos. Além disso, tem-se um resgate do conceito de matrizes, em uma perspectiva voltada principalmente para matrizes como vetores, e vice-versa.

No capítulo 2 em diante, conceitos da Álgebra Linear são de fato apresentados, iniciando com sistemas lineares, combinação linear e dependência linear. Em seguida, o capítulo 3 apresenta o coração da Álgebra Linear, que são os espaços vetoriais, a partir de ideias como base de um espaço vetorial e ortogonalidade; e o capítulo 4 segue com outro conceito fundamental, que são as transformações lineares. Por fim, no capítulo 5, autovalores e autovetores são apresentados, trazendo aplicações diretas em diagonalização de matrizes, por exemplo.

Espera-se um bom aproveitamento deste material, que apresenta tópicos de Álgebra Linear de forma direta e clara, com algumas motivações geométricas.

Capítulo 1

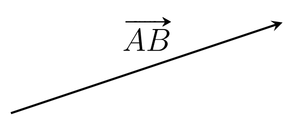
Álgebra Vetorial e Geometria Analítica

Para iniciar os estudos de Álgebra Linear, é interessante apresentar, inicialmente, conceitos básicos para visualizar e estruturar o conhecimento. Nesse sentido, entender vetores na perspectiva geométrica, ou seja, no plano ($\mathbb{R}^2$) ou no espaço ($\mathbb{R}^3$), é mais intuitivo em um primeiro contato. Nos próximos capítulos, em especial no capítulo 3, a definição de vetores será ampliada para outros espaços vetoriais, com um maior nível de abstração.

1.1 Álgebra Vetorial

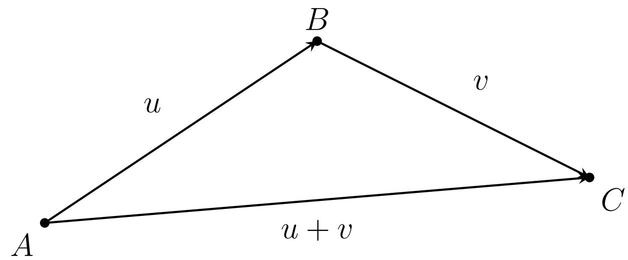
Definição 1.1.1. ***Vetores (geometricamente)*** *são objetos matemáticos que possuem módulo, direção e sentido.*

Usualmente, um vetor é representado por segmentos de retas orientados equipolentes, ou seja, que apresentam mesmo tamanho, direção e sentido.



Note que, pela definição, um vetor não possui "origem fixa"e pode ser representado por diferentes segmentos de reta orientados.

Definição 1.1.2. *Sejam u e v vetores representados por $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$, respectivamente. A* ***soma de vetores*** *$u+v$ é definida como o vetor representado pelo segmento de reta orientado $\overrightarrow{AC}$*



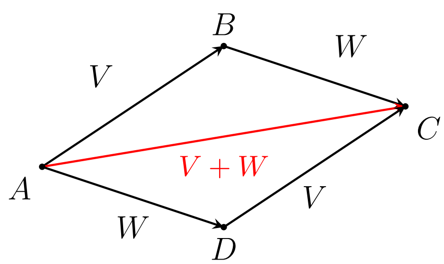
Proposição 1.1.3. *Sejam V, W e U vetores. A soma de vetores segue as seguintes propriedades:*

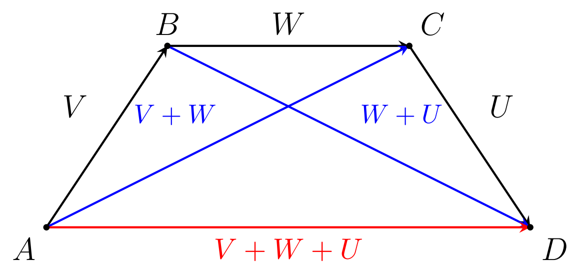
i) $V + W = W + V$ *(comutatividade)*

ii) $V + (W + U) = (V + W) + U$ *(associatividade)*

iii) $\exists$ *vetor* $\bar{0}$, *tal que* $V + \bar{0} = V$ *(existência do elemento neutro/vetor nulo)*

Abaixo seguem ilustrações das propriedades i) e ii).





Definição 1.1.4. *Seja V um vetor. Seu* ***simétrico****, denotado por $-V$, é o vetor tal que*

$$V + (-V) = \bar{0}$$

Definição 1.1.5. *Sejam V e W vetores. A* ***diferença*** *W* ***menos*** *V é definida como*

$$W - V = W + (-V)$$

1.2 Geometria Analítica

1.3 Matrizes como Vetores

Capítulo 2

Sistemas Lineares

2.1 Matrizes como Sistemas Lineares

2.2 Combinação Linear

2.3 Dependência Linear

Capítulo 3

Espaços Vetoriais

Videoaula 12 - Espaços Vetoriais

https://www.youtube.com/watch?v=UkKQEYRdiks

Videoaula 18 - Espaços Vetoriais Abstratos

https://www.youtube.com/watch?v=dkaUQG1Ic3A

Videoaula 13 - Subespaços Vetoriais

https://www.youtube.com/watch?v=4D-q8OIXa94

Videoaula 16 - Base e Dimensão

https://www.youtube.com/watch?v=wSXwQ3gM7Eo

Videoaula 17 - Coordenadas

https://www.youtube.com/watch?v=GPnZsHawg6A

Videoaula 20 - Ortogonalidade

https://www.youtube.com/watch?v=QxsxaQrCHww

Videoaula 21 - Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt

https://www.youtube.com/watch?v=GbQ-pjpsY9Q

Espaços vetoriais são, basicamente, a nossa bancada de trabalho, e os vetores, as ferramentas com as quais construímos muitas funcionalidades. Exemplos disso são as LLMs (ChatGPT, Gemini, DeepSeek) e os sites de busca (Google, DuckDuckGo). Eles utilizam vetores para executar suas tarefas: todas as entradas são convertidas para dentro de um espaço vetorial e, de acordo com a posição do seu vetor, o sistema aproxima os resultados mais relevantes para você.

Além das aplicações na vida real, também temos na matemática pura, espaços vetoriais são muito necessário em cálculo de múltiplas variáveis e uma das bases de análise funcional.

Definição 3.0.1. ***Espaços vetorial*** *é um conjunto V não vazio no qual existe as operações de adição (entre vetores) e multiplicação por um número real (escalar), respeitando as seguintes propriedades com as operações citadas:*

Adição:

(A1) $u + v = v + u$ *(Comutatividade)*

(A2) $(u + v) + w = u + (v + w)$ *(Associatividade)*

(A3) $\exists v : v + u = u + v = u$ *denotamos* v *por* $\vec{0}$ *(Vetor nulo)*

(A4) $\forall u\ \exists v : u + v = v + u = \vec{0}$ *denotamos* v *por* $-u$ *(Inverso aditivo)*

Multiplicação por Escalar:

(M1) $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$ *(Distributividade de um escalar)*

(M2) $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$ *(Distributividade de um vetor)*

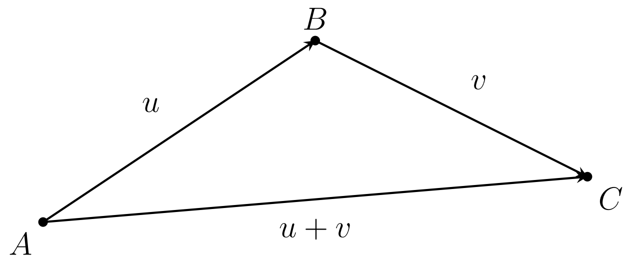
(M3) $v \cdot 1 = v$ *(Multiplicação por 1)*

(M4) $\alpha(\beta \cdot v) = (\alpha \cdot \beta)v$ *(Associatividade)*

Definição 3.0.2. *Elementos de um espaço vetorial V são denominados* ***vetores****.*

Exemplo 3.0.3 (Exemplo de espaço vetorial). O plano euclidiano de dimensão n ($\mathbb{R}^n$) é um dos exemplos mais clássicos de espaço vetorial, seja dois vetores $u = (\eta_1, ..., \eta_n)$ e $v = (\delta_1, ..., \delta_n)$ e também dois escales α e β, com sua soma e multiplicação definido por:

$$u + v = (\eta_1 + \delta_1, \ldots, \eta_n + \delta_n)$$
$$\alpha \cdot u = (\alpha\eta_1, \ldots, \alpha\eta_n)$$



(Exemplo no $\mathbb{R}^2$)

3.1 Subespaços Vetoriais

3.2 Base e Coordenadas

3.3 Ortogonalidade

3.3.1 Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt

Capítulo 4

Transformações Lineares

4.1 Teorema Núcleo-Imagem

4.2 Matriz de uma Transformação Linear

Capítulo 5

Autovalores e Autovetores

5.1 Polinômios

5.2 Diagonalização

Apêndice A

Aplicações (Cônicas)

Referências Bibliográficas

[1] Lang, Serge. *Linear Algebra*. 3ł ed.

[2] Hoffman, Kenneth; Kunze, Ray. *Linear Algebra*. 2ł ed.

[3] Lima, Elon Lages. *Álgebra Linear*. 10ł ed.

[4] Axler, Sheldon. *Linear Algebra Done Right*. 4ł ed.

[5] Santos, Reginaldo. *Um Curso de Geometria Analítica e Álgebra Linear*. Cópia digital.