

# Zbirka nalog iz Operacijskih raziskav

Janoš Vidali

6. maj 2020

## Kazalo

<b>1 Naloge</b>	<b>2</b>
1.1 Zahtevnost algoritmov . . . . .	2
1.2 Celoštevilsko linearno programiranje . . . . .	10
1.3 Teorija odločanja . . . . .	26
1.4 Dinamično programiranje . . . . .	41
1.5 Algoritmi na grafih . . . . .	60
1.6 CPM/PERT . . . . .	82
1.7 Upravljanje zalog . . . . .	88
1.8 Pretoki in prerezi . . . . .	90
1.9 Razdelitve . . . . .	102
<b>2 Rešitve</b>	<b>104</b>
2.1 Zahtevnost algoritmov . . . . .	104
2.2 Celoštevilsko linearno programiranje . . . . .	116
2.3 Teorija odločanja . . . . .	146
2.4 Dinamično programiranje . . . . .	181
2.5 Algoritmi na grafih . . . . .	209
2.6 CPM/PERT . . . . .	239
2.7 Upravljanje zalog . . . . .	247
2.8 Pretoki in prerezi . . . . .	253
2.9 Razdelitve . . . . .	281
<b>Literatura</b>	<b>284</b>

# 1 Naloge

## 1.1 Zahtevnost algoritmov

### Naloga 1.1.

Vir: Vaje OR 21.2.2018

Naj bo  $A[1 \dots n][1 \dots n]$  matrika (tj., seznam seznamov) dimenzij  $n \times n$ . Dan je spodnji program:

```
for  $i = 1, \dots, n$  do
  for  $j = i + 1, \dots, n$  do
     $A[i][j] \leftarrow A[j][i]$ 
  end for
end for
```

- (a) Kaj počne zgornji program?
- (b) Oceni število korakov, ki jih opravi zgornji program, v odvisnosti od parametra  $n$ .

### Naloga 1.2.

Vir: Vaje OR 21.2.2018

Naj bo  $\ell[1 \dots n]$  seznam, ki ima na začetku vse vrednosti nastavljene na 0. Dan je spodnji program:

```
 $i \leftarrow 1$ 
while  $i \leq n$  do
   $\ell[i] \leftarrow 1 - \ell[i]$ 
  if  $\ell[i] = 1$  then
     $i \leftarrow 1$ 
  else
     $i \leftarrow i + 1$ 
  end if
end while
```

- (a) Kaj se dogaja, ko teče zgornji program?
- (b) Oceni število korakov, ki jih opravi zgornji program, v odvisnosti od parametra  $n$ .

### Naloga 1.3.

Vir: Vaje OR 21.2.2018

Algoritem BUBBLESORT uredi vhodni seznam  $\ell[1 \dots n]$  tako, da zamenjuje sosednje elemente v nepravem vrstnem redu:

```
function BUBBLESORT( $\ell[1 \dots n]$ )
   $z \leftarrow n$ 
  while  $z > 1$  do
     $y \leftarrow 1$ 
    for  $i = 2, \dots, z$  do
      if  $\ell[i - 1] > \ell[i]$  then
         $\ell[i - 1], \ell[i] \leftarrow \ell[i], \ell[i - 1]$ 
      end if
    end for
     $z \leftarrow y$ 
  end while
```

```

        y ← i
    end if
end for
z ← y - 1
end while
end function

```

- (a) Izvedi algoritem na seznamu [7, 11, 16, 7, 5].
- (b) Določi časovno zahtevnost algoritma.

**Naloga 1.4.**

Vir: Vaje OR 12.10.2016

Algoritem MERGESORT uredi vhodni seznam tako, da ga najprej razdeli na dva dela, nato vsakega rekurzivno uredi, nazadnje pa zlije dobljena urejena seznama.

- (a) S psevdokodo zapiši algoritem MERGESORT.
- (b) Izvedi algoritem na seznamu [7, 11, 16, 7, 5, 0, 14, 1, 19, 13].
- (c) Določi časovno zahtevnost algoritma.

**Naloga 1.5.**

Vir: Vaje OR 21.2.2018

Število  $n$  želimo razcepiti na dva netrivialna celoštevilska faktorja, kar storimo s sledečim algoritmom:

```

function RAZCEP( $n$ )
    for  $i = 2, \dots, \lfloor \sqrt{n} \rfloor$  do
        if  $n/i$  je celo število then
            return ( $i, n/i$ )
        end if
    end for
    return  $n$  je praštevilo
end function

```

Določi časovno zahtevnost algoritma. Ali je ta algoritem polinomski?

**Naloga 1.6.**

Vir: Vaje OR 21.2.2018

Zapiši rekurziven algoritem, ki na vhod dobi celo število  $n$  in teče v času  $O(\sqrt{n})$ . Uporaba korenjenja ni dovoljena.

**Naloga 1.7.**

Vir: Kolokvij OR 17.4.2014

Dani so končna neprazna množica  $S \subset \mathbb{N}$  moči  $n$ , število  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  ter algoritem ALG:

```

function ALG( $S, k$ )
     $x \leftarrow$  naključen element  $S$ 
     $S^+ \leftarrow \{y \in S \mid y > x\}$ 
     $S^- \leftarrow \{y \in S \mid y < x\}$ 
    if  $|S^-| < k - 1$  then

```

```

    return ALG( $S^+$ ,  $k - |S^-| - 1$ )
else if  $|S^-| = k - 1$  then
    return  $x$ 
else
    return ALG( $S^-$ ,  $k$ )
end if
end function

```

Ugotovi, kaj je izhod algoritma pri danih vhodnih podatkih  $S$  in  $k$ . Oцени časovno zahtevnost algoritma v najslabšem in v povprečnem primeru.

**Naloga 1.8.**

Vir: Kolokvij OR 25.11.2010

- (a) Dokaži, da za poljubni konstanti  $a, b \in \mathbb{R}$ , kjer je  $b > 0$ , velja  $(n + a)^b = O(n^b)$ .
- (b) Naj bo  $f$  naraščajoča funkcija. Ali velja  $g(n) = O(f(g(n)))$ ?
- (c) Dokaži, da če  $T$  zadošča pogoju  $T(n) = 2T(\lceil n/2 \rceil) - 13$  za  $n \geq 2$ , potem je  $T(n) = O(n)$ .

**Naloga 1.9.**

Vir: Kolokvij OR 5.4.2012

Naj bo  $G = (V, E)$  enostaven usmerjen graf (tj., brez zank in vzporednih povezav), podan z matriko sosednosti  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$  ( $n = |V|$ ), kjer je  $a_{ij} = 1$ , če je  $ij \in E$ , in  $a_{ij} = 0$  sicer. Želimo ugotoviti, ali v  $G$  obstaja kak usmerjen trikotnik (tj., usmerjen cikel dolžine 3).

- (a) Konrad je napisal naslednji algoritem, ki naj bi rešil ta problem:

```

for  $i = 1, \dots, n$  do
  for  $j = 1, \dots, n$  do
    for  $k = 1, \dots, n$  do
      for  $\ell = 1, \dots, n$  do
        if  $a_{ij} = a_{jk} = a_{k\ell} = 1 \wedge \ell = i$  then
          return TRUE
        end if
      end for
    end for
  end for
end for
return FALSE

```

Ali algoritem deluje pravilno? Kakšna je njegova časovna zahtevnost?

- (b) V psevdokodi napiši algoritem, ki reši problem v času  $O(n^3)$ . Koliko korakov naredi tvoj algoritem v najboljšem in koliko v najslabšem primeru?

**Naloga 1.10.**

Vir: Izpit OR 26.6.2012

Dr. Kaczyński se ukvarja s podatkovno strukturo  $A$ , ki je zelo podobna tabeli (angl. *array*) celih števil. Vrednosti v posameznih celicah "tabele"  $A$  lahko beremo, ne moremo pa jih spreminjati. Elementi "tabele"  $A$  so indeksirani s celimi števili od 1 do  $n$ , kjer je  $n = A.length()$  indeks zadnjega elementa "tabele"  $A$ . Edina operacija (poleg dostopanja do posameznih elementov), ki jo lahko izvajamo nad  $A$ , je "obračanje podtabele". Če ima na začetku  $A$  vrednosti

$$A = [a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, \dots, a_{n-1}, a_n],$$

po klicu ukaza  $A.reverse(i, j)$  izgleda takole:

$$A = [a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_j, a_{j-1}, \dots, a_{i+1}, a_i, a_{j+1}, \dots, a_{n-1}, a_n].$$

Dr. Kaczyński se je lotil implementacije algoritmov nad to podatkovno strukturo. Najprej je seveda implementiral algoritem za urejanje:

```

n ← A.length()
for i = 2, ..., n do
    j ← i
    while j > 1 ∧ A[j - 1] > A[i] do
        j ← j - 1
    end while
    A.reverse(j, i)
    if j + 1 < i then
        end if
    end for

```

- (a) V zgornji algoritem se je prikradla manjša tipkarska napaka, poleg tega pa je ena vrstica celo izginila. Popravi algoritem, da bo deloval pravilno.
- (b) Popravljeni algoritem izvedi na "tabeli"  $A = [5, 3, 12, 9, 1, 15]$ .

**Naloga 1.11.**

Vir: Izpit OR 9.7.2012

Dan je algoritem  $H$ , ki na vhod sprejme enostaven neusmerjen graf  $G = (V, E)$  (tj., brez zank in vzporednih povezav) ter različni vozlišči  $u, v \in V$ :

```

function H(G = (V, E), u, v)
    if |V| = 2 ∧ u ∈ ADJ(G, v) then
        return TRUE
    end if
    for w ∈ ADJ(G, u) \ {v} do
        if H(G - u, w, v) then
            return TRUE
        end if
    end for
    return FALSE
end function

```

Oznaka  $G - u$  predstavlja graf, ki ga dobimo iz  $G$  tako, da odstranimo vozlišče  $u$  in vse njegove povezave.

- (a) Za katere vhode  $(G, u, v)$  algoritem  $H$  vrne TRUE?  
**Namig:** pogledj, kako je z grafi z 2, 3, 4, 5, ... vozlišči, in poskusi posplošiti.
- (b) Denimo, da je  $G = (V, E)$  graf z  $n$  vozlišči, pri čemer je vozlišče  $v$  izolirano (tj., nima nobene povezave), med vsakima drugima dvema vozliščema pa imamo povezavo. Pokaži, da se pri klicu  $H(G, u, v)$  (kjer je  $u \in V \setminus \{v\}$ ) zadnja vrstica funkcije  $H$  izvede  $\Theta((n-2)!)$ -krat.

### Naloga 1.12.

Vir: Izpit OR 4.9.2012

Dr. Kaczyński se ukvarja s podatkovno strukturo  $A$ , ki je zelo podobna tabeli (angl. *array*) celih števil. Vrednosti v posameznih celicah "tabele"  $A$  lahko beremo, ne moremo pa jih spreminjati. Elementi "tabele"  $A$  so indeksirani s celimi števili od 1 do  $n$ , kjer je  $n = A.length()$  indeks zadnjega elementa "tabele"  $A$ . Edina operacija (poleg dostopanja do posameznih elementov), ki jo lahko izvajamo nad  $A$ , je  $A.reverseStart(i)$ . Če ima na začetku  $A$  vrednosti

$$A = [a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_{n-1}, a_n],$$

po klicu ukaza  $A.reverseStart(i)$  izgleda takole:

$$A = [a_i, a_{i-1}, \dots, a_2, a_1, a_{i+1}, \dots, a_{n-1}, a_n].$$

Dr. Kaczyński se je lotil implementacije algoritmov nad to podatkovno strukturo. Najprej je seveda implementiral algoritem za urejanje:

```

n ← A.length()
for i = n, ..., 2 do
  for j = 1, ..., i - 1 do
    if A[j] > A[i] then
      A.reverseStart(j)
      A.reverseStart(i)
    end if
  end for
end for
end for

```

- (a) Oцени časovno zahtevnost zgornjega algoritma. Upoštevaj, da se operacija  $A.reverseStart(i)$  izvede v konstantnem času.
- (b) Algoritem izvedi na "tabeli"  $A = [5, 9, 12, 7, 15]$ . Ali deluje pravilno?
- (c) Napiši algoritem za urejanje, ki bo deloval pravilno. Njegova časovna zahtevnost ne sme biti slabša od časovne zahtevnosti algoritma dr. Kaczyńskiego.

**Naloga 1.13.**

Vir: Kolokvij OR 9.5.2013

Profesionalni programer je gospodu Velikozobcu prodal algoritem KOŠI. A Velikozobec je že v letih in je pozabil, kaj naj bi ta algoritem vračal. V prospektu je zasledil naslednjo psevdokodo algoritma:

**Vhod:**  $s[0 \dots n-1]$  tabela tromestnih števil

$T \leftarrow$  tabela velikosti 10, katere elementi so prazne vrste (podatkovne strukture)

```
for  $i = 0, 1, \dots, n-1$  do
  for  $i = 0, 1, \dots, 9$  do
    if zadnja številka  $s[i] = j$  then
       $T[j].append(s[i])$ 
    end if
  end for
end for
 $k \leftarrow 0$ 
for  $i = 0, 1, \dots, n-1$  do
  while  $T[k].isEmpty()$  do
     $k \leftarrow k + 1$ 
  end while
   $s[i] \leftarrow T[k].pop()$ 
end for
for  $i = 0, 1, \dots, n-1$  do
  for  $i = 0, 1, \dots, 9$  do
    if srednja številka  $s[i] = j$  then
       $T[j].append(s[i])$ 
    end if
  end for
end for
 $k \leftarrow 0$ 
for  $i = 0, 1, \dots, n-1$  do
  while  $T[k].isEmpty()$  do
     $k \leftarrow k + 1$ 
  end while
   $s[i] \leftarrow T[k].pop()$ 
end for
for  $i = 0, 1, \dots, n-1$  do
  for  $i = 0, 1, \dots, 9$  do
    if prva številka  $s[i] = j$  then
       $T[j].append(s[i])$ 
    end if
  end for
end for
 $k \leftarrow 0$ 
for  $i = 0, 1, \dots, n-1$  do
  while  $T[k].isEmpty()$  do
     $k \leftarrow k + 1$ 
  end while
   $s[i] \leftarrow T[k].pop()$ 
end for
return  $s$ 
```



(a) Algoritem izvedi na primeru

$$s = [146, 145, 359, 100, 359, 486, 200, 367, 980, 909, 257, 100].$$

Dovolj je napisati tabelo  $s$  po vsaki izmed zunanjih zank.

(b) Kakšna je časovna zahtevnost algoritma?

(c) Kaj algoritem vrača?

(d) Gospod Velikozobec je ugotovil, da se algoritem na vseh velikosti  $n = 10\,000$  izvede v približno 0.25 sekundah. Približno koliko časa potrebuje za izvajanje na vseh velikosti  $n = 50\,000$ ?

**Naloga 1.14.**

Vir: Izpit OR 28.8.2013

Asistent pri predmetu Operacijske raziskave je dobil idejo, kako bi predelal algoritem, ki z zlivanjem uredi seznam celih števil. Namesto, da na začetku seznam razdelimo na dva (približno) enako velika seznama, ga razdelimo na tri (približno) enako velike sezname. Le-te rekurzivno uredimo ter združimo ("zlijemo"), da dobimo urejen seznam.

Napiši psevdokodo algoritma časovne zahtevnosti  $O(n \log n)$ , ki uresniči asistentovo idejo. V psevdokodi lahko uporabiš algoritem ZLIJ, ki sprejme urejena seznama celih števil  $A$  in  $B$  dolžin  $m$  in  $n$  ter vrne urejen seznam števil iz  $A$  in  $B$  dolžine  $m + n$  v času  $O(m + n)$ . Psevdokode algoritma ZLIJ ni potrebno pisati. Utemelji, da je časovna zahtevnost tvojega algoritma res  $O(n \log n)$ .

**Naloga 1.15.**

Vir: Izpit OR 19.5.2015

Dana je zgornje trikotna matrika  $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ , ki ima na diagonali neničelne vrednosti, in vektor  $b \in \mathbb{Z}^n$ . V psevdokodi zapiši algoritem, ki sprejme  $A$  in  $b$  ter reši sistem enačb  $Ax = b$ . V psevdokodi lahko uporabiš le aritmetične operacije na številih, ne pa recimo operacije invertiranja matrike  $A$  (razen, če posebej napišeš psevdokodo za tako operacijo).

Kakšna je časovna zahtevnost tvojega algoritma?

**Naloga 1.16.**

Vir: Izpit OR 24.6.2015

Dan je algoritem, ki na vhod sprejme seznam števil  $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$  in vrne preurejen seznam  $A$ , pri čemer preurejanje poteka tako:

- Algoritem najprej primerja in uredi prvi dve števili v tabeli, nato drugo in tretje število, nato tretje in četrto število, ..., in nazadnje še  $(n - 1)$ -to in  $n$ -to število.
- Celoten opisan postopek iz prejšnje alineje algoritem ponavlja tako dolgo, dokler se med postopkom vsaj dvakrat dva elementa tabele zamenjata (tj., algoritem se ustavi, če se v ponovitvi prejšnje alineje zgodi največ ena zamenjava).

Ponazorimo delovanje algoritma na primeru vhoda  $A = [\pi, 7, 3, \sqrt{2}]$ . Potem se med izvajanjem algoritma seznam spreminja tako:

$$\begin{array}{ccccccc} A & \rightarrow & [\pi, 7, 3, \sqrt{2}] & \rightarrow & [\pi, 3, 7, \sqrt{2}] & \rightarrow & [\pi, 3, \sqrt{2}, 7] & \rightarrow \\ & & [3, \pi, \sqrt{2}, 7] & \rightarrow & [3, \sqrt{2}, \pi, 7] & \rightarrow & [3, \sqrt{2}, \pi, 7] & \rightarrow \\ & & [\sqrt{2}, 3, \pi, 7] & \rightarrow & [\sqrt{2}, 3, \pi, 7] & \rightarrow & [\sqrt{2}, 3, \pi, 7] \end{array}$$

- (a) Podaj primer vhoda, kjer algoritem ne vrne urejene tabele. Na tem primeru zapiši zaporedje tabel med izvajanjem algoritma.
- (b) Gornji algoritem zapiši v psevdokodi (ne prirejaj/izboljšuj algoritma). Kakšna je njegova časovna zahtevnost?  
**Namig:** ali je po tem, ko se prvič izvede prva alineja v opisu algoritma, katero število že na istem mestu, kot bi bilo v urejeni tabeli?
- (c) Recimo, da na vhod dobimo tabelo dolžine  $n$ . Kakšni morajo biti vhodni podatki, da algoritem naredi najmanjše število primerjav? Kolikšno je v tem primeru to število?

## 1.2 Celoštevilsko linearno programiranje

### Naloga 2.1.

Vir: Vaje OR 16.3.2016

Občina Ljubljana želi projekte iz množice  $\mathcal{P} = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ , pri čemer ima na voljo  $M$  evrov kapitala. V želji po razvoju regije želijo, da se v sklopu sponzoriranih projektov ustvari vsaj  $N$  delovnih mest. Projekt  $p_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) potrebuje  $d_i$  evrov finančne pomoči in zaposli  $a_i$  ljudi. Na občini so ocenili, da ima projekt  $p_i$  ob uspešnem dokončanju donos  $c_i$  evrov. Katere projekte naj sponzorira, da bo donos čim večji? Na smiseln način modeliraj opisani problem z linearnim programom.

### Naloga 2.2.

Vir: Vaje OR 16.3.2016

Obravnavajmo splošen scenarij iz naloge 2.1.

- (a) Denimo, da so projekti lahko med seboj odvisni. Imejmo množico  $V \subseteq \mathcal{P}^2$ , ki določa, da za vsak par projektov  $(p_i, p_j) \in V$  velja, da lahko projekt  $p_i$  sponzoriramo le, če sponzoriramo tudi projekt  $p_j$ .
- (b) Nekateri izmed projektov so lahko v konfliktu. Naj bo  $S \subseteq 2^{\mathcal{P}}$  družina množic, ki določa, da so za vsako množico  $H \in S$  projekti iz  $H$  med seboj v konfliktu (tj., hkrati lahko sponzoriramo le enega izmed njih.)

Opiši, kako bi modelirali opisane omejitve.

### Naloga 2.3.

Vir: Vaje OR 16.3.2016

(problem prevoza in skladiščenja dobrin)

V Evropski uniji je na voljo  $n$  skladišč, pri čemer znašajo stroški najema  $i$ -tega skladišča  $f_i$  (ne glede na zasedenost), vsako skladišče pa lahko hrani enoto dobrine. Imamo  $m$  strank, ki jim dostavljamo dobrine, pri čemer  $c_{ij}$  ( $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq m$ ) predstavlja strošek dostave dobrine stranki  $j$  iz skladišča  $i$ . Predpostavimo tudi, da ima vsaka stranka določeno potrebo  $d_j$ , ki ponazarja število enot dobrine, ki jo potrebuje. V katerih skladiščih naj hranimo dobrine, da bodo skupni stroški najema in dostave čim manjši? Na smiseln način modeliraj opisani problem z linearnim programom.

### Naloga 2.4.

Vir: Vaje OR 16.3.2016

Definiraj problem dominacijske množice v grafu in zapiši celoštevilski linearni program, ki rešuje opisani problem.

### Naloga 2.5.

Vir: Vaje OR 12.10.2016

Napiši linearni program, ki modelira iskanje največjega prirejanja v dvodelnem grafu.

**Naloga 2.6.**

Vir: Vaje OR 16.3.2016

Napiši linearni program, ki modelira iskanje najkrajše poti med danima vozliščema  $u$  in  $v$  v usmerjenem grafu  $G$ .

**Naloga 2.7.**

Vir: Izpit OR 28.8.2013

Kukavica bo izlegla 16 jajc in jih podtaknila v 12 gnezd, ki pripadajo dvema taščicama, štirim vrtnim penicam, trem travniškim cipam, dvema belima pastiricama in eni sovi. V vsako gnezdo lahko izleže največ tri jajca, pri čemer je verjetnost, da mladiči v gnezdu  $i$  preživijo, enaka  $p_{ij}$ , kjer je  $j$  število podtaknjenih jajc v gnezdu  $i$  (preživijo bodisi vsi ali noben mladič v posameznem gnezdu). Pri vsaki od petih vrst ptic želi izleči vsaj eno jajce, pri taščicah pa želi izleči strogo več jajc kot pri belih pastiricah. Poleg tega pri drugi beli pastirici ne bo odložila jajca, če bo pri prvi taščici odložila dve jajci ali več. Kukavica želi maksimizirati pričakovano število preživelih mladičev.

Zapiši problem kot celoštevilski linearni program.

**Naloga 2.8.**

Vir: Kolokvij OR 31.5.2012

Vinar Janez je pridelal 2000 litrov rumenega muškata, 10000 litrov laškega rizlinga in 5000 litrov renškega rizlinga. Njegovi kupci so bara Kocka in Luka ter župnišče Sv. Martin in občina Duplek. Vsak od njih je pripravljen kupiti največ določeno količino vina po fiksni ceni, ne glede na sorto:

kupec	Kocka	Luka	župnišče	občina
cena za liter	1.0	1.1	1.5	1.8
največja količina v litrih	15000	5000	500	1000

Janez se je odločil, da bo vsako sorto prodal največ enemu kupcu, in sicer v maksimalni količini (če kupec ne kupi vsega vina iste sorte, ga Janez ohrani zase). Župan pravi, da občina drugega vina kot renškega rizlinga ne bo kupila. Bar Luka želi rumeni muškat, če bar Kocka dobi laški rizling. Pri Kocki so se dogovorili, da če občina in župnišče ne kupijo nič, tudi oni ne bodo kupili ničesar. Janezova žena pa vztraja, da če kupec  $A$  kupi sorto  $s_A$  in kupec  $B$  kupi sorto  $s_B$ , potem naj sorta  $s_C$  ostane doma ali jo kupi kupec  $C$  (za neke  $A, B, C$ ). Kako naj Janez proda vino, da bo čim več zaslužil?

Zapiši problem kot celoštevilski linearni program.

**Naloga 2.9.**

Vir: Vaje OR 16.3.2016

Napiši celoštevilski linearni program, ki poišče razdalje od danega vozlišča  $u$  v grafu  $G$ .

**Naloga 2.10.**

Vir: Vaje OR 16.3.2016

Napiši linearni program, ki modelira določanje kromatičnega števila grafa.

**Naloga 2.11.**

Vir: Vaje OR 16.3.2016

**(problem trgovskega potnika)**

Danih je  $n$  mest na zemljevidu. Strošek potovanja iz mesta  $i$  v mesto  $j$  je  $c_{ij}$  ( $1 \leq i, j \leq n$ ). Trgovski potnik želi obiskati vseh  $n$  mest, pri tem pa minimizirati strošek potovanja. Na smiseln način modeliraj opisani problem z linearnim programom.

**Naloga 2.12.**

Vir: Vaje OR 23.3.2016

S celoštevilskim linearnim programom modeliraj problem iskanja minimalnega vpetega drevesa v grafu.

**Naloga 2.13.**

Vir: Izpit OR 15.12.2016

Na oddelku za matematiko je zaposlenih  $n$  asistentov, ki jim moramo dodeliti vaje pri  $m$  predmetih. Za asistenta  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) naj bosta  $a_i$  in  $b_i$  najmanjše in največje število ur, ki jih lahko izvaja, ter  $N_i \subseteq \{1, 2, \dots, m\}$  množica predmetov, ki jih ne želi izvajati. Za predmet  $j$  ( $1 \leq j \leq m$ ) naj bo  $c_j$  število skupin za vaje pri predmetu, ter  $u_j$  število ur vaj na skupino. Poleg tega vemo, da sta asistenta  $p$  in  $q$  skregana, zato pri nobenem predmetu ne smeta oba izvajati vaj.

Predmete želimo asistentom dodeliti tako, da bomo ob upoštevanju njihovih želja minimizirali največje število različnih predmetov, ki smo jih dodelili posameznemu asistentu.

Zapiši celoštevilski linearni program, ki modelira zgoraj opisani problem.

**Namig:** napiši program s spremenljivko  $t$ , ki je dopusten natanko tedaj, ko vsak asistent dobi največ  $t$  različnih predmetov, in potem minimiziraj  $t$ .

**Naloga 2.14.**

Vir: Izpit OR 31.1.2017

Imamo  $m$  opravil, ki jih želimo razporediti med  $n$  strojev. Vsak stroj lahko hkrati opravlja le eno opravilo, vsa opravila pa trajajo eno časovno enoto, neodvisno od stroja. Če stroj  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) uporabimo za vsaj eno opravilo, plačamo ceno  $c_i$  (cena ostane enaka, če na istem stroju naredimo več opravil). Skupni stroški ne smejo preseči količine  $C$ . Dani sta še množici parov  $P$  in  $S$ , pri čemer  $(j, k) \in P$  pomeni, da mora biti opravilo  $j$  dokončano pred začetkom opravila  $k$ ,  $(j, k) \in S$  pa pomeni, da se opravili  $j$  in  $k$  ne smeta izvajati hkrati. Imamo še dodaten pogoj, ki zahteva, da je lahko v posamezni časovni enoti lahko aktivnih največ  $A$  strojev. Minimizirati želimo čas dokončanja zadnjega stroja.

Zapiši celoštevilski linearni program, ki modelira zgoraj opisani problem.

**Naloga 2.15.**

Vir: Izpit OR 15.3.2017

**(problem polnjenja košev)**

Imamo neskončno košev  $B_1, B_2, \dots$ , od katerih ima vsak velikost  $V > 0$ , in  $n$  predmetov pozitivnih velikosti  $s_1, s_2, \dots, s_n$ , od katerih je vsaka največ  $V$ . Predmete želimo postaviti v koše tako, da porabimo čim manj košev, pri čemer noben koš ne vsebuje predmetov skupne velikosti več kot  $V$ . Na primer, če  $V = 10$  ter  $s_1 = 4$ ,

$s_2 = 5$  in  $s_3 = 7$ , lahko to storimo z dvema košema, medtem ko z enim samim košem to ni mogoče. Zapiši celoštevilski linearni program, ki modelira opisani problem.

- (a) Zapiši celoštevilski linearni program, ki modelira zgornji problem.
- (b) Denimo, da imamo seznam  $L$  s pari predmetov, ki jih ne smemo postaviti v isti koš. Če imamo na primer  $L = \{(1, 2), (3, 4), (1, 4)\}$ , potem predmetov 1 in 2 ne moremo postaviti skupaj, prav tako ne predmetov 3 in 4 oziroma 1 in 4.
- Dopolni zgornji celoštevilski linearni program tako, da bo vključeval te omejitve.

**Naloga 2.16.**

Vir: Izpit OR 10.7.2017

Za hitrejša nalaganja posnetkov na YouTube se uporabljajo krajevni strežniki, do katerih lahko uporabniki na določeni lokaciji hitreje dostopajo kakor do glavnega strežnika, ki vsebuje vse posnetke. Vendar pa imajo krajevni strežniki omejen prostor, zato je potrebno ugotoviti, kateri posnetki naj se naložijo na katere krajevne strežnike.

Denimo, da imamo poleg glavnega strežnika še  $k$  krajevnih strežnikov,  $m$  internetnih ponudnikov in  $n$  posnetkov. Naj bo  $c_h$  ( $1 \leq h \leq k$ ) prostor v megabajtih, ki je na voljo na krajevnem strežniku  $h$ . Z indeksom 0 označimo glavni strežnik – lahko torej predpostavljamo  $c_0 = \infty$ . Nadalje naj bo  $s_j$  ( $1 \leq j \leq n$ ) velikost posnetka  $j$ , prav tako v megabajtih,  $\ell_{hi}$  ( $0 \leq h \leq k$ ,  $1 \leq i \leq m$ ) latenca (zakasnitev pri prenosu v milisekundah) ponudnika  $i$  do strežnika  $h$ , in  $r_{ij}$  ( $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq n$ ) število zahtevkov za posnetek  $j$ , ki jih pričakujejo od ponudnika  $i$ . Vsi parametri so cela števila.

Pri vsakem zahtevku bo posnetek poslan iz strežnika z najmanjšo latenco, ki vsebuje želeni posnetek. Lahko predpostavljamo, da ima za vsakega ponudnika glavni strežnik največjo latenco (torej  $\ell_{0i} \geq \ell_{hi}$  za vsaka  $1 \leq h \leq k$ ,  $1 \leq i \leq m$ ). Določiti želimo, katere posnetke naj naložimo na posamezen krajevni strežnik, da minimiziramo vsoto pričakovanih latenc pri vseh zahtevkih. Posamezen posnetek lahko seveda naložimo tudi na več krajevnih strežnikov, ali pa na nobenega (v tem primeru bo poslan iz glavnega strežnika).

Zapiši celoštevilski linearni program, ki modelira zgoraj opisani problem.

**Naloga 2.17.**

Vir: Izpit OR 29.8.2017

Distributer ima  $A$  zabojev avokadov in  $B$  zabojev banan, ki jih bo prodal  $n$  trgovcem. Trгоvec  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) plača  $a_i$  evrov za zaboj avokadov in  $b_i$  evrov za zaboj banan, skupaj pa bo porabil največ  $c_i$  evrov. Distributer bo zaboje dostavil s tovornjaki, v katerih je lahko največ  $K$  zabojev (ne glede na vsebino). Če nekemu trgovcu dostavi  $t$  zabojev, bo torej opravljenih  $\lceil t/K \rceil$  voženj. Vsaka vožnja do trgovca  $i$  (ne glede na to, koliko je poln tovornjak) ga stane  $d_i$  evrov. Poleg tega bo trgovec  $p$  kupil samo banane ali samo avokade, trgovec  $q$  pa bo kupil vsaj en

zaboj avokadov, če bo tudi trgovec  $r$  kupil vsaj en zaboj avokadov. Distributer želi zaboje razdeliti med trgovce tako, da bo maksimiziral svoj dobiček – torej vsoto cen, ki jih plačajo trgovci, zmanjšano za stroške dostave. Lahko predpostavljaš, da so vse cene pozitivne.

Zapiši celoštevilski linearni program, ki modelira zgoraj opisani problem.

**Naloga 2.18.**

Vir: Kolokvij OR 23.4.2018

Pri izvedbi projekta bo potrebno narediti  $n$  nalog, ki jih bomo dodelili delavcem. Vsako nalogo bo opravil natanko en delavec, vsak delavec pa lahko hkrati izvaja samo eno nalogo. Naj bo  $t_i \in \mathbb{N}$  število časovnih enot, ki ga posamezen delavec potrebuje za dokončanje naloge  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ). Vsaka naloga mora biti opravljena v enem kosu (če torej začnemo z nalogo  $i$  v času  $s$ , bo ta dokončana v času  $s + t_i$ , brez možnosti prekinitve in kasnejšega dokončanja). Celoten projekt mora biti dokončan v času  $T$ . Dana je še množica parov  $S$ , kjer  $(i, j) \in S$  pomeni, da se naloga  $j$  ne sme začeti, preden se zaključi naloga  $i$  (lahko se pa  $j$  začne izvajati v trenutku, ko se  $i$  konča).

Delavce bomo najeli preko podjetja za posredovanje dela, to pa nam zaračuna fiksno ceno na najetega delavca (za ustrezna plačila delavcem bodo tako poskrbeli oni). Minimizarati želimo torej število najetih delavcev. Zapiši celoštevilski linearni program, ki modelira zgoraj opisani problem.

**Naloga 2.19.**

Vir: Izpit OR 11.6.2018

Avtobusno podjetje želi uvesti novo avtobusno linijo. Dan je neusmerjen enostaven graf  $G = (V, E)$ , katerega vozlišča predstavljajo postajališča, povezave pa ceste med njimi. Za vsako povezavo  $uv \in E$  poznamo še čas  $c_{uv} \in \mathbb{N}$ , v katerem avtobus pride od  $u$  do  $v$ .

Dan je še seznam postajališč  $p_1, p_2, \dots, p_n \in V$ , ki jih linija mora obiskati v tem vrstnem redu – začeti mora v  $p_1$  in končati v  $p_n$ , na poti med dvema postajališčema iz seznama pa lahko obišče tudi druga postajališča. Linija lahko vsako postajališče obišče največ enkrat (ko doseže končno postajališče, se vrne po isti poti do začetnega). Skupno trajanje vožnje (v eno smer) je lahko največ  $T$ . Podjetje želi določiti linijo tako, da bo obiskala čim več postaj.

Zapiši celoštevilski linearni program, ki modelira zgoraj opisani problem.

**Namig:** poskrbi, da linija nima ciklov.

**Naloga 2.20.**

Vir: Izpit OR 5.7.2018

Nogometni klub pred novo sezono prenavlja svoj igralski kader. Naj bo  $A$  množica trenutnih igralcev kluba,  $B$  pa množica igralcev, za katere se v klubu zanimajo ( $A$  in  $B$  sta disjunktni množici). Za vsakega igralca  $i \in A$  imajo s strani kluba  $j$  ( $1 \leq j \leq n$ ) ponudbo v višini  $p_{ij} \in \mathbb{N}$  (če se klub  $j$  ne zanima za igralca  $i$ , lahko predpostaviš  $p_{ij} = 0$ ), za vsakega igralca  $i \in B$  pa bodo morali plačati odkupnino  $r_i \in \mathbb{N}$ , če ga hočejo pripeljati v klub. Vsakega igralca  $i \in A$  lahko seveda prodamo kvečjemu enem klubu. Skupni stroški trgovanja (tj., razlika stroškov nakupov in

dobička od odprodaj) ne smejo preseči  $S$ , število igralcev v klubu pa mora ostati enako kot pred trgovanjem.

Za vsakega igralca  $i \in A \cup B$  poznamo njegov količnik kvalitete  $q_i$ , vsak pa pripada natanko eni izmed množic  $G$  (vratarji),  $D$  (branilci),  $M$  (vezni igralci) in  $F$  (napadalci). Število igralcev kluba v vsaki izmed teh množic se lahko spremeni (poveča ali zmanjša) za največ 1. Poleg tega lahko igralca  $a, b \in A$  prodamo le istemu klubu – ali pa oba igralca ostaneta v klubu. Doseči želimo, da bo kvaliteta kluba čim večja – maksimizirati želimo torej vsoto količnikov  $q_i$  za igralce v klubu.

Zapiši celoštevilski linearni program, ki modelira zgoraj opisani problem.

### Naloga 2.21.

Vir: Kolokvij OR 24.1.2011

Podjetje dobiva po pošti čeke iz celotne Evrope. Čas potovanja čeka je odvisen od kraja, od koder je bil ček poslan, in od kraja, kamor ček potuje. Na primer, ček, poslan iz vzhodne Evrope v Berlin, v povprečju potuje 5 dni – podjetje mora torej čakati 5 dni, preden lahko ček unovči in razpolaga z denarjem. Iz severne Evrope je v povprečju dnevno poslanih za 70 000€ čekov, iz zahodne Evrope za 50 000€, iz vzhodne 60 000€, iz južne pa 40 000€. Podjetje želi obračunavati čeke kar se da hitro, saj izgubi 20% vrednosti čeka na letni ravni. Podjetje lahko postavi podružnice (in s tem poštno predale) v Londonu, Berlinu, Budimpešti in/ali Madridu. Strošek vzdrževanja ene podružnice znaša 50 000€ letno. Časi potovanja čekov so razvidni iz spodnje tabele:

	London	Berlin	Budimpešta	Madrid
Severna Evropa	2	6	8	6
Zahodna Evropa	6	2	5	5
Vzhodna Evropa	8	5	2	5
Južna Evropa	8	5	5	2

Primer: če severna Evropa pošilja čeke v Budimpešto, bo v obtoku v povprečju za 560 000€ ( $= 8 \cdot 70\,000\text{€}$ ) čekov, kar z 20% izgubo pomeni 112 000€ izgube na letni ravni. Zanima nas, kje naj podjetje postavi podružnice, da bodo stroški čim manjši. Zastavi nalogo kot celoštevilski linearni program.

### Naloga 2.22.

Vir: Izpit OR 9.2.2011

Selektor košarkaške reprezentance bi rad sestavil petčlansko začetno postavo, ki bo imela povprečno višino kar se da visoko. Na voljo ima sledeče igralce:

Igralec	Višina	Pozicija
Anže	213	Center
Borut	208	Center
Ciril	203	Krilo
David	192	Krilo
Emil	196	Krilo
Filip	197	Obramba
Gorazd	200	Obramba
Hugo	195	Obramba





Slika 1: Otoki za nalogo 2.23.

Pri izbiri mora selektor upoštevati naslednje pogoje:

- v začetni postavi morajo biti zastopane vse tri pozicije,
- v rezervi mora biti bodisi Ciril bodisi Filip, ne pa oba,
- v začetni postavi je lahko največ en center,
- če začne Borut ali David, mora Hugo ostati v rezervi.

Formuliraj problem kot celoštevilski linearni program.

**Naloga 2.23.**

Vir: Izpit OR 28.6.2011

Otoke (vozlišča) na sliki 1 je potrebno povezati z mostovi po sledečih pravilih:

- mostovi potekajo samo v vodoravni ali navpični smeri,
- med dvema otokoma smeta biti največ dva mostova,
- številka na otoku pove, koliko mostov naj vodi na ta otok.

Formuliraj problem kot celoštevilski linearni program.

**Naloga 2.24.**

Vir: Izpit OR 9.7.2012

Družina Vinar iz Vurberka že več kot 200 let prideluje vino. Njihovi začetki segajo še v čas Habsburžanov, ko je Janez Vinar od grofa Herbersteina v dar prejel najlepši vinograd na Vurberku. Janez je kmalu začel dobivati naročila od okoliških gostincev in vsako leto je moral razmisliti, kako bo razdelil svoj pridelek med porabnike. Danes njegov daljni potomec (prav tako Janez) nadaljuje s tradicijo.

Če je letina dobra (predpostavimo, da je vsako leto dobra letina), pridelava Janez 2000 litrov rumenega muškata, 10 000 litrov laškega rizlinga in 5000 litrov renskega rizlinga. Njegovi standardni odkupniki sta bara Kocka in Luka ter župnišče Sv. Martin in občina Duplek. V spodnji tabeli je prikazano, koliko litrov vina je vsak pripravljen (največ) kupiti.

kupec	Kocka	Luka	občina	župnišče
količina v litrih	15 000	5 000	1 000	500

Teče drugo leto Janezovega vinogradništva<sup>1</sup>. To leto se je odločil, da bo vino prodajal le v flaškonih po 10 litrov in postavil fiksne cene, vidne v spodnji tabeli.

sorta	rumeni muškati	laški rizling	renski rizling
cena za flaškon	12€	8€	15€

A ne gre brez omejitev. Vsak bar zahteva, da Janezu skupno plača največ toliko, kot mu plačata skupaj župnišče in občina. V župnišču želijo 500 litrov vina, ki naj ne bo laški rizling. V občini želijo vsaj 500 litrov renskega rizlinga, drugih sort pa sploh ne bodo kupovali. Nazadnje se je oglasila še Janezova žena, ki želi ohraniti doma vsaj toliko sorte *A*, kot je Janez proda kupcema *B* in *C* skupaj. Toda parametrov v ženini zahtevi nam Janez ne želi zaupati. Napiši tak celoštevilski linearni program (tako da lahko Janez vstavi ustrezne ženine parametre), ki bo Janezu drugo leto pomagal pri prodaji vina, tako da bo njegov zaslužek kar največji.

**Naloga 2.25.**








Vir: Izpit OR 4.9.2012








Minolovec je stara Microsoftova računalniška igrlica. Dano je minsko polje v obliki kariraste mreže dimenzij  $n \times m$ , v katerem se nahaja  $p$  min. Slika 2 predstavlja delno odprto minsko polje, ki vsebuje  $p = 40$  min.

V vsaki nedokončani igri je neka celica bodisi odprta bodisi zaprta. V nekaterih zaprtih celicah se nahajajo mine. V odprtih celicah so številke od 0 do 8 (številke 0 na sliki 2 niso prikazane), ki povedo, koliko min se nahaja v okolici te celice (tj., na sosednjih 8 celicah). Za razliko od Minolovca na računalniku lahko pri nas tudi celica s številom 0 meji na zaprto celico.

Delno odprto minsko polje (levo) ima pri  $p = 7$  več možnih rešitev. Dve sta prikazani na desni strani:

2	3	4		
0	0	2		
0	0	1		

				
2	3	4		
0	0	2		
0	0	1		

				
2	3	4		
0	0	2		
0	0	1		

Naslednje delno odprto minsko polje pa ni veljavno (ne glede na  $p$ ):

2	2	2	
0	0	2	

- Opiši celoštevilski linearni program, ki bo povedal, ali je neko tako delno odprto minsko polje veljavno, tj., ali je možno  $p$  min postaviti na polje tako, da bo v okolici vsake odprte celice ustrezno število min.
- Ali bi lahko s pomočjo celoštevilskega linearnega programa ugotovil, kolikšno je največje možno število min pri nekem delno odprtem polju?

**Namig:** morda zadošča, če malenkost popraviš program iz prejšnje točke.

<sup>1</sup>Glej nalogo 2.8.



Slika 2: Primer delno odprtega polja za nalogo 2.25.

- (c) Kako bi s pomočjo zgornjega celoštevilskega linearnega programa poiskal celice, ki nujno vsebujejo mino (tj., pri vseh možnih rešitvah se v tistih celicah nahajajo mine)?

Pri pisanju celoštevilskih linearnih programov si lahko pomagaš z oznakami:

- $\mathcal{O}$ : množica vseh odprtih celic,
- $\mathcal{Z}$ : množica vseh zaprtih celic,
- $N(s)$ : množica sosedov celice  $s$ .

### Naloga 2.26.

Vir: Kolokvij OR 17.4.2014

Danih je  $n$  praznih škatel z volumni  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . Dana so naslednja pravila pospravljanja škatel:

- več manjših škatel lahko zložimo v večjo, če njihov skupni volumen ne presežemo volumna večje škatle, in
- škatle, ki ima znotraj sebe že kakšno škatlo, ne smemo več postaviti znotraj večje škatle.

Zanima nas takšno pospravljanje škatel, da bo skupen volumen škatel, ki ostanejo, čim manjši. Formuliraj nalogo kot celoštevilski linearni program.

Na primer, če imamo škatle z volumni 2, 3, 6, 8, 9, potem je ena možna rešitev (ne nujno optimalna!), da zložimo škatli z volumnoma 2 in 3 znotraj škatle z volumnom 6 ter škatlo z volumnom 8 znotraj največje škatle. Ta razporeditev ima skupni volumen  $6 + 9 = 15$ .

**Naloga 2.27.**

Vir: Izpit OR 14.6.2013

**(problem kombinatorične dražbe)**

Pohorski škratje so se v osrednji sobani svojega podzemnega kraljestva zbrali na dražbi. Vodja dražbe prodaja predmete  $A = \{1, 2, \dots, k\}$ , ki so jih škratje uspeli "pridobiti" od ljudi. Ponudbe so pari  $(B_i, c_i)$ , kjer je  $B_i \subseteq A$  in je  $c_i > 0$  cena ponudbe. Škrat, ki je ponudil  $j$ -to ponudbo, je torej pripravljen za predmete  $B_i$  plačati  $c_i$  (če bi dobil le nekaj od predmetov iz  $B_i$ , ne bi plačal nič). Vodja dražbe prejme  $k$  ponudb  $\{(B_i, c_i)\}_{i=1}^k$ , od vsakega škrate največ eno. Predmete želi razdeliti med ponudnike, da bo iztržil kar največ.

- (a) Predstavi problem kot celoštevilski linearni program!
- (b) Kako se celoštevilski linearni program spremeni, če dodamo naslednja pogoja?
- Če je ponudba 1 uspešna, potem mora biti uspešna tudi ponudba 2 ali ponudba 3.
  - Če so uspešne vse ponudbe s sodim indeksom, potem morajo biti ne-uspešne vsaj tri ponudbe z lihim indeksom.

**Naloga 2.28.**

Vir: Izpit OR 5.6.2014

Dana je množica števil  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ . Iščemo podmnožico  $L \subseteq A$ , za katero doseže izraz

$$\sum_{a_i \in L} (a_i)^2$$

maksimalno vrednost, pri čemer morajo biti izpolnjeni pogoji:

- če  $a_1 \in L$ , potem  $a_2 \notin L$ ,
- če  $a_3 \in L$  in  $a_5 \in L$ , potem  $a_7 \in L$ ,
- če  $|L| \geq 5$ , potem  $a_4 \notin L$ , ter
- v  $L$  je več pozitivnih kot negativnih števil.

Problem formuliraj kot celoštevilski linearni program.

**Naloga 2.29.**

Vir: Izpit OR 24.6.2014

Dan imamo tovor, ki ga sestavlja množica  $n$  predmetov s celoštevilskimi masami  $m_1, m_2, \dots, m_n$ . Tovor želimo razdeliti na 5 tovornjakov tako, da bo obremenitev najbolj obremenjenega tovornjaka čim manjša. Problem formuliraj kot celoštevilski linearni program.

Dodatno formuliraj še naslednja pogoja:

- (a) Tovor na prvem tovornjaku ne sme presegati mase  $M$ .
- (b) Na vsaj enem tovornjaku tovor ne sme presegati mase  $M$ .

**Naloga 2.30.**

Vir: Izpit OR 25.8.2014

Naj bodo v vrsto dolžine  $n$  razporejena števila  $1, 2, \dots, n$  (v poljubnem vrstnem redu). Pri izbiri  $i$ -tega mesta dobimo število točk, ki je enako minimumu med vsoto števil strogo levo od  $i$ -tega in vsoto števil strogo desno od  $i$ -tega mesta.

- (a) Določi vrstni red števil, da bo povprečni dobiček pri naključnem izbiranju mest čim večji. Problem formuliraj kot celoštevilski linearni program.
- (b) Formuliraj še pogoj, ki pravi, da morata biti števili 1 in 2 sosednji.

**Naloga 2.31.**

Vir: Izpit OR 19.5.2015

Podjetje Nijke proizvaja moške copate. Po svetu ima več tovarn, vsaka je na stopnji razvoja 1, 2, 3 ali 4. Koliko dobička prinese tovarna na posamezni stopnji razvoja v posamezni državi ter koliko tovarn na posamezni stopnji razvoja ima trenutno vsaka država, je razvidno iz tabele 1.

V naslednjem letu lahko nadgradimo do 15 tovarn, v vsaki državi največ 3. Vsako tovarno lahko nadgradimo največ za eno stopnjo. Dodatno moramo upoštevati še naslednje omejitve.

- Slovenija mora imeti več tovarn stopnje 4 kot Hrvaška in več tovarn stopnje 3 kot Italija.
- Število nadgradenj tovarn v EU (države nad črto tabeli 1) mora biti vsaj tolikšno kot število nadgradenj tovarn izven EU.
- Če Azerbajdžan nadgradi svojo tovarno in Armenija ne nadgradi tovarne stopnje 3, potem mora Armenija nadgraditi vse tri tovarne stopnje 1.
- Iran mora imeti vsaj toliko tovarn stopnje 4 kot vse države EU skupaj.

Napiši celoštevilski linearni program, ki upošteva opisane omejitve in pove, kje in koliko tovarn moramo nadgraditi, da bomo imeli kar največji dobiček.

**Naloga 2.32.**

Vir: Izpit OR 24.6.2015

Krt Črnko že vrsto let domuje pod zelenim travnikom. Zgradil si je že pravo kraljestvo rovov, ki ga lahko predstavimo z grafom  $G = (V, E)$ : vozlišča grafa so križišča rovov, povezave pa so rovi. Črnkov travnik je pred kratkim kupila velika korporacija in se odločila, da bo Črnka pregnala s plinom. A slednji se ne bo pustil kar tako odgnati in namerava na križišča svojega kraljestva postaviti zaščitne maske.

- (a) Pomagaj Črnku tako, da napišeš celoštevilski linearni program, ki za graf  $G$  določi križišča, kamor naj Črnko postavi maske, da jih bo porabil čim manj in da bo imelo vsako križišče masko, ali pa bo masko imelo sosednje križišče.
- (b) Kako se CLP spremeni, če se Črnko odloči:

država	dobiček				število tovarn			
	st. 1	st. 2	st. 3	st. 4	st. 1	st. 2	st. 3	st. 4
Avstrija	3	4	7	10	0	0	0	5
Slovenija	3	3	5	8	0	1	2	1
Italija	4	4	6	8	1	1	1	1
Madžarska	5	7	8	10	0	1	2	1
Hrvaška	3	4	5	7	1	2	1	0
Iran	6	10	10	10	3	0	4	10
Irak	2	4	4	6	5	3	0	0
Afganistan	6	6	5	2	20	0	0	0
Turkmenistan	6	7	7	6	10	5	5	0
Pakistan	6	7	7	7	10	7	2	0
Armenija	6	7	9	10	3	0	1	0
Azerbajdžan	6	7	9	8	0	1	0	0

Tabela 1: Podatki za nalogo 2.31.

- da bo masko gotovo postavil v križišče  $s \in V$ , ne pa v križišče  $t \in V$ ?
- da bosta največ dve izmed križišč  $s_1, s_2, \dots, s_k \in V$  imeli masko?
- da bo v primeru, ko bo v križišču  $v_1 \in V$  maska, v križišču  $v_2 \in V$  pa ne, postavil masko v križišče  $v_3 \in V$  ali v križišče  $v_4 \in V$ ?

### Naloga 2.33.

Vir: Izpit OR 28.8.2015

Poslovnež Kopalec je lastnik velike evropske verige bazenov. Trenutno ima v lasti 20 bazenov, ki jih označimo kar s števili od 1 do 20. Vsi razen bazenov 1, 2 in 3 so v "osnovnem" stanju, tj., okoli njih ni zgrajen noben večji kompleks. Bazeni 1, 2 in 3 so pa v "nadgrajenem" stanju, kar pomeni, da je okoli njih zgrajen večji kompleks, seveda v lasti gospoda Kopalca.

V naslednjem 5-letnem obdobju bo gospod Kopalec nadgradil nekaj svojih bazenov, ki so trenutno v osnovnem stanju, nekaj bazenov pa bo prodal. Napiši celoštevilski linearni program, ki bo gospodu Kopalcu pomagal maksimizirati število nadgrajenih bazenov po koncu 5-letnega obdobja. Pri tem upoštevaj naslednje omejitve:

- Gospod Kopalec bo nadgradil največ dvakrat toliko bazenov, kot jih bo prodal.
- Gospod Kopalec ne bo prodal bazenov, ki so nadgrajeni ali jih bo nadgradil.
- Če bo gospod Kopalec nadgradil bazen 8, potem bo nadgradil tudi bazena 14 in 11, ne bo pa prodal bazena 15.
- Gospod Kopalec ne bo nadgradil bazenov 4, 5, 6 in 7, če ne bo prodal bazenov 15, 16, 17, 18, 19 in 20 (tj., če ne proda nobenega od bazenov 15–20, potem ne bo nadgradil nobenega od bazenov 4–7).

- Za neka  $a$  in  $b$  ( $4 \leq a, b \leq 20$ ), ki ju želi gospod Kopalec določiti kasneje, bo prodal bazen  $a$  in nadgradil bazen  $b$ .
- Ženi gospoda Kopalca je všeč bazen  $c$  ( $1 \leq c \leq 20$ ) tak, kot je. Zato ga gospod Kopalec ne bo prodajal, niti nadgrajeval.

**Naloga 2.34.**

Vir: Izpit OR 12.5.2016

Dan je enostaven graf  $G = (V, E)$  in funkcija uteži na povezavah  $t : E \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ . Podmnožici  $M \subseteq E$  pravimo *prirejanje*, če za vsaki različni povezavi  $e, e' \in M$  velja  $e \cap e' = \emptyset$  (tj., nobeni dve povezavi iz  $M$  nimata skupnega krajišča). Prirejanje  $M$  je *maksimalno*, če ne obstaja tako prirejanje  $M'$ , da velja  $M \subset M'$ . *Teža* prirejanja  $M$  je vsota uteži njegovih povezav, torej  $\sum_{e \in M} t(e)$ .

Formuliraj celoštevilski linearni program, ki za dani vhodni graf  $G$  poišče maksimalno prirejanje najmanjše teže.

**Naloga 2.35.**

Vir: Izpit OR 24.5.2016

Dan je graf  $G = (V, E)$ . Razbitju  $V_1, V_2, \dots, V_k$  množice vozlišč  $V$  pravimo *k-barvno pakiranje*, če velja  $d_G(u, v) > i$  za vsaki različni vozlišči  $u, v \in V_i$  ( $1 \leq i \leq k$ ) – tj., poljubni dve vozlišči iz  $V_i$  sta v grafu  $G$  oddaljeni za več kot  $i$ . Minimalnemu številu  $k$ , za katero obstaja *k-barvno pakiranje*, pravimo *mavrično pakirno število* in ga označimo s  $\chi_p(G)$ . Napiši celoštevilski linearni program, ki za dani graf  $G$  izračuna  $\chi_p(G)$ .

**Naloga 2.36.**

Vir: Izpit OR 29.8.2016

Naj bo  $G = (V, E)$  enostaven graf. Barvanju vozlišč grafa  $c_k : V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  pravimo *k-uravnoteženo barvanje*, če ima naslednji lastnosti:

- Če sta vozlišči  $u$  in  $v$  sosedni v  $G$ , potem velja  $c_k(u) \neq c_k(v)$ .
- Za vsaka  $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$  velja

$$\left| |\{v \in V \mid c_k(v) = i\}| - |\{v \in V \mid c_k(v) = j\}| \right| \leq 1$$

– tj., število vozlišč, pobarvanih z barvama  $i$  in  $j$ , se razlikuje za največ 1.

Napiši celoštevilski linearni program, ki ima dopustno rešitev natanko tedaj, ko za vhodni graf  $G$  obstaja *k-uravnoteženo barvanje*. Predpostaviš lahko, da je tudi  $k$  vhodni podatek. Koliko pogojev in koliko spremenljivk ima dobljeni celoštevilski linearni program?

**Naloga 2.37.**

Vir: Teorija OR 5.7.2013

Zapiši naslednji problem kot celoštevilski linearni program.

$$\begin{aligned} \min & f(x) + g(y) + h(z) \quad \text{p.p.} \\ f(x) &= \begin{cases} 10 & \text{če } x = 0, \text{ in} \\ 10 + 5x & \text{če } x > 0 \end{cases} \\ g(y) &= \begin{cases} 10 & \text{če } y = 0, \text{ in} \\ 5 + 5y & \text{če } y > 0 \end{cases} \\ h(z) &= \begin{cases} 8 & \text{če } z = 0, \text{ in} \\ 10 + 4z & \text{če } z > 0 \end{cases} \\ x + y + z &\geq 100 \\ (x \geq 5 \wedge y \geq 5) \vee (x \geq 5 \wedge z \geq 5) \vee (y \geq 5 \wedge z \geq 5) \\ x, y, z &\geq 0, \quad x, y, z \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

**Naloga 2.38.**

Vir: Teorija OR 12.7.2017

Zapiši naslednji problem kot celoštevilski linearni program.

$$\begin{aligned} \min & f_1(x_1) + f_2(x_2) \quad \text{p.p.} \\ f_1(x_1) &= \begin{cases} 0 & \text{če } x_1 = 0, \text{ in} \\ 10 + 5x_1 & \text{če } x_1 > 0 \end{cases} \\ f_2(x_2) &= \begin{cases} 0 & \text{če } x_2 = 0, \text{ in} \\ 20 + 4x_2 & \text{če } x_2 > 0 \end{cases} \\ 100x_1 + 150x_2 &\geq 10000 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

**Naloga 2.39.**

Vir: Teorija OR 5.9.2017

Obravnavamo manjši sudoku velikosti  $4 \times 4$  s slike 3. Vanj vpisujemo števila med 1 in 4. Vsako število se pojavi natanko enkrat v vsaki vrstici, vsakem stolpcu in vsakem od 4 kvadratov velikosti  $2 \times 2$ , omejenih z debelejšo črto. Opiši celoštevilski linearni program za reševanje takega problema oz. za določanje, da rešitev ne obstaja. Koliko spremenljivk in pogojev ima linearni program?



1	2		
		2	1
	4		
3			

Slika 3: Primer sudokuja za nalogo 2.39.

**Naloga 2.40.**

Vir: Kolokvij OR 19.4.2019

Na turnirju poleg tebe sodeluje še  $n$  igralcev, pri čemer se bo vsak igralec soočil z vsakim drugim igralcem v enem dvoboju. Vsak igralec na začetku dobi  $M$  žetonov, za katere se (po začetni fazi zbiranja informacij) vnaprej odloči, kako jih bo razdelil med dvoboje. V dvoboju zmaga igralec z večjim številom vloženih žetonov. Če oba igralca vložita enako število žetonov, je izid dvoboja izenačen. Zmagovalec dvoboja dobi 3 točke, poraženec 0 točk, v primeru izenačenega izida pa vsak dvobojevalec dobi 1 točko. Cilj vsakega igralca je zbrati čim večje število točk.

- Denimo, da za vsakega igralca izveš, kako namerava igrati. Naj bo torej  $c_i$  število žetonov, ki jih bo  $i$ -ti nasprotnik ( $1 \leq i \leq n$ ) vložil v dvoboj proti tebi. Svojo strategijo želiš načrtovati tako, da bi dosegel čim večje število točk. Zapiši celoštevilski linearni program, ki modelira ta problem.
- Celoštevilskemu linearnemu programu iz prejšnje točke dodaj omejitve, ki modelirajo sledeče pogoje:
  - Proti nobenemu od nasprotnikov iz množice  $A$  ne smeš doseči izenačenega izida.
  - Izgubiš lahko kvečjemu proti dvema nasprotnikoma iz množice  $B$ .
  - Če izgubiš proti nasprotniku  $u$ , moraš proti nasprotnikoma  $v$  in  $w$  doseči vsaj 4 točke.
  - Več kot  $t$  žetonov lahko vложиš v največ  $k$  dvobojev.
  - Izgubiti moraš vsaj  $\ell$  dvobojev.

**Naloga 2.41.**

Vir: Izpit OR 3.6.2019

V trgovini z oblačili sestavljajo ponudbo za poletno sezono. Odločijo se lahko za nakup kolekcij  $n$  različnih proizvajalcev, pri čemer za posamezen izvod kolekcije  $i$ -tega proizvajalca ( $1 \leq i \leq n$ ) plačajo ceno  $c_i$  evrov, od nje pa si obetajo zaslužek  $d_i$  evrov. Kolekcijo  $i$ -tega proizvajalca lahko kupijo v največ  $k_i$  izvodih (vsak izvod je nedeljiva enota), z njeno prisotnostjo v ponudbi (ne glede na količino) pa si

obetajo povečano vidnost in s tem dodaten zaslužek  $e_i$  evrov (npr. iz prodaje stalne ponudbe in starih zalog).

Za nakup kolekcij imajo na voljo  $C$  evrov, iz marketinških razlogov pa želijo kupiti kolekcije največ  $K$  različnih proizvajalcev. Poleg tega proizvajalec  $p$  zahteva, da če kupijo kak izvod njegove kolekcije, je morajo kupiti v vsaj toliko izvodih kot kolekciji proizvajalcev  $q$  in  $r$  skupaj (če pa ne kupijo nobenega izvoda kolekcije proizvajalca  $p$ , te omejitve ni). V trgovini želijo maksimizirati pričakovani dobiček (tj., razliko zaslужka od prodaje s stroški nakupa).

Zapiši celoštevilski linearni program, ki modelira zgoraj opisani problem.

### 1.3 Teorija odločanja

#### Naloga 3.1.

Vir: Vaje OR 30.3.2016

Na ulici nas ustavi neznanec in nam predlaga met kovanca. Če pade grb, nam izplača 250 000€, če pade glava, pa mi njemu 100 000€. Ali naj sprejmemo ponudbo?

#### Naloga 3.2.

Vir: [1, Naloga 4.2]

Trgovina pri pekarni kupuje žemlje po 0.2€ in jih prodaja po 0.4€. Skozi leta poslovanja so izračunali naslednjo porazdelitev za prodajo žemljic.

Prodaja	50	60	70	80	90	100
Verjetnost	0.1	0.15	0.3	0.2	0.15	0.1

Če žemelj zmanjka, naročijo pri pekarni razliko, pri čemer jih žemlja tedaj stane 0.3€. Ob koncu dneva jim pekarna odkupi presežek po 0.15€ na žemljo. Koliko žemelj se trgovini splača kupiti?

#### Naloga 3.3.

Vir: Izpit OR 5.6.2014

Pacient ima na voljo operacijo. Brez operacije bo živel natanko 3 mesece. Z uspešno opravljeno operacijo bo živel natanko 12 mesecev. Operacija je neuspešna z verjetnostjo 0.3 (v tem primeru pacient dočaka 0 mesecev). Cilj pacienta je maksimiranje pričakovane življenjske dobe.

- (a) Ali naj pacient sprejme operacijo?
- (b) Pacient lahko opravi predhodni test, ki z zanesljivostjo 0.9 napove uspešnost operacije, vendar z verjetnostjo 0.005 pacient zaradi komplikacij med testom umre. Ali naj pacient opravi test?

Nariši odločitveno drevo in odločitve sprejmi na podlagi izračunanih verjetnosti!

#### Naloga 3.4.

Vir: Vaje OR 30.3.2016

Podjetje je razvilo produkt, za katerega je konkurenca pripravljena plačati 15 M€. Če se odločijo samostojno prodajati produkt, jih vzpostavitev proizvodnje stane 6 M€, za vsak uspešno prodan produkt pa dobijo 600€. Računajo, da bi z verjetnostjo 0.5 investicija uspela in bi prodali 100 000 produktov, z verjetnostjo 0.5 pa bi projekt propadel in bi prodali zgolj 10 000 produktov. Podjetje se lahko odloči tudi za neodvisno raziskavo trga. Ta stane 1 M€, z verjetnostjo  $\frac{2}{3}$  pa bo pravilno napovedala uspeh projekta (ne glede na to, ali bi ta uspel ali ne). Kako naj se podjetje odloči?

**Naloga 3.5.**

Vir: Izpit OR 24.6.2015

Veliki koncert skupine FiM se bo odvijal v dvorani s 100 neoznačenimi sedeži. Prireditelj se lahko odloči, da proda 100, 101, 102 ali 103 karte (povpraševanja je dovolj). Znanе so verjetnosti  $p_0 = 0.2$ ,  $p_1 = 0.3$ ,  $p_2 = 0.4$  in  $p_3 = 0.1$ , kjer je  $p_i$  verjetnost, da  $i$  kupcev kart ne pride na koncert (ne glede na število prodanih kart). Vsaka prodana karta prinese 10€ dobička, vsak obiskovalec, ki ne bo mogel v dvorano, pa pomeni 30€ stroškov (ker je že plačal 10€ za karto, ima torej organizator 20€ izgube). Koliko kart naj prireditelj proda, da bo pričakovani dobiček čim večji?

**Naloga 3.6.**

Vir: Kolokvij OR 31.5.2012

Rexhep Bajrami bi se rad naslednja štiri leta ukvarjal s prodajo sadja in zelenjave (po štirih letih mu poteče delovna viza). Rad bi najel parcelo za stojnico, ki bo stala 6000€. Če je lokacija dobra, bo imel 12000€ dobička, če pa je lokacija slaba, bo imel le 3000€ dobička. Ocenjuje, da je z verjetnostjo  $2/3$  lokacija dobra, z verjetnostjo  $1/3$  pa slaba.

- (a) Z odločitvenim drevesom opiši njegove možnosti in ugotovi, kako naj se odloči ter kakšen dobiček naj pričakuje.
- (b) Za nasvet lahko vpraša znanca Seada, ki "ima nos" za tovrstne posle. Sead mu lahko da nasvet, a zanj zahteva 1200€. Dobro je znano, da ima Sead naslednje pogojne verjetnosti  $P(\text{Seadovo mnenje} \mid \text{kakovost parcele})$ :

	dobra	slaba
priporoča	$2/3$	$1/2$
odsvetuje	$1/3$	$1/2$

Ali naj vpraša Seada za nasvet? Kakšen je pričakovani dobiček?

**Naloga 3.7.**

Vir: Izpit OR 15.3.2017

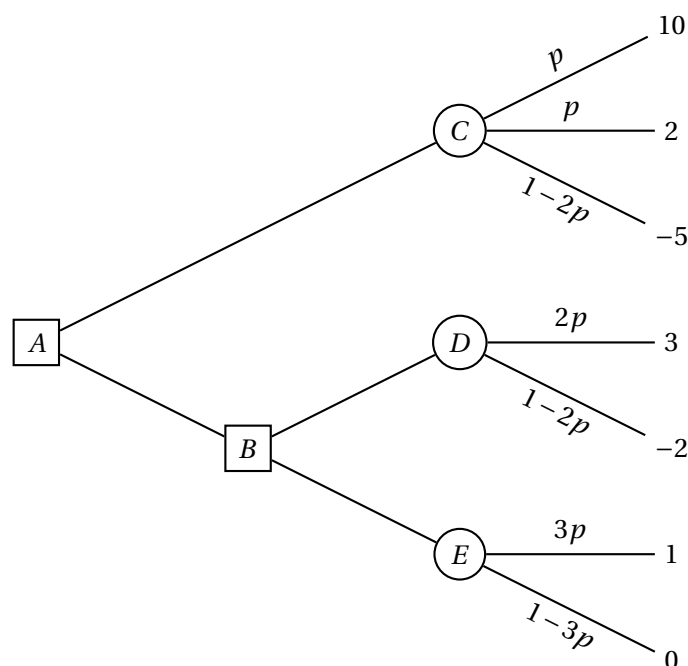
Imaš odločitveno drevo s slike 4, a nisi prepričan glede vrednosti  $p \in [0, 1/3]$ . Pričakovano vrednost želiš maksimizirati. Poišči optimalne odločitve glede na vrednost  $p$ .

**Naloga 3.8.**

Vir: Izpit OR 15.12.2016

Mudi se ti na izpit, a ravno v trenutku, ko prideš na postajo Konzorcij, odpelje avtobus številka 1. Na prikazovalniku se izpiše, da bo naslednji avtobus številka 1 prispel čez 10 minut, naslednji avtobus številka 6 čez 6 minut, naslednji avtobus številka 14 pa čez 2 minuti.

Avtobusa 1 in 6 ob ugodnih semaforjih potrebujeta 6 minut do postaje pri FE, pri čemer se lahko čas vožnje zaradi rdeče luči na semaforju pri FF podaljša za 1 minuto. Verjetnosti, da bo rdečo luč imel avtobus 1, da bo rdečo luč imel avtobus 6, ter da bosta oba avtobusa imela zeleno luč, so enake  $1/3$  (zaradi majhnega



Slika 4: Odločitveno drevo za nalogo 3.7.

razmaka se ne more zgoditi, da bi oba avtobusa naletela na rdečo luč). Avtobus številka 1 nadaljuje pot do postaje pri FMF, za kar potrebuje še 2 minuti.

Avtobus številka 14 potrebuje 5 minut do postaje pri študentskih domovih, od tam pa greš peš do postaje pri FE, za kar potrebuješ še 4 minute. Pri tem prečkaš železnico – če mimo pripelje vlak (kar se zgodi z verjetnostjo 0.05), se čas hoje podaljša za 3 minute. Ko prideš na postajo pri FE (ne glede na to, ali si prišel z avtobusom 6 ali 14), te čakajo še 4 minute hoje do FMF, vendar moraš najprej prečkati Tržaško cesto. Če je na semaforju rdeča luč (kar se zgodi z verjetnostjo 0.9, neodvisno od drugih dogodkov), se lahko odločiš, da 2 minuti počakaš na zeleno luč in potem nadaljuješ peš, ali pa da greš nazaj do postaje in počakaš na avtobus številka 1 (ki bo, tako kot prej, vozil še 2 minuti do FMF).

Kakšne bodo tvoje odločitve, da bo pričakovano trajanje poti do FMF čim krajše? Nariši odločitveno drevo in odločitve sprejmi na podlagi izračunanih verjetnosti! Glej sliko 5 za shemo možnih poti.

### Naloga 3.9.

Vir: Izpit OR 31.1.2017

Dve podjetji bosta predstavili konkurenčna izdelka. Možnost imaš kupiti delnice prvega podjetja za ceno 10000€ ali delnice drugega podjetja po ceni 5000€, lahko pa se seveda odločiš tudi, da delnic ne kupiš. Ocenjuješ, da bo z verjetnostjo 0.4 uspelo prvo podjetje, z verjetnostjo 0.1 bo uspelo drugo podjetje, z verjetnostjo 0.5 pa ne bo uspelo nobeno izmed njiju (ne more se zgoditi, da bi obe uspeli). Ob uspehu prvega podjetja se bo vrednost njihovih delnic potrojila,



Slika 5: Shema možnih poti za nalogo 3.8.

ob uspehu drugega podjetja pa se bo vrednost njihovih delnic popeterila – če si lastiš delnice uspešnega podjetja, jih torej lahko prodaš, pri čemer bo torej dobiček enak dvakratniku oziroma štirikratniku vloženega zneska. Delnic ne-uspešnega podjetja ne bo želel nihče kupiti, tako da je v tem primeru vloženi znesek izgubljen.

Za mnenje lahko povprašaš tržnega izvedenca, ki bo po opravljeni raziskavi povedal, katero od dveh podjetij ima večje možnosti za uspeh. Če bo uspešno prvo podjetje, bo to pravilno napovedal z verjetnostjo 0.8, če pa bo uspešno drugo podjetje, bo to pravilno napovedal z verjetnostjo 0.7. V primeru, ko podjetji ne bosta uspeli, bo z verjetnostjo 0.4 večje možnosti pripisal prvemu, z verjetnostjo 0.6 pa drugemu podjetju. Za svoje mnenje izvedenec računa 1 000€.

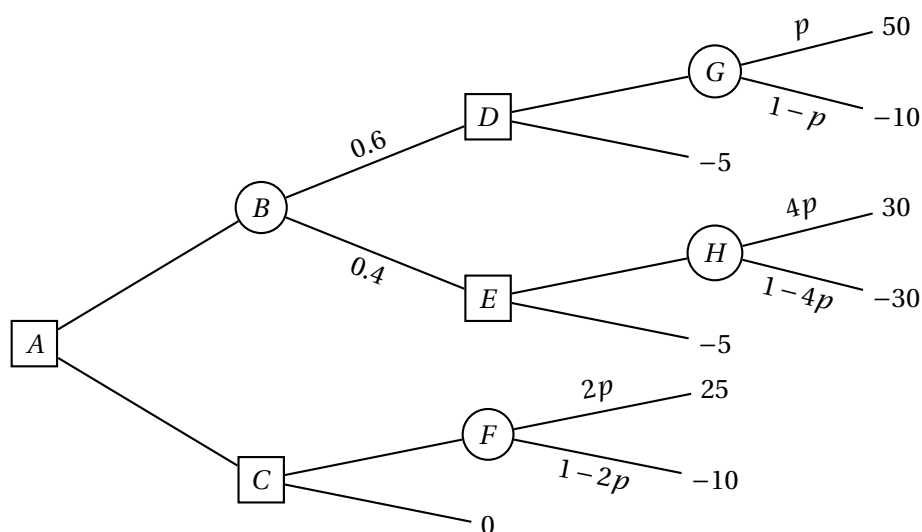
Kakšne bodo tvoje odločitve, da bo tvoj pričakovani dobiček po odprodaji delnic čim večji? Nariši odločitveno drevo in odločitve sprejmi na podlagi izračunanih verjetnosti. Pričakovani dobiček tudi izračunaj.

### Naloga 3.10.

Vir: Izpit OR 10.7.2017

Proti računalniškemu programu igraš Texas hold 'em poker. Pravila igre tukaj niso pomembna. Ker imaš dostop do kode programa, poznaš logiko, po kateri se ravna. V trenutni igri si vložil 30 žetonov, enako tudi nasprotnik. Nasprotnik z verjetnostjo 0.6 meni, da so odprte karte ugodnejše zate, z verjetnostjo 0.4 pa, da so ugodnejše zanj (sam si ne ustvariš nobenega mnenja). V prvem primeru je verjetnost, da so dejansko tvoje karte boljše, enaka 0.8, v drugem pa le 0.1.

Nasprotnik se bo sedaj odločil, ali naj vloži še 10 žetonov. Sam se lahko nato odločiš, ali boš vložil 0, 10 ali 20 žetonov (skupni vložek bo torej 30, 40 ali 50 žetonov). Če je tvoj vložek manjši od nasprotnikovega, je igra izgubljena in izgubiš do sedaj vloženo. Če je tvoj vložek enak nasprotnikovemu, z nasprotnikom pogle-



Slika 6: Odločitveno drevo za nalogo 3.11.

data karte in tako določita zmagovalca. Če je tvoj vložek višji od nasprotnikovega, ima ta možnost odstopiti (tako pridobiš nasprotnikov vložek), ali pa izenačiti, nakar se zmagovalec določi na podlagi kart. Če zmagaš, pridobiš nasprotnikov vložek, če izgubiš, pa izgubiš svojega.

V spodnji tabeli so zbrane verjetnosti dogodkov v odvisnosti od nasprotnikovega mnenja glede kart. Verjetnosti navedenih dogodkov pri istem mnenju so med seboj neodvisne.

dogodek \ nasprotnikovo mnenje	ugodnejše karte zate	za nasprotnika
dejansko imaš boljše karte	0.8	0.1
nasprotnik vloži 10 žetonov po razkritju karte	0.3	0.8
nasprotnik izenači skupni vložek 40 žetonov	0.2	0.7
nasprotnik izenači skupni vložek 50 žetonov	0.1	0.8

Na primer:

$$\Pr[\text{nasprotnik izenači skupni vložek 40 žetonov} \mid \text{nasprotnikovo mnenje je "ugodnejše karte zate"}] = 0.2.$$

Kakšne bodo tvoje odločitve, da bo tvoj pričakovani dobiček po koncu igre čim večji? Nariši odločitveno drevo in odločitve sprejmi na podlagi izračunanih verjetnosti. Pričakovani dobiček tudi izračunaj.

### Naloga 3.11.

Vir: Izpit OR 29.8.2017

Dano je odločitveno drevo s slike 6, pri čemer velja  $0 \leq p \leq 1/4$ . Pričakovano vrednost želimo maksimizirati. Poišči optimalne odločitve in pričakovano vrednost v odvisnosti od vrednosti parametra  $p$ .

**Naloga 3.12.**

Vir: Kolokvij OR 23.4.2018

Mladi podjetnik je razvil inovativen izdelek in se odloča za nadaljnje korake pri njegovem trženju. Naenkrat lahko naroči izdelavo 500 izdelkov po ceni 10 000€ ali 1 000 izdelkov po ceni 18 000€, lahko se pa odloči tudi, da izdelave ne naroči. Podjetnik ocenjuje, da je izdelek tržno zanimiv z verjetnostjo 0.8. Odloča se, ali naj posamezen izdelek prodaja po ceni 50€ ali 60€, pri čemer so v spodnji tabeli zbrana pričakovana števila prodanih kosov v odvisnosti od teh pogojev.

	cena 50€	cena 60€
tržno zanimiv	650	550
tržno nezanimiv	250	100

Predpostavi, da se bodo prodali vsi izdelani kosi, če je število teh manjše od pričakovane prodaje pri danih pogojih.

- Kako naj se podjetnik odloči, da bo pričakovani zaslužek čim večji? Nariši odločitveno drevo in ga uporabi pri sprejemanju odločitev.
- V zadnjem trenutku je podjetnik izvedel, da bo Podjetniški pospeševalnik objavil razpis za nagrado za najboljši izdelek. Razpisni pogoji zahtevajo, da se za potrebo kontrole kvalitete izdelava vsaj 1 000 izdelkov, od katerih komisija izbere 20 za dejansko kontrolo, z ostalimi pa lahko prijavitelj prosto razpolaga. Če podjetnik zmaga, bo dobil nagrado v višini  $k$ , pri čemer  $k \in [1\,000\text{€}, 5\,000\text{€}]$  še ni znan, poleg tega pa si obeta tudi 20% povečanje pričakovanega števila prodanih kosov (v vseh zgoraj omenjenih pogojih). Če ne zmaga, se pričakovanja ne spremenijo. Podjetnik ocenjuje, da je verjetnost zmage enaka 0.6, če je izdelek tržno zanimiv, in 0.1, če izdelek ni tržno zanimiv.

Naj se podjetnik prijavi na razpis? Nariši odločitveno drevo in odločitve sprejmi v odvisnosti od parametra  $k$ !

**Naloga 3.13.**

Vir: Izpit OR 11.6.2018

Podajamo se na pot v mesto na drugi strani gorovja. Lahko se odločimo za pot po cesti okoli gorovja, za kar bomo porabili 12 ur. Vendar pa nas najkrajša pot vodi čez prelaz, ki je eno uro stran od začetne lokacije. Žal pa so razmere v gorah nepredvidljive: ocenjujemo, da bo z verjetnostjo 0.2 prelaz čist in ga bomo lahko prevozili v 5 urah, z verjetnostjo 0.1 bo delno zasnežen in ga bomo prevozili v 9 urah, z verjetnostjo 0.7 pa bo neprevozen, zaradi česar se bomo morali vrniti na začetek in iti okoli gorovja (skupno trajanje poti bo v tem primeru torej 14 ur).

Edini, ki nam lahko kakorkoli pomaga pri oceni vremenskih razmer na prelazu, je lokalni vrač, ki pa živi v dolini pod goro in ne uporablja sodobne tehnologije, s katero bi ga lahko kontaktirali. Rade volje pa nam bo povedal, ali na gori vlada mir, če se na poti do prelaza ustavimo pri njem. Pogojne verjetnosti njegovega odgovora v odvisnosti od razmer na prelazu so podane v spodnji tabeli.





Slika 7: Shema možnih poti za nalogo 3.13.

$P(\text{vračev odgovor} \mid \text{razmere na prelazu})$	čist	delno zasnežen	neprevozen
na gori vlada mir	0.9	0.5	0.1
na gori divja vojna	0.1	0.5	0.9

Do vrača imamo eno uro vožnje, do prelaza pa potem še eno uro. Če se po obisku vrača odločimo za pot okoli gorovja, bomo za nadaljnjo pot porabili 12 ur.

Kako se bomo odločili? Nariši odločitveno drevo in ga uporabi pri sprejemanju odločitev. Izračunaj tudi pričakovano trajanje poti. Glej sliko 7 za shemo možnih poti.

### Naloga 3.14.

Vir: Izpit OR 28.8.2018

Dano je odločitveno drevo s slike 8, pri čemer velja  $0 \leq p \leq 1$ . Pričakovano vrednost želimo maksimizirati. Poišči optimalne odločitve in pričakovano vrednost v odvisnosti od vrednosti parametra  $p$ .

### Naloga 3.15.

Vir: Kolokvij OR 26.1.2010

V ugledni banki nameravajo okrepiti upravni odbor z direktorjem za informacijske tehnologije. Za svetovanje in pridobivanje kandidatov za to mesto so prosili znano agencijo za kadrovske svetovanje *Kadria d.o.o.* Ti so jim priporočili prodornega g. Miho Ajkalaja. Po intervjuju z g. Ajkalajem je direktor ocenil, da bo g. Ajkalaj z verjetnostjo  $p = 3/5$  v enem letu uspešen pri svojem delu. Če bo uspešen, bo banka dodatno prislužila 2 100 000 €, sicer pa bo pridelala dodatno izgubo 800 000 € (izobraževanje, vpeljava, odpravnina, ...).

- (a) Modeliraj problem v okviru teorije odločanja (stanja, odločitve). Kakšno odločitev svetuješ direktorju glede na pričakovni dobiček? Kako je odločitev odvisna od verjetnosti  $p$ ? Nariši graf, ki prikazuje optimalni pričakovani dobiček v odvisnosti od  $p$ .



Slika 8: Odločitveno drevo za nalogo 3.14.

- (b) Za dodatnih 80 000€ lahko agencija z g. Ajkalajem opravi dodatne inteligenčne in psihološke teste, s katerimi lahko ugotovi, ali bo g. Ajkalaj uspešen. Statistični povzetek uspešnosti metode v preteklosti je naslednji:

$P(\text{izid testa} \mid \text{posl. rezultat})$ Poslovni rezultat	Izid testa	
	pozitiven	negativen
uspešen	$7/8$	$1/8$
neuspešen	$1/4$	$3/4$

Izračunaj EVPI in EVE ter komentiraj, ali je smiselno izvesti dodatna testiranja.

- (c) Nariši drevo odločitev in ugotovi, ali naj direktor izvede testiranje in če ga, kako naj se odloči glede zaposlitve g. Ajkalaja.

### Naloga 3.16.

Vir: Izpit OR 28.6.2010

Na naftni ploščadi podjetja BP je prišlo do nekontroliranih izpustov nafte iz vrtine v zalivu. Po vseh mogočih podvigih, da bi zamašili vrtino, se je obupano vodstvo podjetja pod pritiski predsednika bližnje države začelo dobivati z ruskimi strokovnjaki za mašenje vrtin s pomočjo jedrskih eksplozij pod vodstvom prof. dr. Mikhaila Razturoviča Totalkova. Vodstvo BP ocenjuje, da bo ekipa dr. Totalkova z verjetnostjo  $p = 3/7$  uspešno zamašila vrtino. Tako bo podjetje imelo sicer samo 2.8 milijarde \$ dobička, sicer pa bi zaradi upada dobička in povzročene škode utrpeli izgubo 700 milijonov \$.

- (a) Modeliraj problem v okviru teorije odločanja (stanja, odločitve). Kakšno odločitev svetuješ vodstvu BP? Kako je odločitev odvisna od verjetnosti  $p$ ? Nariši graf, ki prikazuje optimalni pričakovani dobiček v odvisnosti od  $p$ .
- (b) Za dodatnih 90 000 \$ lahko podjetje BP naroči študijo pri kitajskem ljudskem inštitutu za naftne vrtine iz mesta Lanzhou, ki ocenjuje uspešnost rizičnih projektov, in bi ocenilo, ali bo ekipa dr. Totalkova uspešna. Statistični povzetek uspešnosti raziskav inštituta v preteklosti je naslednji:

$P(\text{rez. raziskave} \mid \text{rez. projekta})$ Rezultat projekta	Rezultat raziskave inštituta	
	pozitiven	negativen
uspešen	7/9	2/9
neuspešen	1/3	2/3

Izračunaj EVPI in EVE ter komentiraj, ali je smiselno izvesti dodatno raziskavo.

- (c) Nariši drevo odločitev in ugotovi, ali naj podjetje naroči raziskavo in če jo, kako naj se odloči glede mašenja vrtine.

### Naloga 3.17.

Vir: Izpit OR 15.9.2010

Letalska družba namerava nabaviti že rabljeno letalo, ki stane 170 000 €. Ocenjujejo, da bodo z njim imeli, če je odlično ohranjeno, 1 000 000 € dobička, če je zadovoljivo ohranjeno, 340 000 € dobička, in če je slabo ohranjeno, le 10 000 € dobička. Verjetnosti, da je letalo odlično, zadovoljivo ali slabo ohranjeno, so zaporedoma 0.2, 0.3 in 0.5.

- (a) Modeliraj problem v okviru teorije odločanja (stanja, odločitve). Kakšno odločitev svetuješ vodstvu družbe?
- (b) Družba lahko naroči oceno letala pri izvedenski firmi, ki zahteva za svoje poročilo 10 000 €. Vodstvo družbe takole ocenjuje pogojne verjetnosti:

$P(\text{rezultat poročila} \mid \text{kakovost letala})$	odlično	zadovoljivo	slabo
ugodno	0.9	0.6	0.1
neugodno	0.1	0.4	0.9

Kako naj se vodstvo družbe odloči?

**Naloga 3.18.**

Vir: Kolokvij OR 24.1.2011

Študent tretjega letnika finančne matematike se mora odločiti, ali bi nadaljeval študij na drugi stopnji. Ocenjuje, da bo, če študij uspešno zaključi, v življenju zaslužil 200 000 € več, kot če študij zaključi že po prvi stopnji. Če pa študija ne zaključi uspešno, bo imel zaradi stroškov študija in izgubljenega dohodka 40 000 € izgube. Verjetnost, da bo študij na drugi stopnji uspešno zaključil, je 80%.

- (a) Modeliraj problem v okviru teorije odločanja (stanja, odločitve). Kakšno odločitev svetuješ študentu?
- (b) Matematični oddelek ponuja dodatno testiranje, ki študentom pomaga pri odločitvi, ali naj nadaljujejo študij. Test stane 500 evrov, iz izkušenj kolegov pa študent ocenjuje, da so pogojne verjetnosti naslednje:

$P(\text{rezultat testa} \mid \text{uspešnost študija})$	uspešen	neuspešen
pozitiven	19/20	1/10
negativen	1/20	9/10

Ali naj se študent prijavi na dodatno testiranje?

**Naloga 3.19.**

Vir: Izpit OR 9.2.2011

Direktorica banke se mora odločiti, ali bi stranki, računalniškemu podjetju, odobrila posojilo v vrednosti 100 000 €. Po izkušnjah banke so računalniška podjetja neuspešna z verjetnostjo 20%, povprečno uspešna z verjetnostjo 50% in uspešna z verjetnostjo 30%. Če damo podjetju kredit in se izkaže za neuspešno, bomo imeli v povprečju za 15 000 € izgube, če je povprečno uspešno, bomo imeli 10 000 € dobička, če pa je uspešno, bomo imeli 20 000 € dobička.

- (a) Modeliraj problem v okviru teorije odločanja (stanja, odločitve). Kakšno odločitev svetuješ direktorici banke? Kolikšen je EVPI?
- (b) Za ceno 5 000 € lahko najamemo podjetje, ki natančno preuči računalniško podjetje in poda svojo oceno: negativno, nevtravno ali pozitivno. Po podatkih banke so pogojne verjetnosti  $P(\text{rezultat testa} \mid \text{uspešnost podjetja})$  naslednje:

	neuspešno	povprečno uspešno	uspešno
negativno	1/2	2/5	1/5
nevtravno	2/5	1/2	2/5
pozitivno	1/10	1/10	2/5

Izračunaj EVE in nariši odločitveno drevo. Kakšno odločitev svetuješ direktorici banke?

**Naloga 3.20.**

Vir: [4, Naloga 6.9]

Janez želi naložiti vsoto 1 000€ v banko za dobo petih let. Odloča se med tem, da bi jo vezal za pet let (obrestna mera 5%) ali pa petkrat zaporedoma po eno leto (obrestna mera 4%). Če denar veže za pet let, vmes pa varčevanje prekine, mu pripada le obrestna mera 3%. Ocenjuje, da lahko v naslednjih petih letih pride do naslednjih situacij:

- varčeval bo pet let, pri tem se obrestna mera ne spremeni,
- varčeval bo pet let, obrestna mera se po treh letih poveča za 30%,
- varčeval bo pet let, obrestna mera se po treh letih zmanjša za 20%,
- varčeval bo tri leta.

Opiši, kako naj se odloči glede na posamezne kriterije (optimist, pesimist, Laplace, Savage). Določi vrednosti parametera  $\alpha$ , pri katerih je po Hurwiczevem kriteriju možnih več enakovrednih odločitev.

**Naloga 3.21.**

Vir: Kolokvij OR 17.4.2014

Na letalu je 100 sedežev. Dane so naslednje verjetnosti za število potnikov, ki ne pridejo na vkrcanje, pri čemer je  $P(i)$  verjetnost, da natanko  $i$  potnikov ne pride na vkrcanje:

$$P(0) = 0.25, \quad P(1) = 0.5, \quad P(2) = 0.25.$$

- (a) Koliko letalskih kart naj proda letalska družba, če vsaka prodana karta prinese 100€ dobička, vsak nezadovoljen potnik, ki ne dobi sedeža, pa 200€ izgube?
- (b) Za 200€ lahko izvedemo predhodno analizo, ki nam napove število potnikov, ki jih ne bo na vkrcanju. Zanesljivost analize je podana z verjetnostmi

$$(p_{ij})_{i,j=0}^2 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.1 & 0 \\ 0.2 & 0.8 & 0.1 \\ 0.1 & 0.1 & 0.9 \end{bmatrix},$$

kjer je  $p_{ij}$  verjetnost, da analiza napove odpoved  $i$  potnikov v primeru, ko imamo dejansko  $j$  odpovedi. Ali naj letalska družba izvede analizo pred prodajo kart?

**Naloga 3.22.**

Vir: Izpit OR 14.6.2013

Fenko, brat škrata Bolfenka, je najboljši alkimist, kar jih je družina imela. Preživlja se z izdelovanjem zlata iz granodiorita<sup>2</sup>. Postopek izdelave zlata je naslednji: ob 23:00 mora nastaviti sveže izkopen granodiorit (1 kg svežega granodiorita je vreden 2 gulda<sup>3</sup>) na točno določeno mesto pod milo nebo<sup>4</sup>. Če nastavljene kamnine noben škrat, srna ali človek ne vidi, se le-ta v dveh urah spremeni v zlato (za 1 kg granodiorita dobi 10 g zlata). Verjetnost, da se to zgodi (tj., da nastane zlato), je  $2/5$ . To zlato lahko proda škrtu zlatarju za gulde (in to je edini možni način porabe zlata). Za 10 g zlata dobi 4 gulde. Granodiorit, ki je enkrat že bil nastavljen, se ne bo nikoli več spremenil v zlato. Fenko lahko kilogram "porabljenega" granodiorita proda za 1 guld.

Predpostavimo, da Fenko zapravlja denar le za izdelavo zlata iz granodiorita, da zmeraj nastavi celoštevilsko mnogo kilogramov granodiorita in ima zmeraj celoštevilsko mnogo gulfov (npr. s tremi guldi lahko kupi največ 1 kg granodiorita, en guld mu ostane).

Trenutno ima Fenko 5 gulfov, nič zlata in nič granodiorita. Koliko kilogramov granodiorita naj v naslednjih dveh nočeh nastavi pod milo nebo, da bo imel kar največje pričakovano število gulfov? V odgovoru napiši, koliko granodiorita naj nastavi prvo noč in koliko drugo noč. Odgovor bo odvisen od tega, ali se mu ponoči granodiorit spremeni v zlato ali ne.

**Naloga 3.23.**

Vir: [1, Naloga 4.3]

Ljubo prodaja časopise po centru Ljubljane. Vsak dan se mora odločiti, koliko časopisov naj naroči. Za vsak naročen časopis plača 0.8€, za vsak prodan časopis pa iztrži 1€. Za neprodane časopise ne dobi povrnjenega denarja. Vsak dan je verjetnost, da bo imel  $i$  kupcev, enaka  $p_i$ , kjer je  $p_6 = 0.1$ ,  $p_7 = 0.2$ ,  $p_8 = 0.3$ ,  $p_9 = 0.3$  in  $p_{10} = 0.1$ .

- (a) Kakšno odločitev svetuješ Ljubu in zakaj?
- (b) Kolikšen zaslužek lahko pričakuje v mesecu, ko časopis izide petindvajsetkrat?

**Naloga 3.24.**

Vir: Izpit OR 24.6.2014

Tovarna od dobavitelja dobi paket 10 komponent  $A$ . Tovarna sestavlja izdelke  $B$ , kjer gre v vsak izdelek  $B$  natanko ena komponenta  $A$ . Dane so verjetnosti

$$p_i = P(\text{med 10 komponentami } A \text{ je natanko } i \text{ pokvarjenih}),$$

kjer je  $p_1 = 0.7$ ,  $p_2 = 0.2$  in  $p_3 = 0.1$ . Stroški pregleda posamezne komponente so 45€. Stroški popravila izdelka  $B$  zaradi vgrajene okvarjene komponente  $A$  so enaki 350€.

<sup>2</sup>Granodiorit je zelo razširjena magmatska kamnina na Pohorju, znana tudi kot pohorski tonalit.

<sup>3</sup>Guld je denarna enota, ki jo uporabljajo pohorski škratje.

<sup>4</sup>Kam je treba nastaviti granodiorit, je odvisno tudi od položaja planetov.

- (a) Denimo, da ima tovarna na izbiri samo dve možnosti. Prva je, da pregleda vseh 10 dobavljenih izdelkov. Druga možnost pa je, da ne pregleda nobenega dobavljenega izdelka. Katera odločitev tovarni povzroči manj stroškov?
- (b) Naj ima sedaj tovarna na voljo drugačni izbiri. Prva je, da naključno izbere eno izmed 10 komponent  $A$ , jo pregleda in po potrebi zamenja, ter gre nato direktno v proizvodnjo izdelkov  $B$ . Druga možnost pa je, da pregleda vseh 10 izdelkov. Katera odločitev tovarni povzroči manj stroškov?

**Naloga 3.25.**

Vir: Izpit OR 25.8.2014

V škatli so štirje ponarejeni kovanci, vredni 0€, in en zlat kovanec, vreden 100€. Na slepo lahko izbereš po en kovanec, pri čemer moraš za vsako izbiranje plačati 30€. Določi pričakovani profit, ki ga dosežeš pri igranju te igre.

**Naloga 3.26.**

Vir: Izpit OR 12.5.2016

Smo v letu 2500 in turistične rakete že potujejo na Luno. LunaAirways oglašuje let, na katerem je lahko 100 potnikov. LunaAirways računa, da bodo vsa mesta zasedena. Z leti izkušenj vedo, da nekatere potnike zagrabi strah in tako ne pridejo na potovanje. Ocenjujejo, da je verjetnost  $p_i$ , da natanko  $i$  potnikov ( $0 \leq i \leq 5$ ) ne pride na potovanje, naslednje:

$i$	od 0 do 3	od 4 do 5
$p_i$	0.2	0.1

S prodajo karte ima družba 300 denot dobička. Za vsakega potnika, ki bo moral menjati let, ima LunaAirways 400 denot stroškov. Koliko kart naj prodaja LunaAirways, če želi maksimizirati pričakovani dobiček?

**Naloga 3.27.**

Vir: Izpit OR 24.5.2016

Kavarna *maφja* je razvila recept za novo torto. Slaščičarna *sladkeoperacijske-raziskave* je za ekskluzivno pravico do recepta pripravljena plačati 15002€. Če se kavarna *maφja* odloči za samostojno prodajo torte, jih začetni vložek stane 10000€, za vsako prodano torto pa zaslužijo 25€. Po njihovi presoji je verjetnost uspeha recepture (prodajo 100000 tort) enaka 0.4, verjetnost propada (prodali bi zgolj 10000 tort) pa 0.6. Kavarna se lahko odloči, da zaprosi za pomoč tudi podjetje, ki na osnovi degustacij torte sestavi mnenje o uspehu recepta. Svetovanje jih stane 35000€, natančnost svetovanja pa opisuje spodnja tabela.

$P(\text{mnenje svetovalca} \mid \text{uspeh recepta})$	Recept uspe	Recept ne uspe
Ugodno	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$
Neugodno	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

Kako naj se kavarna *maφja* odloči? Zakaj?

**Naloga 3.28.**

Vir: Izpit OR 24.5.2016

Organizatorji olimpijskih iger so zgradili dvorano za judo, ki sprejme 1 000 ljudi. Popularnost juda je na vrhuncu, zato organizatorji pričakujejo, da bodo vse karte zakupljene. Zaradi straha pred virusom zika so analitiki za  $0 \leq i \leq 5$  ( $i \in \mathbb{Z}$ ) izračunali verjetnosti  $p_i$ , da se natanko  $i$  izmed imetnikov kart ne pojavi na prireditvi. Verjetnosti so zbrane v spodnji tabeli.

$i$	0	1	2	3	4	5
$p_i$	0.01	0.19	0.3	0.4	0.05	0.05

S prodajo vstopnice imajo organizatorji 1 000 denot dobička. Za vsakega obiskovalca, ki bo ostal brez sedeža in bo moral v VIP sekcijo dvorane, imajo 1 400 denot stroškov. Koliko kart naj organizatorji olimpijskih iger prodajo, če želijo maksimizirati pričakovani dobiček?

**Naloga 3.29.**

Vir: Kolokvij OR 19.4.2019

V manjšem podjetju so razvili nov okus sadnega soka. Proizvedli so ga že 100 000 litrov, ko so prejeli ponudbo multinacionalke, da odkupijo vso razpoložljivo količino po ceni 1€ na liter. Če se ne odločijo za odprodajo, bodo sok sami pakirali in ponudili na trgu po ceni 3€ na liter. Zagon pakiranja stane 1 000€, pakiranje enega litra soka pa 0.5€. V podjetju ocenjujejo, da bo z verjetnostjo 0.7 produkt uspešen in ga bodo vsega prodali, z verjetnostjo 0.3 pa bo neuspešen in ga bodo prodali le 10 000 litrov.

Pri podjetju imajo na voljo ravno dovolj časa, da pred odločitvijo pakirajo in na regionalnem trgu ponudijo 1 000 litrov soka po akcijski ceni 2.5€ na liter. Ocenjujejo, da bi v primeru uspeha produkta z verjetnostjo 0.8 tudi akcija uspela in bi tako razprodali akcijske zaloge, v primeru neuspeha produkta pa bi se to zgodilo le z verjetnostjo 0.1. Če akcija ne bi uspela, bi prodali le 100 litrov soka. Če se po akcijski ponudbi odločijo za samostojno prodajo, bodo seveda morali še enkrat plačati stroške zagona pakiranja, v nasprotnem primeru pa bo multinacionalka odkupila preostalih 99 000 litrov še nepakiranega soka.

**Opomba:** količina, prodana v akcijski ponudbi, je vključena v končno prodano količino. Če torej v akciji prodajo vseh 1 000 litrov soka po ceni 2.5€ na liter, ga bodo v primeru neuspeha produkta v redni prodaji prodali le še 9 000 litrov po ceni 3€ na liter, v primeru uspeha pa še 99 000 litrov.

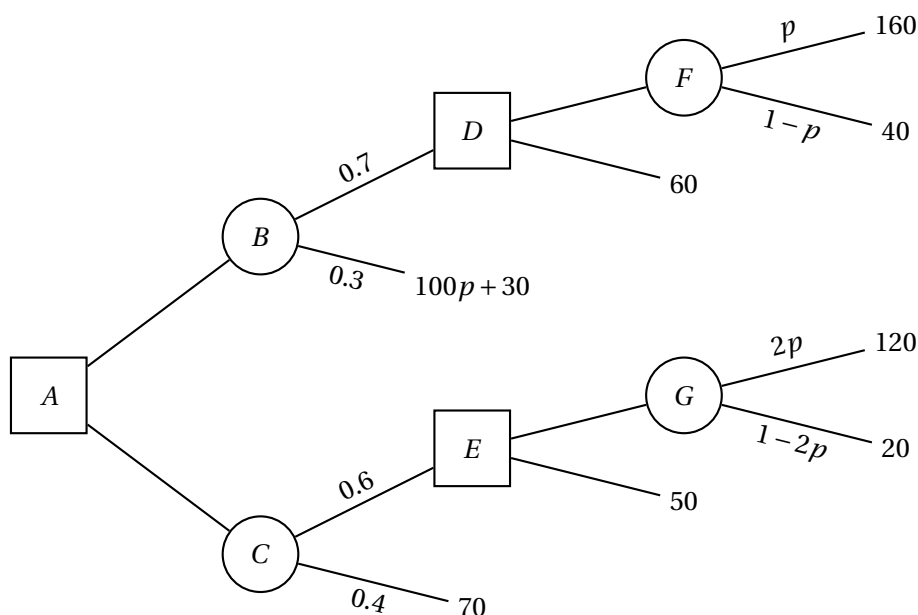
Kako naj se pri podjetju odločijo, da bo pričakovani zaslužek čim večji? Nariši odločitveno drevo in ga uporabi pri sprejemanju odločitev.

**Naloga 3.30.**

Vir: Izpit OR 3.6.2019

Podjetje je od konkurenta v finančnih težavah odkupilo tovarno čokolade, ki že nekaj časa ni bila v uporabi. Ker že prejemajo nova naročila, želijo v naslednjih 8 tednih proizvesti čim večjo količino čokolade. Ocenjujejo, da so z verjetnostjo 0.4 stroji v dobrem stanju in lahko proizvedejo 10 000 kg čokolade na teden, z verjetnostjo 0.6 pa so v slabem stanju in lahko proizvedejo le 1 000 kg čokolade na teden.





Slika 9: Odločitveno drevo za nalogo 3.31.

Odločijo se lahko, da pred zagonom proizvodnje na strojih izvedejo servis. Izvedba servisa lahko poteka gladko in konča v enem tednu, ali pa se pojavijo težave in tako servis traja tri tedne (za proizvodnjo tako ostane le še 7 oziroma 5 tednov). Če so stroji v dobrem stanju, bo servis z verjetnostjo 0.9 potekal gladko, z verjetnostjo 0.1 pa se bodo pojavile težave – v obeh primerih pa bodo stroji po servisu ostali v dobrem stanju. Če so stroji v slabem stanju, bo servis z verjetnostjo 0.2 potekal gladko in jih tedaj z verjetnostjo 0.7 spravil v dobro stanje, z verjetnostjo 0.8 pa se bodo pojavile težave – tedaj je verjetnost, da bodo stroji po servisu v dobrem stanju, enaka 0.5. Po zagonu proizvodnje te zaradi previsokih stroškov ni mogoče predčasno prekiniti; stroški servisa pa niso pomembni, saj ga bodo morali izvesti kasneje, če se zanj ne odločijo takoj.

Kako naj se v podjetju odločijo? Nariši odločitveno drevo in ga uporabi pri sprejemanju odločitev. Izračunaj tudi pričakovano količino proizvedene čokolade.

### Naloga 3.31.

Vir: Izpit OR 19.6.2019

Dano je odločitveno drevo s slike 9, pri čemer velja  $0 \leq p \leq 1/2$ . Pričakovano vrednost želimo minimizirati. Poišči optimalne odločitve in pričakovano vrednost v odvisnosti od vrednosti parametra  $p$ .

## 1.4 Dinamično programiranje

### Naloga 4.1.

Vir: Izpit OR 15.9.2010

Na avtocestni odsek dolžine  $M$  kilometrov želimo postaviti oglasne plakate. Dovoljene lokacije plakatov določa urad za oglaševanje in so predstavljene s števili  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , kjer  $x_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) predstavlja oddaljenost od začetka odseka v kilometrih. Profitabilnost oglasa na lokaciji  $x_i$  določa vrednost  $v_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ). Urad za oglaševanje podaja tudi omejitev, da mora biti razdalja med oglasi vsaj  $d$  kilometrov. Oglase želimo postaviti tako, da bodo čim bolj profitabilni.

- (a) Napiši rekurzivne enačbe za opisani problem.
- (b) Reši problem za parametre  $M = 20$ ,  $d = 5$ ,  $n = 8$ ,  $(x_i)_{i=1}^n = (1, 2, 8, 10, 12, 14, 17, 20)$  in  $(v_i)_{i=1}^n = (8, 8, 12, 10, 7, 5, 6, 10)$ .
- (c) Napiši algoritem, ki poišče najbolj profitabilno postavitev oglasov za dane parametre. Kakšna je njegova časovna zahtevnost?

### Naloga 4.2.

Vir: Vaje OR 6.4.2016

Imamo nahrbtnik nosilnosti  $M$  kilogramov. Danih je  $n$  objektov z vrednostmi  $v_i$  in težami  $t_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ). Problem nahrbtnika sprašuje po izbiri predmetov  $I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$ , ki maksimizira njihovo skupno vrednost pri omejitvi  $\sum_{i \in I} t_i \leq M$ .

- (a) Napiši rekurzivne enačbe za opisani problem.
- (b) Z uporabo rekurzivnih enačb reši problem za parametre  $M = 8$ ,  $n = 8$ ,

$$(v_i)_{i=1}^n = (9, 9, 8, 11, 10, 15, 3, 12) \quad \text{in} \\ (t_i)_{i=1}^n = (3, 5, 1, 4, 3, 8, 2, 7).$$

### Naloga 4.3.

Vir: Vaje OR 6.4.2016

Dana je matrika  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$ . Poiskati želimo pot minimalne vsote, ki se začne v levem zgornjem kotu (pri  $a_{11}$ ) in konča v desnem spodnjem kotu (pri  $a_{mn}$ ). Dovoljeni so zgolj premiki v desno in navzdol.

- (a) Napiši rekurzivne enačbe za opisani problem.
- (b) Reši problem za matriko

$$A = \begin{pmatrix} 131 & 673 & 234 & 103 & 18 \\ 201 & 96 & 342 & 965 & 150 \\ 630 & 803 & 746 & 422 & 111 \\ 537 & 699 & 497 & 121 & 956 \\ 805 & 732 & 524 & 37 & 332 \end{pmatrix}.$$

- (c) Na osnovi rekurzivnih enačb napiši algoritem, ki reši opisani problem. Oцени tudi njegovo časovno zahtevnost v odvisnosti od  $m$  in  $n$ .

**Naloga 4.4.**

Vir: Vaje OR 6.4.2016

Dan je niz  $S = a_1 a_2 \dots a_n$ , kjer so  $a_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) elementi neke končne abecede. Nizu  $a_j a_{j+1} \dots a_k$ , kjer je  $1 \leq j \leq k \leq n$ , pravimo *strnjen podniz* niza  $S$ . S pomočjo dinamičnega programiranja napiši algoritem, ki določi najdaljši palindromski strnjen podniz v  $S$ .

**Naloga 4.5.**

Vir: Vaje OR 6.4.2016

Dana je matrika  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$ . Poiskati želimo strnjeno podmatriko matrike  $A$  z največjo vsoto komponent.

- (a) Napiši rekurzivne enačbe za opisani problem.
- (b) Reši problem za matriko

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ -3 & -2 & 8 & 2 \\ -3 & 2 & -2 & 4 \\ 1 & -5 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

- (c) Napiši algoritem, ki reši opisani problem. Oceni tudi njegovo časovno zahtevnost v odvisnosti od  $m$  in  $n$ .

**Naloga 4.6.**

Vir: Vaje OR 6.4.2016

Na voljo imamo kovance z vrednostmi  $1 = v_1 < v_2 < \dots < v_n$  in vsoto  $C$ , ki jo želimo izplačati s čim manjšim številom kovancev. Predpostavljamo, da imamo dovolj velik nabor kovancev.

- (a) S pomočjo dinamičnega programiranja reši problem v splošnem.
- (b) Poišči izplačilo z najmanjšim številom kovancev za  $C = 25$ ,  $n = 4$  in  $(v_i)_{i=1}^n = (1, 2, 5, 7)$ .

**Naloga 4.7.**

Vir: Vaje OR 6.4.2016

Na ulici je  $n$  vrstnih hiš, pri čemer je v  $i$ -ti hiši  $c_i$  denarja. Tat se odloča, katere izmed hiš naj oropa. Vsak oropan stanovalec to sporoči svojim sosedom, zato tat ne sme oropati dveh sosednjih hiš. Ker je tat poslušal predmet Operacijske raziskave, pozna dinamično programiranje. Pokaži, kako naj tat določi, katere hiše naj oropa.

**Naloga 4.8.**

Vir: Kolokvij OR 31.5.2012

Imamo hlod dolžine  $\ell$ , ki bi ga radi razžagali na  $n$  označenih mestih  $0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < \ell$ . Eno rezanje stane toliko, kolikor je dolžina hloda, ki ga režemo. Ko hlod prerežemo, dobimo dva manjša hloda, ki ju režemo naprej. Poiskati želimo zaporedje rezanj z najmanjšo ceno.

- (a) S pomočjo dinamičnega programiranja reši problem v splošnem. Oceni tudi njegovo časovno zahtevnost.
- (b) Reši problem pri podatkih  $\ell = 10$  in  $(x)_{i=1}^4 = (3, 5, 7, 8)$ .

**Naloga 4.9.**

Vir: [3, Problem 11.3-1]

Lastnik verige  $n$  trgovin z živili je kupil  $m$  zabojev svežih jagod. Naj bo  $p_{ij}$  pričakovani dobiček v trgovini  $j$ , če tja dostavimo  $i$  zabojev. Zanima nas, koliko zabojev naj gre v vsako trgovino, da bomo imeli čim večji zaslužek. Zaradi logističnih razlogov zabojev ne želimo deliti.

- (a) Z dinamičnim programiranjem reši problem za podatke  $m = 5$ ,  $n = 3$  in  $p_{ij}$  iz sledeče tabele:

$p_{ij}$	1	2	3
0	0	0	0
1	5	6	4
2	9	11	9
3	14	15	13
4	17	19	18
5	21	22	20

- (b) Napiši algoritem, ki reši opisani problem v splošnem.

**Naloga 4.10.**

Vir: [3, Problem 11.3-8]

Podjetje bo kmalu uvedlo nov izdelek na zelo konkurenčen trg, zato trenutno pripravlja marketinško strategijo. Odločili so se, da bodo izdelek uvedli v treh fazah. V prvi fazi bodo pripravili posebno začetno ponudbo z močno znižano ceno, da bi privabili zgodnje kupce. Druga faza bo vključevala intenzivno oglaševalsko kampanjo, da bi zgodnje kupce prepričali, naj izdelek še vedno kupujejo po redni ceni. Znano je, da bo ob koncu druge faze konkurenčno podjetje predstavilo svoj izdelek. Zato bo v tretji fazi okrepljeno oglaševanje z namenom, da bi preprečili beg strank h konkurenci.

Podjetje ima za oglaševanje na voljo 4 milijone evrov, ki jih želimo čim bolj učinkovito porabiti. Naj bo  $m$  tržni delež v procentih, pridobljen v prvi fazi,  $f_2$  delež, ohranjen po drugi fazi, in  $f_3$  delež, ohranjen po tretji fazi. Maksimizirati želimo končni tržni delež, torej količino  $mf_2f_3$ .

- (a) Denimo, da želimo v vsaki fazi porabiti nek večkratnik milijona evrov, pri čemer bomo pri prvi fazi porabili vsaj milijon evrov. V spodnji tabeli so zbrani vplivi porabljenih količin na vrednosti  $m$ ,  $f_2$  in  $f_3$ .

$M\text{€}$	$m$	$f_2$	$f_3$
0	–	0.2	0.3
1	20	0.4	0.5
2	30	0.5	0.6
3	40	0.6	0.7
4	50	–	–

Kako naj razdelimo sredstva?

- (b) Denimo sedaj, da lahko v vsaki fazi porabimo poljubno pozitivno količino denarja (seveda glede na omejitve skupne porabe). Naj bodo torej  $x_1$ ,  $x_2$  in  $x_3$  količine denarja v milijonih evrov, ki jih porabimo v prvi, drugi in tretji fazi. Vpliv na tržni delež je podan s formulami

$$m = x_1(10 - x_1), \quad f_2 = 0.4 + 0.1x_2, \quad \text{in} \quad f_3 = 0.6 + 0.07x_3.$$

Kako naj sedaj razdelimo sredstva?

#### Naloga 4.11.

Vir: Izpit OR 26.6.2012

Nori profesor Boltežar stanuje v stolpnici z  $n$  nadstropji, oštevilčenimi od 1 do  $n$ . Nori stanovalci tega bloka radi mečejo cvetlične lončke z balkonov. Boltežar bi rad ugotovil, katero je najvišje nadstropje, s katerega lahko pade cvetlični lonček, ne da bi se razbil. Jasno je, da če se lonček razbije pri padcu iz  $k$ -tega nadstropja, potem se razbije tudi pri padcu s  $(k + 1)$ -tega nadstropja. Če bi Boltežar imel le en cvetlični lonček, bi ga lahko metal po vrsti od najnižjega nadstropja navzgor, dokler se ne bi razbil. V najslabšem primeru bi lonček torej vrgel  $n$  krat (možno je, da bi lonček preživel tudi padec iz najvišjega nadstropja).

Ker ima Boltežar doma  $k$  cvetličnih lončkov, lahko do rezultata pride tudi z manjšim številom metov. S pomočjo dinamičnega programiranja bi rad poiskal strategijo metanja, ki bi minimizirala število potrebnih metov v najslabšem primeru.

- (a) Napiši rekurzivne enačbe za opisani problem.
- (b) Napiši algoritem, ki reši opisani problem. Oceni tudi njegovo časovno zahtevnost v odvisnosti od  $n$  in  $k$ .

**Naloga 4.12.**

Vir: [3, Problem 11.2-2]

Vodja prodaje pri založniku učbenikov za fakulteto ima na voljo 6 trgovskih potnikov, ki jim želi dodeliti eno od treh regij, v kateri bodo delovali. V vsaki regiji mora delovati vsaj en trgovski potnik. Naj bo  $p_{ij}$  pričakovana porast v prodaji v regiji  $j$ , če bo tam delovalo  $i$  trgovskih potnikov:

$p_{ij}$	1	2	3
1	35	21	28
2	48	42	41
3	70	56	63
4	89	70	75

Reši problem s pomočjo dinamičnega programiranja.

**Naloga 4.13.**

Vir: [3, Problem 11.3-16]

Dan je sledeči nelinearni program.

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1^2 + 2x_2 + 4x_3 - x_3^2 \\ & 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 4 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Reši ga s pomočjo dinamičnega programiranja.

**Naloga 4.14.**

Vir: [3, Problem 11.4-1]

Igralec na srečo bo odigral tri partije s svojimi prijatelji, pri čemer lahko vsakič stavi na svojo zmago. Stavi lahko katerokoli vsoto denarja, ki jo ima na voljo – če izgubi partijo, zastavljeno vsoto izgubi, sicer pa tako vsoto pridobi. Pri vsaki partiji sta verjetnosti zmage in poraza enaki  $1/2$ . Na začetku ima 75€, na koncu pa želi imeti 100€ (ker igra s prijatelji, noče imeti več kot toliko).

Z dinamičnim programiranjem poišči strategijo stavljenja, ki maksimizira verjetnost, da bo na koncu imel natanko 100€.

**Naloga 4.15.**

Vir: [2, Exercise 6.14]

Imamo pravokoten kos blaga dimenzij  $m \times n$ , kjer sta  $m$  in  $n$  pozitivni celi števili, ter seznam  $k$  izdelkov, pri čemer potrebujemo za izdelek  $i$  pravokoten kos blaga dimenzij  $a_i \times b_i$  ( $a_i, b_i$  sta pozitivni celi števili), ki ga prodamo za ceno  $c_i > 0$ . Imamo stroj, ki lahko poljuben kos blaga razreže na dva dela bodisi vodoravno, bodisi navpično. Začetni kos blaga želimo razrezati tako, da bomo lahko naredili izdelke, ki nam bodo prinašali čim večji dobiček. Pri tem smemo izdelati poljubno število kosov posameznega izdelka. Kose blaga lahko seveda tudi obračamo (tj., za izdelek  $i$  lahko narežemo kos velikosti  $a_i \times b_i$  ali  $b_i \times a_i$ ).

Zapiši rekurzivne enačbe za reševanje danega problema. Razloži, kaj predstavljajo spremenljivke, v kakšnem vrstnem redu jih računamo, ter kako dobimo optimalno rešitev.

**Naloga 4.16.**

Vir: Izpit OR 15.12.2016

Oceni časovno zahtevnost algoritma, ki sledi iz rekurzivnih enačb za nalogo 4.15. Reši problem za podatke  $m = 5, n = 3, k = 4, (a_i)_{i=1}^k = (2, 3, 1, 2), (b_i)_{i=1}^k = (2, 1, 4, 3)$  in  $(c_i)_{i=1}^k = (6, 3, 5, 7)$ .

**Naloga 4.17.**

Vir: Izpit OR 31.1.2017

Dano je zaporedje  $n$  realnih števil  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Želimo poiskati strnjeno podzaporedje z največjim produktom – t.j., taka indeksa  $i, j$  ( $1 \leq i \leq j \leq n$ ), da je produkt  $a_i a_{i+1} \cdots a_{j-1} a_j$  čim večji.

- (a) Zapiši rekurzivne enačbe za reševanje danega problema. Razloži, kaj predstavljajo spremenljivke, v kakšnem vrstnem redu jih računamo, ter kako dobimo optimalno rešitev.

**Namig:** posebej obravnavaj pozitivne in negativne delne produkte.

- (b) Oceni časovno zahtevnost algoritma, ki sledi iz zgoraj zapisanih enačb.

- (c) S svojim algoritmom reši problem za zaporedje

$$0.9, -2, -0.6, -0.5, -2, 5, 0.1, 3, 0.5, -3.$$

**Naloga 4.18.**

Vir: Izpit OR 15.3.2017

Za zaporedje števil  $x_1, x_2, \dots, x_m$  pravimo, da je *oscilirajoče*, če velja  $x_i < x_{i+1}$  za vse sode  $i$  in  $x_i > x_{i+1}$  za vse lihe  $i$ . S pomočjo dinamičnega programiranja zasnuj algoritem, ki v polinomskem času izračuna dolžino najdaljšega oscilirajočega podzaporedja zaporedja celih števil  $a_1, a_2, \dots, a_n$ .

**Naloga 4.19.**

Vir: Izpit OR 10.7.2017

V podjetju imajo na voljo  $m$  milijonov evrov sredstev, ki jih bodo vložili v razvoj nove aplikacije. Denar bodo porazdelili med tri skupine. Naj bodo  $x_1, x_2$  in  $x_3$  količine denarja (v milijonih evrov), ki jih bodo dodelili razvijalcem, oblikovalcem in marketingu. Vrednosti  $x_1, x_2, x_3$  niso nujno cela števila. Razvijalci morajo dobiti vsaj  $a_1$  milijonov evrov, potencial, ki ga ustvarijo, pa je  $p_1 = n_1 + k_1 x_1$ . Oblikovalci morajo dobiti vsaj  $a_2$  milijonov evrov, potencial, ki ga ustvarijo, pa je  $p_2 = n_2 + k_2 x_2$ . Marketing mora dobiti vsaj  $a_3$  milijonov evrov, ustvari pa faktor  $p_3 = n_3 + k_3 x_3$ . Pričakovani dobiček v milijonih evrov se izračuna po formuli  $d = (p_1 + p_2) p_3$ . V podjetju bi radi sredstva porazdelili med skupine tako, da bo pričakovani dobiček čim večji.

- (a) Zapiši rekurzivne enačbe za reševanje danega problema.

- (b) Z zgoraj zapisanimi enačbami reši problem pri podatkih  $m = 15, a_1 = 4, n_1 = 3, k_1 = 1.5, a_2 = 3, n_2 = 4, k_2 = 2, a_3 = 2, n_3 = 0.4$  in  $k_3 = 0.3$ .

**Naloga 4.20.**

Vir: Izpit OR 29.8.2017

V veliki multinacionalni korporaciji želijo, da bi se zakonodaja spremenila v njihov prid. V ta namen so najeli  $m$  lobistov, ki se bodo pogajali z  $n$  političnimi strankami, da pridobijo njihovo podporo pri spremembi zakonodaje. Vsak lobist se bo pogajal s samo eno stranko; k vsaki stranki lahko pošljejo več lobistov. Naj bo  $p_{ij}$  ( $0 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq n$ ) verjetnost, da pridobijo podporo stranke  $j$ , če se z njo pogaja  $i$  lobistov (lahko predpostaviš  $p_{i-1,j} \leq p_{ij}$  za vsaka  $i, j$ ). Verjetnosti za različne stranke so med seboj neodvisne. Maksimizirati želijo verjetnost, da bodo lobisti pridobili podporo vseh  $n$  političnih strank.

- (a) Zapiši rekurzivne enačbe za reševanje danega problema.
- (b) Naj bo  $m = 6$  in  $n = 3$ . K vsaki stranki želijo poslati vsaj enega lobista (tj.,  $p_{0j} = 0$  za vsak  $j$ ), vrednosti  $p_{ij}$  za  $i \geq 1$  pa so podane v spodnji tabeli.

$p_{ij}$	1	2	3
1	0.2	0.4	0.3
2	0.5	0.5	0.4
3	0.7	0.5	0.8
4	0.8	0.6	0.9

Za dane podatke reši problem z zgoraj zapisanimi enačbami.

**Naloga 4.21.**

Vir: Kolokvij OR 23.4.2018

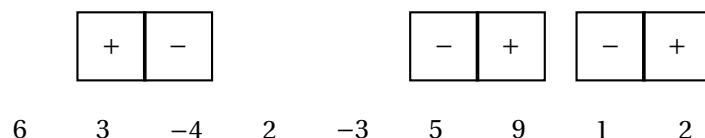
Imamo zaporedje  $n$  polj, pri čemer je na  $i$ -tem polju zapisano število  $a_i$ . Na voljo imamo še  $\lfloor n/2 \rfloor$  domin, z vsako od katerih lahko pokrijemo dve sosednji polji. Vsaka domina je sestavljena iz dveh delov: na enem je znak +, na drugem pa znak -. Posamezno polje lahko pokrijemo z le eno domino; če sta pokriti dve sosednji polji, morata biti pokriti z različnima znakoma (bodisi z iste, bodisi z druge domine). Iščemo tako postavitve domin, ki maksimizira vsoto pokritih števil, pomnoženih z znakom na delu domine, ki pokriva število. Pri tem ni potrebno, da uporabimo vse domine. Primer je podan na sliki 10.

- (a) Zapiši rekurzivne enačbe za reševanje danega problema. Razloži, kaj predstavljajo spremenljivke, v kakšnem vrstnem redu jih računamo, ter kako dobimo optimalno rešitev.

**Namig:** posebej obravnavaj dva primera glede na postavitev zadnje domine.

- (b) Oцени časovno zahtevnost algoritma, ki sledi iz zgoraj zapisanih enačb.
- (c) S svojim algoritmom poišči optimalno pokritje za primer s slike 10.





Slika 10: Primer dopustnega (ne nujno optimalnega) pokritja za nalogo 4.21. Vsota tega pokritja je  $3 - (-4) - 5 + 9 - 1 + 2 = 12$ . Če bi eno od zadnjih dveh domin obrnili (zamenjala bi se znaka), dobljeno pokritje ne bi bilo dopustno, saj bi dve zaporedni polji bili pokriti z enakima znakoma.

#### Naloga 4.22.

Vir: Izpit OR 5.7.2018

Vlagatelj ima na voljo 50 milijonov evrov sredstev, ki jih lahko porabi za donosno, a tvegano naložbo. Ocenjuje, da bi se mu ob uspehu naložbe vložek povrnil petkratno, verjetnost uspeha pa ocenjuje na 0.6. Zaradi tveganja se lahko odloči za zavarovanje naložbe, pri čemer ima ponudbi dveh zavarovalnic, ki mu proti plačilu ustrezne premije ponujata povračilo dela vložka, če bo naložba neuspešna. Vlagatelj lahko del sredstev obdrži tudi zase (tj., ga ne porabi za naložbo ali premijo).

Naj bodo torej  $x_1, x_2, x_3$  vrednosti v milijonih evrov, ki zaporedoma predstavljajo količine, ki jih vlagatelj obrzi zase, porabi za naložbo, in plača za zavarovalniško premijo. Pričakovana vrednost naložbene strategije vlagatelja (tj., količina denarja, ki jo ima na koncu) je potem

$$x_1 + x_2(0.6 \cdot 5 + 0.4q(x_3)),$$

kjer  $q(x_3)$  predstavlja delež vložka, ki ga glede na vloženo premijo zavarovalnica povrne ob neuspehu naložbe.

Vlagatelj ima dve ponudbi konkurenčnih zavarovalnic. Zavarovalnica Zvezna d.z.z. za premijo v višini  $x_3$  milijonov evrov ponuja povračilo deleža  $0.15x_3$  celotne naložbe v primeru neuspeha, pri čemer je največja možna premija 4 milijone evrov. Zavarovalnica Diskretna d.d.z. pa ponuja le tri možne premije:

premija	delež povračila ob neuspešni naložbi
1 milijon evrov	0.1
2 milijona evrov	0.35
3 milijoni evrov	0.5

Pogodbo smemo skleniti samo pri eni zavarovalnici.

- Zapiši definicijo funkcije  $q(x)$  skupaj z izbiro najugodnejše zavarovalnice pri vsakem  $x$ .
- Zapiši rekurzivne formule za določitev strategije vlaganja, ki nam bo prinesla največji pričakovani dobiček.
- S pomočjo zgornjih rekurzivnih enačb ugotovi, kako naj ravna vlagatelj, da bo imel čim večji dobiček.

**Naloga 4.23.**

Vir: Izpit OR 28.8.2018

Pri direkciji za ceste načrtujejo nov avtocestni odsek dolžine  $M$  kilometrov. Ob cesti želijo zgraditi počivališča tako, da je razdalja med dvema zaporednima počivališčema največ  $K$  kilometrov. Prav tako mora biti prvo počivališče največ  $K$  kilometrov od začetka, zadnje pa največ  $K$  kilometrov od konca avtocestnega odseka. Naj bodo  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$  možne lokacije počivališč (v kilometrih od začetka avtocestnega odseka), in  $c_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) cena izgradnje počivališča na lokaciji  $x_i$ . Postavitev počivališč želijo izbrati tako, da bo skupna cena izgradnje čim manjša.

- (a) Zapiši rekurzivne enačbe za reševanje danega problema. Razloži, kaj predstavljajo spremenljivke, v kakšnem vrstnem redu jih računamo, ter kako dobimo optimalno rešitev.
- (b) Oцени časovno zahtevnost algoritma, ki sledi iz zgoraj zapisanih enačb.
- (c) S pomočjo rekurzivnih enačb reši zgornji problem za podatke

$$\begin{aligned} M &= 100, & (x_i)_{i=1}^8 &= (5, 12, 22, 34, 49, 65, 83, 91), \\ K &= 30, & (c_i)_{i=1}^8 &= (18, 11, 21, 16, 23, 15, 19, 13). \end{aligned}$$

**Naloga 4.24.**

Vir: Kolokvij OR 26.1.2010

Pri neznanem problemu, ki smo se ga lotili z dinamičnim programiranjem, smo prišli do naslednje rekurzivne zveze:

$$c_{i,j} = \max\{c_{i-1,j-1}, c_{i+1,j-1} + 2c_{i-1,j+1}\}.$$

Izračunati želimo vrednost  $c_{m,n}$ . Katere vrednosti  $c_{i,j}$ , pri čemer je  $(i, j)$  zunaj  $\{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$ , moramo poznati, da bo  $c_{m,n}$  enolično določen? Poišči čim manjšo takšno množico.

**Naloga 4.25.**

Vir: Kolokvij OR 26.1.2010

Upravljalca nove moderne visoko tehnološko opremljene kongresne dvorane v Kongresnem centru Grebka Pohleparja zaračunava za najem dvorane 5€/min. Povpraševanje za najem nove dvorane je ogromno, a se na žalost ponudbe časovno prekrivajo, dvorano pa seveda lahko najame le ena stranka naenkrat. Tako se je upravljalca že prvi dan znašel pod goro ponudb, med katerimi je napol v paniki izbiral, bodimo pošteni, tako bolj "čez palec". A za kongresni center, ki nosi ime takega velikana ekonomije, se spodobi, da si uredi vse segmente poslovanja čim bolj optimalno in je kot tak zgled drugim. Predpostavimo, da ima upravljalca v trenutku odločanja podatke v obliki intervalov  $[z_i, k_i]$ ,  $i = 1, \dots, n$ , kjer  $z_i$  in  $k_i$  predstavljata začetni in končni čas ponudbe  $i$ . Ponudbi se prekrivata, če je njun presek neprazen časovni interval.

- (a) Denimo, da uredimo intervale ponudb glede na začetne čase ponudb od najmanjšega do največjega. Potem izberemo prvi interval, vse intervale, ki ga prekrivajo, pa zavržemo, ter postopek ponovimo rekurzivno. Upravljalcu se ta postopek zdi optimalen. Kaj pa meniš ti?
- (b) Denimo, da so intervali ponudb urejeni kot v prejšnji točki ter da je interval  $I$  zadnji interval v neki optimalni izbiri OPT. Premisli, kateri intervali so lahko kandidati za predzadnji interval v izbiri OPT. Na podlagi tega premisleka sestavi postopek, ki s pomočjo dinamičnega programiranja najde optimalno rešitev problema. Postopek utemelji.
- (c) Kakšna je časovna zahtevnost tvojega algoritma v najslabšem primeru?
- (d) Z uporabo razvitega algoritma reši problem za podatke  $(15, 60)$ ,  $(60, 180)$ ,  $(30, 90)$ ,  $(120, 210)$ ,  $(165, 255)$ ,  $(75, 135)$ ,  $(30, 105)$ ,  $(90, 150)$ .

**Naloga 4.26.**

Vir: Kolokvij OR 26.1.2010

Jatifi Bajrami se ukvarja s preprodajo pomaranč. Naslednja sezona je razdeljena na  $n$  mesecev. Za vsak mesec so znana predvidena povpraševanja  $r_1, \dots, r_n$ . Nabavni stroški v mesecu  $i$  so sestavljeni iz fiksnih stroškov  $K_i$  ter stroškov za nabavo sadja. Na začetku meseca  $i$  stane škatla pomaranč  $c_i$ . Če Jatifi takrat kupi  $m$  škatel, je za nabavo sadja torej moral odšteti  $mc_i$  denarnih enot. Če se Jatifi zaradi nižje cene v nekem mesecu odloči nakupiti vnaprej za več mesecev, mora plačati skladiščenje za škatle pomaranč za preostale mesece, pri čemer je cena skladiščenja za škatlo v mesecu  $i$  enaka  $h_i$ . Jatifi kupuje izključno, ko ve, da so mu zaloge popolnoma pošle, in od tega ne odstopa, saj se mu zdi škoda, da bi v skladišču hranil stare pomaranče. Pomaranče prodaja ves čas po isti ceni. Jatifi bi rad maksimiziral dobiček in zadovoljil celotno povpraševanje.

- (a) Predlagaj rešitev problema s pomočjo dinamičnega programiranja. Pri tem so vhodni podatki  $n$  mesecev,  $r = (r_i)_{i=1}^n$ ,  $K = (K_i)_{i=1}^n$ ,  $c = (c_i)_{i=1}^n$  ter  $h = (h_i)_{i=1}^n$ . Kakšno časovno zahtevnost ima tvoj algoritem?
- (b) Naj bo  $n = 4$ ,  $r = (20, 40, 15, 10)$ ,  $K = (2, 3, 4, 2)$ ,  $c = (3, 4, 3, 4)$  ter  $h = (1, 1, 1, 2)$ . Poišči optimalno strategijo kupovanja pomaranč.

**Naloga 4.27.**

Vir: Izpit OR 5.2.2010

Dana je rekurzija

$$c_{i,j} = \min_{i \leq k \leq j} \left( c_{i-1,k} + \sum_{u=i}^k a_{i,u} \right), \quad c_{0,j} = c_{i,0} = 1,$$

kjer je  $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^n$  matrika realnih števil. Pokaži in zelo natančno utemelji, da lahko izračunaš  $c_{n,n}$  v času  $O(n^3)$ .

**Naloga 4.28.**

Vir: Izpit OR 5.2.2010

Na znanem TV kanalu HOP.tv bodo ob sredah ob 17h predvajali humanitarno igro Prodajalec™, pri kateri igralec prodaja predmete tipa  $X$  in predmete tipa  $Y$  v določenem zaporedju  $P$ , v studio pa po vrsti prihajajo potencialni kupci. Organizatorji vnaprej določijo zaporedje kupcev in  $i$ -temu kupcu določijo tudi tip predmeta  $T_i$ . Kupec  $i$  lahko sam poda le ceno  $c_i$ , ki jo je pripravljen plačati za predmet. Organizatorji na podlagi tega določijo zaporedje  $P$  tako, da je izvedljiva prodaja vseh predmetov v zaporedju  $P$ . Podatkov  $P$ ,  $T$  in  $c$  igralec seveda ne pozna vnaprej. Kupci prihajajo v studio in igralec se odloča, ali jim za ponujeno ceno trenutni predmet proda ali ne. Pri tem mu svetuje in vpliva na njegov humanitarni čut znani voditelj Joras Š. Če igralec trenutnega predmeta ne proda  $i$ -temu kupcu, pride naslednji kupec, če pa ga proda, pa prisluži za humanitarne namene  $c_i$  enot denarja in naslednjemu kupcu poskusi prodati naslednji predmet v zaporedju  $P$ . V sezoni zmaga igralec, katerega prodaja je procentualno največja glede na optimalno prodajo. Na HOP.tv so na žalost kupili le okrnjeno licenco za igro Prodajalec™, ki ne vključuje programske opreme za preračun optimalnih rešitev, tako da te prosijo za pomoč. Za primer: če so podatki  $T = XYXXY$ ,  $c = (2, 2, 7, 1, 1)$  in  $P = XY$ , je optimalna rešitev prodaja  $X$  tretjemu kupcu ter prodaja  $Y$  petemu kupcu, s katero prislužimo  $c_3 + c_5 = 7 + 1 = 8$  enot denarja.

- (a) S pomočjo dinamičnega programiranja izpelji algoritem, ki za dane  $T$ ,  $c$  in  $P$  poišče optimalno rešitev. Podaj ustrezno rekurzivno zvezo ter opiši, kako rekonstruiramo optimalno rešitev.

**Namig:** zgleduj se po algoritmu za najdaljše skupno podzaporedje.

- (b) Kakšna je časovna zahtevnost tvojega algoritma v najslabšem primeru?
- (c) Izvedi algoritem na zgornjih podatkih in tako preveri, da je opisana rešitev v zgornjem primeru res optimalna.

**Naloga 4.29.**

Vir: Izpit OR 28.6.2010

Podatke (nize) stiskamo na naslednji način. Podana je tabela  $m$  nizov, dolžina vsakega je kvečjemu  $k$ . Radi bi zakodirali podatkovni niz  $D$  dolžine  $n$  z najkrajšim možnim zaporedjem nizov iz tabele. Npr., če naša tabela vsebuje nize  $(a, ba, abab, b)$  in bi radi zakodirali niz  $bababbaababa$ , je najboljši način kodiranja zaporedje  $(b, abab, ba, abab, a)$ , torej s petimi kodnimi besedami.

- (a) S pomočjo strategije dinamičnega programiranja izpelji čim bolj učinkovit algoritem, ki poišče najkrajše kodiranje danega niza  $D$ , če kodiranje za tak niz obstaja.
- (b) Demonstriraj uporabo algoritma na podanem nizu  $bababbaababa$ .
- (c) Kakšna je časovna zahtevnost tvoje rešitve?

**Naloga 4.30.**

Vir: Kolokvij OR 24.1.2011

Danih imamo  $n$  kock, ki jih želimo zložiti v čim višji stolp. Dimenzije  $i$ -te kocke so  $a_i \times b_i \times c_i$ , kjer je  $a_i$  dolžina,  $b_i$  širina in  $c_i$  višina. Kock ne smemo rotirati, kocko  $i$  pa lahko postavimo na kocko  $j$  samo, če je  $a_i < a_j$  in  $b_i < b_j$ . Brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da je  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ . S pomočjo dinamičnega programiranja poišči najvišji možni stolp.

Kako bi nalogo rešil, če je dovoljena tudi rotacija kock?

**Naloga 4.31.**

Vir: Izpit OR 9.2.2011

Znanstveniki proučujejo novo vrsto bakterije. V DNK te bakterije so našli naslednje zaporedje nukleotidov:

AACAGTTA.

Sumijo, da je to različica gena že znane bakterije, ki ima zaporedje

ACCATGTA.

Če sta zaporedji dovolj podobni, obstaja verjetnost, da imata gena podobni funkciji. Dovoljene so naslednje operacije:

- substitucija ( $ACT \rightarrow AGT$ ),
  - vstavljanje ( $AC \rightarrow AGC$ ),
  - izbris ( $AGC \rightarrow AC$ ) in
  - transpozicija ( $AT \rightarrow TA$ ).
- (a) Pomagajte znanstvenikom in napišite postopek, ki bo preštel najmanše število operacij, s katerim pridemo od enega DNK zaporedja do drugega.
- (b) Postopek iz prejšnje točke izvedite nad podanima zaporedjema in ugotovite število razlik.

**Naloga 4.32.**

Vir: Izpit OR 28.6.2011

Dano imamo zaporedje simbolov  $\top$  (resnično) in  $\perp$  (neresnično). Med vsakima izrazoma imamo  $\wedge$  (prvi in drugi),  $\vee$  (prvi ali drugi) ali  $\oplus$  (prvi ali drugi, ne pa tudi oba), npr.  $\top \wedge \top \oplus \perp$ . Izračunaj število postavitvev oklepajev, da je rezultat  $\top$ , in število postavitvev oklepajev, da je rezultat  $\perp$ .

**Namig:** definiraj  $T_{i,j}$  in  $F_{i,j}$  kot število takih postavitvev oklepajev med  $i$ -tim in  $j$ -tim izrazom.

**Naloga 4.33.**

Vir: Kolokvij OR 31.5.2012

Samostojna umetnica z nadimkom Stekelce se preživlja z barvanjem na steklo. Tokrat je dobila naročilo za izdelavo dveh zelo posebnih pobarvanih steklenih kroglic. Plačilo je dobila vnaprej, stroške pa bo imela le z nabavo stekla, saj ima barv in čopičev že dovolj na zalogi. Če ne uspe izdelati obeh kroglic v dogovorjenem času, bo morala plačati 800€ kazni. Steklene kroglice lahko naroči v steklarni, in sicer jo vsaka stane 100€. Steklarna ima stroške vsakič, ko zažene proizvodnjo teh kroglic, zato ji za vsako naročilo (ne glede na število naročenih kroglic) zaračuna dodatnih 300€. Kljub temu, da mora Stekelce zmeraj plačati vse dobljene kroglice, je za vsako le 50% verjetnost, da bo zanjo uporabna. Neuporabne kroglice lahko vrže kar v smeti, odvečne uporabne kroglice pa zanjo prav tako niso vredne nič in jih bo brez stroškov zavrgla.

- (a) Ker je naročilo časovno omejeno, ima Stekelce čas za največ dve naročili v steklarni. Po koliko kroglic naj vsakič naroči, da bodo pričakovani stroški čim manjši? (Število naročenih kroglic pri drugem naročilu bo seveda odvisno od števila dobrih kroglic pri prvem naročilu.)
- (b) Kaj pa, če steklarna v prvi seriji za naročilo namesto 300€ zahteva le 150€, v drugi seriji pa stroški naročila ostanejo 300€?

**Naloga 4.34.**

Vir: Izpit OR 9.7.2012

Dan je številski trikotnik

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & a_{1,1} & & & \\
 & & & a_{2,1} & & a_{2,2} & \\
 & & a_{3,1} & & a_{3,2} & & a_{3,3} & , \\
 & \ddots & & \vdots & & \vdots & & \ddots \\
 a_{n,1} & & a_{n,2} & & \cdots & & a_{n,n-1} & & a_{n,n}
 \end{array}$$

kjer so  $a_{i,j} \in \mathbb{Z}$ . Spust v takem trikotniku je pot od vrha do dna – t.j., zaporedje  $(a_{i,j_i})_{i=1}^n$ , kjer je  $j_1 = 1$  in  $j_i \in \{j_{i-1}, j_{i-1} + 1\}$  za vsak  $i = 2, \dots, n$ . Teža spusta je vsota števil, po katerih poteka spust (torej  $\sum_{i=1}^n a_{i,j_i}$ ).

S pomočjo dinamičnega programiranja opiši postopek, ki poišče najtežji spust v danem številskem trikotniku.

**Naloga 4.35.**

Vir: Izpit OR 4.9.2012

Antonio se preživlja z graviranjem na zlato. Ravnokar je dobil naročilo za graviranje dveh zelo umetelno izdelanih zaročnih prstanov. Če ne uspe izdelati prstanov v dogovorjenem času, bo moral plačati 1 600€ kazni. Prstane lahko naroči pri zlatarju, ki ga je izbral naročnik. Ta zlatar bo izdelavo vsakega prstana zaračunal po 100€, varovana dostava pa (ne glede na število prstanov) stane 200€. Ker prstani niso čisto homogeni, je verjetnost, da graviranje uspe, le 50%. Ves ostali material (neuspeli prstani, opilki ipd.) bo moral na koncu vrniti zlatarju (tako

je določeno v pogodbi). Ker je naročilo časovno omejeno, ima časa za največ 2 naročila pri zlatarju. Koliko prstanov naj vsakič naroči, da bodo pričakovani stroški čim manjši?

**Naloga 4.36.**

Vir: Kolokvij OR 17.4.2014

(pravična delitev)

Dana je množica naravnih števil  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ . Naš cilj je razdeliti to množico na dva dela  $S_1$  in  $S_2$  tako, da bo absolutna vrednost razlike med vsoto elementov v  $S_1$  in  $S_2$  čim manjša. S pomočjo dinamičnega programiranja opiši postopek, ki izračuna minimalno vrednost te razlike.

**Naloga 4.37.**

Vir: Izpit OR 28.8.2013

Za šestimi gorami poteka tekmovanje v plezanju na goro Lep Trikotnik. Vsak odsek te gore ima prirejeno težavnost od  $-4$  do  $4$ . Goro lahko ponazorimo s številskim trikotnikom

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & a_{1,1} & & \\
 & & & & & & \\
 & & & a_{2,1} & & a_{2,2} & \\
 & & a_{3,1} & & a_{3,2} & & a_{3,3} \\
 & \ddots & & \vdots & & \vdots & \ddots \\
 a_{n,1} & & a_{n,2} & & \cdots & & a_{n,n-1} & & a_{n,n}
 \end{array}$$

kjer so  $a_{i,j} \in \{-4, -3, \dots, 3, 4\}$  težavnosti odsekov. *Veljavna pot* v takem trikotniku je pot od vznožja do vrha, ki gre zmeraj desno navzgor ali levo navzgor – t.j., zaporedje  $(a_{n-i,j_i})_{i=0}^{n-1}$ , kjer je  $1 \leq j_i \leq n-i$  in  $j_i \in \{j_{i-1}-1, j_{i-1}\}$  za vsak  $i = 0, 1, \dots, n-1$ . *Teža* veljavne poti je vsota težavnosti odsekov, po katerih poteka pot (torej  $\sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i,j_i}$ ).

Na tekmovanje sta se med drugimi prijavila tudi gornika Marin in Mirko. V okviru svojih sposobnosti želita izbrati kar najtežjo pot do vrha. Oba zmoreta plezati po odsekih težavnosti 3 ali manj.

- Marin ni dovolj izkušen, da bi lahko plezal po odsekih težavnosti 4. Opiši, kako lahko najdemo najtežjo veljavno pot za Marina, oz. mu povemo, da s svojim znanjem ne more priti do vrha po veljavni poti!
- Gornik Mirko je izkušenejši od Marina. Odseke težavnosti 4 lahko prepleza, a ne more preplezati dveh zaporednih odsekov te težavnosti. Opiši, kako lahko najdemo najtežjo veljavno pot za Mirka, oz. mu povemo, da s svojim znanjem ne more priti do vrha po veljavni poti!

**Naloga 4.38.**

Vir: Izpit OR 5.6.2014

Dano je zaporedje števil  $c_1, c_2, \dots, c_n$ . Igralca  $A$  in  $B$  igrata igro, pri kateri  $A$  bodisi z začetka bodisi s konca danega zaporedja izbere eno (prej še neizbrano) število,  $B$  pa tako izbira dvakrat zapored. Igrata, dokler števil ne zmanjka. Zmaga igralec z največjo skupno vsoto izbranih števil. Denimo, da začne igralec  $A$ . S pomočjo dinamičnega programiranja določi maksimalni znesek, ki ga  $A$  lahko doseže, če tudi drugi igralec igra optimalno.

**Naloga 4.39.**

Vir: Izpit OR 24.6.2014

Kmet redi ovce, pri čemer se vsako leto njihovo število podvoji: če ima na začetku leta  $N$  ovac, jih ima ob koncu leta  $2N$ . Denimo, da ima kmet  $k_0$  ovac na začetku leta 0. Ob prehodu iz leta  $i - 1$  v leto  $i$  se vsakič odloči, koliko ovac bo prodal, pri čemer je profit enak  $p_i$  za vsako prodano ovco. Ob začetku leta  $n$  hoče imeti prodane vse ovce.

- (a) S pomočjo dinamičnega programiranja opiši algoritem, ki za dane podatke  $n, k_0$  in  $p_1, p_2, \dots, p_n$  izračuna maksimalni profit, ki ga lahko kmet doseže po  $n$  letih.
- (b) Reši nalogo za  $n = 3, k_0 = 2, p_1 = 100\text{€}, p_2 = 130\text{€}$  in  $p_3 = 120\text{€}$ .

**Naloga 4.40.**

Vir: Izpit OR 25.8.2014

Na voljo imamo  $w$  delavcev, ki jih želimo razporediti med  $N$  opravil. Dane imamo verjetnosti  $p_k(j)$ , da bo  $k$ -to opravilo uspešno opravljeno, če na njem dela  $j$  delavcev.

- (a) S pomočjo dinamičnega programiranja opiši algoritem, ki izračuna maksimalno verjetnost, da bo vseh  $N$  opravil uspešno opravljenih (opravila so med seboj neodvisna).
- (b) Izračunaj maksimalno verjetnost uspešno opravljenih opravil in določi število delavcev na posameznem opravilu za  $N = 3, w = 5$  in verjetnosti iz spodnje tabele:

$j$	0	1	2	3	4	5
$p_1(j)$	0	0.5	0.6	0.7	0.8	0.85
$p_2(j)$	0	0.4	0.7	0.8	0.9	0.95
$p_3(j)$	0	0.3	0.6	0.8	0.85	0.85



**Naloga 4.41.**

Vir: Izpit OR 24.6.2015

Tajni agent slovenske obveščevalne službe nam je prinesel besedilo v neznanem tujem jeziku, brez ločil in brez presledkov. V bistvu smo dobili en zelo dolg niz znakov (recimo dolžine  $n$ ). Ker v obveščevalni službi sumijo, da je besedilo v turkmensčini, so nam prinesli elektronski seznam veljavnih turkmenskih besed (ki so ga dobili iz skeniranja več turkmenskih spletnih strani ter iz slovarja njihovega knjižnega jezika). Ta seznam besed nam pomaga, da lahko hitro preverimo, ali je dana beseda veljavna.

Naša naloga je, da preverimo, ali lahko besedilo razdelimo na zaporedje veljavnih turkmenskih besed. Reši nalogo s pomočjo dinamičnega programiranja.

**Naloga 4.42.**

Vir: Izpit OR 28.8.2015

V podjetju Hierarhija so delavci razvrščeni hierarhično tako, da za vsaka dva delavca vemo, kdo je komu nadrejen. Če povemo še bolj natančno, delavce lahko postavimo v vrsto tako, da so za vsakega delavca levo od njega podrejeni, desno pa nadrejeni.

Recimo, da je v podjetju  $n$  delavcev, označimo jih z  $d_1, d_2, \dots, d_n$ . Predpostavimo tudi, da so že urejeni hierarhično, tj., delavec  $d_i$  je podrejen delavcem  $d_{i+1}, d_{i+2}, \dots, d_n$ . Vsak delavec se boji prvih nekaj delavcev, ki so mu podrejeni, da bi ga prehiteli v hierarhiji. Naj bo  $k_i \in \mathbb{N}_0$  stopnja ogroženosti delavca  $d_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ). Stopnja ogroženosti nam pove, koliko delavcev, ki so podrejeni delavcu  $d_i$ , se ta delavec "boji". Z drugimi besedami, delavec  $d_i$  se boji delavcev  $d_{i_1}, d_{i_2}, \dots, d_{i-k_i}$ .

Z dinamičnim programiranjem poišči tako največjo skupino delavcev, da se nihče v tej skupini ne bo bal drugega iz te skupine. Dovolj je zapisati rekurzivno enačbo z začetnimi pogoji. Kako lahko izvemo, kateri delavci so v tej (največji) skupini?

**Naloga 4.43.**

Vir: Izpit OR 12.5.2016

Dan je seznam števil  $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ . Želimo poiskati maksimalno vsoto takega podzaporedja v  $A$ , ki ne vsebuje dveh zaporednih členov seznama.

- (a) Napiši rekurzivne enačbe za reševanje opisanega problema.
- (b) S pomočjo dinamičnega programiranja napiši algoritem, ki rešuje dani problem. Kakšna je njegova časovna zahtevnost?

**Naloga 4.44.**

Vir: Izpit OR 24.5.2016

Dan je seznam pozitivnih celih števil  $S = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ , ki ga interpretiramo na naslednji način. Element  $a_i$  pomeni, da se lahko iz  $i$ -te pozicije v seznamu premaknemo na pozicije  $a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_{i+a_i}$ . Naj bo  $f(S)$  minimalno število korakov, ki so potrebni, da se iz elementa  $a_1$  premaknemo v element  $a_n$ . Na primer, če je  $S = [1, 3, 5, 8, 9, 2, 6, 7, 6, 8, 9]$ , potem je  $f(S) = 3$ , saj lahko opravimo skoke  $a_1 = 1 \rightarrow a_2 = 3 \rightarrow a_4 = 8 \rightarrow a_{11} = 9$ .

- Napiši rekurzivne enačbe za računanje funkcije  $f(S)$ .
- S pomočjo dinamičnega programiranja napiši algoritem, ki rešuje dani problem. Kakšna je njegova časovna zahtevnost?

**Naloga 4.45.**

Vir: Izpit OR 24.5.2016

Dana je matrika  $A$  dimenzij  $n \times n$ , katere elementi so 0 in 1. *Strnjena podmatrika*  $A'$  matrike  $A$  je matrika, določena z zaporednimi vrsticami in stolpci matrike  $A$ . *Velikost* matrike je število elementov v matriki. Velikost podmatrike dimenzij  $n_1 \times n_2$  je torej  $n_1 n_2$ . Naj bo  $N(A)$  največja velikost take podmatrike  $A'$  matrike  $A$ , da  $A'$  vsebuje samo enice. Na primer:

$$N\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = 4, \quad N\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = 3, \quad \text{in} \quad N\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = 2.$$

- Napiši rekurzivne enačbe za računanje  $N(A)$ .
- Napiši algoritem za računanje  $N(A)$  s časovno zahtevnostjo največ  $O(n^4)$ .

**Naloga 4.46.**

Vir: [5, §18, Example 5]

Podjetje ima na voljo 6000€ za investiranje. Na voljo so tri investicije, pri katerih je donosnost (v 1000€) enaka

$$\begin{aligned} r_1(d_1) &= \begin{cases} 7d_1 + 2, & \text{če } d_1 \geq 1, \text{ in} \\ 0 & \text{sicer;} \end{cases} \\ r_2(d_2) &= \begin{cases} 3d_2 + 7, & \text{če } d_2 \geq 1, \text{ in} \\ 0 & \text{sicer;} \end{cases} \\ r_3(d_3) &= \begin{cases} 4d_3 + 5, & \text{če } d_3 \geq 1, \text{ in} \\ 0 & \text{sicer;} \end{cases} \end{aligned} \quad \text{ozioroma}$$

kjer so  $d_1, d_2, d_3$  vložki v vsako investicijo v 1000€. Kako naj podjetje investira svoj denar, da bo zaslužek čim večji?

**Naloga 4.47.**

Vir: Kolokvij OR 19.4.2019

Gradimo avtocesto skozi puščavo in želimo zagotoviti, da bo v celoti pokrita z mobilnim signalom. Cesta je ravna in dolga  $n$  milj ( $n \in \mathbb{Z}$ ), na vsako miljo pa imamo možnost postaviti bazno postajo z dosegom 1 miljo. Cena postavitve bazne postaje na  $i$ -ti milji je podana s parametrom  $a_i$  ( $0 \leq i \leq n$ ). Predpostaviš lahko, da so vse cene pozitivne. Pri obstoječi infrastrukturi je pokrita le začetna točka avtoceste (tj., milja 0). Poiskati želimo torej čim cenejšo postavitev baznih postaj, da je vsaka točka avtoceste pokrita s signalom.

**Primer:** če postavimo postaji na milji 0 in 3, potem je interval  $(1, 2)$  nepokrit. Če pa npr. postajo namesto na milji 0 postavimo na milji 1, smo tako v celoti pokrili interval  $[0, 4]$ .

- (a) Zapiši rekurzivne enačbe za reševanje danega problema. Razloži, kaj predstavljajo spremenljivke, v kakšnem vrstnem redu jih računamo, ter kako dobimo optimalno rešitev.
- (b) Oцени časovno zahtevnost algoritma, ki sledi iz zgoraj zapisanih enačb.
- (c) S svojim algoritmom poišči optimalno postavitev postaj za  $n = 10$  ter

$$(a_i)_{i=0}^{10} = (4, 6, 1, 10, 14, 21, 15, 6, 10, 3, 2).$$

- (d) Denimo, da lahko postavimo tudi večje bazne postaje z dosegom 2 milji, pri čemer je cena postavitve take postaje na  $i$ -ti milji podana s parametrom  $b_i$  ( $0 \leq i \leq n$ ). Zapiši rekurzivne enačbe, ki bodo upoštevale tudi to možnost.
- (e) Problem iz točke (d) reši s podatki iz točke (c) in

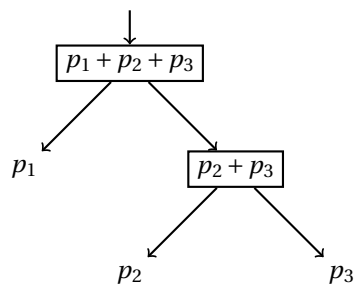
$$(b_i)_{i=0}^{10} = (10, 12, 3, 18, 24, 25, 20, 11, 16, 7, 4).$$

**Naloga 4.48.**

Vir: Izpit OR 19.6.2019

Za novo postavljeno obrtno cono želimo napeljati vodovodno omrežje. Imamo  $n$  delavnic v ravni vrsti, za  $i$ -to delavnico pa imamo podano porabo vode  $p_i$ . Iz javnega vodovoda bodo napeljali cev, preko katere bo priteklo dovolj vode za vseh  $n$  delavnic, mi pa želimo postaviti razdelilnike, ki bodo poskrbeli za ustrezno razdelitev vode med delavnice. Vsak razdelilnik ima eno vhodno cev in dve izhodni, vsaka od njiju pa bo pripeljala vodo do zaporednih delavnic (po potrebi preko nadaljnjih razdelilnikov). Cena postavitve razdelilnika je sorazmerna porabi delavnic, ki jim služi. Razdelilnike želimo postaviti tako, da bo skupna cena čim manjša.

**Primer:** na sliki 11 je prikazana možna postavitev razdelilnikov za tri delavnice. Odločimo se lahko, ali bomo najprej razdelili vodo delavnici 1 in delavnicama 2, 3, ali pa bomo vodo peljali naprej do delavnic 1, 2 in do delavnice 3 (ne moremo pa deliti na delavnici 1, 3 in delavnico 2). Če se odločimo za prvi primer, potem do delavnice 1 ne potrebujemo



Slika 11: Primer postavitve razdelilnikov za nalogo 4.48.

drugih razdelilnikov, še enega pa moramo postaviti, da razdelimo vodo do delavnic 2 in 3. Cena postavitve prvega razdelilnika je tako  $p_1 + p_2 + p_3$  (ne glede na odločitev), za drugega pa je v tem primeru cena  $p_2 + p_3$ .

- Naj bo  $c_i = \sum_{h=1}^i p_h$  ( $0 \leq i \leq n$ ). Zapiši rekurzivne enačbe za čim učinkovitejši izračun teh vrednosti.
- Zapiši rekurzivne enačbe za reševanje danega problema. Razloži, kaj predstavljajo spremenljivke, v kakšnem vrstnem redu jih računamo, ter kako dobimo optimalno rešitev. Kakšna je časovna zahtevnost algoritma?  
**Namig:** pomagaj si z vrednostmi  $c_i$  iz prejšnje točke.
- S pomočjo rekurzivnih enačb reši zgornji problem za  $n = 6$  in

$$(p_i)_{i=1}^6 = (4, 19, 17, 7, 5, 9).$$

## 1.5 Algoritmi na grafih

### Naloga 5.1.

Vir: Vaje OR 20.4.2016

Zasnui podatkovno strukturo za grafe, ki temelji na matrični predstavitvi. Podatkovna struktura naj ima sledeče metode:

- $\text{INIT}(G)$ : ustvarjanje praznega grafa
- $\text{ADDVERTEX}(G, u)$ : dodajanje novega vozlišča
- $\text{ADDEDGE}(G, u, v)$ : dodajanje nove povezave
- $\text{DELEDGE}(G, u, v)$ : brisanje povezave
- $\text{DELVERTEX}(G, u)$ : brisanje vozlišča
- $\text{ADJ}(G, u)$ : seznam sosedov danega vozlišča

Za vsako od naštetih metod podaj tudi njeno časovno zahtevnost v odvisnosti od števila vozlišč, števila povezav in stopenj vhodnih vozlišč. Oceni tudi prostorsko zahtevnost celotne strukture.

### Naloga 5.2.

Vir: Vaje OR 20.4.2016

Zasnui podatkovno strukturo za grafe, ki temelji na seznamih sosedov. Zapiši metode kot pri nalogi 5.1 ter oceni njihovo časovno zahtevnost in prostorsko zahtevnost celotne strukture.

### Naloga 5.3.

Vir: Vaje OR 20.4.2016

Kako moramo spremeniti strukturi iz nalog 5.1 in 5.2, da bosta predstavljali digrafe?

### Naloga 5.4.

Vir: Vaje OR 20.4.2016

Napiši algoritem, ki za vhodni graf  $G$  določi, ali ima trikotnik. Katero podatkovno strukturo za grafe boš uporabil?

### Naloga 5.5.

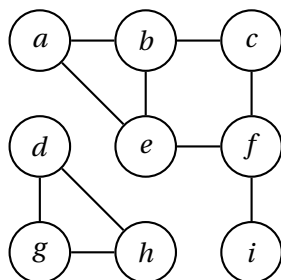
Vir: Vaje OR 4.5.2016

Dan je digraf  $D = (V, E)$ . Pravimo, da je vozlišče  $v \in V$  *zvezda* digrafa  $D$ , če ima izhodno povezavo do vseh ostalih vozlišč in v digrafu  $D$  ni drugih povezav. Napiši algoritem, ki poišče zvezdo danega digrafa, če ta obstaja.

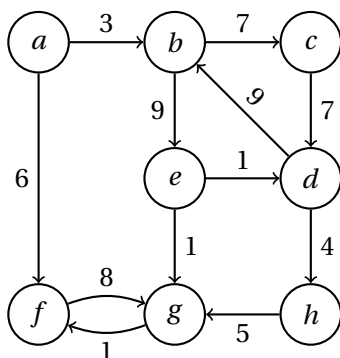
### Naloga 5.6.

Vir: Vaje OR 30.11.2016

Na grafu s slike 12 izvedi iskanje v širino. V primerih, ko imaš več enakovrednih izbir, upoštevaj abecedni vrstni red. Za vsako povezavo določi, ali se nahaja v drevesu iskanja v širino.



Slika 12: Graf za nalogi 5.6 in 5.12.



Slika 13: Graf za nalogo 5.8.

**Naloga 5.7.**

Vir: Vaje OR 4.5.2016

Zapiši algoritem, ki za vhodni graf  $G$  določi njegov premer.

**Naloga 5.8.**

Vir: Vaje OR 7.12.2016

S pomočjo Dijkstrovega algoritma določi razdalje od vozlišča  $a$  do ostalih vozlišč v grafu s slike 13.

**Naloga 5.9.**

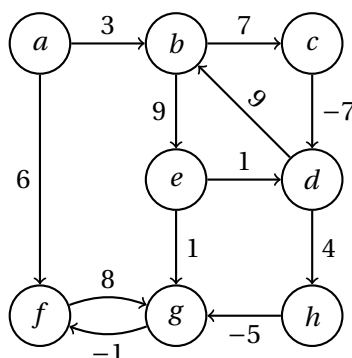
Vir: Vaje OR 4.5.2016

Naj bo  $G = (V, E)$  graf, za katerega so dolžine povezav določene s funkcijo  $\ell : E \rightarrow \mathbb{R}$  (tj., dolžine so lahko tudi negativne). Definirajmo še funkcijo  $\ell' : E \rightarrow \mathbb{R}$  tako, da velja  $\ell'(e) = \ell(e) - \min \{\ell(f) \mid f \in E\}$  (dolžine, določene z  $\ell'$ , so torej nenegativne). Dokaži ali ovrzi: drevo najkrajših poti, ki ga Dijkstrov algoritem ustvari ob vходу  $(G, \ell')$ , je tudi drevo najkrajših poti za graf  $G$  z dolžinami povezav, določenimi z  $\ell$ .

**Naloga 5.10.**

Vir: [2, Exercise 4.13]

Denimo, da imamo neusmerjen graf  $G = (V, E)$ , katerega vozlišča predstavljajo mesta, povezave pa predstavljajo ceste, ki jih povezujejo. Za vsako povezavo  $e \in E$  poznamo njeno dolžino  $\ell_e$  (v kilometrih).



Slika 14: Graf za nalogo 5.13.

Priti želimo iz mesta  $s$  v mesto  $t$ . V vsakem mestu je bencinska črpalka, ob cestah pa teh ni. Žal imamo na voljo samo star avto, ki lahko s polnim rezervoarjem prepelje le  $L$  kilometrov.

- Zapiši algoritem, ki v linearnem času poišče pot, ki jo lahko prevozimo z našim avtom, oziroma ugotovi, da ta ne obstaja.
- Izkaže se, da z našim avtom te poti ne moremo prevoziti, zato se odločimo za nakup novega. Zapiši algoritem, ki v času  $O(m \log n)$  določi najmanjše število prevoženih kilometrov, ki naj jih avto zmore z enim polnjenjem, da bo pot od  $s$  do  $t$  mogoča.

**Naloga 5.11.**

Vir: Vaje OR 7.12.2016

Zasnui različico Dijkstrovega algoritma za iskanje najkrajše poti med vozliščema  $s$  in  $t$  v grafu  $G$ , ki iskanje hkrati začne v vozliščih  $s$  in  $t$ . Kdaj naj se iskanje konča in kako naj se poišče rešitev?

**Naloga 5.12.**

Vir: [2, Exercise 3.1]

Na grafu s slike 12 izvedi iskanje v globino. V primerih, ko imaš več enakovrednih izbir, upoštevaj abecedni vrstni red. Za vsako povezavo določi, ali se nahaja v drevesu iskanja v globino.

**Naloga 5.13.**

Vir: Vaje OR 21.5.2018

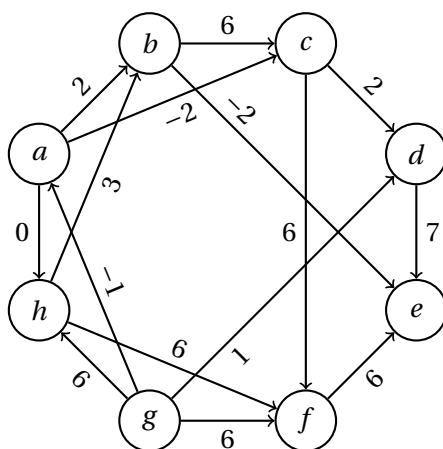
S pomočjo Bellman-Fordovega algoritma določi razdalje od vozlišča  $a$  do ostalih vozlišč v grafu s slike 14.

**Naloga 5.14.**

Vir: Vaje OR 7.12.2016

Dan je usmerjen acikličen graf s slike 15.

- Poišči topološko ureditev vozlišč zgornjega grafa.



Slika 15: Graf za nalogo 5.14.

(b) Poišči najkrajšo pot od vozlišča  $g$  do vozlišča  $e$ .

(c) Poišči najdaljšo pot od vozlišča  $g$  do vozlišča  $e$ .

**Naloga 5.15.**

Vir: Kolokvij OR 9.5.2013

Oviratlon je tekalna preizkušnja na 8 do 10 kilometrov dolgi poti z različnimi ovirami. Zanima nas, na koliko različnih načinov lahko pridemo od štarta do cilja. Dan je utežen usmerjen acikličen graf  $G$  ter vozlišči  $s$  in  $t$ , ki predstavljata štart oziroma cilj. Uteži na povezavah nam predstavljajo, na koliko načinov jih lahko prečkamo.

(a) Zapiši algoritem, ki reši dani problem. Kakšna je njegova časovna zahtevnost?

(b) Reši nalogo za graf s slike 16.

**Naloga 5.16.**

Vir: Vaje OR 14.12.2016

Zapiši celoštevilski linearni program, ki določi topološko urejanje grafa.

**Naloga 5.17.**

Vir: Vaje OR 14.12.2016

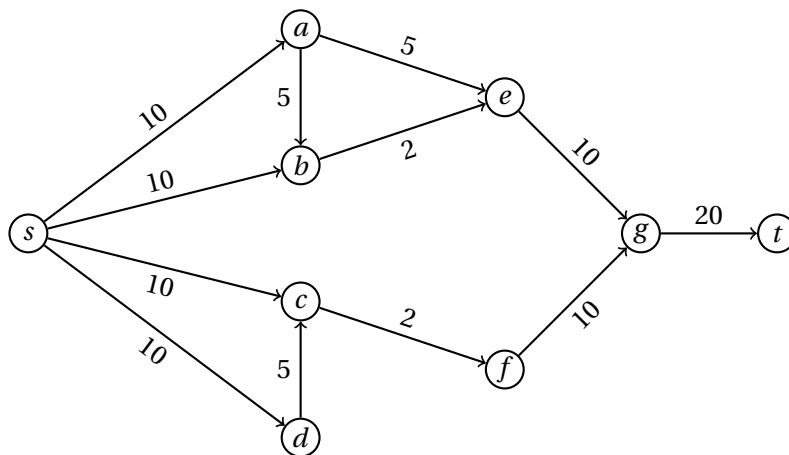
Zapiši algoritem, ki ugotovi, ali ima graf več kot eno topološko ureditev.

**Naloga 5.18.**

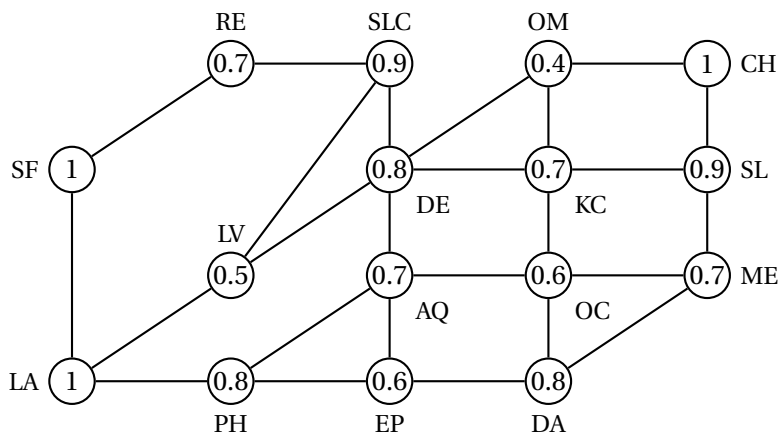
Vir: Izpit OR 15.12.2016

Lovec na zaklade se z bogatim ulovom vrača iz Kalifornije nazaj domov v Chicago, pri čemer mora seveda prečkati Divji zahod. Potoval bo s kočijo, pri čemer bo vsak dan potoval med dvema mestoma in nato prespal. Zaradi varnosti se bo držal samo državnih cest, ki so varne. Toda mesta, kjer bo prespal, niso povsem varna. Za vsako mesto pozna verjetnosti, da ga tam ne bodo oropali (te so med seboj neodvisne). Tako bi želel načrtovati najvarnejšo pot domov – torej pot z največjo verjetnostjo, da ga pri nobenem postanku ne bodo oropali.





Slika 16: Graf za nalogo 5.15.



Slika 17: Graf za nalogo 5.18.

- (a) Mesta in ceste med njimi lahko predstavimo z vozlišči in povezavami v ne-usmerjenem grafu  $G$ , verjetnosti pa kot teže vozlišč. Opiši, kako lahko za dani graf  $G$  z uteženimi vozlišči učinkovito poiščemo ustrezno pot med danima vozliščema  $s$  in  $t$  z uporabo variante Dijkstrovega algoritma, ter utemelji njegovo ustreznost. Lahko predpostaviš, da sta teži začetnega in končnega vozlišča enaki 1.
- (b) Reši problem za graf s slike 17, pri čemer naj se pot začne v LA in konča v CH. Zadostovalo bo, če verjetnosti računaš na 3 decimalke natančno.



**Naloga 5.21.**

Vir: Kolokvij OR 11.6.2018

Dan je povezan neusmerjen enostaven graf  $G = (V, E)$  (tj., brez zank in večkratnih povezav). *Prerezno vozlišče* v grafu  $G$  je tako vozlišče  $u \in V$ , da graf  $G - u$  (tj., graf  $G$  brez vozlišča  $u$  in povezav s krajiščem v  $u$ ) ni več povezan. Poiskati želimo seznam prereznih vozlišč grafa  $G$ .

Pri iskanju si bomo pomagali s preiskovanjem v globino. Ob prvem obisku vozlišča  $u$  s predhodnikom  $v$  se tako pokliče funkcija  $\text{PREVISIT}(u, v)$ , ob njegovem zadnjem obisku pa funkcija  $\text{POSTVISIT}(u, v)$ . Če je  $u$  koren preiskovalnega drevesa, potem ima  $v$  vrednost `NULL`. Predpostavi, da imaš v obeh funkcijah dostop do seznama *izhod*, kamor bo treba dodati najdena presečna vozlišča. Prav tako imata lahko obe funkciji dostop do drugih pomožnih spremenljivk.

Naj bo  $\ell_u$  globina vozlišča  $u$  v drevesu iskanja v globino (tj., razdalja od korena do  $u$  v drevesu iskanja v globino). Za vsako vozlišče  $u$  definiramo vrednost  $p_u$  kot najmanjšo globino vozlišč, ki so v grafu  $G$  sosedna vozlišču  $u$  ali njegovim potomcem v drevesu iskanja v globino.

- (a) Za graf na sliki 19 nariši drevo iskanja v globino (v njem označi tudi povratne povezave, npr. s črtkano črto) in določi njegova prerezna vozlišča. Upoštevaj abecedni vrstni red obiskovanja vozlišč. Za vsako vozlišče  $u$  določi še vrednosti  $\ell_u$  in  $p_u$ .

**Namig:** vrednosti  $p_u$  najprej določi za vozlišča z večjo globino.

- (b) Napiši rekurzivno formulo za vrednost  $p_u$ .

**Namig:** loči med sosedu  $v$  vozlišča  $u$  v grafu  $G$  (pišeš lahko  $u \sim v$ ) in njegovimi neposrednimi nasledniki  $w$  v preiskovalnem drevesu ( $u \rightarrow w$ ).

- (c) Natančno opiši funkcijo  $\text{PREVISIT}(u, v)$  (z besedami ali psevdokodo), ki poskrbi za izračun vrednosti  $\ell_u$ .

- (d) Natančno opiši funkcijo  $\text{POSTVISIT}(u, v)$  (z besedami ali psevdokodo), ki naj za vozlišče  $u$  izračuna vrednost  $p_u$  in ugotovi, ali je  $u$  prerezno vozlišče, in ga v tem primeru doda v *izhod*. Predpostavi, da imaš globine vozlišč že poračunane.

**Namig:** obravnavaj dve možnosti – ko je  $u$  koren drevesa, in ko  $u$  ni koren drevesa. Kako v vsakem od teh primerov ugotoviš, ali je  $u$  prerezno vozlišče?

- (e) Oцени časovno zahtevnost celotnega algoritma.

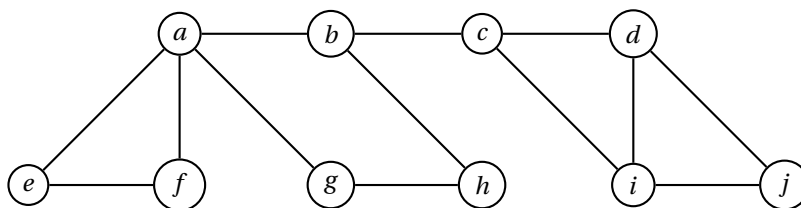
**Naloga 5.22.**

Vir: Izpit OR 5.7.2018

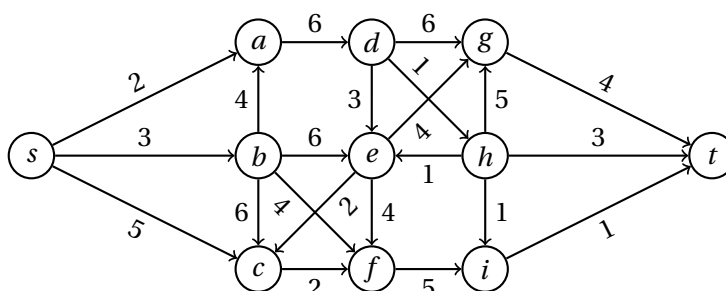
Dan je utežen usmerjen acikličen graf s slike 20.

- (a) Poišči topološko ureditev grafa s slike 20.

- (b) Poišči najcenejšo pot od vozlišča  $s$  do vozlišča  $t$  v grafu s slike 20.



Slika 19: Graf za nalogo 5.21.



Slika 20: Graf za nalogo 5.22.

- (c) Naj bo  $G = (V, E)$  usmerjen acikličen graf z nenegativno uteženimi povezavami ter  $s, t \in V$  njegovi vozlišči. Algoritem  $\mathcal{A}$  se po grafu  $G$  sprehaja po naslednjem pravilu: začne v vozlišču  $s$ , v vsakem koraku pa se iz vozlišča  $u$  premakne v njegovega izhodnega sosedo  $v$  z verjetnostjo

$$p_{uv} = \frac{\ell_{uv}}{\sum_{u \rightarrow w} \ell_{uw}},$$

kjer je  $\ell_{uv}$  teža povezave od  $u$  do  $v$ . Algoritem  $\mathcal{A}$  se ustavi, ko doseže vozlišče  $t$ .

Natančno opiši (z besedami ali psevdokodo), kako bi v času  $O(m)$  (kjer je  $m = |V| + |E|$ ) za vsako vozlišče  $u \in V$  določil verjetnost  $q_u$ , da algoritem  $\mathcal{A}$  obišče vozlišče  $u$ . Verjetnosti za graf s slike 20 ni potrebno računati.

### Naloga 5.23.

Vir: Izpit OR 28.8.2018

Odpravljamo se na pot, ki bo trajala več dni. Pripravili smo si seznam krajev in povezav med njimi, ki jih lahko prevozimo v enem dnevu. Za vsako povezavo poznamo stroške prevoza, prav tako pa za vsak kraj poznamo še stroške nočitev. Poiskati želimo čim cenejšo pot od začetne točke do destinacije (tj., skupna cena prevozov in nočitev naj bo čim manjša).

- (a) Predstavi problem v jeziku grafov in predlagaj čim bolj učinkovit algoritem za njegovo reševanje.

- (b) S pomočjo zgornjega algoritma poišči najcenejšo pot od LJ do BX v grafu s slike 18. Na povezavah so napisani stroški prevozov med krajema (veljajo za obe smeri), pri vozliščih pa stroški prenočitve v kraju.

**Naloga 5.24.**

Vir: Kolokvij OR 19.11.2009

Naj bo  $G$  graf z uteženimi povezavami, kjer so uteži nenegativne. Dokaži ali ovrzi naslednje trditve:

- (a) Če v grafu obstaja enolična najkrajša povezava, potem je ta povezava vsebovana v vsakem drevesu najkrajših poti.
- (b) Če v grafu obstaja enolična najkrajša povezava, potem je ta vključena v vsako minimalno vpeto drevo.
- (c) Naj bo  $e$  povezava v grafu  $G$ , ki je izmed povezav na nekem ciklu  $C$  najdaljša. Če iz  $G$  odstranimo povezavo  $e$ , dobimo graf  $G'$ . Pokaži, da je poljubno minimalno vpeto drevo v  $G'$  tudi minimalno vpeto drevo v  $G$ .

**Naloga 5.25.**

Vir: Kolokvij OR 19.11.2009

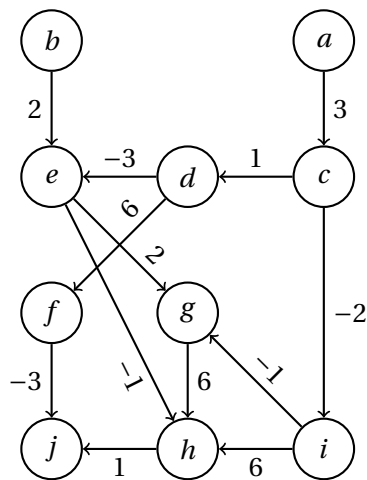
Zaradi naravnih nesreč so reševalci prejeli klice za  $n$  ponesrečenih oseb iz različnih lokacij, ki jih je potrebno prepeljati v  $k$  bolnišnic po danem cestnem omrežju. Ponesrečence lahko prepeljemo do bolnišnic, ki so oddaljene za največ pol ure urgentne vožnje (za dane ponesrečence imamo torej v splošnem več izbir za bolnišnice). Da pa bolnišnic ne bi preobremenili, zahtevamo, da v vsako bolnišnico pride največ  $\lceil \frac{n}{k} \rceil$  ponesrečencev. Zanima nas, ali je to izvedljivo. Modeliraj problem in ga prevedi na kakšen znan problem.

**Naloga 5.26.**

Vir: Kolokvij OR 19.11.2009

Janez je prekaljen poslovnež, ki hoče vedno zaslužiti kar največ. A Janez lahko naenkrat prevzame le en posel. Če se en posel začne med izvajanjem nekega drugega posla, novega posla ne more prevzeti. Poslovne priložnosti so predstavljene z grafom. Vozlišča predstavljajo stanja, v katerih Janez izbira med posli, izhodne povezave iz vsakega vozlišča pa predstavljajo posle, ki se jih lahko loti. Cene povezav predstavljajo dobiček pri poslu oziroma izgubo, če je cena negativna (včasih je potrebno sprejeti tudi kak posel, ki nosi izgubo, da se lahko prebijemo do dobičkonosnega posla ...). V vsakem stanju lahko Janez izbere katerega koli izmed poslov, ki pripadajo izhodnim povezavam. Tekom svoje poslovne kariere se lahko Janez v določenem stanju znajde tudi večkrat. Janez se trenutno nahaja v izbranem vozlišču grafa.

- (a) Za poljuben graf poslovnih priložnosti ugotovi, kakšen problem moraš na njem rešiti, da boš lahko pravilno svetoval Janezu, da bo uresničil svoje poslovne ambicije. Predlagaj algoritem, s katerim rešiš problem, in oceni časovno zahtevnost predlagane rešitve. Janeza med drugim še posebej zanima,



Slika 21: Graf za nalogo 5.26.

ali mu graf poslovnih priložnosti zagotavlja stalno pridobivanje poslov in dobičkonosno poslovanje za celo kariero.

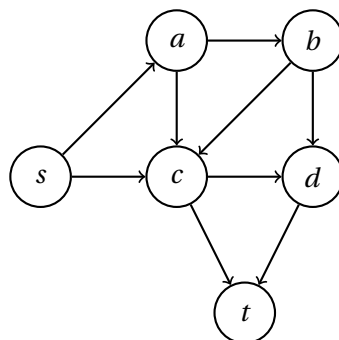
- (b) Za graf poslovnih priložnosti s slike 21 izberi ustrezen algoritem in ga izvedi ter izračunaj, koliko največ lahko zasluži Janez, če “vstopi v igro” v stanju  $a$  ali  $b$ . Upoštevaj lastnosti spodnjega grafa in navedi, kateri algoritem je to. Ali graf predstavlja poslovne priložnosti, ki bodo Janezu zagotovile trajno dobičkonosno poslovanje?

**Naloga 5.27.**

Vir: Izpit OR 5.2.2010

Odgovori na naslednje trditve.

- (a) Neusmerjeno omrežje  $G$  s pozitivnimi razdaljami na povezavah razdelimo na dve disjunktni množici vozlišč  $A$  in  $B$ , ki pokrivata vsa vozlišča. Naj bo  $e$  najkrajša povezava z enim krajiščem v  $A$  in drugim v  $B$ . Pokaži ali ovrzi:
- Vsaka najkrajša pot med kakim vozliščem iz  $A$  in kakim vozliščem iz  $B$  vsebuje povezavo  $e$ .
  - Obstaja najkrajša pot med nekima vozliščema v grafu  $G$ , ki vsebuje povezavo  $e$ .
  - Za vsak par vozlišč  $a \in A$  in  $b \in B$  obstaja najkrajša pot, ki vsebuje povezavo  $e$ .
- (b) Naj bo  $e$  povezava v grafu  $G$ , ki je izmed povezav na nekem ciklu  $C$  najdaljša. Če iz  $G$  odstranimo povezavo  $e$ , dobimo graf  $G'$ . Pokaži, da je poljubno minimalno vpeto drevo v  $G'$  tudi minimalno vpeto drevo v  $G$ .



Slika 22: Graf za nalogo 5.30.

**Naloga 5.28.**

Vir: Izpit OR 28.6.2010

Na univerzi na grškem otoku Lenoritas so zaradi gospodarske krize uvedli varčevalne ukrepe, ki vključujejo tudi nov režim plačevanja za izpite, ki jih pazijo asistenti. Asistentom sta ostali le dve boniteti: nadomestilo za izvedbo strnjene zaporedja izpitov ter nadomestilo za vsako "luknjo", daljšo od pol ure, med strnjenimi zaporedji izpitov. Ostale bonitete, kot so trinajsta in štirinajsta plača ter dodatek za točnost na delovnem mestu, je univerza pred kratkim ukinila. Tako se univerzi splača, da uporabi čim manj asistentov, ki pazijo strnjena zaporedja izpitov brez "lukenj". Za vsak dan so termini izpitov podani v naprej. Podatki za ponedeljek so (7, 8), (8, 9), (9, 10), (8, 12), (10, 13), (12, 15), (13, 15), (9, 12), (7, 10).

Ne glede na ekonomičnost se je dekan odločil, da bo v ponedeljek vodji sindikata asistentov dr. Dusanikusu Semolitakisu zagodel in mu dal kar najdaljše možno strnjeno zaporedje izpitov. Izberi ustrezen algoritem za izvedbo te naloge s kar se da najboljšo časovno zahtevnostjo (in jo tudi navedi), ter s pomočjo le-tega reši dekanov "problem" za ponedeljek.

*Nadaljevanje sledi v nalogi 8.3.*

**Naloga 5.29.**

Vir: Izpit OR 15.9.2010

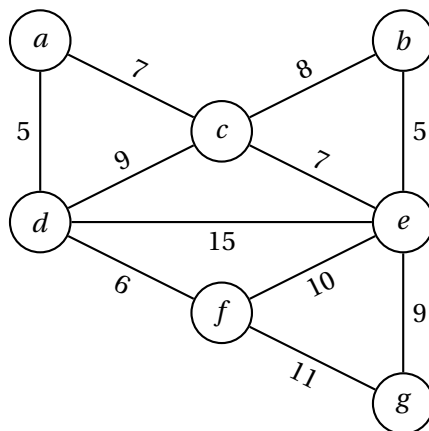
Z usmerjenim grafom je podano omrežje enosmernih prehodov med letališkimi terminali (glej npr. sliko 36). Načrtovalci niso čisto gotovi, ali je možno prehajati med vsemi terminali. Predlagaj algoritem, ki bi ugotovil, ali je vedno možen prehod med poljubnima izbranimi terminaloma. Kakšna je časovna zahtevnost predlaganega algoritma?

*Nadaljevanje sledi v nalogi 8.5.*

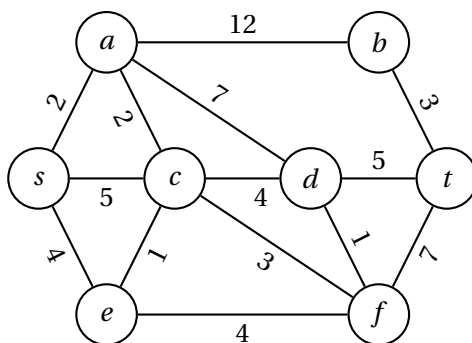
**Naloga 5.30.**

Vir: Kolokvij OR 25.11.2010

Napiši psevdokodo algoritma, ki v acikličnem usmerjenem grafu prešteje število poti od danega vozlišča  $s$  do vseh vozlišč grafa. Algoritem nato uporabi na grafu s slike 22.



Slika 23: Graf za nalogo 5.31.



Slika 24: Graf za nalogo 5.32.

**Naloga 5.31.**

Vir: Kolokvij OR 25.11.2010

Otoke z grafa na sliki 23 želimo povezati z mostovi, tako da bo skupna cena gradnje čim manjša. Cena gradnje mostu je milijon evrov na kilometer (razdalje v kilometrih so označene na sliki; na povezavah, ki niso narisane, zaradi tehničnih preprek ne moremo zgraditi mostov). Med katerimi otoki naj zgradimo mostove? Pri iskanju odgovora uporabi primeren algoritem in zapiši vse vmesne rezultate. Kakšen je odgovor, če je za vsak zgrajeni most potrebno dobiti potrdilo inšpektorjev, ti pa za vsak pregled zaračunajo milijon evrov?

**Naloga 5.32.**

Vir: Izpit OR 28.6.2011

Radi bi zgradili cesto med točkama  $s$  in  $t$ . Stroški vsakega možnega cestnega odseka so prikazani na grafu na sliki 24. Kje naj poteka cesta, da bodo stroški gradnje najmanjši možni?



**Naloga 5.33.**

Vir: Kolokvij OR 5.4.2012

Na kongresu se je zbralo  $n$  delegatov. Problem je v tem, da ne govorijo vsi skupnega jezika. Za vsakega delegata poznamo seznam jezikov, ki jih govori, skupaj s stopnjo znanja za vsak posamični jezik. Stopnja znanja je število med 1 in 100. Stopnja 1 pomeni, da oseba jezik popolnoma obvlada, stopnja 100 pa pomeni, da pozna zgolj nekaj osnovnih fraz. Recimo, da bi oseba  $A$  rada osebi  $B$  posredovala neko sporočilo. Če znata skupni jezik, se lahko pogovorita neposredno. Lahko pa oseba  $A$  pošlje sporočilo preko enega ali več posrednikov.

(a) Radi bi, da oseba  $B$  prejme sporočilo v najkrajšem možnem času (pri čemer lahko sporočilo potuje preko enega ali več posrednikov). Če osebi  $X$  in  $Y$  govorita skupen jezik ter sta stopnji obvladovanja tega jezika  $s_X$  za osebo  $X$  in  $s_Y$  za osebo  $Y$ , prenos sporočila traja  $\max\{s_X, s_Y\}$  časovnih enot. (Če dve osebi ne obvladata dovolj dobro skupnega jezika, si lahko pomagata z opisovanjem pojmov, mahanjem rok, risanjem ipd.) Formuliraj zgornjo nalogo kot problem iskanja najkrajše poti v ustreznem grafu.

(b) Dan je naslednji seznam delegatov:

Delegat	Jeziki
Frank	(angleščina, 5), (španščina, 10), (ruščina, 80)
Ivan	(ruščina, 5), (španščina, 20), (angleščina, 95)
Paul-Henri	(francoščina, 5), (nemščina, 85), (angleščina, 95)
Brigitte	(nizozemščina, 10), (nemščina, 15)
Andrej	(slovenščina, 5), (nemščina, 10), (latinščina, 90)
Wolfgang	(nemščina, 5), (angleščina, 90)
Jafar	(arabščina, 5), (ruščina, 10), (nizozemščina, 30), (francoščina, 80)

Kako lahko Frank najhitreje posreduje informacijo Wolfgangu?

**Naloga 5.34.**

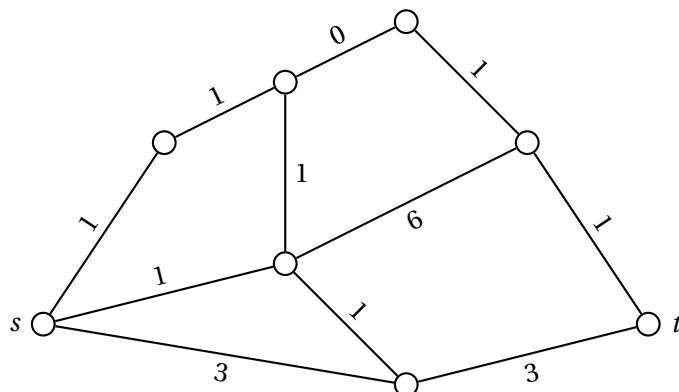
Vir: Izpit OR 9.7.2012

Čmrlja Gaber in Bor slovita kot najhitrejša letalca med čmrlji. Nedavno je Gaber izzval Bora na dirko čez travnik, kjer pot ni vnaprej določena. Bor je izziv sprejel in dogovorila sta se za pravili:

- določila sta točki  $s$  in  $t$ : začneta v  $s$ , in kdor prvi pride v  $t$ , zmaga;
- določila sta tudi graf poti  $G$ , po katerih lahko letita. Povezave v tem grafu sta določila tako, da je čas letenja (če ni rožic na povezavi) od enega do drugega krajišča za vse povezave enak (čmrlja sta enako hitra). Vozlišča v tem grafu pa sta določila tako, da na njih ne raste nobena rožica.

Znano je, da če katerikoli čmrlj prileti do kake rožice, se na njej zadrži enako dolgo, kot potrebuje za prelet ene povezave brez rožic. Rožice izven poti bosta čmrlja z lahkoto spregledala, saj gre za prestižno tekmo.

Tvoja naloga je, da Gabru pomagaš do zmage. Če torej poznaš graf  $G$ , vozlišči  $s$  in  $t$  ter število rožic na vsaki povezavi, katero pot naj izbere?



Slika 25: Graf za nalogo 5.34.

- Prevedi zgornji problem na kak znan problem in predlagaj znani algoritem, s katerim ga lahko rešiš.
- Reši problem za graf s slike 25, kjer oznake na povezavah povedo, koliko rožic se nahaja vzdolž povezave.

**Naloga 5.35.**

Vir: Izpit OR 4.9.2012

Žabec Rok in žabica Neli živita v mlaki, na kateri plavajo lokvanjevi listi. Na enem listu sedi Rok, na drugi strani mlake pa je list, na katerem počiva Neli. Rok bi rad po listih priskakljal k Neli. Z enim skokom lahko premosti razdaljo največ  $d$ . Čisto vseeno mu je, koliko skokov naredi in koliko je skupna preskakana razdalja. Ali jo lahko obišče? Lokvanjevi listi so podani kot seznam koordinat v  $\mathbb{R}^2$ . Listi so majhni v primerjavi z razdaljami med njimi, zato jih lahko obravnavas kot točke.

- Formuliraj zgornji problem kot problem na grafih in predlagaj algoritem, s katerim ga lahko rešiš.
- Reši problem za  $d = 3$  in lokvanje na koordinatah

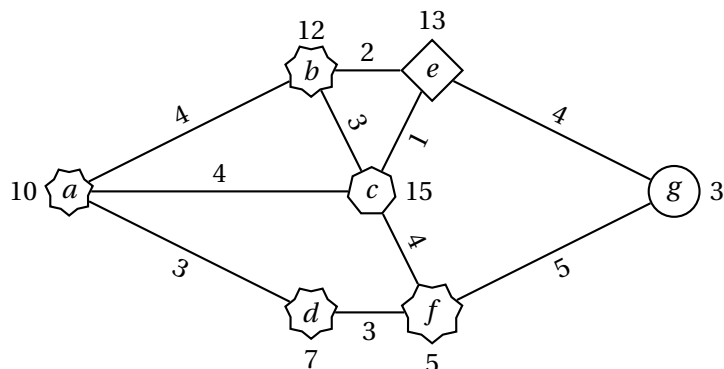
$(0, 0), (2, 1), (4, 1), (2, 4), (7, 4), (1, 6), (5, 6), (3, 8), (8, 8),$

pri čemer Rok sedi na lokvanju  $(0, 0)$ , Neli pa na  $(8, 8)$ .

**Naloga 5.36.**

Vir: Izpit OR 14.6.2013

Družina škrate Bolfenka živi v rovih nekje na Pohorju. Odločili so se, da v sobane napeljejo optični internet. Ker je družina velika, potrebujejo algoritem, s katerim bi določili, po katerih rovih naj poteka optični kabel in kje naj se optični kabel priključi na zunanje ("človeško") optično omrežje. Dan je povezan graf  $G$  s pozitivnimi utežmi na povezavah. Vozlišča grafa so sobane, kjer želimo imeti dostop



Slika 26: Graf za nalogo 5.36.

do optičnega interneta, povezave nam povedo, kje lahko potegnemo kabel, uteži na povezavah pa nam povedo ceno polaganja kabla (v guldih). Za vsako sobano je znano, kolikšna je cena priklopa na zunanje optično omrežje iz te sobane. Ker se škratje skrivajo, bodo naredili priklop na zunanji internet iz natanko ene sobane. Pomagaj škratom najti rove, po katerih naj napeljejo optični kabel, in sobano, iz katere naj se priključijo na zunanji internet, da bo vsaka sobana imela dostop do optičnega interneta in bo cena čim manjša!

- Opiši algoritem, ki učinkovito reši zgoraj opisani problem.
- Predlagani algoritem izvedi na grafu s slike 26. Številke pri vsakem vozlišču pomenijo ceno priklopa na zunanje omrežje iz sobane.

### Naloga 5.37.

Vir: Izpit OR 24.6.2013

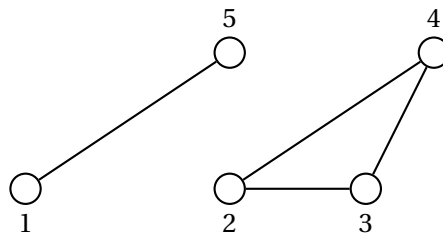
Profesionalni programer je vladi Republike Slovenije prodal algoritem PoG. A na pristojnem ministrstvu so pozabili, kdo je ta algoritem naročil, in zato ne vedo, kaj naj bi algoritem vračal. V prospektu so zasledili naslednjo psevdokodo algoritma:

**Vhod:** neusmerjen graf  $G = (V, E)$

```

for  $v \in V$  do
    obarvaj  $v$  sivo
end for
 $Q \leftarrow$  nova vrsta
 $s \leftarrow 0$ 
for  $v \in V$  do
    if  $v$  je siv then
         $s \leftarrow s + 1$ 
         $Q.append(v)$ 
        while  $\neg Q.isEmpty()$  do
             $w \leftarrow Q.pop()$ 
            for  $u \in \text{ADJ}(G, w)$  do
                if  $u$  je siv then

```



Slika 27: Graf za nalogo 5.37.

```

        Q.append(u)
        obarvaj u rumeno
    end if
end for
end while
end if
end for
return s

```

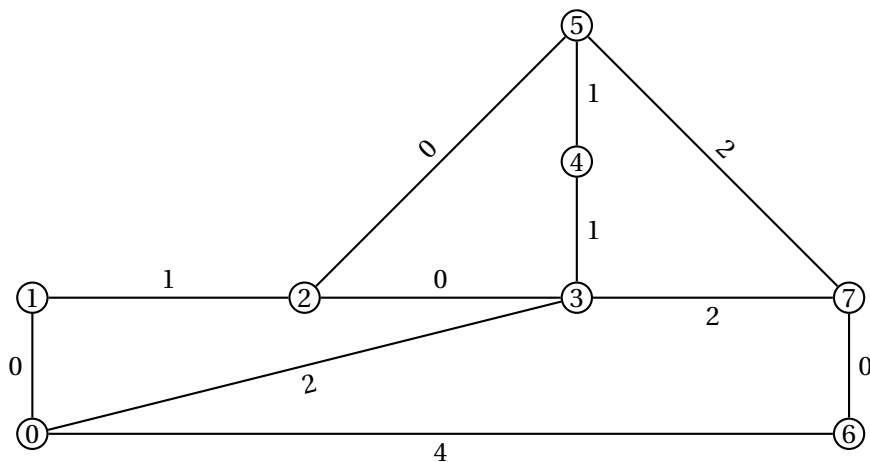
- Algoritem izvedi na grafu s slike 27, tj., nariši graf vsakič, ko se spremeni barva nekega vozlišča. Koliko je takrat vrednost števca?
- Kaj algoritem vrača? Odgovor utemelji.
- Kakšna je časovna zahtevnost algoritma? Odgovor utemelji.

**Naloga 5.38.**

Vir: Izpit OR 24.6.2013

Računalniško omrežje sestavlja  $n$  računalnikov. Predstavljeno je z neusmerjenim povezanim grafom  $G$ , ki ima na povezavah nenegativne uteži. Utež na povezavi  $i, j$  nam pove, koliko časa (v milisekundah) potrebuje informacija, da pride neposredno od računalnika  $i$  do računalnika  $j$ . Vsak računalnik potrebuje natanko 1 ms, da informacijo pošlje naprej. Naj bo  $T_{i,j}$  najkrajši čas, v katerem lahko računalnik  $j$  dobi informacijo od računalnika  $i$ . Ta čas vsebuje 1 ms, ki jo računalnik  $i$  porabi za pošiljanje informacije, in ne vsebuje 1 ms za računalnik  $j$ , saj slednjemu informacije ni več potrebno poslati naprej. Tudi naš računalnik je priključen na to omrežje – recimo, da je predstavljen z vozliščem 0. Zanima nas, kateri računalnik od nas najkasneje dobi informacije, tj., pri katerem  $j$  je dosežena maksimalna vrednost  $T_{0,j}$ , in kolikšen je ta maksimum.

- Reši nalogo na grafu s slike 28 tako, da bo postopek jassen in pravilen.
- Opiši algoritem časovne zahtevnosti največ  $O(n^2)$ , ki reši dani problem. Na vhod naj sprejme graf  $G$  in vozlišče 0.



Slika 28: Graf za nalogo 5.38.

**Naloga 5.39.**

Vir: Izpit OR 24.6.2013

Potujoči trgovec Marco načrtuje pot, na kateri bo imel kar največji dobiček.

Dan je usmerjen acikličen graf  $G = (V, E)$  z utežmi na povezavah. Uteži predstavljajo dobiček na povezavi (oz. izgubo, če so negativne). Marco bo začel svojo pot v enem izmed vozlišč grafa in se po usmerjenih povezavah odpravil do končnega vozlišča (začetek in konec nista znana, moramo ju še določiti). Pomagaj Marcu najti naboljšo pot (vključno z začetnim in končnim vozliščem)! Kakšen dobiček si lahko obeta?

- Reši nalogo za graf s slike 29 (razloži, kako si prišel do rezultata, oz. jasno označi vmesne rezultate).
- Opiši algoritem, ki reši dani problem, ter obravnavaj njegovo časovno zahtevnost.

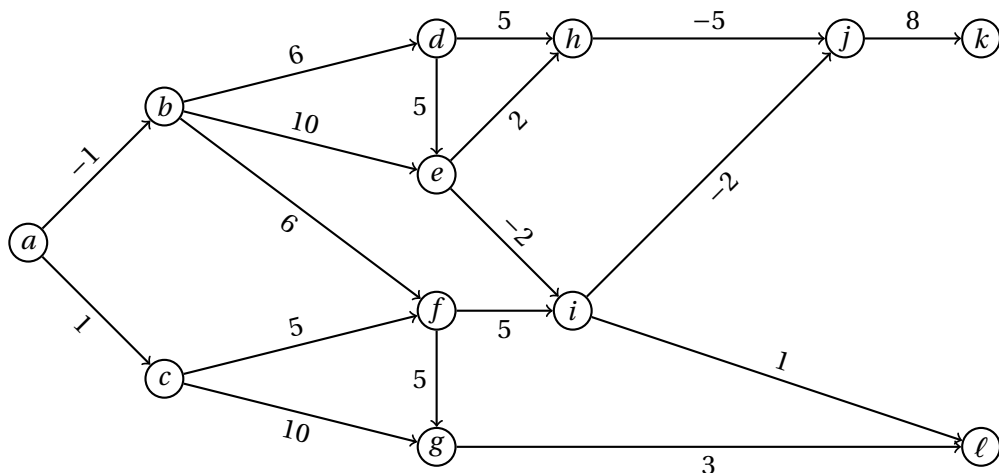
**Namig:** uporabi dinamično programiranje, da bo tvoj algoritem tekel v času  $O(|E| + |V|)$ .

**Naloga 5.40.**

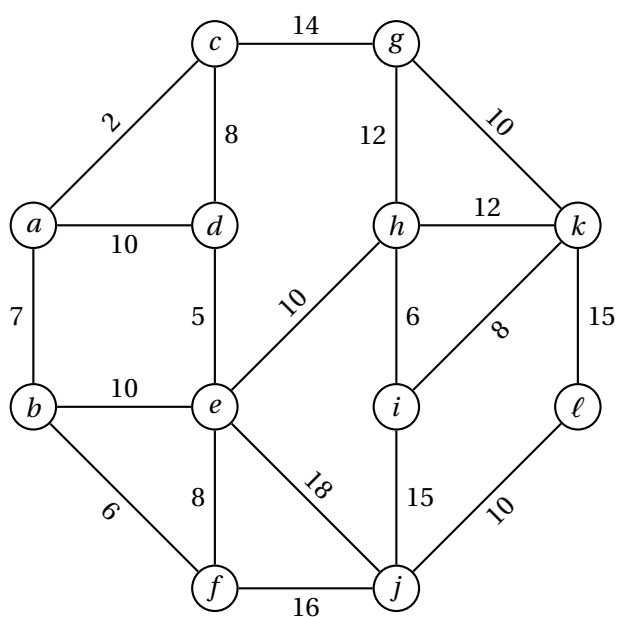
Vir: Izpit OR 5.6.2014

Dan je graf mest in cestnih povezav med njimi, prikazan na sliki 30. Predvidena je obnova nekaterih cest, pri čemer je strošek obnove sorazmeren z dolžino ceste.

- Določi ceste, ki jih je potrebno obnoviti, da bo strošek obnove čim manjši, ter da bo med poljubnima dvema mestoma obstajala povezava preko samih obnovljenih cest.
- Zaradi nižanja stroškov preuči še naslednjo možnost. Določi ceste, ki jih je potrebno obnoviti, da bo strošek obnove čim manjši, ter da bo med poljubnima dvema mestoma obstajala povezava preko samih obnovljenih cest in največ ene neobnovljene ceste.



Slika 29: Graf za nalogo 5.39.



Slika 30: Graf za nalogo 5.40.

**Naloga 5.41.**

Vir: Izpit OR 12.5.2016

Napiši algoritem, ki na vhod sprejme neusmerjen graf  $G = (V, E)$  in povezavo  $e \in E$  ter pove, ali obstaja cikel v  $G$ , ki vsebuje povezavo  $e$ .

**Naloga 5.42.**

Vir: Izpit OR 29.8.2017

Peter zaključuje študij na Fakulteti za alternativno znanost. Opravi je že vse obvezne predmete, za pristop k zaključnemu izpitu pa mora opraviti še nekaj izbirnih predmetov. To bi rad storil čim hitreje. V tabeli 2 so naštet izbirni

Oznaka	Predmet	Trajanje	Zadosten pogoj za
A	Alternativna zgodovina	5	I, J
B	Astrološki praktikum	7	D, G
C	Diskretna numerologija	9	B
D	Filozofija magije	4	Z
E	Kvantno pravo	8	B, H
F	Postmoderna ekonomija	4	E
G	Telepatija in telekineza	5	Z
H	Teorija antigravitacije	4	G
I	Teorije zarote	5	H
J	Ufologija II	10	K
K	Uvod v kriptozoologijo	6	Z
Z	Zaključni izpit	/	/

Tabela 2: Podatki za nalogo 5.42.

predmeti skupaj s trajanjem (v tednih, od pristopa do uspešnega opravljanja) in predmeti, h katerim lahko pristopi po uspešnem opravljanju. K predmetom A, C in F lahko pristopi že takoj, za pristop k ostalim predmetom pa zadostuje, če je opravljen eden od pogojev.

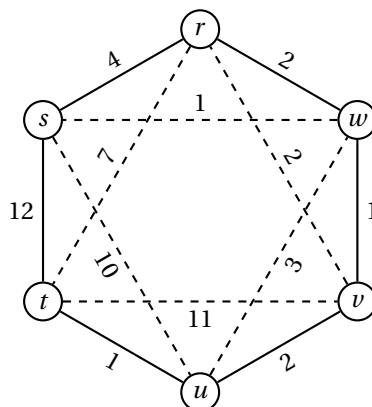
- Topološko uredi ustrezni graf in ga nariši.
- Katere predmete naj Peter opravi, da bo lahko čim prej pristopil k zaključnemu izpitu? Koliko časa bo za to potreboval? Natančno opiši postopek iskanja odgovora.

**Naloga 5.43.**

Vir: Kolokvij OR 3.6.2019

Dan je neusmerjen utežen graf  $G = (V, E)$  z nenegativnimi cenami povezav  $L_e$  ( $e \in E$ ). Naj bosta  $A$  in  $B$  disjunktni množici povezav, tako da velja  $E = A \cup B$ . Želimo najti najcenejšo *alternirajočo* pot med danima vozliščema  $s, t \in V$  – torej takšno, v kateri se povezave iz  $A$  in iz  $B$  izmenjujejo (ni pomembno, ali začnemo oziroma končamo s povezavo iz množice  $A$  ali  $B$ ). Posamezno vozlišče se lahko v alternirajoči poti pojavi tudi večkrat.

- Predlagaj čim učinkovitejši algoritem za reševanje danega problema. Kakšna je njegova časovna zahtevnost?  
**Namig:** grafu  $G$  priredi usmerjen graf  $G'$ , v katerem bodo vse poti od  $s$  do  $t$  ustrezale alternirajočim potem v  $G$ . Po potrebi lahko vozlišča tudi podvojiš.
- S svojim algoritmom poišči najcenejšo alternirajočo pot od  $s$  do  $t$  v grafu s slike 31. Povezave iz množice  $A$  so označene s polno, povezave iz množice  $B$  pa s črtkano črto. Iz rešitve naj bo jasno, kako poteka izvajanje algoritma.



Slika 31: Graf za nalogo 5.43(b).

**Naloga 5.44.**

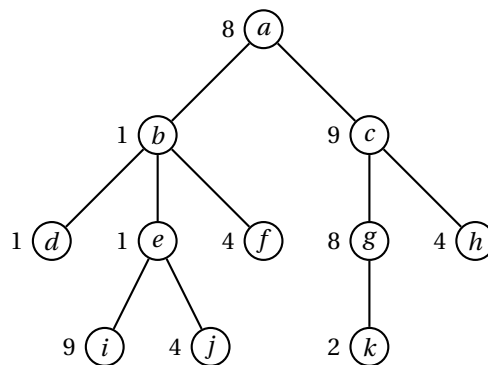
Vir: Kolokvij OR 3.6.2019

*Neodvisna množica* vozlišč grafa  $G = (V, E)$  je taka množica  $S \subseteq V$ , da sta poljubni vozlišči iz množice  $S$  nesosedni v  $G$ , torej  $uv \notin E$  za vsaka  $u, v \in S$ .

Dano je drevo  $T = (V, E)$  in uteži vozlišč  $c_v$  ( $v \in V$ ). V drevesu  $T$  želimo najti *najtežjo neodvisno množico* – torej tako množico vozlišč  $S \subseteq V$ , ki maksimizira vsoto njihovih uteži, torej vrednost  $\sum_{u \in S} c_u$ .

- Denimo, da je drevo  $T$  podano kot neusmerjen graf, predstavljen s seznamami sosedov. Razloži, kako lahko sestaviš slovar *pred*, ki za vsako vozlišče  $v \in V$  določa njegovega prednika, če za koren izbereš vozlišče  $r \in V$ . Koren  $r$  je lahko izbran poljubno, zanj pa velja  $\text{pred}[r] = \text{NULL}$ . Kako iz seznamov sosedov in slovarja *pred* ugotovimo, katera vozlišča so neposredni nasledniki danega vozlišča v drevesu?
- Napiši rekurzivne enačbe za reševanje problema najtežje neodvisne množice v drevesu  $T$ . Razloži, kaj predstavljajo spremenljivke, v kakšnem vrstnem redu jih računamo, ter kako dobimo optimalno rešitev. Predpostaviš lahko, da imaš poleg seznamov sosedov in uteži vozlišč drevesa  $T$  na voljo tudi slovar *pred* kot v točki (a).  
**Namig:** za vsako vozlišče uporabi dve spremenljivki – eno za primer, ko je vozlišče izbrano, in eno za primer, ko ni.
- Natančno opiši postopek (z besedami ali psevdokodo), ki iz zgoraj izračunanih vrednosti sestavi najtežjo neodvisno množico v  $T$ .
- Oceni časovno zahtevnost algoritma iz točk (b) in (c).
- S svojim algoritmom poišči najtežjo neodvisno množico na drevesu s slike 32. Iz rešitve naj bo jasno, kako poteka izvajanje algoritma.





Slika 32: Drevo za nalogo 5.44(e).

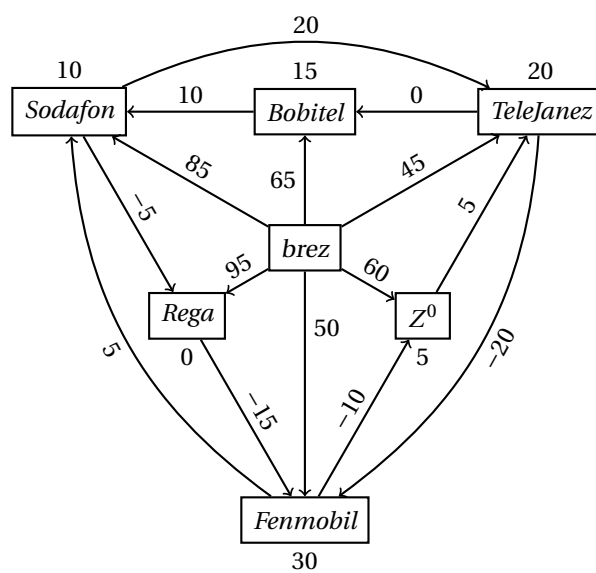
**Naloga 5.45.**

Vir: Izpit OR 19.6.2019

Trg mobilne telefonije je zelo konkurenčen, zato si mobilni operaterji na vse kriptje prizadevajo pridobiti stranke svojih konkurentov. Tako zelo, da lahko v nekaterih primerih stranka s preходом h konkurentu celo zasluži. Da pa vendarle operaterji sami ne bi imeli prevelike izgube, stranke zadržujejo z različnimi vezavami, poleg tega pa novim strankam (tistim, ki še niso imele mobilnega telefona) krepko zaračunajo priklop.

Stanje trga zberemo v utežen usmerjen graf  $G = (V, E)$ , kjer vozlišča predstavljajo operaterje, utež  $L_{uv}$  povezave  $uv \in E$  pomeni strošek prehoda od operaterja  $u$  k operaterju  $v$ , utež  $c_v$  vozlišča  $v \in V$  pa pomeni strošek, ki nastane tekom trajanja vezave pri operaterju  $v$  (ko preidemo k operaterju  $v$ , imamo torej  $c_v$  dodatnih stroškov). Če povezave  $uv$  ni v grafu, potem neposreden prehod od  $u$  k  $v$  ni mogoč. Uteži vozlišč so nenegativne, uteži povezav pa so lahko tudi negativne (tj., če ob prehodu zaslužimo). Poiskati želimo najcenejše zaporedje prehodov med operaterji (tj., tako, pri katerem imamo najmanj stroškov), če začnemo pri operaterju  $s$  in končamo pri operaterju  $t$ .

- Predlagaj čim bolj učinkovit algoritem za reševanje zgornjega problema. Kakšna je njegova časovna zahtevnost? Lahko predpostaviš, da velja  $c_s = c_t = 0$ .
- Denimo, da trenutno še nimamo mobilnega telefona. Naši izračuni kažejo, da je dolgoročno najugodnejša ponudba operaterja *Rega*, tako da bi radi s čim manjšimi stroški postali njihov naročnik. S pomočjo algoritma iz točke (a) poišči ustrezno zaporedje prehodov na grafu s slike 33.



Slika 33: Graf za nalogo 5.45.

faza	opis	trajanje	pogoj	min. trajanje	cena za dan manj
<i>a</i>	gradnja kleti	10 dni	/	7 dni	200
<i>b</i>	gradnja pritličja	6 dni	<i>a</i>	5 dni	100
<i>c</i>	gradnja prvega nadstropja	7 dni	<i>b, f</i>	5 dni	150
<i>d</i>	gradnja strehe	8 dni	<i>c, e</i>	6 dni	160
<i>e</i>	gradnja desnega podpornega stebra	13 dni	<i>a</i>	9 dni	250
<i>f</i>	gradnja glavnega podpornega stebra	14 dni	/	11 dni	240
<i>g</i>	gradnja baročnega stolpa pred hišo	30 dni	/	25 dni	300

Tabela 3: Podatki za nalogi 6.1 (prvi štirje stolpci) in 6.2.

## 1.6 CPM/PERT

### Naloga 6.1.

Vir: Kolokvij OR 9.5.2013

Gradbinec in samooklicani arhitekt Brezzobec se je odločil, da bo postavil zelo posebno hišo. Gradnja bo imela sedem glavnih faz, ki so opisane v tabeli 3.

- Kdaj je lahko hiša najhitreje zgrajena? Katere faze so kritične?
- Koliko je kritičnih poti in katere so?
- Katero opravilo je najmanj kritično? Najmanj kritično je opravilo, katerega trajanje lahko največ podaljšamo, ne da bi vplivali na trajanje gradnje.
- Brezzobčev brat je ponudil pomoč pri največ eni fazi gradnje. Slovi po tem, da pri fazi, pri kateri pomaga, zmanjša čas izvajanja za 10%. Pri kateri fazi naj pomaga, da bo čas gradnje čim krajši?

### Naloga 6.2.

Vir: Vaje OR 28.5.2018

Brezzobčev bratranec ima podjetje, ki lahko pomaga pri gradnji, vendar za vsak dan krajšanja posamezne faze zahteva ustrezno plačilo (glej zadnja dva stolpca tabele 3). Brezzobca zanima način, kako bi s čim manjšimi stroški čas gradnje zmanjšal na 27 dni. Zapiši linearni program za ta problem.

### Naloga 6.3.

Vir: Izpit OR 19.5.2015

Dinamika priprave dveh palačink z dvema kuharjema je opisana v tabeli 4.

- Topološko uredi ustrezni graf in ga nariši.
- Določi kritična opravila in kritično pot ter trajanje priprave.
- Katero opravilo je najmanj kritično?

	aktivnost	trajanje	predhodna opravila
<i>a</i>	nakup moke, jajc in mleka	5 min	<i>c</i>
<i>b</i>	rezanje sira	3 min	/
<i>c</i>	vožnja do trgovine	5 min	/
<i>d</i>	čiščenje mešalnika	2 min	<i>e</i>
<i>e</i>	mešanje sestavin	5 min	<i>a</i>
<i>f</i>	pečenje prve palačinke	2 min	<i>e</i>
<i>g</i>	mazanje prve palačinke z marmelado	1 min	<i>f, j</i>
<i>h</i>	pečenje palačinke (s sirom)	3 min	<i>b, f</i>
<i>i</i>	pomivanje posode	8 min	<i>g, h</i>
<i>j</i>	odpiranje marmelade	1 min	/

Tabela 4: Podatki za nalogi 6.3 in 6.4.

naloga	najkrajše trajanje	najbolj verjetno trajanje	najdaljše trajanje	predhodna opravila
<i>a</i>	3 tedni	4 tedni	5 tednov	/
<i>b</i>	2 tedna	2 tedna	2 tedna	<i>a</i>
<i>c</i>	3 tedni	5 tednov	6 tednov	<i>b</i>
<i>d</i>	1 teden	3 tedni	5 tednov	<i>a</i>
<i>e</i>	2 tedna	3 tedni	5 tednov	<i>b, d</i>

Tabela 5: Podatki za nalogo 6.5.

#### Naloga 6.4.

Vir: Vaje OR 14.12.2016

Določi razpored opravil iz naloge 6.3, pri čemer en kuhar prevzame opravila na kritični poti, drugi pa naj čim kasneje začne in čim prej konča.

#### Naloga 6.5.

Vir: [3, Problem 10.4-4]

Pri gradbenem podjetju razmišljajo, da bi se prijavili na razpis za prenovno avtocestnega viadukta. Identificirali so pet nalog, ki so opisane v tabeli 5.

Če bodo izbrani za izvedbo del, si obetajo zaslužek v višini 250 000 €. Če del ne bodo končali v roku 11 tednov, bodo morali plačati pogodbeno kazen v višini 500 000 €.

- Za vsako opravilo določi pričakovano trajanje in varianco.
- Topološko uredi ustrezni graf in ga nariši.
- Določi pričakovano kritično pot ter trajanje izvedbe.
- Oceni verjetnost, da se bo projekt zaključil v 11 tednih. Naj se podjetje prijavi na razpis?

opravilo	opis	trajanje	pogoji
<i>a</i>	natančna opredelitev funkcionalnosti	15 dni	<i>l</i>
<i>b</i>	programiranje uporabniškega vmesnika	40 dni	<i>k</i>
<i>c</i>	programiranje skrbniškega vmesnika	25 dni	<i>a, m</i>
<i>d</i>	programiranje strežniškega dela	30 dni	<i>a, m</i>
<i>e</i>	integracija uporabniškega vmesnika s strežnikom	20 dni	<i>b, d</i>
<i>f</i>	alfa testiranje	20 dni	<i>c, e</i>
<i>g</i>	beta testiranje	30 dni	<i>f, h</i>
<i>h</i>	pridobivanje testnih uporabnikov	45 dni	<i>a</i>
<i>i</i>	vnos zadnjih popravkov	10 dni	<i>g</i>
<i>j</i>	izdelava uporabniške dokumentacije	35 dni	<i>b</i>
<i>k</i>	dizajniranje uporabniškega vmesnika	15 dni	<i>a</i>
<i>ℓ</i>	nabava računalniške opreme	20 dni	<i>l</i>
<i>m</i>	postavitev strežnikov	10 dni	<i>ℓ</i>

Tabela 6: Podatki za nalogo 6.6.

**Naloga 6.6.**

Vir: Izpit OR 31.1.2017

Izdelati želimo terminski plan za izdelavo spletne aplikacije. V tabeli 6 so zbrana opravila pri izdelavi.

- Topološko uredi ustrezni graf in ga nariši.
- Določi kritična opravila in kritično pot ter čas izdelave.
- Katero opravilo je najmanj kritično? Najmanj kritično jo opravilo, katerega trajanje lahko najbolj podaljšamo, ne da bi vplivali na trajanje izdelave.

**Naloga 6.7.**

Vir: Kolokvij OR 11.6.2018

Izdelati želimo terminski plan za organizacijo konference. V tabeli 7 so zbrana opravila pri organizaciji.

- Topološko uredi ustrezni graf in ga nariši. Za trajanja opravil vzemi pričakovana trajanja po modelu PERT.
- Določi pričakovano kritično pot in čas izdelave.
- Katero opravilo je (ob zgornjih predpostavkah) najmanj kritično? Najmanj kritično je opravilo, katerega trajanje lahko najbolj podaljšamo, ne da bi vplivali na celotno trajanje izvedbe.
- Določi variance trajanj opravil in oceni verjetnost, da bo izvedba trajala manj kot 55 dni.

	Opravo	Pogoji	Minimalno trajanje	Najbolj verjetno trajanje	Maksimalno trajanje
A	Izbira lokacije	/	10 dni	13 dni	22 dni
B	Rezervacija sob za goste	F	13 dni	22 dni	25 dni
C	Dogovarjanje za cene hotelskih sob	A	3 dni	6 dni	9 dni
D	Naročilo hrane in pijače	A	6 dni	15 dni	21 dni
E	Priprava letakov	C, J	5 dni	8 dni	11 dni
F	Pošiljanje letakov	E	4 dni	4 dni	4 dni
G	Priprava zbornika s povzetki	D, J	22 dni	28 dni	31 dni
H	Določitev glavnega govorca	/	5 dni	8 dni	14 dni
I	Planiranje poti za glavnega govorca	A, H	11 dni	14 dni	17 dni
J	Določitev ostalih govorcev	H	12 dni	15 dni	21 dni
K	Planiranje poti za ostale govorce	A, J	9 dni	12 dni	18 dni

Tabela 7: Podatki za nalogo 6.7.

opravilo	opis	trajanje	pogoji	najmanjše trajanje	cena za dan manj
A	izgradnja nosu	40 dni	-	36 dni	1 000
B	izgradnja trupa s krili	50 dni	-	48 dni	1 500
C	izgradnja repa	35 dni	-	31 dni	800
D	vgraditev pilotske kabine	30 dni	A	28 dni	1 200
E	opremljanje potniške kabine	18 dni	F, G	16 dni	500
F	povezovanje nosu s trupom	10 dni	A, B	9 dni	1 100
G	povezovanje repa s trupom	12 dni	B, C	10 dni	1 300
H	vgraditev motorjev	20 dni	B	18 dni	1 400

Tabela 8: Podatki za nalogo 6.8.

### Naloga 6.8.

Vir: Izpit OR 28.8.2018

Pri izdelavi letala imamo faze, opisane v tabeli 8.

- S pomočjo topološke ureditve ustreznega grafa določi kritična opravila in čas izdelave. Uporabi podatke iz stolpca "trajanje".
- Katero opravilo je najmanj kritično? Najmanj kritično jo opravilo, katerega trajanje lahko najbolj podaljšamo, ne da bi vplivali na trajanje izdelave.
- Naročnik bi rad, da letalo izdelamo v 75 dneh. Posamezna opravila lahko skrajšamo tako, da zanje zadolžimo več delavcev. Seveda prinese tako krajšanje dodatne stroške, poleg tega pa za vsako opravilo poznamo najmanjše možno trajanje (glej zadnja dva stolpca v zgornji tabeli). Zapiši linearni program, s katerim modeliramo iskanje razporeda opravil, ki nam prinese čim manjše stroške. Linearne programa ne rešuj.

	aktivnost	trajanje	predhodna opravila
A	postavitev stebra 1	4 dni	/
B	postavitev stebra 2	3 dni	D
C	postavitev stebra 3	5 dni	H
D	postavitev stebra 4	6 dni	A, E
E	postavitev stene 1	4 dni	A, G
F	postavitev stene 2	2 dni	H, I
G	postavitev stene 3	2 dni	/
H	postavitev stene 4	1 dan	/
I	postavitev stene 5	6 dni	C
J	betoniranje plošče	2 dni	C, E, F

Tabela 9: Podatki za nalogo 6.9.

**Naloga 6.9.**

Vir: Izpit OR 28.8.2015

Gradimo objekt in želimo narediti opravila iz tabele 9, za katera vemo tudi, katera druga opravila morajo biti predhodno izvedena.

- Opravila A–J določajo usmerjen acikličen graf, kjer so povezave določene s predhodnimi opravili. Nariši ta graf in ga topološko uredi (lahko ga že narišeš topološko urejenega).
- Določi kritična opravila, kritično pot in trajanje gradnje.
- Katero opravilo je najmanj kritično?

**Naloga 6.10.**

Vir: Kolokvij OR 3.6.2019

Izdelati želimo terminski plan za izgradnjo manjšega stanovanjskega naselja. V tabeli 10 so zbrana opravila pri gradnji.

- Topološko uredi ustrezni graf in ga nariši. Za trajanja opravil vzemi pričakovana trajanja po modelu PERT.
- Določi pričakovano kritično pot in čas izdelave.
- Katero opravilo je (ob zgornjih predpostavkah) najmanj kritično? Najmanj kritično je opravilo, katerega trajanje lahko najbolj podaljšamo, ne da bi vplivali na celotno trajanje izvedbe.
- Določi variance trajanj opravil in oceni verjetnost, da bo gradnja trajala manj kot 180 dni.

	Opravo	Pogoji	Minimalno trajanje	Najbolj verjetno trajanje	Maksimalno trajanje
<i>a</i>	pridobitev gradbenega dovoljenja	/	14 dni	14 dni	23 dni
<i>b</i>	pridobitev uporabnega dovoljenja	<i>f, g</i>	18 dni	21 dni	30 dni
<i>c</i>	izgradnja komunalne infrastrukture	<i>a</i>	40 dni	45 dni	59 dni
<i>d</i>	postavitev temeljev	<i>a, i</i>	28 dni	37 dni	46 dni
<i>e</i>	izgradnja podpornega zidu	<i>a</i>	7 dni	8 dni	12 dni
<i>f</i>	izgradnja severne stolpnice	<i>c, d</i>	63 dni	78 dni	99 dni
<i>g</i>	izgradnja južne stolpnice	<i>d, e</i>	75 dni	84 dni	99 dni
<i>h</i>	izgradnja otroškega igrišča	<i>a, i</i>	20 dni	29 dni	29 dni
<i>i</i>	odstranitev rastja	/	19 dni	22 dni	25 dni

Tabela 10: Podatki za nalogo 6.10.

opravilo	opis	trajanje	pogoji	najmanjše trajanje	cena za dan manj
<i>a</i>	izgradnja južnega priključka	45 dni	/	40 dni	300
<i>b</i>	izgradnja severnega priključka	20 dni	/	15 dni	200
<i>c</i>	vrtanje tunelske cevi	90 dni	<i>a, b</i>	70 dni	700
<i>d</i>	postavitev zahodnega stebra viadukta	25 dni	<i>a</i>	22 dni	1100
<i>e</i>	postavitev vzhodnega stebra viadukta	30 dni	<i>c</i>	26 dni	1500
<i>f</i>	gradnja cestišča na viaduktu	35 dni	<i>d, e</i>	28 dni	900
<i>g</i>	ureditev napeljave v tunelu	80 dni	<i>c</i>	65 dni	400
<i>h</i>	asfaltiranje viadukta	10 dni	<i>f</i>	8 dni	150

Tabela 11: Podatki za nalogo 6.11.

### Naloga 6.11.

Vir: Izpit OR 19.6.2019

Gradbeno podjetje gradi avtocestni odsek na težavnem terenu. Identificirali so faze gradnje, ki so zbrane v tabeli 11.

- S pomočjo topološke ureditve ustreznega grafa določi kritična opravila in čas izdelave. Uporabi podatke iz stolpca "trajanje".
- Katero opravilo je najmanj kritično? Najmanj kritično jo opravilo, katerega trajanje lahko najbolj podaljšamo, ne da bi vplivali na trajanje izdelave.
- Naročnik bi rad, da podjetje odsek zgradi v 200 dneh. Posamezna opravila lahko skrajšajo tako, da zanje zadolžijo več delavcev. Seveda prinese tako krajšanje dodatne stroške, poleg tega pa za vsako opravilo poznamo najmanjše možno trajanje (glej zadnja dva stolpca v tabeli 11). Zapiši linearni program, s katerim modeliramo iskanje razporeda opravil, ki nam prinese čim manjše stroške. Linearne programa ne rešuj.



## 1.7 Upravljanje zalog

### Naloga 7.1.

Vir: [3, Problem 19.3-2]

V trgovini vsak teden prodajo 600 škatel toaletnega papirja. Vsako naročilo stane 25€, za posamezno škatlo pa trgovina plača 3€. Cena skladiščenja posamezne škatle je 0.05€ na teden.

- (a) Denimo, da primanjkljaj ni dovoljen. Kako pogosto naj trgovina naroča toaletni papir? Kako velika naj bodo naročila?
- (b) Kaj pa, če dovolimo primanjkljaj, ki nas stane 2€ na teden za vsako škatlo?

### Naloga 7.2.

Vir: [1, Naloga 10.7]

Tovarna Mitsuzuki načrtuje, da bo naslednje leto izdelala 10 000 stereo televizorjev. Odločijo se, da zvočnikov ne bodo izdelovali sami, ampak jih bodo (po dva za vsak televizor) naročili pri ponudniku najkvalitetnejših zvočnikov, ki je predložil naslednji cenik:

število zvočnikov v enem naročilu	cena zvočnika
1 – 1 999	150€
2 000 – 4 999	135€
5 000 – 7 999	125€
8 000 – 19 999	120€
20 000 ali več	115€

Poleg tega naročilo pošiljke stane Mitsuzuki 500€, letni stroški skladiščenja vsakega zvočnika pa znašajo 20% njegove cene. Koliko zvočnikov naj vsakič naročijo in kakšni so skupni stroški naročil za naslednje leto?

### Naloga 7.3.

Vir: [5, §15, Example 5]

Tovarna avtomobilov za svoje potrebe izdeluje akumulatorje. Vsako leto proizvedejo 10 000 avtomobilov, izdelajo pa lahko 25 000 akumulatorjev letno. Stroški zagona proizvodnje so 200€, stroški zaloge pa 0.25€ letno za vsak akumulator. Primanjkljaja ne dovolimo. Kolikokrat na leto naj zaženejo proizvodnjo akumulatorjev? Koliko časa naj traja proizvodnja? Koliko akumulatorjev naj takrat izdelajo? Kako veliko skladišče potrebujejo?

### Naloga 7.4.

Vir: Vaje OR 6.6.2018

Marta izdeluje nakit iz školjk v delavnici, ki jo najema v bližini ljubljanske tržnice, in ga prodaja po vnaprej dogovorjeni ceni. Povpraševanje je 10 kosov na teden, stroški skladiščenja so 0.2€ za kos na teden. Zagonski stroški izdelovanja nakita so 150€. Marta lahko na teden izdela 12.5 kosa nakita. Dovolj si, da pride do primanjkljaja, pri čemer jo ta stane 0.8€ za kos nakita na teden. Kako naj Marta organizira proizvodnjo in skladiščenje, da bo imela čim manj stroškov?

**Naloga 7.5.**

Vir: Kolokvij OR 11.6.2018

Vulkanizer v svoji delavnici izdeluje in prodaja avtomobilske pnevmatike. Glede na trenutno povpraševanje vsak teden proda 60 pnevmatik, v istem času pa jih lahko izdelata 90. Cena zagona proizvodnje je 180€, cena skladiščenja posamezne pnevmatike pa je 0.5€ na teden.

- (a) Denimo, da primanjkljaja ne dovolimo. Izračunaj dolžino cikla proizvodnje in prodaje pnevmatik, pri kateri so stroški najmanjši. Kako veliko skladišče mora vulkanizer imeti? Izračunaj tudi enotske stroške.
- (b) Kako dolgo naj pri zgornji rešitvi traja proizvodnja? Koliko pnevmatik naj vulkanizer naredi v vsakem ciklu?
- (c) Vulkanizer je ocenil, da bi ga primanjkljaj ene pnevmatike stal 2€ na teden. Kakšna naj bosta dolžina cikla in velikost skladišča, da bodo stroški čim manjši? Izračunaj tudi enotske stroške in določi največji primanjkljaj.

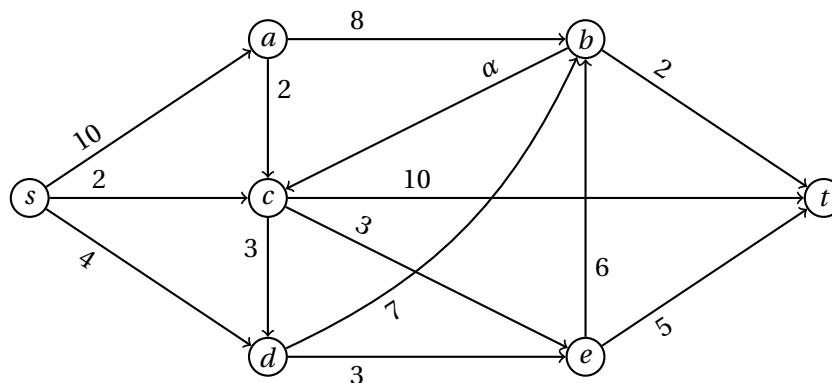
**Naloga 7.6.**

Vir: Izpit OR 5.7.2018

V trgovini s pohištvom vsak mesec prodajo 20 sedežnih garnitur. Z vsakim naročilom imajo 750€ stroškov, pri tem pa vse naročeno blago dobijo hkrati. Skladiščenje posamezne sedežne garniture jih stane 10€ na mesec, primanjkljaj za en kos pa jih stane 50€ na mesec.

- (a) Kako pogosto naj v trgovini naročajo sedežne garniture, da bodo stroški čim manjši? Kako veliko skladišče morajo imeti? Izračunaj tudi enotske stroške.
- (b) Izračunaj največji dovoljeni primanjkljaj. Koliko sedežnih garnitur naj vsakič naročijo?
- (c) V trgovini dobijo ponudbo za uporabo drugega skladišča, v katerem imajo za posamezno sedežno garnituro le 6€ stroškov na mesec, vendar lahko hrani največ 40 sedežnih garnitur. Kako naj organizirajo naročanje, če namesto prvotnega uporabljajo to skladišče? Ali se jim ga splača uporabiti?

**Namig:** izpelji formulo za enotske stroške in poišči optimalen interval naročanja pri fiksni velikosti skladišča.



Slika 34: Omrežje za nalogo 8.1.

## 1.8 Pretoki in prerezi

### Naloga 8.1.

Vir: Kolokvij OR 19.11.2009

Poišči minimalno vrednost parametra  $\alpha$ , da bo pretok skozi omrežje s slike 34 maksimalen. Utemelji izbiro.

### Naloga 8.2.

Vir: Kolokvij OR 26.1.2010

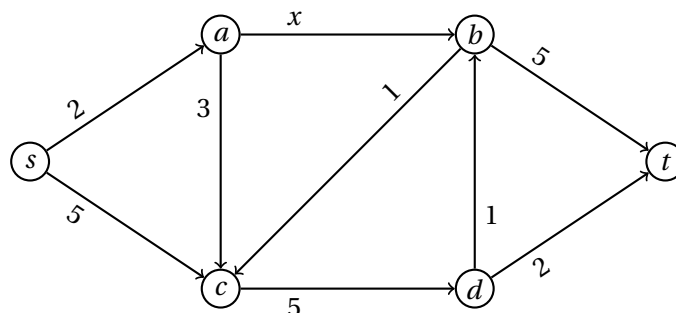
Imamo podatke za problem maksimalnega pretoka. Ali je povezava z najmanjšo kapaciteto (predpostavimo, da je natanko ena taka) vedno vsebovana v kakem minimalnem prerezu? Ali je morda vsebovana celo v vsakem minimalnem prerezu?

### Naloga 8.3.

Vir: Izpit OR 5.2.2010

Na univerzi v mestu Lenority so asistenti res nekoliko razvajeni in imajo močen sindikat. (To ni nič nenavadnega, če pa univerza zahteva, da se izpiti začnejo že ob sedmih zjutraj!) Bliža se izpitno obdobje in potrebno je paziti izpite. Za vsak dan so izpiti dani vnaprej. Znano je, da asistenti ne pazijo izpitov, če so vmes "luknje", saj si je to pravico izbral njihov sindikat. Vodstvu univerze tako ne preostane nič drugega, kot da to upošteva. Asistenti torej pridejo na faks ob neki uri, pazijo poljubno dolgo zaporedje izpitov brez odmorov, in potem gredo domov. Izpiti so podani v obliki časovnih intervalov, ki se začnejo in končajo ob polni uri. Upoštevajoč te pogoje mora vodstvo univerze venomer prositi asistente, naj pridejo pazit izpite. Toda tudi vodstvo si želi minimizirati "bolečino" ob moledovanju in hoče vsak dan prositi kar se da malo asistentov, naj vendarle pridejo pazit izpite.

- (a) Modeliraj problem s pomočjo usmerjenih acikličnih grafov, pri katerih so intervali predstavljeni z vozlišči. Identificiraj, kaj je tvoja optimizacijska naloga na takem grafu.



Slika 35: Omrežje za nalogo 8.4.

- (b) Opiši, kako problem prevedeš na problem maksimalnih pretokov. Natančno utemelji, zakaj so maksimalni pretoki v tvojem modelu v bijektivni korespondenci z optimalnimi rešitvami tvoje optimizacijske naloge.
- (c) S pomočjo algoritma iz prejšnje točke reši problem za petkove izpite, ki so podani z intervali (7, 8), (8, 9), (9, 10), (8, 12), (10, 13), (12, 15), (13, 15), (9, 12), (7, 10).

**Naloga 8.4.**

Vir: Izpit OR 28.6.2010

Na sliki 35 je podano enoparametrično omrežje za problem največjega pretoka. Parameter  $x$  je poljubno nenegativno število.

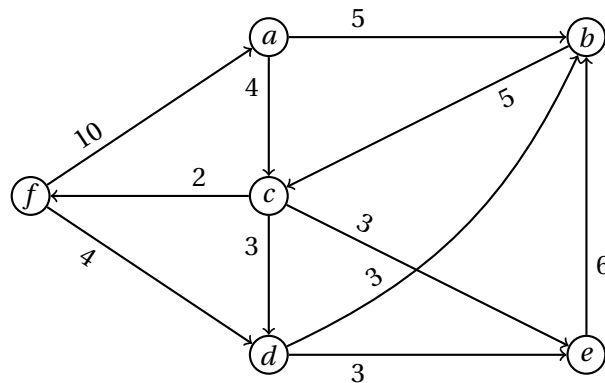
- (a) Kakšno je pridruženo omrežje, če začnemo z ničelnim  $(s, t)$ -tokom in ga najprej povečamo vzdolž povečujoče poti  $s \rightarrow a \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow t$  ter nato še vzdolž povečujoče poti  $s \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow b \rightarrow t$ ?
- (b) Poišči maksimalni  $(s, t)$ -tok in minimalni  $(s, t)$ -prerez.
- (c) Kapaciteto ene povezave vhodnega omrežja lahko povečamo za 1. Kateri povezavi naj povečamo kapaciteto, da bo vrednost maksimalnega  $(s, t)$ -toka v spremenjenem omrežju čim večja? Odgovor je načeloma odvisen od vrednosti parametra  $x$ .

**Naloga 8.5.**

Vir: Izpit OR 15.9.2010

Na sliki 36 je podano omrežje enosmernih prehodov med letališkimi terminali skupaj s prepustnostmi (v 1 000 ljudeh na uro).

- (a) Načrtovalce zanima, koliko največ potnikov na uro lahko preide od terminala  $f$  do terminala  $b$ . Predlagaj ustrezen algoritem in ga izvedi na grafu.



Slika 36: Omrežje za nalogo 8.5.

- (b) V izrednih razmerah dva terminala proglasijo za vstopna (na njih letala le pristajajo), ostale terminale pa za izstopne (letala le vzletajo). Tako morajo potniki nujno prehajati od vstopnih k izstopnim terminalom. Strateška odločitev je, da je vstopni terminal  $f$ , zaradi redundance pa želijo, da bi bila vstopna terminala dva. Ostali terminali so torej izstopni. Katerega izmed terminalov (poleg  $f$ ) se splača še proglasiti za vstopnega, da bo pretočnost med vstopnimi in izstopnimi terminali kar največja?

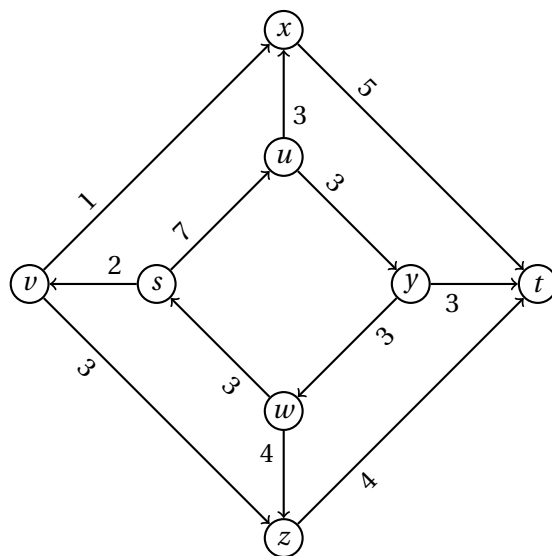
### Naloga 8.6.

Vir: Kolokvij OR 25.11.2010

Nov in neizkušen predavatelj Operacijskih raziskav se odloči, da bo poenostavil Ford-Fulkersonov algoritem. Študentom pove, naj za iskanje maksimalnega pretoka na omrežju s končnimi kapacitetami uporabijo naslednji algoritem:

```

function GREEDYFLOW( $G = (V, E), C, s, t$ )
   $F \leftarrow$  slovar z vrednostjo 0 za vsako povezavo iz  $E$ 
  for  $e \in E$  do
     $F[e] \leftarrow 0$ 
  end for
  while obstaja pot od  $s$  do  $t$  do
     $P \leftarrow$  poljubna pot od  $s$  do  $t$ 
     $\gamma \leftarrow$  minimalna kapaciteta povezav poti  $P$ 
    for  $e \in P$  do
       $F[e] \leftarrow F[e] + \gamma$ 
      if  $C[e] = \gamma$  then
        odstrani  $e$  iz  $G$ 
      else
         $C[e] \leftarrow C[e] - \gamma$ 
      end if
    end for
  end while
  return  $F$ 
end function
  
```



Slika 37: Graf za nalogo 8.6(a).

- Dokaži, da lahko na grafu s slike 37 z uporabo algoritma GREEDYFLOW dobimo pravilno rešitev.
- Poišči primer omrežja in izbire poti, tako da algoritem GREEDYFLOW ne da pravilnega rezultata.
- Ali za vsako omrežje obstaja taka izbira poti, da bo algoritem GREEDYFLOW dal maksimalni pretok?
- Dokaži, da je razlika med maksimalnim pretokom in pretokom, ki ga vrne algoritem GREEDYFLOW, lahko poljubno velika.

**Naloga 8.7.**

Vir: Izpit OR 9.2.2011

- Poišči usmerjen graf  $G$ , vozlišči  $s$ ,  $t$  in kapacitete povezav, da bo imel  $G$  natanko en minimalen  $(s, t)$ -prerez.
- Poišči usmerjen graf  $G'$ , vozlišči  $s$ ,  $t$  in kapacitete povezav, da bo imel  $G'$  več minimalnih  $(s, t)$ -prerezov.
- Poišči usmerjen graf  $G_n$ , vozlišči  $s$ ,  $t$  in kapacitete povezav, da bo imel  $G_n$  natanko  $n$  minimalnih  $(s, t)$ -prerezov.

**Naloga 8.8.**

Vir: Izpit OR 28.6.2011

Navdušenje nad koncem študijskega leta na ljubljanski univerzi je botrovalo temu, da v ambulantni Univerzitetne klinike 169 študentov išče nujno zdravniško pomoč. Vsak od študentov potrebuje eno enoto krvi, klinika pa ima na zalogi 170 enot krvi. V spodnji tabeli je prikazano število enot krvi posamezne krvne skupine, ki so na zalogi, in število študentov z dano krvno skupino.

Krvna skupina	A	B	O	AB
Zaloga	46	34	45	45
Povpraševanje	39	38	42	50

Osebe s krvno skupino A lahko prejmejo kri tipa A ali O. Osebe tipa B lahko prejmejo kri tipa B ali O. Osebe tipa O lahko prejmejo samo kri tipa O. Osebe tipa AB lahko prejmejo katerokoli krvno skupino. Naša naloga je razporediti enote krvi tako, da bomo z njo oskrbeli kar se da veliko število študentov. Iz podatkov sestavi omrežje in modeliraj nalogo kot problem maksimalnega pretoka. Največ koliko pacientov lahko oskrbimo? Utemelji.

**Naloga 8.9.**

Vir: Izpit OR 24.6.2014

Pri podatkih iz naloge 8.8 poišči še odgovora na naslednji vprašanji.

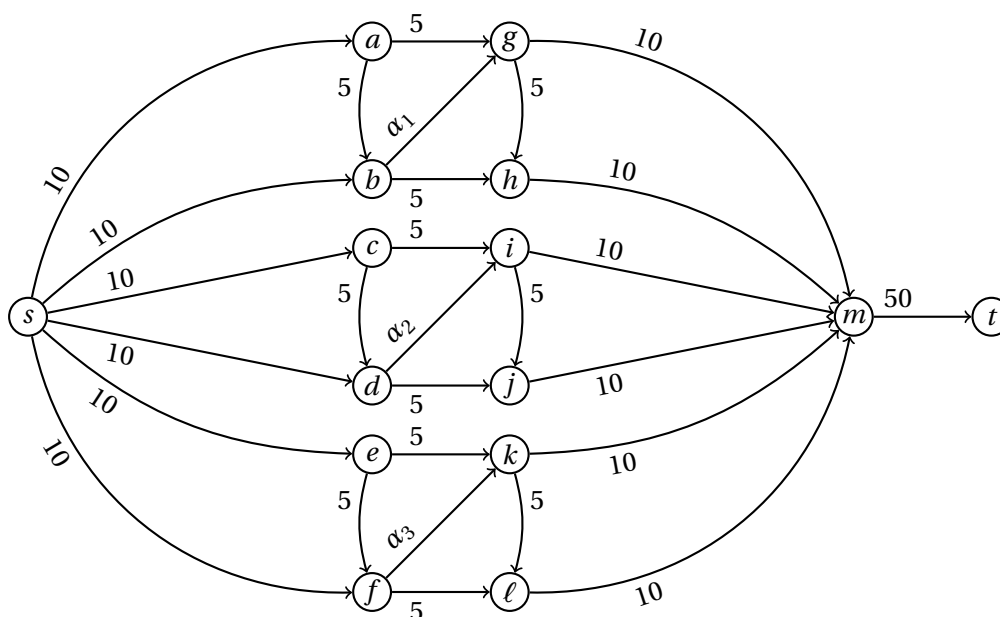
- (a) Koliko enot krvi vsake krvne skupine ostane neporabljenih?
- (b) Koliko enot ustrezne krvne skupine naj na kliniki še naročijo, da bodo pozdravili vse paciente?

**Naloga 8.10.**

Vir: Kolokvij OR 5.4.2012

Iz zаетja s želimo preko treh čistilnih postaj (vsako predstavlja 4 vozlišča) napeljati vodo do tovarne  $t$ . Opravka imamo z vodovodnim omrežjem, predstavljenim z grafom na sliki 38. Na povezavah so kapacitete cevi (v litrih na sekundo), cevi z oznakami  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  in  $\alpha_3$  pa še niso zgrajene.

- (a) Koliko vode lahko po danem omrežju dobi tovarna na sekundo?
- (b) Trenutni dotok vode v tovarno za potrebe proizvodnje ni dovolj velik, zato razmišljajo o izgradnji novih cevi. Možne lokacije novih cevi so  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  in  $\alpha_3$ . Uprava tovarne se je odločila, da bodo s postavitvijo novih cevi na nekaterih možnih lokacijah povečali pretok kar največ, kot je mogoče. Cev kapacitete  $K$  stane  $K \cdot 100\text{€}$ . Za inštalacijo ene cevi morajo plačati dodatnih 10000€. Koliko najmanj jih bo stal projekt?



Slika 38: Omrežje za nalogo 8.10.

**Naloga 8.11.**

Vir: Kolokvij OR 5.4.2012

Na divjem žuru matematikov se je zbralo  $n$  ljudi. Organizator je priskrbel  $p$  različnih vrst sendvičev, a ne v neomejenih količinah. Na voljo imajo  $u_i$  sendvičev sorte  $i$  ( $1 \leq i \leq p$ ). Prav tako imajo na voljo  $q$  različnih sokov;  $v_j$  predstavlja število sokov sorte  $i$  ( $1 \leq j \leq q$ ). Za vsakega udeleženca zabave je znano, katere sokove in sendviče ima rad.

- (a) Zanima nas, ali lahko hrano in pijačo razdelimo tako, da dobi vsak udeleženec zabave en sendvič, ki ga ima rad, in en sok, ki ga ima rad. Nalogo formuliraj kot problem maksimalnega pretoka v ustreznem grafu. Jasno napiši, kako iz dobljenega maksimalnega toka ugotovimo, ali želena razdelitev hrane in pijače obstaja.
- (b) S pomočjo formulacije iz prejšnje točke reši nalogo za naslednje konkretne podatke:

Vrsta soka	Količina	Vrsta sendviča	Količina
Ananas	1	Pohanček	1
Črni ribez	1	Šoferski	2
Rdeča pomaranča	2	Kraški	2
Jagoda	2	Vegi	1
Borovnica	2		



Ime	Seznam sokov	Seznam sendvičev
Damir	ananas, jagoda	pohanček, šoferski
Jasna	ananas, črni ribez, jagoda	kraški, vegi
Bernard	črni ribez, jagoda	vegi, pohanček, šoferski
Matjaž	ananas, rdeča pomaranča	kraški, vegi
Sanela	borovnica, črni ribez, jagoda	vegi
Patrik	borovnica, jagoda	kraški, vegi

### Naloga 8.12.

Vir: Izpit OR 26.6.2012

V nekem velikem mehiškem mestu je center mesta sestavljen iz ulic, ki so pravokotne ena na drugo in iz ptičje perspektive izgledajo kot pravokotna karirasta mreža. Vse banke se nahajajo v centru, in sicer tik ob križiščih (v vsakem križišču kvečjemu ena banka). Križišča so označena s svojimi koordinatami v mreži. V tem mestu so ropi bank zelo pogosti. Tako pogosti, da se včasih roparji na begu zaletijo med seboj (saj bežijo pred policijskimi vozili pri veliki hitrosti). Če ropar uspe pripeljati do ulice, ki vodi ven iz centra, je "rešen", saj center obdajajo slumi, kjer policija nima moči, saj jih nadzirajo mafijski botri. Roparji so se sestali na Veliki mafijski konferenci in sklenili temu kaosu narediti konec. Odločili so se, da bodo naročili informacijski sistem, kamor bodo vsak večer vnesli lokacije bank, ki jih nameravajo oropati, program pa jim bo sestavil načrt ropov za naslednji dan. Roparji se bodo izvedli, če:

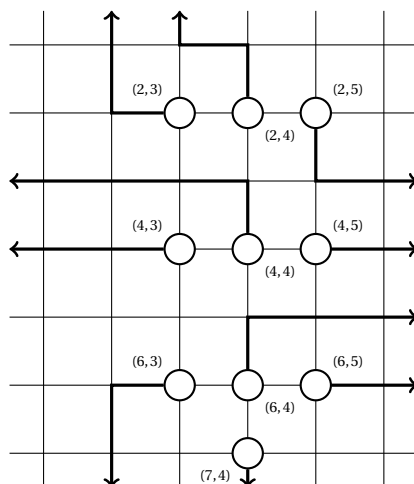
- so vse lokacije bank različne (dve ekipi ne smeta na isti dan oropati iste banke), in
- za vsako lokacijo obstaja pot, ki pelje ven iz centra, tako da nobeni dve poti ne gresta vzdolž iste ulice ali čez isto križišče (s tem poskušamo preprečiti, da bi se roparji medsebojno zaleteli; smer vožnje pri tem ni pomembna).

Opiši algoritem, ki bo kot vhod dobil celi števili  $n$  in  $m$ , ki predstavljata število vodoravnih in navpičnih ulic, ter seznam lokacij bank  $L$ . Algoritem naj vrne seznam poti, po katerih bodo roparji bežali (za vsako lokacijo po eno pot). Če vseh ropov ni mogoče izvesti, naj algoritem javi napako.

Za  $n = 7$ ,  $m = 6$  in

$$L = \{(4, 5), (4, 4), (4, 3), (6, 4), (7, 4), (2, 5), (6, 5), (2, 4), (2, 3), (6, 3)\}$$

lahko dobimo na primer poti, podane na sliki 39.



Slika 39: Shema ulic in bank ter primer izhoda za nalogo 8.12.

**Naloga 8.13.**

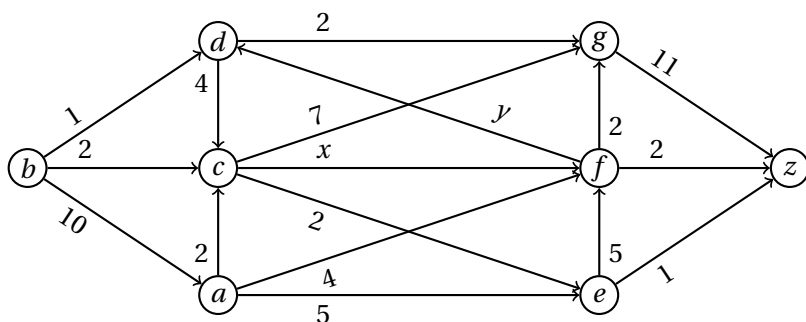
Vir: Izpit OR 14.6.2013

Pohorski škratje že 644. leto zapored organizirajo tradicionalni tek po rovih od *a* do *z*, ki letos poteka na trasi, prikazani na sliki 40.

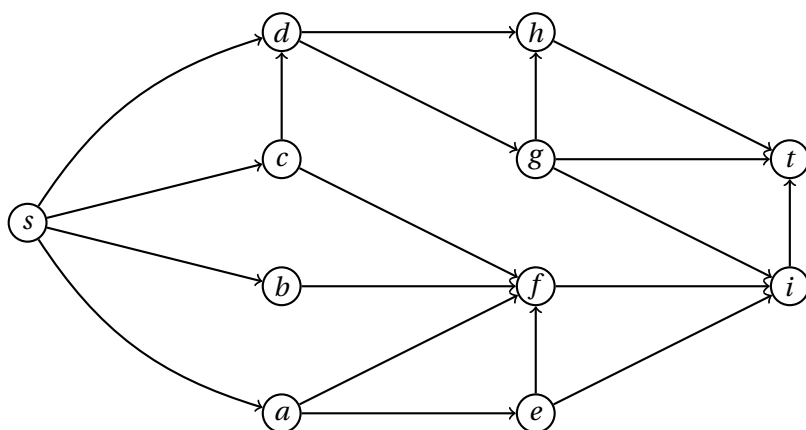
Udeleženci začnejo v točki  $a$  in končajo v točki  $z$ , zmeraj pa tečejo le v smeri povezav. Vsakemu škratu posebej pot določijo organizatorji, zaradi dobre pripravljenosti pa lahko pričakujemo, da bodo vsi prišli do cilja. Ker so škratje zelo težki, je med tekom po rovu nevarnost, da se le-ta poruši. Na povezavah je napisano število udeležencev, ki jih vsak rov prenese. Organizatorji takoj za tem, ko rov preči en tekmovalec manj, kot je nosilnost rova, rov zaprejo (npr. rov  $x$  se zapre, ko ga preči  $(x - 1)$ -ti tekmovalec –  $x$ -ti tekmovalec ne stopi v rov).

- (a) Trenutno stanje trase je takšno, da je  $x = 1$  in  $y = 2$ . Največ koliko udeležencev lahko preteče od  $a$  do  $z$ ? Odgovor utemlji. Napiši, kako naj organizatorji pripravijo poti za škrate (tj., koliko škratov so pripravljeni spustiti po kateri poti).
- (b) Rova  $x$  in  $y$  lahko škratje dodatno utrdijo, ostalih ni moč preurejati. Da lahko povečajo nosilnost rova za enega udeleženca, morajo delati 10 dni. Najmanj koliko dni morajo delati in na katerem rovu, da bo na tradicionalnem teku od  $a$  do  $z$  lahko sodelovalo kar največ udeležencev? Odgovor utemlji. Napiši, kako naj organizatorji v tem primeru pripravijo poti za škrate (tj., koliko škratov so pripravljeni spustiti po kateri poti).

- (b) Rova  $x$  in  $y$  lahko škratje dodatno utrdijo, ostalih ni moč preurejati. Da lahko povečajo nosilnost rova za enega udeleženca, morajo delati 10 dni. Najmanj koliko dni morajo delati in na katerem rovu, da bo na tradicionalnem teku od  $a$  do  $z$  lahko sodelovalo kar največ udeležencev? Odgovor utemelji. Napiši, kako naj organizatorji v tem primeru pripravijo poti za škrate (tj., koliko škratov so pripravljeni spustiti po kateri poti).



Slika 40: Graf za nalogo 8.13.



Slika 41: Graf za nalogo 8.14.

**Naloga 8.14.**

Vir: Izpit OR 25.8.2014

Dana sta računalnika  $s$  in  $t$  ter omrežje strežnikov in usmerjenih povezav. S pomočjo algoritma za maksimalni pretok v grafu opiši in utemelji splošen algoritem, ki določi minimalno število strežnikov, ki jih moramo onemogočiti, da prekinemo komunikacijo od  $s$  do  $t$ , in ga uporabi na grafu s slike 41.

**Naloga 8.15.**

Vir: Vaje OM 23.4.2014

Poišči maksimalni pretok in minimalni prerez na grafu s slike 42.

**Naloga 8.16.**

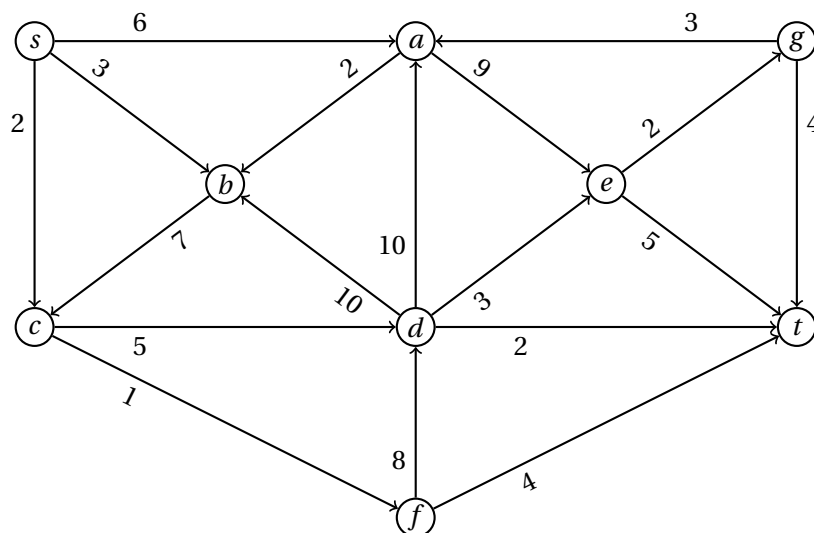
Vir: Vaje OM 23.4.2014

Poišči maksimalni pretok in minimalni prerez na grafu s slike 43.

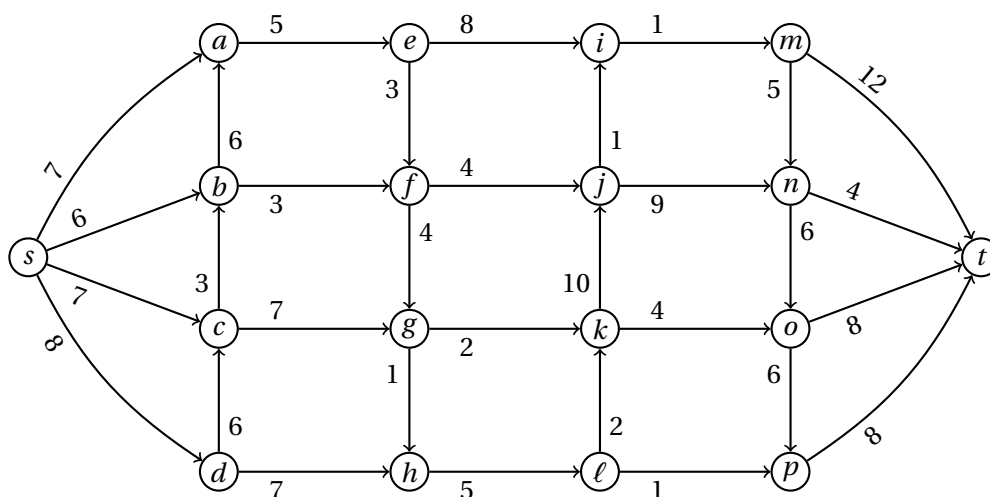
**Naloga 8.17.**

Vir: Vaje OM 23.4.2014

Poišči maksimalni pretok in minimalni prerez na grafu s slike 44 v odvisnosti od parametra  $\alpha$ .



Slika 42: Graf za nalogo 8.15.



Slika 43: Graf za nalogo 8.16.

**Naloga 8.18.**

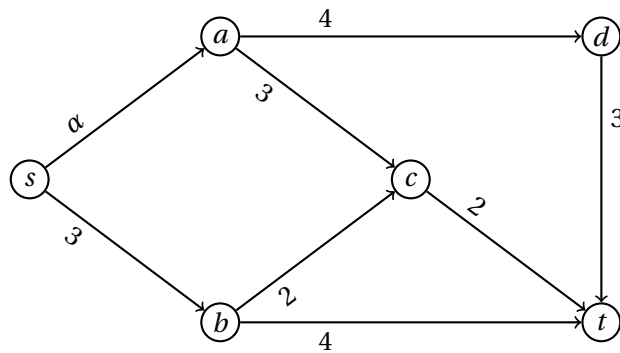
Vir: Vaje OM 23.4.2014

V grafu na sliki 45 lahko kapaciteto ene povezave povečamo za 1. Katera naj bo ta povezava, da bomo povečali maksimalni pretok?

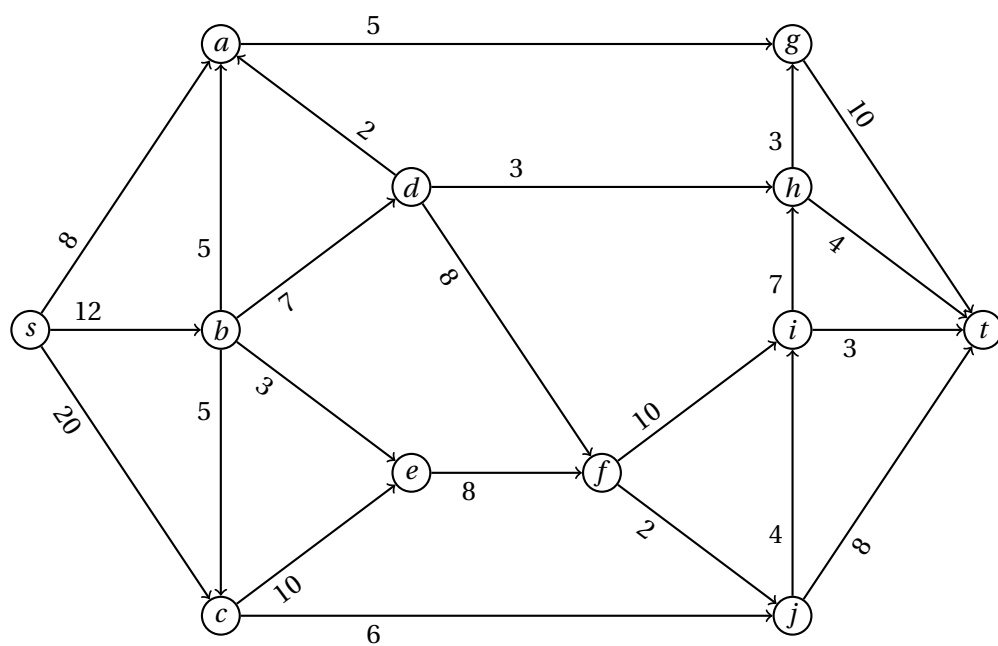
**Naloga 8.19.**

Vir: Vaje OM 23.4.2014

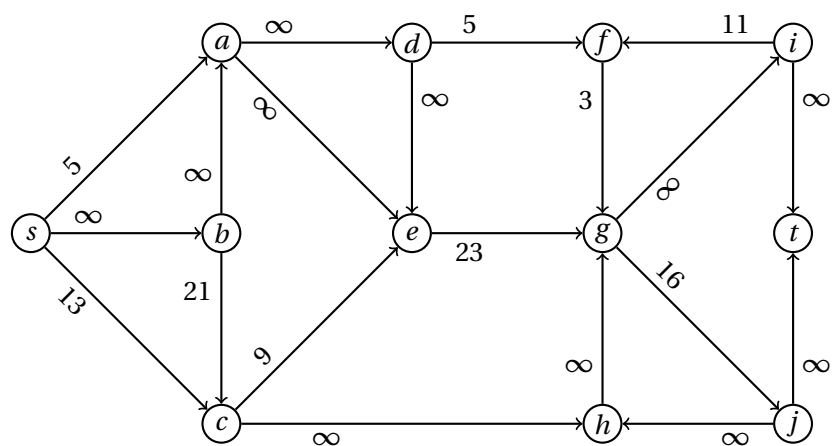
Poišči maksimalni pretok na grafu s slike 46, če ta obstaja!



Slika 44: Graf za nalogo 8.17.



Slika 45: Graf za nalogo 8.18.



Slika 46: Graf za nalogo 8.19.

## 1.9 Razdelitve

### Naloga 9.1.

Vir: Kolokvij OR 26.1.2010

S pomočjo Austinovega postopka opiši postopek, ki prvemu igralcu zagotovi točno četrtno celote in drugemu igralcu točno tri četrtine celote.

### Naloga 9.2.

Vir: Izpit OR 5.2.2010

Naša naloga je, da med pet ljudi z uporabo denarnih nadomestil razdelimo pet predmetov, tako da bo vsak dobil pošten delež in da bo delitev brez zavisti. V spodnji matriki je podano vrednotenje vsakega izmed 5 predmetov s strani petih ljudi.

11	9	19	14	11
4	10	15	20	12
6	5	5	17	9
20	23	6	3	18
10	18	23	9	10

Seveda želimo pri tem kot svetovalec zaslužiti čimveč. Ker ni zunanjega financiranja, lahko naš zaslužek pridobimo le iz nadomestil. Uporabi kak znan algoritem za delitev pod temi pogoji in razloži, kako si pridobiš kar največji dobiček.

### Naloga 9.3.

Vir: Kolokvij OR 9.5.2013

V turistični agenciji Zobček že vrsto let organizirajo izlete po Sloveniji. Zaradi velikega povpraševanja so se odločili, da bodo ponudbo razširili tudi na Madžarsko. Izbrali so destinacije in vodiče, sedaj pa želijo slednje razporediti po destinacijah tako, da bi vsako destinacijo pokrivala natanko dva vodiča in bi vsak vodič pokrival natanko eno destinacijo. Vsak vodič je podal seznam destinacij, urejenih po priljubljenosti, začnši s tisto, po kateri bi najraje vodil turiste. Agencija je za vsako destinacijo naredila urejen seznam vodičev, tako da je na prvem mestu tisti vodič, ki bi predvidoma najbolje vodil turiste po destinaciji, na zadnjem pa tisti, ki bi to predvidoma počel najslabše.

Če bi bilo destinacij in vodičev malo, bi agencija sama nekako razdelila vodiče med destinacije, a temu ni tako. Še več, seznam destinacij in vodičev nameravajo z leti spreminjati, zato nujno potrebujejo postopek, ki bi jim pomagal razdeliti vodiče po destinacijah.

- (a) Danih je  $n$  destinacij in  $2n$  vodičev, pri čemer za vsako destinacijo poznamo preference agencije glede vodičev in za vsakega vodiča poznamo njegove preference glede destinacij. Opiši algoritem časovne zahtevnosti  $O(n^2)$ , ki izračuna *stabilno razdelitev* vodičev med destinacije oz. nam pove, da stabilna razdelitev ne obstaja.

Razdelitev  $2n$  vodičev med  $n$  destinacij je *nestabilna*, če obstajata vodič  $v$  in destinacija  $d$ , tako da bi  $v$  raje vodil po destinaciji  $d$  kakor po trenutni destinaciji in bi agencija raje imela vodiča  $v$  na destinaciji  $d$  namesto enega

izmed trenutnih vodičev na tej destinaciji. Razdelitev  $2n$  vodičev med  $n$  destinacij je *stabilna*, če sta vsaki destinaciji dodeljena natanko dva vodiča in če ni nestabilna.

(b) Reši nalogo za naslednje podatke ( $n = 3$ ):

Destinacija	preference agencije glede vodičev
Budimpešta	Anisa, Bela, Črt, Ema, Dana, Corina
Győr	Črt, Bela, Corina, Dana, Ema, Anisa
Szeged	Ema, Anisa, Bela, Dana, Črt, Corina

Vodič	preference vodičev
Anisa	Szeged, Budimpešta, Győr
Bela	Budimpešta, Szeged, Győr
Corina	Győr, Szeged, Budimpešta
Črt	Budimpešta, Győr, Szeged
Dana	Budimpešta, Szeged, Győr
Ema	Győr, Budimpešta, Szeged

#### Naloga 9.4.

Vir: Izpit OR 24.6.2013

V turistični agenciji Zobček že vrsto let organizirajo izlete po Sloveniji in na Madžarskem. Zaradi velikega povpraševanja so se odločili, da bodo ponudbo razširili tudi na države območja bivše Jugoslavije. Ker bodo tako nudili izlete po veliko novih državah, želijo postaviti štiri najboljše dosedanje vodiče za nove šefe, tako da bo vsak odgovoren za nekaj držav. Naša naloga je šefe stabilno razporediti po območjih. Tabeli preferenc sta naslednji:

Šefi	preference šefov
Črt	Srbija in Črna gora, Slovenija in Madžarska, Hrvaška in BiH, Makedonija in Kosovo
Žan	Slovenija in Madžarska, Srbija in Črna gora, Hrvaška in BiH, Makedonija in Kosovo
Šime	Slovenija in Madžarska, Makedonija in Kosovo, Hrvaška in BiH, Srbija in Črna gora
Mujo	Hrvaška in BiH, Slovenija in Madžarska, Makedonija in Kosovo, Srbija in Črna gora

Območje	preference agencije glede šefov
Slovenija in Madžarska	Črt, Mujo, Žan, Šime
Hrvaška in BiH	Šime, Žan, Črt
Srbija in Črna gora	Šime, Žan, Mujo, Črt
Makedonija in Kosovo	Šime, Mujo, Črt, Žan

Opazimo, da agencija za šefa območja Hrvaške in BiH ne želi postaviti Muja.

Poišči stabilno prirejanje, v katerem Mujo ni šef območja Hrvaške in BiH, ali utemelji, da le-ta ne obstaja<sup>5</sup>.

<sup>5</sup>Slovenija in Madžarska je eno nedeljivo območje. Enako velja za ostale pare držav.



## 2 Rešitve

### 2.1 Zahtevnost algoritmov

#### Naloga 1.1.

- (a) Program prepíše vnose v matriki  $A$  nad diagonalo na ustrezno mesto pod diagonalo tako, da je po izvedbi programa matrika  $A$  simetrična.
- (b) Kot korak bomo upoštevali posamezno izvedbo notranje zanke **for**, kjer kopiramo vrednost v matriki na drugo mesto – ob predpostavki, da je velikost vnosov omejena (npr. 32-bitna cela števila), bo trajanje take operacije omejeno s konstanto. Preštejmo število takih korakov:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n 1 = \sum_{i=1}^n (n-i) = \sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{2}$$

Lahko bi seveda upoštevali še korake, ki so potrebni za vzdrževanje števec zank (inicializacija števca, povečevanje števca, preverjanje konca zanke), a bi spet dobili kvadratni polinom v  $n$ . Tako lahko rečemo, da je število korakov omejeno z  $O(n^2)$ .

#### Naloga 1.2.

- (a) V vsakem obhodu zanke **while** se vrednost  $\ell[i]$  spremeni iz 0 v 1 ali obratno. Če se vrednost spremeni na 1, se  $i$  nastavi na 1, sicer se pa poveča za 1.

Izpišimo si vrednosti v seznamu  $\ell$  in spremenljivke  $i$  ob koncu vsakega obhoda zanke **while** tekom izvajanja algoritma, recimo za  $n = 4$ :

obhod	$\ell[4 \dots 1]$	$i$	obhod	$\ell[4 \dots 1]$	$i$
1	0001	1	16	1001	1
2	0000	2	17	1000	2
3	0010	1	18	1010	1
4	0011	1	19	1011	1
5	0010	2	20	1010	2
6	0000	3	21	1000	3
7	0100	1	22	1100	1
8	0101	1	23	1101	1
9	0100	2	24	1100	2
10	0110	1	25	1110	1
11	0111	1	26	1111	1
12	0110	2	27	1110	2
13	0100	3	28	1100	3
14	0000	4	29	1000	4
15	1000	1	30	0000	5

Če pogledamo samo tiste obhode, na koncu katerih velja  $i = 1$ , opazimo, da vrednosti v seznamu  $\ell$  predstavljajo dvojiške zapise števil od 1 do  $2^n - 1$  v ostalih pa se najmanj pomembna 1 zamenja z 0. Algoritem torej simulira dvojiški števec z  $n$  mesti.

- (b) Algoritem obišče vseh  $2^n - 1$  števil, poleg tega pa mora vsakič poskrbeti za zamenjavo vseh enic za najmanj pomembno ničlo. Ob upoštevanju, da obstaja  $2^{n-i}$  števil z najmanj pomembno ničlo na  $i$ -tem mestu, za vrednost  $2^n - 1$  pa je potrebno nadomestiti vseh  $n$  mest, je skupno število korakov enako

$$\begin{aligned} n + \sum_{i=1}^n (i \cdot 2^{n-i}) &= \sum_{j=1}^n \left( 1 + \sum_{i=j}^n 2^{n-i} \right) = \\ &= \sum_{j=1}^n \left( 1 + \sum_{i=0}^{n-j} 2^i \right) = \sum_{j=1}^n 2^{n-j+1} = 2^{n+1} - 2. \end{aligned}$$

Časovna zahtevnost algoritma je torej  $O(2^n)$ .

### Naloga 1.3.

- (a) Izpišimo vrednosti spremenljivk ob koncu vsakega obhoda zanke **for** oziroma **while**, ko se prejšnja konča.

obhod <b>while</b>	$i$	$y$	$z$	$\ell[1 \dots 5]$
1	2	1	5	[7, 11, 16, 7, 5]
1	3	1	5	[7, 11, 16, 7, 5]
1	4	4	5	[7, 11, 7, 16, 5]
1	5	5	5	[7, 11, 7, 5, 16]
1		5	4	[7, 11, 7, 5, 16]
2	2	1	4	[7, 11, 7, 5, 16]
2	3	3	4	[7, 7, 11, 5, 16]
2	4	4	4	[7, 7, 5, 11, 16]
2		4	3	[7, 7, 5, 11, 16]
3	2	1	3	[7, 7, 5, 11, 16]
3	3	3	3	[7, 5, 7, 11, 16]
3		3	2	[7, 5, 7, 11, 16]
4	2	2	2	[5, 7, 7, 11, 16]
4		2	1	[5, 7, 7, 11, 16]

- (b) Naj bodo  $z_1, z_2, \dots, z_k$  vrednosti, ki jih zavzame spremenljivka  $z$  ob vsakem vstopu v zanko **while**. Očitno velja  $z_i - 1 \geq z_{i+1}$  za vsak  $i$ , tako da velja  $k \leq n - 1$ . Največje število korakov je torej

$$\sum_{z=2}^n (z-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Tako število korakov dosežemo, če je seznam  $\ell$  na začetku urejen padajoče – tako vsakič pride do zamenjave v zadnjem koraku zanke **for**, zato se  $z$  vsakič zmanjša za 1. Časovna zahtevnost algoritma je torej  $O(n^2)$ .

#### Naloga 1.4.

(a) **function** MERGESORT( $\ell[1 \dots n]$ )  
     **if**  $n \leq 1$  **then**  
         **return**  $\ell$   
     **end if**  
      $m \leftarrow \lceil \frac{n}{2} \rceil$   
      $\ell_1 \leftarrow \text{MERGESORT}(\ell[1 \dots m])$   
      $\ell_2 \leftarrow \text{MERGESORT}(\ell[m+1 \dots n])$   
      $i, j \leftarrow 1, 1$   
      $\ell' \leftarrow []$   
     **while**  $i \leq m \wedge j \leq n - m + 1$  **do**  
         **if**  $\ell_1[i] \leq \ell_2[j]$  **then**  
              $\ell'.\text{append}(\ell_1[i])$   
              $i \leftarrow i + 1$   
         **else**  
              $\ell'.\text{append}(\ell_2[j])$   
              $j \leftarrow j + 1$   
         **end if**  
     **end while**  
     pripni  $\ell_1[i \dots m]$  na konec  $\ell'$   
     pripni  $\ell_2[j \dots n - m + 1]$  na konec  $\ell'$   
     **return**  $\ell'$   
**end function**

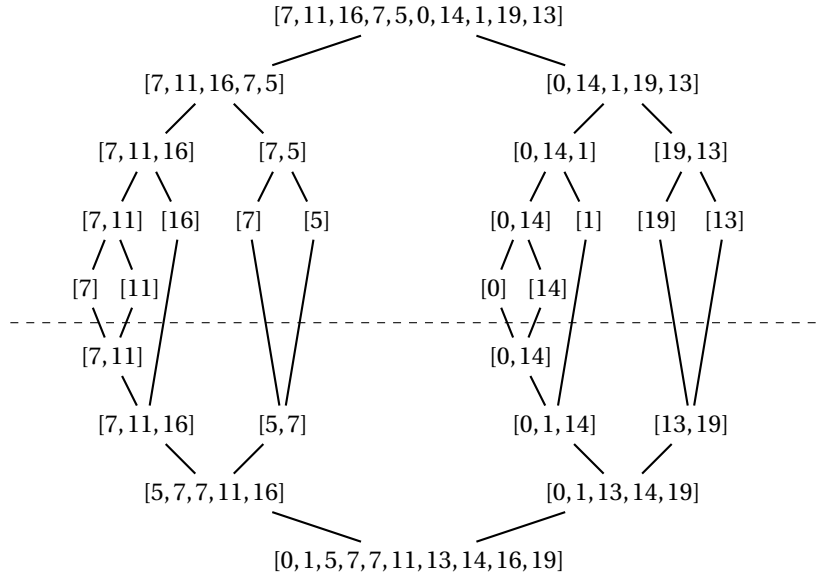
- (b) Izvajanje algoritma je prikazano na sliki 47. Nad črtkano črto je prikazano rekurzivno razbijanje seznamov, pod njo pa zlivanje dobljenih urejenih podseznamov.
- (c) Funkcija obsega dva rekurzivna klica na seznamih polovične dolžine ter združevanje obeh dobljenih seznamov v enega. Naj bo  $T(n)$  čas izvajanja algoritma pri vhodnem seznamu dolžine  $n$ . Ker združevanje poteka v linearnem času, velja rekurzivna zveza

$$T(n) = O(n) + 2T\left(\frac{n}{2}\right).$$

Po krovnem izreku lahko izpeljemo, da je časovna zahtevnost algoritma  $O(n \log n)$ .

#### Naloga 1.5.

Algoritem teče v času  $O(\sqrt{n})$ . Ker je vhod algoritma število  $n$ , ki je zapisano kot zaporedje  $\ell = O(\log n)$  bitov, vidimo, da algoritem teče v času  $O(2^{\ell/2})$  in torej ni polinomski v dolžini vhoda.



Slika 47: Diagram izvajanja algoritma za nalogo 1.4(b).

### Naloga 1.6.

Po krovnem izreku ima časovno zahtevnost  $O(\sqrt{n})$  algoritem, katerega čas izvajanja  $T(n)$  je opisan z rekurzivno zvezo

$$T(n) = O(1) + 2T\left(\frac{n}{4}\right).$$

Zapišimo tak algoritem:

```

function KORENSKI( $\ell[1 \dots n]$ )
  if  $n \geq 4$  then
     $m \leftarrow \lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ 
    KORENSKI( $\ell[1 \dots m]$ )
    KORENSKI( $\ell[n - m + 1 \dots n]$ )
  end if
end function

```

### Naloga 1.7.

Algoritem poišče  $k$ -ti najmanjši element v množici  $S$ . Množico razdeli na dva dela glede na naključno izbrani element  $x$ . Če ima množica  $S^-$  elementov, manjših od  $x$ , natanko  $k - 1$  elementov, potem je  $x$  iskani element. Če ima  $S^-$  manj kot  $k - 1$  elementov, algoritem rekurzivno poišče  $(|S^-| - k - 1)$ -ti element v množici  $S^+$  elementov, večjih od  $x$ , sicer pa rekurzivno poišče  $k$ -ti element v množici  $|S^-|$ .

V najslabšem primeru je velikost množice, ki jo algoritem rekurzivno preišče, enaka  $n - 1$ . Ker algoritem porabi  $O(n)$  korakov za razporejanje elementov po množicah, v najslabšem primeru za čas izvajanja  $T(n)$  velja

$$T(n) = O(n) + T(n - 1) = O\left(\sum_{i=0}^n (n - i)\right) = O(n^2).$$

Poglejmo si sedaj povprečni čas izvajanja  $\hat{T}(n)$ . Denimo, da je izbrani element  $x$   $j$ -ti po vrsti. Če velja  $j = k$ , potem algoritem konča. Če velja  $j < k$ , potem algoritem rekurzivno pregleda množico  $S^+$  z  $n - j$  elementi, če pa velja  $j > k$ , pa pregleda množico  $S^-$  z  $j - 1$  elementi. Zapišimo rekurzivno zvezo za  $\hat{T}(n)$ :

$$\hat{T}(n) = O(n) + \frac{1}{n} \left( \sum_{j=1}^{k-1} \hat{T}(n-j) + \sum_{j=k+1}^n \hat{T}(j-1) \right)$$

Denimo, da je čas izvajanja nerekurzivnega dela funkcije omejen s  $c \cdot n$  koraki za neko konstanto  $c > 0$ . Z indukcijo bomo pokazali, da velja  $\hat{T}(n) \leq C \cdot n$  za neko konstanto  $C > 0$ .

Po zgornji predpostavki velja  $\hat{T}(1) \leq cn$ . Denimo, da za vse  $m < n$  velja  $\hat{T}(m) \leq Cm$ . Potem velja

$$\begin{aligned} \hat{T}(n) &\leq cn + \frac{1}{n} \left( \sum_{j=1}^{k-1} C(n-j) + \sum_{j=k+1}^n C(j-1) \right) \\ &= cn + \frac{C}{2n} ((2n-k)(k-1) + (n+k-1)(n-k)) \\ &= cn + \frac{C}{2n} (n^2 + 2nk - 3n - 2k^2 + 2k) \\ &= \left( c + \frac{C}{2} \right) n + \frac{C(2k-3)}{2} - \frac{Ck(k-1)}{n} \end{aligned}$$

Označimo sedaj  $\alpha = k/n$  – velja torej  $0 < \alpha \leq 1$ .

$$\begin{aligned} \hat{T}(n) &\leq \left( c + C \left( \frac{1}{2} + \alpha - \alpha^2 \right) \right) n + C \left( \alpha - \frac{3}{2} \right) \\ &\leq \left( c + C \left( \frac{1}{2} + \alpha(1-\alpha) \right) \right) n \\ &\leq \left( c + \frac{3C}{4} \right) n \end{aligned}$$

Če vzamemo  $C \geq 4c$ , potem po indukciji velja  $\hat{T}(n) \leq Cn$  za vse  $n$ . Algoritem torej v povprečnem primeru opravi  $O(n)$  korakov.

### Naloga 1.8.

- (a) Dokažimo, da velja  $(n+a)^b = \Theta(n^b)$ . Dokazati moramo torej, da obstajata konstanti  $c, C \in \mathbb{R}_+$  ter konstanta  $n_0 \in \mathbb{N}$ , tako da velja

$$c \cdot n^b \leq (n+a)^b \leq C \cdot n^b$$

za vsak  $n > n_0$ . Ker je  $b > 0$ , funkcija  $x \mapsto x^{\frac{1}{b}}$  monotonno narašča pri  $x > 0$ , torej jo lahko brez škode za splošnost uporabimo na zgornji neenakosti. Tako dobimo

$$c^{\frac{1}{b}} \cdot n \leq n+a \leq C^{\frac{1}{b}} \cdot n.$$

Naj bosta  $c = \frac{1}{2^b}$  in  $C = 2^b$ . Dobimo pogoja

$$\frac{n}{2} \leq n + a \leq 2n.$$

Ker moramo paziti, da so vsi členi znotraj neenakosti pozitivni, dodamo še pogoj  $n + a > 0$ . Če izberemo  $n_0 = \max(-2a, a)$ , bodo ti pogoji veljali pri vseh  $n > n_0$ .

- (b) Po premisleku hitro ugotovimo, da za poljubno funkcijo  $f$  to ne velja, saj lahko ta konkretno spremeni hitrost naraščanja funkcije  $g$ .

Za protiprimer vzemimo  $g(n) = n$  in  $f(n) = \log(n)$  ter pogledajmo  $\lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot \log(n)/n)$  pri poljubni izbiri  $c > 0$ . Z razširitvijo funkcij na  $\mathbb{R}$  in L'Hôpitalovim pravilom ugotovimo, da bo limita enaka 0 ne glede na izbrano konstanto  $c$ . Tako  $n$  ne moremo asimptotično omejiti z  $O(\log(n))$ .

- (c) Rešitev naloge je klasična uporaba krovnega izreka, a jo enostavno rešimo tudi brez tega.

Ob upoštevanju tega, da velja  $T(n) < 2T(\lfloor (n+1)/2 \rfloor)$ , razvijajmo rekurzivno zvezo do  $k$ -tega koraka.

$$T(n) < 2T\left(\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor\right) < 4T\left(\left\lfloor \frac{n+3}{4} \right\rfloor\right) < \dots < 2^k T\left(\left\lfloor \frac{n+2^k-1}{2^k} \right\rfloor\right)$$

Ker velja  $T(1) = O(1)$ , naj bo  $k$  tak, da bo veljalo  $(n-1)/2^k < 1$ , torej  $k = \log_2(n)$ . Tako dobimo

$$T(n) = 2^{\log_2(n)} \cdot O(1) = n \cdot O(1) = O(n).$$

### Naloga 1.9.

- (a) Algoritem deluje pravilno, saj za vsako urejeno četverico vozlišč preveri, ali so ta zaporedoma povezana ter ali je začetno vozlišče enako končnemu, in se ustavi, ko naleti na četverico, ki ustreza tem pogojem – torej na trikotnik. Časovna zahtevnost je  $O(n^4)$ .

- (b) Zapišimo učinkovitejši algoritem.

```

for  $i = 1, \dots, n$  do
  for  $j = 1, \dots, n$  do
    if  $a_{ij} = 1$  then
      for  $k = 1, \dots, n$  do
        if  $a_{jk} = a_{ki} = 1$  then
          return TRUE
        end if
      end for
    end if
  end for
end for

```

```

end for
return FALSE

```

Zgornji algoritem reši problem v času  $O(n^3)$ .

V najboljšem primeru, torej ko obstaja usmerjen trikotnik (1, 2, 3) (ignorirali bomo primere, ko ima graf največ dve vozlišči), algoritem enkrat vstopi v zunanjo zanko in dvakrat v srednjo – pri drugem vstopu v srednjo zanko nato še trikrat vstopi v notranjo zanko. Ocenimo torej, da v tem primeru algoritem opravi 6 korakov.

V najslabšem primeru usmerjenega trikotnika ni in se tako vse zanke iztečejo. Algoritem bo  $n$ -krat vstopil v zunanjo zanko,  $n^2$ -krat v srednjo zanko, za vsako povezavo pa bo še  $n$ -krat vstopil v notranjo zanko. V tem primeru torej algoritem opravi  $n + n^2 + mn$  korakov, kjer je  $m$  število povezav v grafu.

### Naloga 1.10.

- (a) Zapišimo popravljen algoritem.

```

n ← A.length()
for i = 2, ..., n do
    j ← i
    while j > 1 ∧ A[j - 1] > A[i] do
        j ← j - 1
    end while
    A.reverse(j, i)
    if j + 1 < i then
        A.reverse(j + 1, i)
    end if
end for

```

popravek:  $j - 1$  namesto  $i - 1$

ponovno obrnemo že urejen del

- (b) Izpišimo stanje “tabele” po vsakem klicu ukaza  $A.reverse$ .

$i$	$j$	$A.reverse(j, i)$	$A.reverse(j + 1, i)$
2	1	[3, 5, 12, 9, 1, 15]	
3	3	[3, 5, 12, 9, 1, 15]	
4	3	[3, 5, 9, 12, 1, 15]	
5	1	[1, 12, 9, 5, 3, 15]	[1, 3, 5, 9, 12, 15]
6	6	[1, 3, 5, 9, 12, 15]	

### Naloga 1.11.

- (a) Algoritem vrne TRUE natanko tedaj, ko v grafu  $G$  obstaja Hamiltonova pot med vozliščema  $u$  in  $v$ . Trditev bomo dokazali z indukcijo.

Za graf z dvema vozliščema algoritem vrne TRUE natanko tedaj, ko sta vozlišči povezani, torej, ko obstaja Hamiltonova pot. Denimo, da je zgornja trditev pravilna za grafe z  $n \geq 2$  vozlišči. Če algoritem na vhod dobi graf z  $n + 1$

vozlišči, potem vrne TRUE, če obstaja vozlišče  $w$ , ki je sosednje vozlišču  $u$  in različno od vozlišča  $v$ , tako da v grafu  $G - u$  (z  $n$  vozlišči) obstaja Hamiltonova pot od  $w$  do  $v$ . Če je to res, potem v grafu  $G$  obstaja Hamiltonova pot od  $u$  do  $v$ . Po indukciji trditev velja za vse grafe.

- (b) Spet bomo uporabili indukcijo. Pri  $n = 2$  prvi pogoj ni resničen, v zanko pa ne vstopimo, tako da se zadnja vrstica izvede enkrat. Denimo, da se pri grafih z  $n - 1$  vozlišči ( $n \geq 3$ ) zadnja vrstica izvede  $\Theta((n - 3)!)$ -krat, in obravnavajmo primer, ko ima graf  $G$  natanko  $n$  vozlišč. Ker ima vozlišče  $u$  natanko  $n - 2$  sosedov in ker vozlišče  $v$  ni krajišče nobene Hamiltonove poti, se v zanki izvede  $n - 2$  rekurzivnih klicev na grafu  $G - u$  z  $n - 1$  vozlišči in isto lastnostjo kot  $G$ . Po izteku zanke se nato izvede še zadnja vrstica. Skupno število izvedb zadnje vrstice je tako

$$1 + (n - 2)\Theta((n - 3)!) = \Theta((n - 2)!).$$

### Naloga 1.12.

- (a) Algoritem kliče ukaz  $A.reverseStart$   $O(n^2)$ -krat. Ker se ta izvede v konstantnem času, je torej časovna zahtevnost algoritma  $O(n^2)$ .
- (b) Izpišimo stanje "tabele" po vsakem klicu ukaza  $A.reverseStart$ .

$i$	$j$	$A[i]$	$A[j]$	$A.reverseStart(j)$	$A.reverseStart(i)$
5	1	15	5		
	2		9		
	3		12		
	4		7		
4	1	7	5		
	2		9	[9, 5, 12, 7, 15]	[7, 12, 5, 9, 15]
	3	9	5		
3	1	5	7	[7, 12, 5, 9, 15]	[5, 12, 7, 9, 15]
	2	7	12	[12, 7, 5, 9, 15]	[5, 7, 12, 9, 15]
2	1	7	5		

Vidimo, da po koncu algoritma "tabela" ni urejena, torej algoritem ne deluje pravilno.

- (c) Da bomo dobili algoritem, ki bo pravilno urejal, bomo poskrbeli, da po obhodu notranje zanke pri indeksih  $i$  in  $j$  velja  $A[k] \leq A[i]$  za vse  $k \leq j$ . Tako bomo dosegli, da po obhodu zunanje zanke vrednost  $A[i]$  ni manjša od svojih predhodnikov, kar bo privedlo do urejenosti ob izteku zanke. V notranji zanki bo torej treba poskrbeti, da vrednost  $A[j]$  pride na  $i$ -to mesto, elementi med  $j$ -tim in  $i$ -tim pa ostanejo v tem intervalu (ne nujno na istem mestu).

```

 $n \leftarrow A.length()$ 
for  $i = n, \dots, 2$  do

```



```

for  $j = 1, \dots, i - 1$  do
  if  $A[j] > A[i]$  then
    A.reverseStart( $i - 1$ )
    A.reverseStart( $i - j$ )
    A.reverseStart( $i$ )
  end if
end for
end for

```

Algoritem še vedno teče v času  $O(n^2)$ .

Da se prepričamo, da algoritem deluje pravilno, dokažimo, da velja zgoraj omenjena invarianta za notranjo zanko. Predpostavimo torej, da velja  $A[k] \leq A[i]$  za vse  $k < j$ . Če velja tudi  $A[j] \leq A[i]$ , potem se ne zgodi nič in invarianta drži. V nasprotnem primeru označimo z  $a_h$  ( $1 \leq h \leq n$ ) vrednost  $A[i]$  ob vstopu v obhod zanke, in z  $b_h$  ( $1 \leq h \leq n$ ) vrednost  $A[i]$  ob izstopu iz obhoda zanke. Po predpostavki velja  $a_k \leq a_i$  ( $1 \leq k \leq j$ ) in  $a_i > a_j$ . Poglejmo, kaj se dogaja ob klicih ukazov A.reverseStart.

$a_1, \dots, a_{j-1}, \quad a_j, \quad a_{j+1}, \dots, a_{i-1}, \quad a_i, \quad a_{i+1}, \dots$   
 A.reverseStart( $i - 1$ ):  
 $a_{i-1}, \dots, a_{j+1}, \quad a_j, \quad a_{j-1}, \dots, \quad a_1, \quad a_i, \quad a_{i+1}, \dots$   
 A.reverseStart( $i - j$ ):  
 $a_j, \quad a_{j+1}, \dots, a_{i-1}, \quad a_{j-1}, \dots, \quad a_1, \quad a_i, \quad a_{i+1}, \dots$   
 A.reverseStart( $i$ ):  
 $a_i, \quad a_1, \dots, a_{j-1}, \quad a_{i-1}, \dots, a_{j+1}, \quad a_j, \quad a_{i+1}, \dots$   
 =  $b_1, \quad b_2, \dots, b_j, \quad b_{j+1}, \dots, b_{i-1}, \quad b_i, \quad b_{i+1}, \dots$

Opazimo, da velja  $b_i = a_j > a_i = b_1$  in  $b_i = a_j \geq a_{k-1} = b_k$  ( $2 \leq k \leq j$ ). Zanjča invarianta torej drži.

Preizkusimo algoritem še na primeru iz točke (b).

$i$	$j$	$A[i]$	$A[j]$	A.reverseStart( $i - 1$ )	A.reverseStart( $i - j$ )	A.reverseStart( $i$ )
5	1	15	5			
	2		9			
	3		12			
	4		7			
4	1	7	5			
	2		9	[12, 9, 5, 7, 15]	[9, 12, 5, 7, 15]	[7, 5, 12, 9, 15]
	3	9	12	[12, 5, 7, 9, 15]	[12, 5, 7, 9, 15]	[9, 7, 5, 12, 15]
3	1	5	9	[7, 9, 5, 12, 15]	[9, 7, 5, 12, 15]	[5, 7, 9, 12, 15]
	2	9	7			
2	1	7	5			

Vidimo, da algoritem na tem primeru res deluje pravilno.

**Naloga 1.13.**

- (a) Opazimo, da ima algoritem tri dele, ki se razlikujejo le po tem, katera številka v številih se obravnava. Vsakič se števila iz tabele  $s$  dodajo v ustrezno vrsto, nato pa se vsebina vrst zlepi (po vrsti po indeksih tabele  $T$ ) v novo vsebino tabele  $T$ . Zapisali bomo torej vsebino vrst po vsaki od zunanjih zank, vsebino tabele  $s$  po sledeči zanki pa lahko razberemo.

zadnje: [100,200,980,100], [], [], [], [], [145], [146,486], [367,257], [], [359,359,909]

srednje: [100,200,100,909], [], [], [], [145,146], [257,359,359], [367], [], [980,486], []

prve: [], [100,100,145,146], [200,257], [359,359,367], [486], [], [], [], [909,980]

Algoritem torej vrne tabelo

[100,100,145,146,200,257,359,359,367,486,909,980].

- (b) Časovna zahtevnost algoritma je  $O(n)$  – notranje zanke namreč naredijo konstantno število korakov.
- (c) Algoritem uredi vhodno tabelo po velikosti in jo vrne. Pri tem upošteva dejstvo, da je mogoče trimestna števila predstaviti s končnim številom simbolov iz končne abecede in tako doseže časovno zahtevnost, ki je boljša od  $\Omega(n \log n)$  (t.i. *bucket sort*).
- (d) Ker algoritem teče v linearnem času, bo čas izvajanja premo sorazmeren z velikostjo vhoda. Pri vhodu velikosti  $n = 50\,000$  torej pričakujemo, da bo algoritem potreboval približno

$$\frac{50\,000}{10\,000} \cdot 0.25 \text{ s} = 1.25 \text{ s}.$$

**Naloga 1.14.**

Zapišimo algoritem.

```

function ZLIVANJE( $S[0 \dots n-1]$  seznam števil)
  if  $S.length() \leq 1$  then
    return  $S$ 
  end if
   $k \leftarrow \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ 
   $\ell \leftarrow \lfloor \frac{2n}{3} \rfloor$ 
   $A \leftarrow \text{ZLIVANJE}(S[0 \dots k-1])$ 
   $B \leftarrow \text{ZLIVANJE}(S[k \dots \ell-1])$ 
   $C \leftarrow \text{ZLIJ}(A, B)$ 
   $D \leftarrow \text{ZLIVANJE}(S[\ell \dots n-1])$ 
   $E \leftarrow \text{ZLIJ}(C, D)$ 
  return  $E$ 
end function

```

Časovno zahtevnost algoritma lahko opišemo z rekurzivno zvezo

$$T(n) = 3T\left(\frac{n}{3}\right) + O(n).$$

Po krovnem izreku je časovna zahtevnost algoritma  $T(n) = O(n \log n)$ .

### Naloga 1.15.

Napišemo si matriko  $A$ , jo pomnožimo z  $x$ , in v  $i$ -ti vrstici izrazimo  $x_i$  iz enačb  $Ax = b$ . Opazimo, da so vse vrednosti, ki jih rabimo za izračun  $x_i$ , že poračunane. To je natanko reševanje sistema enačb z Gaussovo eliminacijo, ki je bila za nas že vnaprej narejena, ko smo kot vhod dobili zgornje trikotno matriko.

**Vhod:**  $A \in \mathbb{Z}^{n \times n}$  zgornje trikotna matrika z neničelnimi vrednostmi na diagonalni,  $b \in \mathbb{Z}^n$

```

for  $i = n, n-1, \dots, 1$  do
     $x_i \leftarrow (b_i - \sum_{j=i+1}^n A_{ij}x_j) / A_{ii}$ 
end for
return  $(x_i)_{i=1}^n$ 

```

Časovna zahtevnost algoritma je  $O(n^2)$ .

### Naloga 1.16.

- (a) Primer vhoda, ki ga algoritem ne uredi pravilno, je  $[2, 3, 1]$ . V prvem obhodu algoritem najprej primerja 2 in 3 ter ju ne zamenja, nato pa še zamenja 3 in 1. Ker je v obhodu opravil samo eno zamenjavo, se algoritem ustavi in vrne seznam  $[2, 1, 3]$ .

Primer lahko splošimo na sezname  $A[1 \dots n]$  poljubne dolžine, za katere velja  $A[i-1] \leq A[i]$  ( $2 \leq i \leq n-1$ ) in  $A[n] < A[n-2]$ . Tako kot v prejšnjem primeru algoritem zamenja le zadnja dva elementa, kar pa ne zadostuje za pravilno ureditev.

- (b) Zapišimo opisani algoritem.

**Vhod:**  $A[1 \dots n]$  seznam števil

```

 $k \leftarrow 2$ 
while  $k \geq 2$  do
     $k \leftarrow 0$ 
    for  $i = 2, \dots, n$  do
        if  $A[i-1] > A[i]$  then
             $A[i-1], A[i] \leftarrow A[i], A[i-1]$ 
             $k \leftarrow k+1$ 
        end if
    end for
end while
return  $A$ 

```

Prepričamo se lahko, da po  $j$ -tem obhodu zunanje zanke zadnjih  $j$  elementov na mestu. V najslabšem primeru algoritem torej opravi  $O(n^2)$  korakov, kar tudi dosežemo, če na vhod dobi padajoče urejen seznam. Časovna zahtevnost algoritma je torej  $O(n^2)$ .

- (c) Število primerjav je odvisno od števila obhodov zanke **while**. En sam obhod dosežemo pri že urejenih seznamih in pri primerih iz točke (a). V tem primeru algoritem opravi  $n$  primerjav elementov seznama  $A$  in dve primerjavi pri vstopu v zanko **while** (pri zadnji se zanka konča).

## 2.2 Celoštevilsko linearno programiranje

### Naloga 2.1.

Za vsak projekt  $p_i \in \mathcal{P}$  bomo uvedli spremenljivko  $x_i$ , katere vrednost interpretiramo kot

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{če naj občina sponzorira projekt } p_i, \text{ in} \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Zapišimo celoštevilski linearni program.

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^n c_i x_i \quad \text{p.p.} \\ \forall i \in \{1, \dots, n\}: \quad & 0 \leq x_i \leq 1, \quad x_i \in \mathbb{Z} \\ & \sum_{i=1}^n d_i x_i \leq M \\ & \sum_{i=1}^n a_i x_i \geq N \end{aligned}$$

### Naloga 2.2.

Celoštevilskemu linearnemu programu iz rešitve naloge 2.1 bomo dodali nove omejitve.

- (a)  $\forall (p_i, p_j) \in V: x_i \leq x_j$
- (b)  $\forall H \in S: \sum_{p_i \in H} x_i \leq 1$

### Naloga 2.3.

Za vsako skladišče, ki ga uporabimo, želimo vedeti, kateri stranki bomo dostavili dobrino. Za  $i$ -to skladišče ( $1 \leq i \leq n$ ) in  $j$ -to stranko ( $1 \leq j \leq m$ ) bomo uvedli spremenljivko  $x_{ij}$ , katere vrednost interpretiramo kot

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{če bomo iz } i\text{-tega skladišča dostavili } j\text{-ti stranki, in} \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Zapišimo celoštevilski linearni program.

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (f_i + c_{ij}) x_{ij} \quad \text{p.p.}$$

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \forall j \in \{1, \dots, m\}: 0 \leq x_{ij} \leq 1, \quad x_{ij} \in \mathbb{Z}$$

Vsako skladišče uporabimo največ enkrat:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}: \sum_{j=1}^m x_{ij} \leq 1$$

Zadostimo potrebe vsake stranke:

$$\forall j \in \{1, \dots, m\} : \sum_{i=1}^n x_{ij} \geq d_j$$

**Naloga 2.4.**

Naj bo  $G = (V, E)$  neusmerjen graf. Množica  $D \subseteq V$  *dominira* graf  $G$  če je vsako vozlišče iz  $V$  bodisi v  $D$ , bodisi ima soseda v  $D$ . Pri problemu dominacijske množice iščemo najmanjšo množico  $D_{\min}$ , ki dominira graf  $G$ .

Za vsako vozlišče  $v \in V$  bomo uvedli spremenljivko  $x_v$ , katere vrednost interpretiramo kot

$$x_v = \begin{cases} 1, & \text{vozlišče } v \text{ je v množici } D_{\min}, \text{ in} \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Zapišimo celoštevilski linearni program.

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{v \in V} x_v \quad \text{p.p.} \\ \forall v \in V : \quad & 0 \leq x_v \leq 1, \quad x_v \in \mathbb{Z} \\ \forall v \in V : \quad & x_v + \sum_{uv \in E} x_u \geq 1 \end{aligned}$$

**Naloga 2.5.**

Naj bo  $G = (V, E)$  dvodelen graf. Lahko torej zapišemo  $V = A \cup B$  tako, da sta množici  $A$  in  $B$  disjunktni ter za vsako povezavo  $uv \in E$  velja  $u \in A, v \in B$ . Množica  $M \subseteq E$  je *prirejanje*, če nobeni dve povezavi iz  $M$  nimata skupnega krajišča. Iščemo največje prirejanje  $M_{\max}$ .

Za vsako povezavo  $uv \in E$  bomo uvedli spremenljivko  $x_{uv}$ , katere vrednost interpretiramo kot

$$x_{uv} = \begin{cases} 1, & \text{povezava } uv \text{ je v množici } M_{\max}, \text{ in} \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Zapišimo celoštevilski linearni program.

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{uv \in E} x_{uv} \quad \text{p.p.} \\ \forall uv \in E : \quad & 0 \leq x_{uv} \leq 1, \quad x_{uv} \in \mathbb{Z} \\ \forall u \in A : \quad & \sum_{uv \in E} x_{uv} \leq 1 \\ \forall v \in B : \quad & \sum_{uv \in E} x_{uv} \leq 1 \end{aligned}$$

**Naloga 2.6.**

Naj bo  $G = (V, E)$  usmerjen graf in  $u, v \in V$  njegovi vozlišči. Poiskati želimo najkrajšo pot  $P_{uv}$  od vozlišča  $u$  do vozlišča  $v$ .

Za vsako povezavo  $uv \in E$  bomo uvedli spremenljivko  $x_{uv}$ , katere vrednost interpretiramo kot

$$x_{uv} = \begin{cases} 1, & \text{povezava } uv \text{ je v poti } P_{uv}, \text{ in} \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Zapišimo celoštevilski linearni program.

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{uv \in E} x_{uv} \quad \text{p.p.} \\ \forall uv \in E: \quad & 0 \leq x_{uv} \leq 1, \quad x_{uv} \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Iz vozlišča  $u$  izstopimo enkrat več kakor vstopimo:

$$\sum_{yu \in E} x_{yu} - \sum_{uz \in E} x_{uz} = -1$$

V vozlišče  $v$  vstopimo enkrat več kakor izstopimo:

$$\sum_{yv \in E} x_{yv} - \sum_{vz \in E} x_{vz} = 1$$

V ostala vozlišča vstopimo natanko tolikokrat kakor vstopimo:

$$\forall w \in V \setminus \{u, v\}: \sum_{yw \in E} x_{yw} - \sum_{wz \in E} x_{wz} = 0$$

Zgornje omejitve sicer dovolijo, da posamezno vozlišče obiščemo večkrat, a se je mogoče teh zank znebiti, pri čemer se vrednost ciljne funkcije zmanjša. Tako bo optimalna rešitev zagotovo pot od vozlišča  $u$  do vozlišča  $v$ .

**Naloga 2.7.**

Oštevilčimo gnezda s števili od 1 do 12: gnezdi taščic naj imata števili 1 in 2, gnezda vrtnih penic naj imajo števila 3 in 4, 5 in 6, gnezda travniških cip naj imajo števila 7 in 8, in 9, gnezdi belih pastiric naj imata števili 10 in 11, sovino gnezdo pa naj ima število 12. Za  $i$ -to gnezdo ( $1 \leq i \leq 12$ ) in  $j \in \{1, 2, 3\}$  bomo uvedli spremenljivko  $x_{ij}$ , katere vrednost interpretiramo kot

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{če naj kukavica v } i\text{-to gnezdo izleže natanko } j \text{ jajc, in} \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Naj bo  $V = \{\{1, 2\}, \{3, 4, 5, 6\}, \{7, 8, 9\}, \{10, 11\}, \{12\}\}$  particija indeksov gnezd glede na vrsto ptice. Zapišimo celoštevilski linearni program.

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^{12} j \, p_{ij} \, x_{ij} \quad \text{p.p.} \\ \forall i \in \{1, \dots, 12\}: \quad & \sum_{j=1}^3 x_{ij} \leq 1 \end{aligned}$$

Skupaj izleže 16 jajc:

$$\sum_{i=1}^{12} \sum_{j=1}^3 j x_{ij} = 16$$

K vsaki vrsti ptice izleže vsaj eno jajce:

$$\forall S \in V: \sum_{i \in S} \sum_{j=1}^3 x_{ij} \geq 1$$

Pri taščicah izleže strogo več jajc kot pri belih pastiricah:

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 j x_{ij} - \sum_{i=10}^{11} \sum_{j=1}^3 j x_{ij} \geq 1$$

Pri drugi beli pastirici ne bo odložila jajca, če bo pri prvi taščici odložila dve jajci ali več:

$$\sum_{j=2}^3 x_{1j} + \sum_{j=1}^3 x_{11,j} \leq 1$$

### Naloga 2.8.

Za vsako sorto  $i \in I = \{RM, LR, RR\}$  (rumeni muškat, laški rizling, renski rizling) in kupca  $j \in J = \{K, L, Z, O\}$  (bar Kocka, bar Luka, župnišče Sv. Martin, občina Duplek) bomo uvedli spremenljivko  $x_{ij}$ , katere vrednost interpretiramo kot

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{če naj Janez proda sorto } i \text{ kupcu } j, \text{ in} \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Zapišimo celoštevilski linearni program.

$$\begin{aligned} \max \quad & 2000x_{RM,K} + 2200x_{RM,L} + 750x_{RM,Z} + 1800x_{RM,O} \\ & + 10000x_{LR,K} + 5500x_{LR,L} + 750x_{LR,Z} + 1800x_{LR,O} \\ & + 5000x_{RR,K} + 5500x_{RR,L} + 750x_{RR,Z} + 1800x_{RR,O} \quad \text{p.p.} \end{aligned}$$



$$\forall i \in I \forall j \in J: 0 \leq x_{ij} \leq 1, \quad x_{ij} \in \mathbb{Z}$$

Vsako sorto proda največ enemu kupcu:

$$\forall i \in I: \sum_{j \in J} x_{ij} \leq 1$$

Vsak kupec dobi največ eno sorto:

$$\forall j \in J: \sum_{i \in I} x_{ij} \leq 1$$

Občina ne bo kupila rumenega muškata ali laškega rizlinga:

$$x_{RM,O} + x_{LR,O} = 0$$

Če Kocka dobi laški rizling, potem Luka dobi rumeni muškat:

$$x_{LR,K} \leq x_{RM,L}$$

Če občina in župnišče ne kupita ničesar, tudi Kocka ne kupi ničesar:

$$\sum_{i \in I} (x_{i,O} + x_{i,Z} - x_{i,K}) \geq 0$$

Ženin pogoj:

$$x_{s_A,A} + x_{s_B,B} + \sum_{j \in J \setminus \{C\}} x_{s_C,j} \leq 2$$

### Naloga 2.9.

Graf  $G = (V, E)$  smatramo kot usmerjen graf (če je dani graf neusmerjen, vsako povezavo nadomestimo s parom nasprotno usmerjenih povezav). Naj bo  $n = |V|$  število vozlišč grafa  $G$ . Rešitev celoštevilkega linearnega programa predstavlja usmerjeno drevo najkrajših poti s korenem v vozlišču  $u$ .

Za vsako povezavo  $vw \in E$  bomo uvedli spremenljivko  $x_{vw}$ , katere vrednost interpretiramo kot

$$x_{vw} = \begin{cases} 1, & \text{povezava } vw \text{ je v drevesu najkrajših poti, in} \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Poleg tega bomo za vsako vozlišče  $v \in V$  uvedli še spremenljivko  $y_v$ , ki nam pove razdaljo od vozlišča  $u$  do vozlišča  $v$ . Minimizarati želimo vse vrednosti  $y_v$ , zato bomo minimizirali njihovo vsoto.

Zapišimo celoštevilski linearni program.

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{v \in V} y_v \quad \text{p.p.} \\ \forall vw \in E: \quad & 0 \leq x_{vw} \leq 1, \quad x_{vw} \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Vozlišče  $u$  nima vstopne povezave v drevesu:

$$\sum_{vu \in E} x_{vu} = 0$$

Ostala vozlišča imajo natanko eno vstopno povezavo v drevesu:

$$\forall vw \in E, v \neq u: \sum_{vw \in E} x_{vw} = 1$$

Vozlišče  $u$  je na razdalji 0 od sebe:

$$y_u = 0$$

Če je povezava  $vw$  v drevesu, je razdalja do  $w$  vsaj za 1 večja od razdalje do  $v$ , sicer pa je razlika največ  $n-1$ :

$$\forall vw \in E: \quad y_v + nx_{vw} \leq y_w + n - 1$$

V drevesu je natanko  $n-1$  povezav:

$$\sum_{vw \in E} x_{vw} = n - 1$$

### Naloga 2.10.

*Pravilno barvanje* (neusmerjenega) grafa  $G = (V, E)$  je taka dodelitev barv vozliščem grafa  $G$ , da imata krajišči vsake povezave različno barvo. *Kromatično število* grafa  $G$  je najmanjše število barv, ki jih potrebujemo za pravilno barvanje grafa  $G$ .

Naj bo  $n = |V|$  število vozlišč grafa  $G$  – to je tudi največje število barv, ki jih lahko uporabimo. Za vsako vozlišče  $v \in V$  in vsako barvo  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) bomo uvedli spremenljivko  $x_{vi}$ , katere vrednost interpretiramo kot

$$x_{vi} = \begin{cases} 1, & \text{vozlišče } v \text{ pobarvamo z barvo } i, \text{ in} \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Poleg tega bomo uvedli še spremenljivko  $t$ , ki šteje uporabljene barve.

Zapišimo celoštevilski linearni program.

$$\min t \quad \text{p.p.}$$

$$\forall v \in V \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}: \quad 0 \leq x_{vi} \leq 1, \quad x_{vi} \in \mathbb{Z}$$

Vsako vozlišče je natanko ene barve:

$$\forall v \in V: \quad \sum_{i=1}^n x_{vi} = 1$$

Krajišči povezav sta različnih barv:

$$\forall uv \in E \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}: \quad x_{ui} + x_{vi} \leq 1$$

Omejimo  $t$  z indeksi uporabljenih barv:

$$\forall uv \in E \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}: \quad ix_{vi} \leq t$$

**Naloga 2.11.**

Pot bomo opisali z množico povezav v polnem grafu z  $n$  vozlišči (mesti), ki tvorijo cikel. Za vsak par mest  $(i, j)$  ( $1 \leq i, j \leq n$ ) bomo uvedli spremenljivko  $x_{ij}$ , katere vrednost interpretiramo kot

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{iz } i\text{-tega mesta odpotujemo v } j\text{-to mesto} \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Poskrbeti bomo morali še, da bo naša rešitev res sestavljena iz enega samega cikla. V ta namen bomo za  $i$ -to mesto ( $1 \leq i \leq n$ ) uvedli spremenljivko  $y_i$ , ki pove, katero po vrsti smo to mesto obiskali. Ker je rešitev cikel, si lahko poljubno izberemo, katero je prvo obiskano mesto (npr. mesto z indeksom 1).

Zapišimo celoštevilski linearni program.

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_{ij} c_{ij} \quad \text{p.p.} \\ \forall i, j \in \{1, \dots, n\}: \quad & 0 \leq x_{ij} \leq 1, \quad x_{ij} \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

V vsako mesto prispemo natanko enkrat:

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}: \quad \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1$$

Vsako mesto zapustimo natanko enkrat:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}: \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1$$

Če iz mesta  $i$  potujemo v mesto  $j > 1$ , mu to sledi v vrstnem redu:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \forall j \in \{2, \dots, n\}: y_i + nx_{ij} \leq y_j + n - 1$$

Zadnji pogoj poskrbi, da rešitev nima cikla brez mesta z indeksom 1. Skupaj s pogojem, da vsako mesto obiščemo in zapustimo natanko enkrat, si tako zagotovimo, da bo rešitev obsegala natanko en cikel. Vrednost spremenljivk  $y_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) ni omejena – zadnji pogoj poskrbi le, da je največja razlika med njimi enaka  $n - 1$ .

**Naloga 2.12.**

Denimo, da imamo usmerjen graf  $G = (V, E)$ , kjer ima vsaka povezava  $uv \in E$  svojo ceno  $c_{uv}$  (če je dani graf neusmerjen, vsako povezavo nadomestimo s parom nasprotno usmerjenih povezav z isto ceno). Minimalno vpeto drevo je drevo  $T = (V, E')$  z  $E' \subseteq E$ , za katerega je vsota cen povezav iz  $E'$  najmanjša.

Naj bo  $n = |V|$  število vozlišč grafa  $G$ . Za vsako povezavo  $uv \in E$  bomo uvedli spremenljivko  $x_{uv}$ , katere vrednost interpretiramo kot

$$x_{uv} = \begin{cases} 1, & \text{povezava } uv \text{ je v množici } E', \text{ in} \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Poskrbeti moramo še, da bo naša rešitev res drevo. Izberimo si vozlišče  $r \in V$  kot koren drevesa in za vsako vozlišče  $v \in V$  uvedimo še spremenljivko  $y_v$ , ki se povečuje z globino vozlišča v drevesu.

Zapišimo celoštevilski linearni program.

$$\begin{aligned} \min \sum_{uv \in E} x_{uv} c_{uv} \quad \text{p.p.} \\ \forall uv \in E: \quad 0 \leq x_{uv} \leq 1, \quad x_{uv} \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

V vozlišče  $r$  ne vstopi nobena povezava v drevesu:

$$\sum_{ur \in E} x_{ur} = 0$$

V ostala vozlišča vstopi natanko ena povezava:

$$\forall u \in V \setminus \{r\}: \quad \sum_{uv \in E} x_{uv} = 1$$

Vrednost  $y_v$  ( $v \in V$ ) se povečuje po povezavah iz drevesa:

$$\forall uv \in E: \quad y_u + nx_{uv} \leq y_v + n - 1$$

Zadnji pogoj poskrbi, da so vsa vozlišča v drevesu in ne v nepovezanem ciklu. Podobno kot pri nalogi 2.11 vrednost spremenljivk  $y_v$  ( $v \in V$ ) ni omejena – pogoj poskrbi le, da je največja razlika med njimi največ  $n - 1$ .

### Naloga 2.13.

Za  $i$ -tega asistenta ( $1 \leq i \leq n$ ) in  $j$ -ti predmet ( $1 \leq j \leq m$ ) bomo uvedli spremenljivki  $x_{ij}$  in  $y_{ij}$ , kjer je  $x_{ij}$  število skupin, ki jih  $i$ -temu asistentu dodelimo pri  $j$ -tem predmetu, vrednost  $y_{ij}$  pa interpretiramo kot

$$y_{ij} = \begin{cases} 1, & i\text{-ti asistent bo izvajal vaje pri } j\text{-tem predmetu, in} \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Poleg tega bomo uvedli še spremenljivko  $t$ , s katero omejimo največje število različnih predmetov pri posameznem asistentu.

Zapišimo celoštevilski linearni program.

$$\begin{aligned} \min t \quad \text{p.p.} \\ \forall i \in \{1, \dots, n\} \forall j \in \{1, \dots, m\}: \quad x_{ij} \geq 0, \quad x_{ij} \in \mathbb{Z} \\ \forall i \in \{1, \dots, n\} \forall j \in \{1, \dots, m\}: \quad 0 \leq y_{ij} \leq 1, \quad y_{ij} \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$x_{ij} = 0$  natanko tedaj, ko  $y_{ij} = 0$ :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \forall j \in \{1, \dots, m\}: \quad y_{ij} \leq x_{ij} \leq c_j y_{ij}$$

Omejimo število ur za vsakega asistenta:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}: a_i \leq \sum_{j=1}^m u_j x_{ij} \leq b_i$$

Neželenih predmetov ne dodelimo:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}: \quad \sum_{j \in N_i} y_{ij} = 0$$

Za vsak predmet dodelimo potrebno število skupin:

$$\forall j \in \{1, \dots, m\} : \sum_{i=1}^n x_{ij} = c_j$$

Nobenega predmeta ne dodelimo asistentoma  $p$  in  $q$ :

$$\forall j \in \{1, \dots, m\} : y_{pj} + y_{qj} \leq 1$$

Število različnih predmetov na asistenta omejimo s  $t$ :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : \sum_{j=1}^m y_{ij} \leq t$$

### Naloga 2.14.

Za stroj  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) bomo uvedli spremenljivko  $x_i$ , dodatno za opravilo  $j$  in časovno enoto  $h$  ( $1 \leq h, j \leq m$ ) pa še spremenljivko  $y_{ijh}$ . Njihove vrednosti interpretiramo kot

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{če stroj } i \text{ izvede vsaj eno opravilo, in} \\ 0 & \text{sicer;} \end{cases}$$

ter  $y_{ijh} = \begin{cases} 1, & \text{če stroj } i \text{ izvede opravilo } j \text{ v časovni enoti } h, \text{ in} \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$

Dodatno bomo uvedli še spremenljivko  $t$ , katere vrednost bo enaka časovni enoti dokončanja zadnjega stroja.

Zapišimo celoštevilski linearni program.

$$\begin{array}{ll} \min t & \text{p.p.} \\ \forall i \in \{1, \dots, n\} : & 0 \leq x_i \leq 1, \quad x_i \in \mathbb{Z} \\ \forall i \in \{1, \dots, n\} \forall j, h \in \{1, \dots, m\} : & 0 \leq y_{ijh} \leq 1, \quad y_{ijh} \in \mathbb{Z} \end{array}$$

Vsako opravilo se izvede natanko enkrat:

$$\forall j \in \{1, \dots, m\} : \sum_{i=1}^n \sum_{h=1}^m y_{ijh} = 1$$

Vsako stroj lahko hkrati opravlja največ eno opravilo:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \forall h \in \{1, \dots, m\} : \sum_{j=1}^m y_{ijh} \leq 1$$

Omejitev stroškov obratovanja:

$$\begin{array}{l} \forall i \in \{1, \dots, n\} : \\ \sum_{j=1}^m \sum_{h=1}^m y_{ijh} \leq m x_i \\ \sum_{i=1}^n c_i x_i \leq C \end{array}$$

Vrstni red opravl:

$$\forall (j, k) \in P : \sum_{i=1}^n \sum_{h=1}^m h(y_{ikh} - y_{ijh}) \geq 1$$

Hkratnost opravil:

$$\forall (j, k) \in S \forall h \in \{1, \dots, m\} : \sum_{i=1}^n (y_{ijh} + y_{ikh}) \leq 1$$

Omejitev hkrati aktivnih strojev:

$$\forall h \in \{1, \dots, m\} : \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m y_{ijh} \leq A$$

Omejitev časa dokončanja:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \forall j, h \in \{1, \dots, m\} : hy_{ijh} \leq t$$

### Naloga 2.15.

- (a) Očitno je, da bomo uporabili največ  $n$  košev, saj lahko vsak predmet postavimo v svoj koš. Zato bomo za  $i$ -ti predmet in  $j$ -ti koš ( $1 \leq i, j \leq n$ ) uvedli spremenljivko  $x_{ij}$ , katere vrednost interpretiramo kot

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & i\text{-ti predmet postavimo v } j\text{-ti koš, in} \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Poleg tega bomo uvedli še spremenljivko  $t$ , ki bo štela število uporabljenih košev.

Zapišimo celoštevilski linearni program.

$$\begin{array}{ll} \min t & \text{p.p.} \\ \forall i, j \in \{1, \dots, n\} : & 0 \leq x_{ij} \leq 1 \quad x_{ij} \in \mathbb{Z} \\ & 0 \leq t \leq 1 \quad t \in \mathbb{Z} \end{array}$$

Omejitev velikosti košev:

$$\forall j \in \{1, \dots, n\} : \sum_{i=1}^n s_i x_{ij} \leq V$$

Štetje košev:

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\} : jx_{ij} \leq t$$

- (b) Dodajmo še zahtevano omejitev.

$$\forall (h, i) \in L \forall j \in \{1, \dots, n\} : x_{hj} + x_{ij} \leq 1$$

**Naloga 2.16.**

Za vsak strežnik  $h$  ( $0 \leq h \leq k$ ), ponudnika  $i$  ( $1 \leq i \leq m$ ) in posnetek  $j$  ( $1 \leq j \leq n$ ) bomo uvedli spremenljivko  $x_{hij}$ , za strežnik  $h$  ( $1 \leq h \leq k$ ) in posnetek  $j$  ( $1 \leq j \leq n$ ) pa dodatno še spremenljivko  $y_{hj}$ . Njihove vrednosti interpretiramo kot

$$x_{hij} = \begin{cases} 1, & \text{ponudniku } i \text{ pošljamo posnetek } j \text{ iz strežnika } h, \text{ in} \\ 0 & \text{sicer;} \end{cases}$$

$$\text{ter } y_{hj} = \begin{cases} 1, & \text{posnetek } j \text{ naložimo na strežnik } h, \text{ in} \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Zapišimo celoštevilski linearni program.

$$\min \sum_{h=0}^k \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n r_{ij} \ell_{hi} x_{hij} \quad \text{p.p.}$$

$$\forall h \in \{0, \dots, k\} \forall i \in \{1, \dots, m\} \forall j \in \{1, \dots, n\} : \quad 0 \leq x_{hij} \leq 1, \quad x_{hij} \in \mathbb{Z}$$

$$\forall h \in \{1, \dots, k\} \forall j \in \{1, \dots, n\} : \quad 0 \leq y_{hj} \leq 1, \quad y_{hj} \in \mathbb{Z}$$

Omejitev prostora:

$$\forall h \in \{1, \dots, k\} : \quad \sum_{j=1}^n s_j y_{hj} \leq c_h$$

Za dostavo mora biti posnetek prisoten na strežniku:

$$\forall h \in \{0, \dots, k\} \forall i \in \{1, \dots, m\} \forall j \in \{1, \dots, n\} : \quad x_{hij} \leq y_{hj}$$

Strežnika za posnetek ne uporabimo, če se nahaja na strežniku z manjšo latenco:

$$\forall h, t \in \{0, \dots, k\} \forall i \in \{1, \dots, m\} \forall j \in \{1, \dots, n\} : \quad (\ell_{hi} - \ell_{ti})(x_{hij} + y_{tj}) \leq 1$$

Vsak posnetek pošljamo ponudniku iz natanko enega strežnika:

$$\forall h \in \{0, \dots, k\} \forall j \in \{1, \dots, n\} : \quad \sum_{i=1}^m x_{hij} = 1$$

**Naloga 2.17.**

Za  $i$ -tega trgovca ( $1 \leq i \leq n$ ) bomo uvedli spremenljivke  $x_i$ ,  $y_i$  in  $z_i$ , pri čemer sta  $x_i$  in  $y_i$  število zabojev avokadov oziroma banan, ki jih distributer proda  $i$ -temu trgovcu, in  $z_i$  število voženj tovornjakov, ki bodo sadje dostavili do  $i$ -tega trgovca. Poleg tega bomo uvedli še spremenljivki  $u$  in  $v$ , ki ju interpretiramo kot

$$u = \begin{cases} 1, & \text{trgovec } p \text{ kupi avokade, in} \\ 0 & \text{sicer;} \end{cases}$$

$$\text{ter } v = \begin{cases} 1, & \text{trgovec } p \text{ kupi banane, in} \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Zapišimo celoštevilski linearni program.

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^n (a_i x_i + b_i y_i - d_i z_i) && \text{p.p.} \\ \forall i \in \{1, \dots, n\} : & 0 \leq x_i \leq 1, && x_i \in \mathbb{Z} \\ \forall i \in \{1, \dots, n\} : & 0 \leq y_i \leq 1, && y_i \in \mathbb{Z} \\ \forall i \in \{1, \dots, n\} : & 0 \leq z_i \leq 1, && z_i \in \mathbb{Z} \\ & 0 \leq u \leq 1, && u \in \mathbb{Z} \\ & 0 \leq v \leq 1, && v \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Skupno število zabojev:

$$\begin{aligned} \forall i \in \{1, \dots, n\} : & x_i \leq A \\ \forall i \in \{1, \dots, n\} : & y_i \leq B \end{aligned}$$

Omejitev porabe trgovca:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : a_i x_i + b_i y_i \leq c_i$$

Število tovornjakov:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : x_i + y_i \leq K z_i$$

Trgovec  $p$  ne kupi obojega:

$$\begin{aligned} x_p &\leq A u \\ y_p &\leq B v \\ u + v &\leq 1 \end{aligned}$$

Trgovec  $q$  kupi avokade, če jih tudi  $r$ :

$$x_r \leq A x_q$$

### Naloga 2.18.

Očitno bomo potrebovali največ  $n$  delavcev, zato bomo za  $h$ -tega delavca ( $1 \leq h \leq n$ ),  $i$ -to nalogo ( $1 \leq i \leq n$ ) in  $k$ -to časovno enoto ( $1 \leq k \leq T$ ) uvedli spremenljivko  $x_{hik}$ , katere vrednost interpretiramo kot

$$x_{hik} = \begin{cases} 1; & h\text{-ti delavec začne izvajati } i\text{-to nalogo v } k\text{-ti časovni enoti, in} \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Poleg tega bomo uvedli še spremenljivko  $r$ , ki šteje število delavcev.

Zapišimo celoštevilski linearni program, pri čemer uporabimo oznako  $T_i = T - t_i + 1$  za zadnji možen čas začetka  $i$ -te naloge.

$$\begin{aligned} \min \quad & r && \text{p.p.} \\ \forall h, i \in \{1, \dots, n\} \forall k \in \{1, \dots, T\} : & 0 \leq x_{hik} \leq 1, && x_{hik} \in \mathbb{Z} \\ & r \geq 0, && r \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$



Vsako nalogo opravi natanko en delavec in jo pravočasno konča:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : \sum_{h=1}^n \sum_{k=1}^{T_i} x_{hik} = 1$$

Vsak delavec lahko hkrati izvaja samo eno nalogo:

$$\forall h, i \in \{1, \dots, n\} \forall k \in \{1, \dots, T_i\} : (t_i - 2)x_{hik} + \sum_{j=1}^n \sum_{\ell=k}^{k+t_i-1} x_{hj\ell} \leq t_i - 1$$

Vrstni red opravljanja nalog:

$$\forall (i, j) \in S \forall k \in \{1, \dots, T_i\} : \sum_{h=1}^n \left( x_{hik} - \sum_{\ell=k+t_i}^{T_j} x_{hj\ell} \right) \leq 0$$

Štetje delavcev:

$$\forall h, i \in \{1, \dots, n\} \forall k \in \{1, \dots, T\} : hx_{hik} \leq r$$

### Naloga 2.19.

Naj bo  $m$  število vozlišč grafa  $G$ . Očitno bo linija obiskala največ  $m$  postaj, zato bomo za postajališče  $u \in V$  in  $i \in \{1, \dots, m\}$  uvedli spremenljivko  $x_{ui}$ , za vsako povezavo  $uv \in E$  pa še spremenljivko  $y_{uv}$ . Njihove vrednosti interpretiramo kot

$$x_{ui} = \begin{cases} 1; & \text{postajališče } u \text{ obiščemo } i\text{-to po vrsti, in} \\ 0 & \text{sicer;} \end{cases}$$

$$\text{ter } y_{uv} = \begin{cases} 1; & \text{postajališči } u \text{ in } v \text{ obiščemo zaporedoma, in} \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Zapišimo celoštevilski linearni program.

$$\begin{array}{lll} \max & \sum_{u \in V} \sum_{i=1}^m x_{ui} & \text{p.p.} \\ \forall u \in V \forall i \in \{1, \dots, m\} : & 0 \leq x_{ui} \leq 1, & x_{ui} = \mathbb{Z} \\ \forall uv \in E : & 0 \leq y_{uv} \leq 1, & y_{uv} = \mathbb{Z} \end{array}$$

Vsako postajališče obiščemo največ enkrat:

$$\forall u \in V : \sum_{i=1}^m x_{ui} \leq 1$$

Naenkrat obiščemo največ eno postajališče:

$$\forall i \in \{1, \dots, m\} : \sum_{u \in V} x_{ui} \leq 1$$

Indeksov ne izpuščamo:

$$\forall i \in \{2, \dots, m\} : \sum_{u \in V} x_{ui} \leq \sum_{u \in V} x_{u,i-1}$$

Nesosedna postajališča niso zaporedna:

$$\forall uv \notin E \forall i \in \{2, \dots, m\} : x_{u,i-1} + x_{ui} + x_{v,i-1} + x_{vi} \leq 1$$

Začnemo v postajališču  $p_1$ :

$$x_{p_1,1} = 1$$

Postajališča iz seznama si sledijo v podanem vrstnem redu:

$$\forall i \in \{1, \dots, m\} \forall j \in \{2, \dots, n\}: \quad x_{p_{j-1},i} \leq \sum_{h=i+1}^m x_{p_j,h}$$

Končamo v postajališču  $p_n$ :

$$\forall i \in \{1, \dots, m\}: (m-i)x_{p_n,i} + \sum_{u \in V} \sum_{h=i+1}^m x_{uh} \leq m-i$$

Časovna omejitev:

$$\forall uv \in E \forall i \in \{2, \dots, m\}: \quad x_{u,i-1} + x_{ui} + x_{v,i-1} + x_{vi} \leq y_{uv} + 1$$

$$\sum_{uv \in E} c_{uv} y_{uv} \leq T$$

### Naloga 2.20.

Za igralca  $i \in A$  in  $j$ -ti klub ( $1 \leq j \leq n$ ) bomo uvedli spremenljivko  $x_{ij}$ , za igralca  $i \in B$  pa spremenljivko  $y_i$ . Njihove vrednosti interpretiramo kot

$$x_{ij} = \begin{cases} 1; & \text{igralca } i \text{ prodamo } j\text{-temu klubu, in} \\ 0 & \text{sicer;} \end{cases}$$

$$\text{ter } y_i = \begin{cases} 1; & \text{odkupimo ogradca } i \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Zapišimo celoštevilski linearni program.

$$\max \quad \sum_{i \in B} q_i y_i - \sum_{i \in A} \sum_{j=1}^n q_i x_{ij} \quad \text{p.p.}$$

$$\forall i \in A \forall j \in \{1, \dots, n\}: \quad 0 \leq x_{ij} \leq 1, \quad x_{ij} \in \mathbb{Z}$$

$$\forall i \in B: \quad 0 \leq y_i \leq 1, \quad y_i \in \mathbb{Z}$$

Vsakega igralca prodamo največ enemu klubu:

$$\forall i \in A: \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq 1$$

Omejitev stroškov:

$$\sum_{i \in B} r_i y_i - \sum_{i \in A} \sum_{j=1}^n p_{ij} x_{ij} \leq S$$

Skupno število igralcev:

$$\sum_{i \in B} y_i - \sum_{i \in A} \sum_{j=1}^n x_{ij} = 0$$

Število igralcev za vsako pozicijo:

$$-1 \leq \sum_{i \in B \cap G} y_i - \sum_{i \in A \cap G} \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq 1$$

$$-1 \leq \sum_{i \in B \cap D} y_i - \sum_{i \in A \cap D} \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq 1$$

$$-1 \leq \sum_{i \in B \cap M} y_i - \sum_{i \in A \cap M} \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq 1$$

$$-1 \leq \sum_{i \in B \cap F} y_i - \sum_{i \in A \cap F} \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq 1$$

Igralca  $a$  in  $b$  gresta v isti klub:

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}: \quad x_{aj} = x_{bj}$$

### Naloga 2.21.

Za del Evrope  $i \in D$ , kjer je  $D = \{S, Z, V, J\}$  (severna, zahodna, vzhodna, južna Evropa), in kraj  $j \in K$ , kjer je  $K = \{\text{Lon, Ber, Bud, Mad}\}$  (London, Berlin, Budimpešta, Madrid) bomo uvedli spremenljivko  $x_{ij}$ , za kraj  $j \in K$  pa še spremenljivko  $y_j$ . Njihove vrednosti interpretiramo kot

$$x_{ij} = \begin{cases} 1; & \text{iz dela } i \text{ pošljamo čeke v mesto } j, \text{ in} \\ 0 & \text{sicer;} \end{cases}$$

ter  $y_j = \begin{cases} 1; & \text{odpremo podružnico v mestu } j \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$

Zapišimo celoštevilski linearni program, pri čemer bomo stroške računali v enotah po 1 000€.

$$\begin{aligned} \min \quad & 50 \sum_{j \in K} y_j + 28x_{S,\text{Lon}} + 84x_{S,\text{Ber}} + 112x_{S,\text{Bud}} + 84x_{S,\text{Mad}} \\ & + 60x_{Z,\text{Lon}} + 20x_{Z,\text{Ber}} + 50x_{Z,\text{Bud}} + 50x_{Z,\text{Mad}} \\ & + 96x_{V,\text{Lon}} + 60x_{V,\text{Ber}} + 24x_{V,\text{Bud}} + 60x_{V,\text{Mad}} \\ & + 64x_{J,\text{Lon}} + 40x_{J,\text{Ber}} + 40x_{J,\text{Bud}} + 16x_{J,\text{Mad}} \quad \text{p.p.} \end{aligned}$$

$$\forall i \in D \forall j \in K: 0 \leq x_{ij} \leq 1, \quad x_{ij} \in \mathbb{Z}$$

$$\forall j \in K: 0 \leq y_j \leq 1, \quad y_j \in \mathbb{Z}$$

Iz posameznega dela pošljamo v eno podružnico:

$$\forall i \in D: \sum_{j \in K} x_{ij} = 1$$

Če nekam pošljamo, odpremo podružnico:

$$\forall j \in K: \sum_{i \in D} x_{ij} \leq 4y_j$$

**Naloga 2.22.**

Za vsakega igralca želimo vedeti, ali bo član začetne postave. Igralcem po vrsti dodelimo števila od 1 do 8. Za  $i$ -tega igralca ( $1 \leq i \leq 8$ ) bomo uvedli spremenljivko  $x_i$ , katere vrednost interpretiramo kot

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{če bo na } i\text{-ti igralec v začetni postavi, in} \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Zapišimo celoštevilski linearni program.

$$\begin{aligned} \max \quad & 213x_1 + 208x_2 + 203x_3 + 192x_4 \\ & + 196x_5 + 197x_6 + 200x_7 + 195x_8 \quad \text{p.p.} \\ \forall i \in \{1, \dots, 8\}: \quad & 0 \leq x_i \leq 1, \quad x_i \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

V postavi je pet članov:

$$\sum_{i=1}^8 x_i = 5$$

V postavi so zastopane vse pozicije, od tega natanko en center:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ x_3 + x_4 + x_5 &\geq 1 \\ x_6 + x_7 + x_8 &\geq 1 \end{aligned}$$

V postavi je ali Ciril ali Filip:

$$x_3 + x_6 = 1$$

Če začne Borut ali David, Hugo ostane v rezervi:

$$x_2 + x_4 + 2x_8 \leq 2$$

**Naloga 2.23.**

Glede na to, da imamo v vsaki vrstici in stolpcu samo po dva otoka, bomo v vsakem od njih zgradili največ dva mostova med otokoma. Za  $i = 1, 2, 3$  bomo torej definirali spremenljivki  $x_i$  in  $y_i$ , ki povesta, koliko mostov bomo zgradili v  $i$ -ti vrstici oziroma stolpcu. Zapišimo linearne omejitve.

$$\begin{aligned} \forall i \in \{1, 2, 3\}: \quad & 0 \leq x_i \leq 2, \quad x_i \in \mathbb{Z} \\ \forall i \in \{1, 2, 3\}: \quad & 0 \leq y_i \leq 2, \quad y_i \in \mathbb{Z} \\ x_1 + y_1 &= 2 \\ x_1 + y_2 &= 1 \\ x_2 + y_2 &= 3 \\ x_2 + y_3 &= 3 \\ x_3 + y_1 &= 3 \\ x_3 + y_3 &= 2 \end{aligned}$$

Ciljna funkcija tukaj ni pomembna – zanima nas samo dopustna rešitev.

**Naloga 2.24.**

Uporabili bomo oznake sort in kupcev iz naloge 2.8, poleg tega pa naj  $n_A$  pomeni število flaškonov sorte  $A$ , ki jih imamo na voljo. Za vsako sorto  $i \in I$  in kupca  $j \in J$  bomo uvedli spremenljivko  $x_{ij}$ , ki pove, koliko flaškonov sorte  $i$  prodamo kupcu  $j$ . Zapišimo celoštevilski linearni program.

$$\max \sum_{j \in J} (12x_{RM,j} + 8x_{LR,j} + 15x_{RR,j}) \quad \text{p.p.}$$

$$\forall i \in I \forall j \in J: x_{ij} \geq 0, \quad x_{ij} \in \mathbb{Z}$$

Omejitve za sorte:

$$\sum_{j \in J} x_{RM,j} \leq 200$$

$$\sum_{j \in J} x_{LR,j} \leq 1000$$

$$\sum_{j \in J} x_{RR,j} \leq 5000$$

Omejitve za stranke:

$$\sum_{i \in I} x_{i,K} \leq 1500$$

$$\sum_{i \in I} x_{i,L} \leq 500$$

$$\sum_{i \in I} x_{i,O} \leq 100$$

$$\sum_{i \in I} x_{i,Z} \leq 50$$

Omejitvi barov:

$$12x_{RM,K} + 8x_{LR,K} + 15x_{RR,K} \leq \sum_{j \in \{O,Z\}} (12x_{RM,j} + 8x_{LR,j} + 15x_{RR,j})$$

$$12x_{RM,L} + 8x_{LR,L} + 15x_{RR,L} \leq \sum_{j \in \{O,Z\}} (12x_{RM,j} + 8x_{LR,j} + 15x_{RR,j})$$

Želje glede sort:

$$x_{RM,Z} + x_{RR,Z} \geq 50$$

$$x_{RM,O} + x_{LR,O} = 0$$

$$x_{RR,O} \geq 50$$

Ženin pogoj:

$$n_A - \sum_{j \in J} x_{Aj} \geq x_{AB} + x_{AC}$$

**Naloga 2.25.**

Za vsako odprto celico  $s \in \mathcal{O}$  naj  $a_s$  označuje številko v celici  $s$ , tj., število min v celicah iz množice  $N(s)$ . Za vsako zaprto celico  $t \in \mathcal{Z}$  bomo uvedli spremenljivko  $x_t$ , katere vrednost interpretiramo kot

$$x_t = \begin{cases} 1; & \text{v celici } t \text{ je mina, in} \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Najprej zapišimo omejitve, ki jih bomo vseskozi upoštevali.

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathcal{Z} : \quad & 0 \leq x_t \leq 1, \quad x_t \in \mathbb{Z} \\ \forall s \in \mathcal{O} : \quad & \sum_{t \in N(s) \setminus \mathcal{O}} x_t = a_s \end{aligned}$$

(a) Začetnim omejitvam dodamo še

$$\sum_{t \in \mathcal{Z}} x_t = p.$$

Zanima nas le obstoj dopustne rešitve, zato ciljna funkcija ni pomembna.

(b) Pri začetnih omejitvah uporabimo ciljno funkcijo

$$\max \sum_{t \in \mathcal{Z}} x_t.$$

(c) Za vsako zaprto celico  $r \in \mathcal{Z}$  poiščemo dopustno rešitev celoštevilskega linearnega programa z začetnimi omejitvami (in še omejitvijo iz točke (a), če poznamo skupno število min) in ciljno funkcijo

$$\min x_r.$$

Če je celoštevilski linearni program dopusten z vrednostjo ciljne funkcije enako 1, potem celica  $r$  nujno vsebuje mino.

**Naloga 2.26.**

Za škatli  $i$  in  $j$  ( $1 \leq i, j \leq n$ ) bomo uvedli spremenljivko  $x_{ij}$ , katere vrednost interpretiramo kot

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{če } i\text{-to škatlo postavimo v } j\text{-to škatlo, in} \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Ker želimo minimizirati volumen škatel, ki jih ne zložimo v večje škatle, lahko maksimiziramo volumen škatel, ki jih zložimo v večje škatle. Zapišimo celoštevilski linearni program.

$$\max \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_i x_{ij} \quad \text{p.p.}$$

$$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}: 0 \leq x_{ij} \leq 1, \quad x_{ij} \in \mathbb{Z}$$

Škatle ne moremo postaviti vase:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}: x_{ii} = 0$$

Vsako škatlo lahko postavimo v največ eno večjo škatlo:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}: \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq 1$$

Omejitev na volumnu škatle:

$$\forall j \in \{1, \dots, n\}: \sum_{i=1}^n v_i x_{ij} \leq v_j$$

Škatle, ki vsebuje drugo škatlo, ne moremo postaviti v večjo škatlo:

$$\forall i, j, k \in \{1, \dots, n\}: x_{ij} + x_{jk} \leq 1$$

### Naloga 2.27.

- (a) Za  $i$ -to ponudbo ( $1 \leq i \leq k$ ) bomo uvedli spremenljivko  $x_i$ , katere vrednost interpretiramo kot

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{če naj dražitelj sprejme } i\text{-to ponudbo, in} \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Zapišimo celoštevilski linearni program.

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{i=1}^n c_i x_i \quad \text{p.p.} \\ \forall i \in \{1, \dots, k\}: \quad & 0 \leq x_i \leq 1, \quad x_i \in \mathbb{Z} \\ \forall p \in A: \quad & \sum_{\substack{i=1 \\ p \in B_i}}^k x_i \leq 1 \end{aligned}$$

- (b) Celoštevskemu linearnemu programu dodamo še dva pogoja.

- Če je ponudba 1 uspešna, potem mora biti uspešna tudi ponudba 2 ali ponudba 3:

$$x_1 \leq x_2 + x_3$$

- Če so uspešne vse ponudbe s sodim indeksom, potem morajo biti ne-uspešne vsaj tri ponudbe z lihim indeksom:

$$\sum_{i=1}^k (2 + (-1)^i) x_i \leq k + 2 \left\lfloor \frac{k}{2} \right\rfloor - 3$$

Razlaga: na levi strani ponudbe z lihim indeksom štejemo enkrat, ponudbe s sodim indeksom (teh je  $\lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ ) pa trikrat. Če sprejmemo vse

ponudbe s sodim indeksom, potem desna stran omejuje število sprejetih ponudb na  $k - 3$  – vsaj treh ponudb z lihim indeksom torej nismo sprejeli. Če pa ne sprejmemo vseh ponudb s sodim indeksom, je vsota na levi za vsaj 3 manjša od maksimalne, tako da lahko sprejmemo poljubno število ponudb z lihim indeksom.

**Naloga 2.28.**

Za  $i \in \{1, \dots, n\}$  bomo uvedli spremenljivko  $x_i$ , katere vrednost interpretiramo kot

$$x_i = \begin{cases} 1; & a_i \in L, \\ 0; & a_i \notin L. \end{cases}$$

Zapišimo celoštevilski linearni program.

$$\begin{aligned} & \max \sum_{i=1}^n x_i (a_i)^2 \quad \text{p.p.} \\ & \forall i \in \{1, \dots, n\} : 0 \leq x_i \leq 1, \quad x_i \in \mathbb{Z} \\ & x_1 + x_2 \leq 1 \\ & x_3 + x_5 - x_7 \leq 1 \\ & (n-4)x_4 + \sum_{i=1}^n x_i \leq n \\ & \sum_{\substack{i=1 \\ a_i > 0}}^n x_i \geq \sum_{\substack{i=1 \\ a_i < 0}}^n x_i + 1 \end{aligned}$$

**Naloga 2.29.**

Za  $i$ -ti predmet ( $1 \leq i \leq n$ ) in  $j$ -ti tovornjak ( $1 \leq j \leq 5$ ) bomo uvedli spremenljivki  $x_{ij}$  in  $y_j$ , katerih vrednosti interpretiramo kot

$$\begin{aligned} x_{ij} &= \begin{cases} 1; & i\text{-ti predmet naložimo na } j\text{-ti tovornjak, in} \\ 0 & \text{sicer;} \end{cases} \\ \text{ter } y_j &= \begin{cases} 1; & \text{tovor na } j\text{-tem tovornjaku ne presega mase } M, \text{ in} \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases} \end{aligned}$$

Poleg tega bomo uvedli še spremenljivko  $t$ , ki bo predstavljala obremenitev najbolj obremenjenega tovornjaka.

Zapišimo celoštevilski linearni program.

$$\begin{aligned} & \min t \quad \text{p.p.} \\ & \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \forall j \in \{1, \dots, 5\} : \quad 0 \leq x_{ij} \leq 1, \quad x_{ij} \in \mathbb{Z} \\ & \quad \quad \quad \forall j \in \{1, \dots, 5\} : \quad 0 \leq y_j \leq 1, \quad y_j \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$



Vsak predmet naložimo na en tovornjak:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : \sum_{j=1}^5 x_{ij} = 1$$

Največja obremenitev:

$$\forall j \in \{1, \dots, 5\} : \sum_{i=1}^n m_i x_{ij} \leq t$$

Zapišimo še dodatna pogoja.

(a) Tovor na prvem tovornjaku ne presega mase  $M$ :

$$\sum_{i=1}^n m_i x_{1j} \leq M$$

(b) Na vsaj enem tovornjaku tovor ne presega mase  $M$ :

$$\forall j \in \{1, \dots, 5\} : \sum_{i=1}^n m_i (x_{ij} + y_j - 1) \leq M y_j$$

$$\sum_{j=1}^5 y_j \geq 1$$

### Naloga 2.30.

(a) Za  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  bomo uvedli spremenljivko  $x_{ij}$ , katere vrednost interpretiramo kot

$$x_{ij} = \begin{cases} 1; & \text{na } i\text{-to mesto postavimo število } j, \text{ in} \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Poleg tega bomo za  $i \in \{1, \dots, n\}$  uvedli še spremenljivko  $y_i$ , ki bo predstavljala manjšo od vsot števil strogo levo in strogo desno od  $i$ -tega mesta.

Zapišimo celoštevilski linearni program.

$$\begin{array}{ll} \max \sum_{i=1}^n y_i & \text{p.p.} \\ \forall i, j \in \{1, \dots, n\} : & 0 \leq x_{ij} \leq 1, \quad x_{ij} \in \mathbb{Z} \\ \forall i \in \{1, \dots, n\} : & y_i \geq 0, \quad y_i \in \mathbb{Z} \end{array}$$

Vsako število postavimo na eno mesto:

$$\forall j \in \{1, \dots, n\} : \sum_{i=1}^n x_{ij} = 1$$

Na vsako mesto postavimo eno število:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1$$

Dobitek ob izbiri  $i$ -tega mesta:

$$\begin{aligned}\forall i \in \{1, \dots, n\} : \quad & \sum_{h=1}^{i-1} \sum_{j=1}^n j x_{hj} \geq y_i \\ \forall i \in \{1, \dots, n\} : \quad & \sum_{h=i+1}^n \sum_{j=1}^n j x_{hj} \geq y_i\end{aligned}$$

(b) Dodajmo še pogoj, da sta števili 1 in 2 sosednji.

$$-1 \leq \sum_{i=1}^n i(x_{i1} - x_{i2}) \leq 1$$

### Naloga 2.31.

Naj bo  $d_{ij}$  dobiček, ki ga tovarna na stopnji  $j$  prinese v državi  $i$ , ter  $n_{ij}$  trenutno število tovarn na stopnji  $j$  v državi  $i$ . Definirajmo še množice

$$\begin{aligned}EU &= \{AT, SI, IT, HU, HR\}, \\ \overline{EU} &= \{IR, IQ, AF, TM, PK, AM, AZ\} \quad \text{in} \\ D &= EU \cup \overline{EU}\end{aligned}$$

(tj., države označujemo s kodami ISO 3166-1 alpha-2). Za državo  $i \in D$  in stopnjo razvoja  $j$  ( $1 \leq j \leq 3$ ) bomo uvedli spremenljivko  $x_{ij}$ , katere vrednost bo enaka številu tovarn na stopnji  $j$  v državi  $i$ , ki jih nadgradimo do stopnje  $j+1$ .

Zapišimo celoštevilski linearni program.

$$\max \sum_{i \in D} \sum_{j=1}^3 (d_{i,j+1} - d_{ij}) x_{ij} \quad \text{p.p.}$$

$$\forall i \in D \quad \forall j \in \{1, 2, 3\} : \quad 0 \leq x_{ij} \leq n_{ij}, \quad x_{ij} \in \mathbb{Z}$$

Nadgradimo največ 15 tovarn:

$$\sum_{i \in D} \sum_{j=1}^3 x_{ij} \leq 15$$

V vsaki državi nadgradimo največ 3 tovarne:

$$\forall i \in D : \quad \sum_{j=1}^3 x_{ij} \leq 3$$

Slovenija ima več tovarn stopnje 4 kot Hrvaška:

$$n_{SI,4} + x_{SI,3} \geq n_{HR,4} + x_{HR,3} + 1$$

Slovenija ima več tovarn stopnje 3 kot Italija:

$$n_{SI,3} + x_{SI,2} - x_{SI,3} \geq n_{IT,3} + x_{IT,2} - x_{IT,3} + 1$$

Nadgradenj v EU vsaj toliko kot izven EU:

$$\sum_{i \in EU} \sum_{j=1}^3 x_{ij} \geq \sum_{i \in \overline{EU}} \sum_{j=1}^3 x_{ij}$$

Pogoj za Azerbajdžan in Armenijo:

$$x_{AM,1} \geq n_{AM,1}(x_{AZ,2} - x_{AM,3})$$

Iran ima vsaj toliko tovarn stopnje 4 kot EU:

$$\sum_{i \in EU} (n_{i,4} + x_{i,3}) \leq n_{IR,4} + x_{IR,3}$$

**Naloga 2.32.**

Za vsako križišče oziroma vozlišče grafa  $G = (V, E)$  želimo vedeti, ali bo na njem plinska maska. Za vsako vozlišče  $v \in V$  bomo uvedli spremenljivko  $x_v$ , katere vrednost interpretiramo kot

$$x_v = \begin{cases} 1, & \text{če bo na } v\text{-tem vozlišču plinska maska, in} \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

(a) Zapišimo celoštevilski linearni program.

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{v \in V} x_v && \text{p.p.} \\ \forall v \in V: \quad & 0 \leq x_v \leq 1, && x_v \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Vsako križišče ima masko ali pa jo ima eno izmed njegovih sosedov:

$$\forall v \in V: x_v + \sum_{u \in E} x_u \geq 1$$

(b) Dodajmo še omejitve za podane pogoje.

V križišču  $s$  je maska, v križišču  $t$  pa ne:

$$\begin{aligned} x_s &= 1 \\ x_t &= 0 \end{aligned}$$

Največ 2 izmed križišč  $s_1, \dots, s_k$  imata masko:

$$\sum_{i=1}^k x_{s_i} \leq 2$$

Če je v križišču  $v_1$  maska, v križišču  $v_2$  pa ne, je maska vsaj v enem izmed križišč  $v_3$  in  $v_4$ :

$$x_{v_1} - x_{v_2} \leq x_{v_3} + x_{v_4}$$

**Naloga 2.33.**

Za vsak bazen želimo vedeti, v kakšnem stanju bo po koncu petletnega obdobja. Za  $i$ -ti bazen ( $1 \leq i \leq 20$ ) bomo uvedli spremenljivki  $x_i$  in  $y_i$ , katerih vrednosti interpretiramo kot

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{če se } i\text{-ti bazen nadgradi, in} \\ 0 & \text{sicer,} \end{cases}$$

ter  $y_i = \begin{cases} 1, & \text{če se } i\text{-ti bazen proda, in} \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$

Zapišimo celoštevilski linearni program.

$$\max \sum_{i=1}^{20} x_i \quad \text{p.p.}$$

$$\forall i \in \{1, \dots, 20\}: \quad 0 \leq x_i \leq 1, \quad x_i \in \mathbb{Z}$$

$$\forall i \in \{1, \dots, 20\}: \quad 0 \leq y_i \leq 1, \quad y_i \in \mathbb{Z}$$

Že nadgrajeni bazeni:

$$\forall i \in \{1, 2, 3\}: \quad x_i = 1$$

Nadgrajeni bazeni se ne prodajajo:

$$\forall i \in \{1, \dots, 20\}: \quad x_i + y_i \leq 1$$

Nadgradi se največ dvakrat toliko bazenov, kot se jih proda:

$$\sum_{i=4}^{20} x_i \leq 2 \sum_{i=1}^{20} y_i$$

Če se nadgradi bazen 8, se tudi 11 in 14, bazen 15 pa ostane v Kopalčevi lasti:

$$3x_8 + y_{15} \leq x_{14} + x_{11} + 1$$

Če bazeni od 15 do 20 ostanejo v Kopalčevi lasti, se bazeni od 4 do 7 ne nadgradijo:

$$\sum_{i=4}^7 x_i \leq 4 \sum_{i=15}^{20} y_i$$

Bazen  $a$  se proda, bazen  $b$  pa nadgradi:

$$x_a = 1$$

$$y_b = 1$$

Bazen  $c$  ostane v nespremenjenem stanju:

$$x_c = \begin{cases} 1, & \text{če } c \in \{1, 2, 3\}, \text{ in} \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

$$y_c = 0$$

Ker je  $c$  konstanta, je tudi predzadnja omejitev linearna.

**Naloga 2.34.**

Za povezavo  $uv \in E$  bomo uvedli spremenljivko  $x_{uv}$ , katere vrednost interpretiramo kot

$$x_{uv} = \begin{cases} 1; & uv \in M, \\ 0; & uv \notin M. \end{cases}$$

Zapišimo celoštevilski linearni program.

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{uv \in E} w(uv)x_{uv} \quad \text{p.p.} \\ \forall uv \in E: \quad & 0 \leq x_{uv} \leq 1, \quad x_{uv} \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Vsako vozlišče je krajišče največ ene povezave iz  $M$ :

$$\forall u \in V: \quad \sum_{uv \in E} x_{uv} \leq 1$$

Za vsako povezavo obstaja povezava v  $M$  s skupnim krajiščem:

$$\forall uv \in E: \quad \sum_{uw \in E} x_{uw} + \sum_{vw \in E} x_{vw} \geq 1$$

**Naloga 2.35.**

Naj bo  $n$  število vozlišč grafa  $G$ . Očitno bomo lahko množico njegovih vozlišč razbili na največ  $n$  podmnožic, zato bomo za vozlišče  $u \in V$  in  $i \in \{1, \dots, n\}$  uvedli spremenljivko  $x_{ui}$ , katere vrednost interpretiramo kot

$$x_{ui} = \begin{cases} 1; & u \in V_i, \\ 0; & u \notin V_i. \end{cases}$$

Poleg tega bomo za vozlišči  $u, v \in V$  uvedli še spremenljivko  $y_{uv}$ , ki bo predstavljala razdaljo med njima. Nazadnje bomo uvedli še spremenljivko  $t$ , ki bo štela, koliko podmnožic potrebujemo.

Zapišimo celoštevilski linearni program.

$$\begin{aligned} \min \quad & t \quad \text{p.p.} \\ \forall u \in V \forall i \in \{1, \dots, n\}: \quad & 0 \leq x_{ui} \leq 1, \quad x_{ui} \in \mathbb{Z} \\ \forall u, v \in V: \quad & y_{uv} \geq 0, \quad y_{uv} \in \mathbb{Z} \\ & t \geq 0, \quad t \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Vsako vozlišče postavimo v eno podmnožico:

$$\forall u \in V: \quad \sum_{i=1}^n x_{ui} = 1$$

Štetje podmnožic:

$$\forall u \in V \forall i \in \{1, \dots, n\}: \quad i x_{ui} \leq t$$

Razdalje v podmnožicah:

$$\forall u, v \in V, u \neq v: (i+1)(x_{ui} + x_{vi} - 1) \leq y_{uv}$$

Razdalje med vozlišči:

$$\begin{aligned}\forall u \in V: & y_{uu} = 0 \\ \forall u \in V \forall vw \in E: & -1 \leq y_{uv} - y_{uw} \leq 1\end{aligned}$$

Mavrično pakirno število  $\chi_p(G)$  dobimo kot vrednost ciljne funkcije zgornjega celoštevilskega linearnega programa.

Opomnimo, da vrednosti  $y_{uv}$  v dopustnih rešitvah zgornjega programa ne predstavljajo nujno dejanskih razdalj med vozlišči – velja le  $y_{uv} \leq d_G(u, v)$ . Ker pa za  $u, v \in V_i$  velja  $y_{uv} \geq i + 1$ , sledi  $d_G(u, v) \geq i + 1$ , kar ustreza pogojem naloge.

### Naloga 2.36.

Za vozlišče  $u \in V$  in  $i$ -to barvo ( $1 \leq i \leq k$ ) bomo uvedli spremenljivko  $x_{ui}$ , katere vrednost interpretiramo kot

$$x_{ui} = \begin{cases} 1; & \text{vozlišče } u \text{ pobarvamo z barvo } i, \text{ in} \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Zapišimo omejitve za celoštevilski linearni program. Ker nas zanima le obstoj dopustne rešitve, ciljna funkcija ni pomembna.

$$\forall u \in V \forall i \in \{1, \dots, k\}: \quad 0 \leq x_{ui} \leq 1, \quad x_{ui} \in \mathbb{Z}$$

Vsako vozlišče pobarvamo z eno barvo:

$$\forall u \in V: \quad \sum_{i=1}^k x_{ui} = 1$$

Sosedni vozlišči nimata iste barve:

$$\forall uv \in E \forall i \in \{1, \dots, k\}: \quad x_{ui} + x_{vi} \leq 1$$

Število vozlišč dveh različnih barv se razlikuje za največ 1:

$$\forall i, j \in \{1, \dots, k\}, i < j: -1 \leq \sum_{u \in V} (x_{ui} - x_{uj}) \leq 1$$

Naj bo  $n$  število vozlišč in  $m$  število povezav grafa  $G$ . Potem ima zgornji celoštevilski linearni program  $nk$  celoštevilskih spremenljivk in  $2nk + n + mk + k(k-1)$  pogojev.

### Naloga 2.37.

Opazimo, da želimo imeti čim nižje vrednosti  $f(x), g(y), h(z)$ , zato bo zadostovalo, da za ustrezne spremenljivke  $f, g, h$  podamo spodnje meje. Prav tako opazimo, da bo za optimalno rešitev zagotovo veljalo  $x, y, z \leq 100$ . Tako bomo uvedli še spremenljivke  $t, u, v, w$ , katerih vrednosti interpretiramo kot

$$t = \begin{cases} 1; & z > 0, \\ 0; & z = 0; \end{cases} \quad u = \begin{cases} 1; & x \geq 5, \\ 0; & x < 5; \end{cases}$$

$$v = \begin{cases} 1; & y \geq 5, \\ 0; & y < 5; \end{cases} \quad \text{ter} \quad w = \begin{cases} 1; & z \geq 5, \\ 0; & z < 5. \end{cases}$$

Zapišimo celoštevilski linearni program.

$$\begin{array}{ll} \min f + g + h & \text{p.p.} \\ f, g, h, x, y, z \geq 0, & f, g, h, x, y, z \in \mathbb{Z} \\ 0 \leq t, u, v, w \leq 1, & t, u, v, w \in \mathbb{Z} \\ f = 10 + 5x & \\ g \geq 10 & \\ g \geq 5 + 5y & \\ z \leq 100t & \\ h \geq 8 + 2t + 4z & \\ x + y + z \geq 100 & \\ x \geq 5u & \\ y \geq 5v & \\ z \geq 5w & \\ u + v + w \geq 2 & \end{array}$$

**Naloga 2.38.**

Opazimo, da želimo imeti čim nižji vrednosti  $f_1(x_1)$  in  $f_2(x_2)$ , zato bo zadostovalo, da za ustrezni spremenljivki  $f_1$  in  $f_2$  podamo spodnje meje. Prav tako opazimo, da bo za optimalno rešitev zagotovo veljalo  $x_1 \leq 100$  in  $x_2 \leq \frac{200}{3}$ . Tako bomo uvedli še spremenljivki  $y_i$  ( $i = 1, 2$ ), katerih vrednosti interpretiramo kot

$$y_i = \begin{cases} 1; & x_i > 0, \\ 0; & x_i = 0. \end{cases}$$

Zapišimo celoštevilski linearni program.

$$\begin{array}{ll} \min f_1 + f_2 & \text{p.p.} \\ 0 \leq y_1, y_2 \leq 1, & y_1, y_2 \in \mathbb{Z} \\ f_1, f_2, x_1, x_2 \geq 0 & \\ x_1 \leq 100y_1 & \\ 3x_2 \leq 200y_2 & \\ f_1 \geq 5x_1 + 10y_1 & \\ f_2 \geq 4x_2 + 20y_2 & \\ 100x_1 + 150x_2 \geq 10000 & \end{array}$$

**Naloga 2.39.**

Za  $i, j, k \in \{1, 2, 3, 4\}$  bomo uvedli spremenljivko  $x_{ijk}$ , katere vrednost interpretiramo kot

$$x_{hij} = \begin{cases} 1; & \text{na polje } (i, j) \text{ vpišemo število } k, \text{ in} \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Zapišimo omejitve za celoštevilski linearni program. Zanima nas samo njegova dopustnost, tako da ciljna funkcija ni pomembna.

$$\forall i, j, k \in \{1, 2, 3, 4\} : \quad 0 \leq x_{ijk} \leq 1, \quad x_{ijk} \in \mathbb{Z}$$

V vsako polje vpišemo eno število:

$$\forall i, j \in \{1, 2, 3, 4\} : \quad \sum_{k=1}^4 x_{ijk} = 1$$

Vsako število se pojavi enkrat v vsaki vrstici in stolpcu:

$$\forall i, k \in \{1, 2, 3, 4\} : \quad \sum_{j=1}^4 x_{ijk} = 1$$

$$\forall j, k \in \{1, 2, 3, 4\} : \quad \sum_{i=1}^4 x_{ijk} = 1$$

Vsako število se pojavi enkrat v vsakem kvadratu  $2 \times 2$ :

$$\forall i, j \in \{0, 2\} \forall k \in \{1, 2, 3, 4\} : \quad \sum_{i'=1}^2 \sum_{j'=1}^2 x_{i+i', j+j', k} = 1$$

Že vpisana števila:

$$x_{111} = x_{122} = x_{232} = x_{241} = x_{324} = x_{413} = 1$$

Opisani celoštevilski linearni program ima  $4^3 = 64$  celoštevilskih spremenljivk in  $2 \cdot 4^3 + 4 \cdot 4^2 + 6 = 198$  pogojev.

**Naloga 2.40.**

- (a) Naj bo  $x_i$  število žetonov, ki jih vložimo v dvoboj z  $i$ -tim nasprotnikom ( $1 \leq i \leq n$ ). Poleg tega bomo uvedli še spremenljivke  $y_i$  in  $z_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ), katerih vrednosti interpretiramo kot

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{če ne izgubimo proti } i\text{-temu nasprotniku, in} \\ 0 & \text{sicer;} \end{cases}$$

ter

$$z_i = \begin{cases} 1, & \text{če premagamo } i\text{-tega nasprotnika, in} \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Zapišimo celoštevilski linearni program.

$$\max \sum_{i=1}^n (y_i + 2z_i) \quad \text{p.p.}$$



$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : \quad x_i \geq 0, \quad x_i \in \mathbb{Z}$$

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : \quad 0 \leq y_i \leq 1, \quad y_i \in \mathbb{Z}$$

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : \quad 0 \leq z_i \leq 1, \quad z_i \in \mathbb{Z}$$

Porabimo  $M$  žetonov:

$$\sum_{i=1}^n x_i = M$$

$y_i = 1$  natanko tedaj, ko  $x_i \geq c_i$ :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : \quad c_i y_i \leq x_i \leq c_i - 1 + M y_i$$

$z_i = 1$  natanko tedaj, ko  $x_i > c_i$ :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : (c_i + 1) z_i \leq x_i \leq c_i + M z_i$$

(b) Zapišimo še dodatne omejitve.

Proti nasprotnikom iz  $A$  ne igramo izenačeno:

$$\forall i \in A : \quad y_i \leq z_i$$

Največ dva poraza proti nasprotnikom iz  $B$ :

$$\sum_{i \in B} y_i \geq |B| - 2$$

Če izgubimo proti  $u$ , dosežemo vsaj 4 točke proti  $v$  in  $w$ :

$$4y_u + y_v + y_w + 2z_v + 2z_w \geq 4$$

Največ  $k$  dvobojev z več kot  $t$  žetoni:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : \quad 0 \leq r_i \leq 1, \quad r_i \in \mathbb{Z}$$

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : \quad x_i \leq t + M r_i$$

$$\sum_{i=1}^n r_i \leq k$$

Vsaj  $\ell$  porazov:

$$\sum_{i=1}^n y_i \leq n - \ell$$

### Naloga 2.41.

Za  $i$ -to kolekcijo ( $1 \leq i \leq n$ ) bomo uvedli spremenljivki  $x_i$  in  $y_i$ , kjer je  $x_i$  število kupljenih izvodov  $i$ -te kolekcije, vrednost  $y_i$  pa interpretiramo kot

$$y_i = \begin{cases} 1, & \text{kupimo vsaj en izvod } i\text{-te kolekcije, in} \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Zapišimo celoštevilski linearni program.

$$\max \sum_{i=1}^n ((d_i - c_i)x_i + e_i y_i) \quad \text{p.p.}$$

Omejitev števila izvodov:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}: \quad 0 \leq x_i \leq k_i, \quad x_i \in \mathbb{Z}$$

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}: \quad 0 \leq y_i \leq 1, \quad y_i \in \mathbb{Z}$$

Povezava med  $x_i$  in  $y_i$ :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}: \quad y_i \leq x_i \leq k_i y_i$$

Omejitev kapitala za nakup:

$$\sum_{i=1}^n c_i x_i \leq C$$

Omejitev števila proizvajalcev:

$$\sum_{i=1}^n y_i \leq K$$

Omejitev proizvajalca  $p$ :

$$x_q + x_r - x_p \leq (k_q + k_r)(1 - y_p)$$

## 2.3 Teorija odločanja

### Naloga 3.1.

Če predpostavimo, da je kovanec pošten, je potem pričakovani dobiček ob metu kovanca enak

$$\frac{1}{2} \cdot 250\,000\text{€} - \frac{1}{2} \cdot 100\,000\text{€} = 75\,000\text{€}.$$

Ta vrednost je večja od ničelnega dobička, če ponudbe ne sprejmemo, zato se nam izplača ponudbo sprejeti. Seveda gre pri tej odločitvi tudi za oceno, kolikšno tveganje smo pripravljeni sprejeti – ali si lahko privoščimo izgubiti 100 000 €, če ne bomo imeli sreče?

### Naloga 3.2.

Naj bo  $x$  število kupljenih žemelj,  $k$  pa število prodanih žemelj. Če je  $k \leq x$ , imamo dobiček

$$k \cdot 0.2\text{€} - (x - k) \cdot 0.05\text{€} = k \cdot 0.25\text{€} - x \cdot 0.05\text{€}.$$

Če pa je  $k \geq x$ , je dobiček enak

$$x \cdot 0.2\text{€} + (k - x) \cdot 0.1\text{€} = k \cdot 0.1\text{€} + x \cdot 0.1\text{€}.$$

Pri  $x = k$  obe formuli dasta dobiček  $k \cdot 0.2\text{€}$ . Izračunajmo pričakovani dobiček pri naročilu  $x$  žemelj za različne intervale:

$$\begin{aligned} x \leq 50 : & x \cdot 0.1\text{€} + (0.1 \cdot 50 + 0.15 \cdot 60 + 0.3 \cdot 70 + \\ & 0.2 \cdot 80 + 0.15 \cdot 90 + 0.1 \cdot 100) \cdot 0.1\text{€} \\ & = x \cdot 0.1\text{€} + 7.45\text{€} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 50 \leq x \leq 60 : & x \cdot (0.9 \cdot 0.1\text{€} - 0.1 \cdot 0.05\text{€}) + 0.1 \cdot 50 \cdot 0.25\text{€} + \\ & (0.15 \cdot 60 + 0.3 \cdot 70 + 0.2 \cdot 80 + 0.15 \cdot 90 + 0.1 \cdot 100) \cdot 0.1\text{€} \\ & = x \cdot 0.085\text{€} + 8.2\text{€} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 60 \leq x \leq 70 : & x \cdot (0.75 \cdot 0.1\text{€} - 0.25 \cdot 0.05\text{€}) + (0.1 \cdot 50 + 0.15 \cdot 60) \cdot 0.25\text{€} + \\ & (0.3 \cdot 70 + 0.2 \cdot 80 + 0.15 \cdot 90 + 0.1 \cdot 100) \cdot 0.1\text{€} \\ & = x \cdot 0.0625\text{€} + 9.55\text{€} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 70 \leq x \leq 80 : & x \cdot (0.45 \cdot 0.1\text{€} - 0.55 \cdot 0.05\text{€}) + (0.1 \cdot 50 + 0.15 \cdot 60 + \\ & 0.3 \cdot 70) \cdot 0.25\text{€} + (0.2 \cdot 80 + 0.15 \cdot 90 + 0.1 \cdot 100) \cdot 0.1\text{€} \\ & = x \cdot 0.0175\text{€} + 12.7\text{€} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 80 \leq x \leq 90 : & x \cdot (0.25 \cdot 0.1\text{€} - 0.75 \cdot 0.05\text{€}) + (0.1 \cdot 50 + 0.15 \cdot 60 + 0.3 \cdot 70 + \\ & 0.2 \cdot 80) \cdot 0.25\text{€} + (0.15 \cdot 90 + 0.1 \cdot 100) \cdot 0.1\text{€} \\ & = -x \cdot 0.0125\text{€} + 15.1\text{€} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 90 \leq x \leq 100 : & x \cdot (0.1 \cdot 0.1\text{€} - 0.9 \cdot 0.05\text{€}) + (0.1 \cdot 50 + 0.15 \cdot 60 + 0.3 \cdot 70 + \\ & 0.2 \cdot 80 + 0.15 \cdot 90) \cdot 0.25\text{€} + 0.1 \cdot 100 \cdot 0.1\text{€} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -x \cdot 0.035\text{€} + 17.125\text{€} \\
x \geq 100 : &-x \cdot 0.05\text{€} + (0.1 \cdot 50 + 0.15 \cdot 60 + 0.3 \cdot 70 + \\
&0.2 \cdot 80 + 0.15 \cdot 90 + 0.1 \cdot 100) \cdot 0.25\text{€} \\
&= -x \cdot 0.05\text{€} + 18.625\text{€}
\end{aligned}$$

Funkcija pričakovanega dobička je torej zvezna in odsekoma linearna v  $x$ , pri čemer je smerni koeficient pozitiven pri  $x < 80$  in negativen pri  $x > 80$ . Pričakovan dobiček torej maksimiziramo pri naročilu 80 žemelj – tedaj ta znaša

$$80 \cdot 0.0175\text{€} + 12.7\text{€} = 14.1\text{€}.$$

### Naloga 3.3.

- (a) Ob opravljeni operaciji je pričakovana življenjska doba (v mesecih) enaka

$$0.7 \cdot 12 + 0.3 \cdot 0 = 8.4.$$

Ker je to več od 3 mesecev brez operacije, se zanjo pacient odloči.

- (b) Zanesljivost 0.9 razumemo tako, da test z verjetnostjo 0.9 pravilno napove vsak izid operacije, torej

$$P(\text{test napove uspeh} \mid \text{operacija je uspešna}) = 0.9 \quad \text{in}$$

$$P(\text{test napove uspeh} \mid \text{operacija je neuspešna}) = 0.1.$$

Izračunajmo še verjetnosti napovedi testa ter uspešnosti operacije ob vsaki napovedi.

$$P(\text{test napove uspeh}) = 0.7 \cdot 0.9 + 0.3 \cdot 0.1 = 0.66$$

$$P(\text{test napove neuspeh}) = 0.7 \cdot 0.1 + 0.3 \cdot 0.9 = 0.34$$

$$P(\text{operacija je uspešna} \mid \text{test napove uspeh}) = \frac{0.7 \cdot 0.9}{0.66} = \frac{21}{22} \approx 0.9545$$

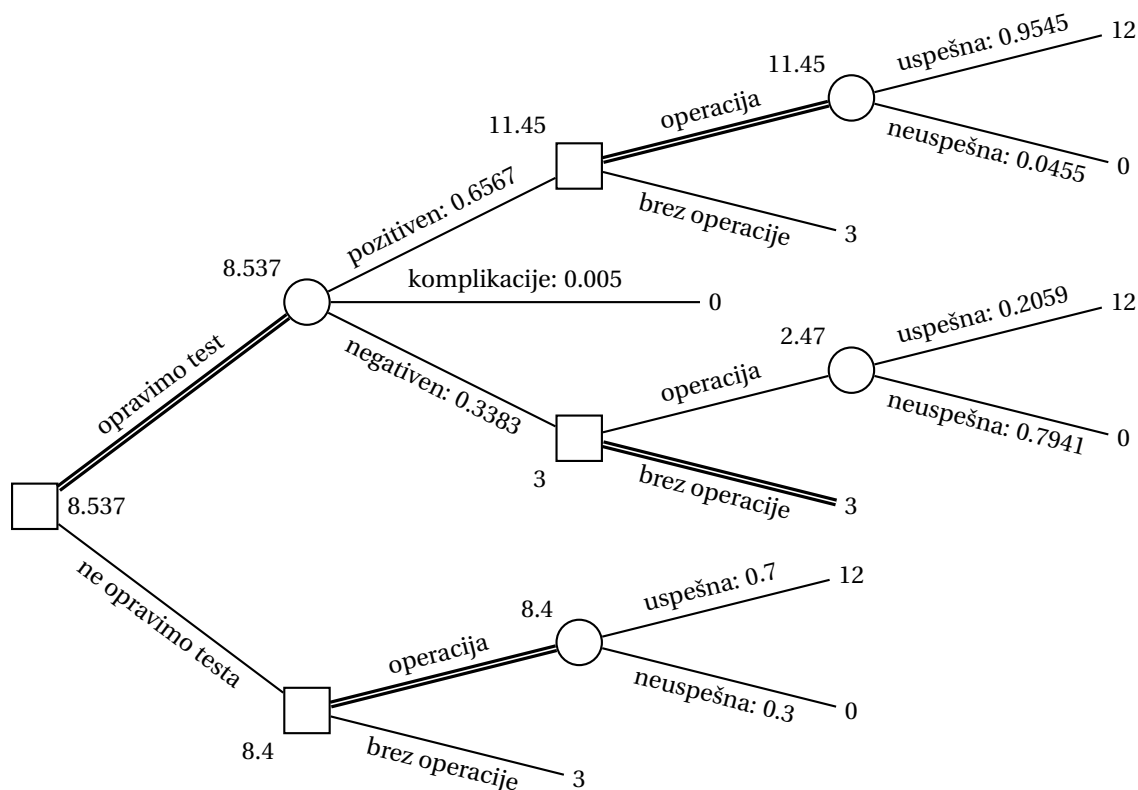
$$P(\text{operacija je neuspešna} \mid \text{test napove uspeh}) = \frac{0.3 \cdot 0.1}{0.66} = \frac{1}{22} \approx 0.0455$$

$$P(\text{operacija je uspešna} \mid \text{test napove neuspeh}) = \frac{0.7 \cdot 0.1}{0.34} = \frac{7}{34} \approx 0.2059$$

$$P(\text{operacija je uspešna} \mid \text{test napove neuspeh}) = \frac{0.3 \cdot 0.9}{0.34} = \frac{27}{34} \approx 0.7941$$

Ob upoštevanju, da se bo test končal brez komplikacij z verjetnostjo 0.995, sta verjetnosti pozitivnega in negativnega izida testa brez komplikacij enaki 0.6567 oziroma 0.3383.

S pomočjo zgoraj izračunanih verjetnosti lahko narišemo odločitveno drevo s slike 48. Izračunamo lahko, da je ob opravljanju testa pričakovana življenjska doba 8.537 mesecev, kar je več kot 8.4 mesecev brez testa, zato se odločimo za test. Če test napove uspeh, se odločimo za operacijo, sicer pa ne.



Slika 48: Odločitveno drevo za nalogo 3.3.

### Naloga 3.4.

Če se podjetje odloči za samostojno prodajo, bo ob uspehu imelo  $100\,000 \cdot 600\text{€} - 6\text{M€} = 54\text{M€}$  dobička, ob neuspehu pa  $10\,000 \cdot 600\text{€} - 6\text{M€} = 0\text{M€}$ . Ker je pričakovani dobiček enak

$$\frac{1}{2} \cdot 54\text{M€} + \frac{1}{2} \cdot 0\text{M€} = 27\text{M€},$$

kar je več kot 15 M€, kolikor bi zaslužili ob prodaji konkurenci, se podjetju (v odsotnosti raziskave) bolj izplača samostojna prodaja.

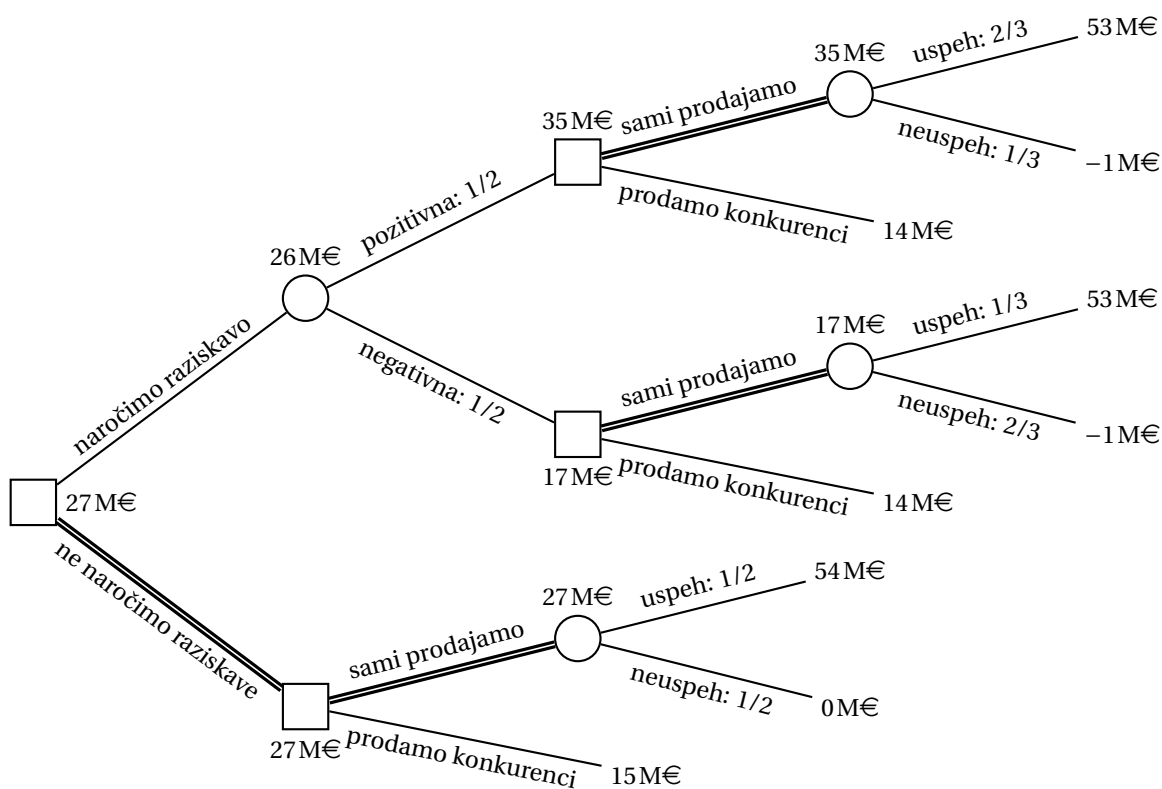
Zanesljivost raziskave je tako v primeru uspeha kot neuspeha enaka 2/3, torej

$$P(\text{raziskava napove uspeh} \mid \text{investicija uspe}) = \frac{2}{3}$$

$$P(\text{raziskava napove uspeh} \mid \text{investicija ne uspe}) = \frac{1}{3}$$

Izračunajmo še verjetnosti napovedi raziskave ter uspešnosti investicije ob vsaki napovedi.

$$P(\text{raziskava napove uspeh}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$



Slika 49: Odločitveno drevo za nalogo 3.4.

$$\begin{aligned}
 P(\text{raziskava napove neuspeh}) &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\
 P(\text{investicija uspe} \mid \text{raziskava napove uspeh}) &= \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \\
 P(\text{investicija ne uspe} \mid \text{raziskava napove uspeh}) &= \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \\
 P(\text{investicija uspe} \mid \text{raziskava napove neuspeh}) &= \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \\
 P(\text{investicija ne uspe} \mid \text{raziskava napove neuspeh}) &= \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

S pomočjo zgoraj izračunanih verjetnosti lahko narišemo odločitveno drevo s slike 49. Opazimo, da rezultat raziskave ne vpliva na našo odločitev o prodaji, zato se za raziskavo ne odločimo in tako pričakujemo dobiček 27 M€.

### Naloga 3.5.

Naj bo  $x_n$  pričakovani dobiček pri prodanih  $n$  kartah. Izračunajmo  $x_n$  pri  $n \in \{100, 101, 102, 103\}$ :

$$x_{100} = 100 \cdot 10\text{€} = 1000\text{€}$$

$$\begin{aligned}
x_{101} &= 101 \cdot 10\text{€} - 0.2 \cdot 30\text{€} &= 1004\text{€} \\
x_{102} &= 102 \cdot 10\text{€} - 0.2 \cdot 60\text{€} - 0.3 \cdot 30\text{€} &= 999\text{€} \\
x_{103} &= 103 \cdot 10\text{€} - 0.2 \cdot 90\text{€} - 0.3 \cdot 60\text{€} - 0.4 \cdot 30\text{€} &= 982\text{€}
\end{aligned}$$

Organizator bo torej maksimiziral pričakovani dobiček, če proda 101 karto.

### Naloga 3.6.

- (a) Če se Rexhep odloči za najem, bo ob uspehu imel  $12\,000\text{€} - 6\,000\text{€} = 6\,000\text{€}$  dobička, ob neuspehu pa bo ta enak  $3\,000\text{€} - 6\,000\text{€} = -3\,000\text{€}$  (tj.,  $3\,000\text{€}$  izgube). Ker je pričakovani dobiček enak

$$\frac{2}{3} \cdot 6\,000\text{€} - \frac{1}{3} \cdot 3\,000\text{€} = 3\,000\text{€},$$

se torej odloči za najem. Proces odločanja je prikazan v spodnji veji odločitvenega drevesa na sliki 50.

- (b) Izračunajmo verjetnosti za Seadovo mnenje ter kakovost parcele v odvisnosti od njega.

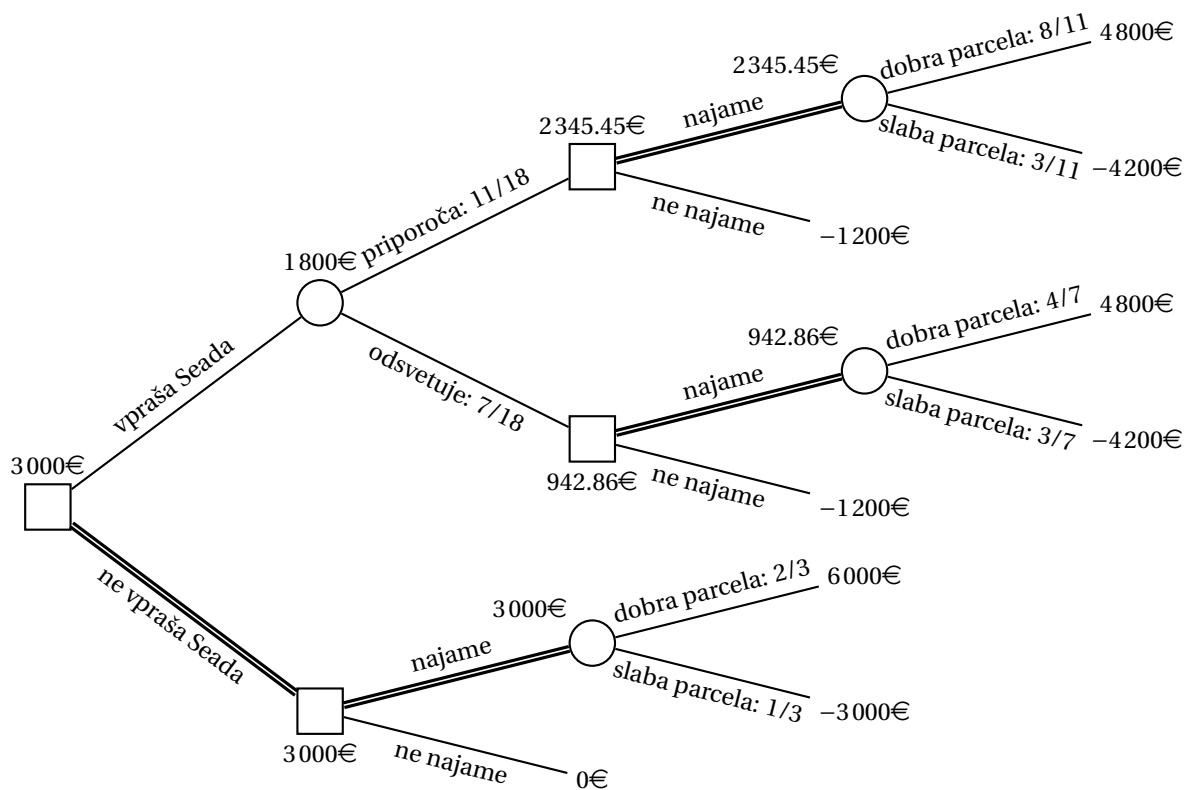
$$\begin{aligned}
P(\text{Sead priporoča}) &= \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{11}{18} \\
P(\text{Sead odsvetuje}) &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{18} \\
P(\text{dobra parcela} \mid \text{Sead priporoča}) &= \frac{2/3 \cdot 2/3}{11/18} = \frac{8}{11} \\
P(\text{slaba parcela} \mid \text{Sead priporoča}) &= \frac{1/3 \cdot 1/2}{11/18} = \frac{3}{11} \\
P(\text{dobra parcela} \mid \text{Sead odsvetuje}) &= \frac{2/3 \cdot 1/3}{7/18} = \frac{4}{7} \\
P(\text{slaba parcela} \mid \text{Sead odsvetuje}) &= \frac{1/3 \cdot 1/2}{7/18} = \frac{3}{7}
\end{aligned}$$

S pomočjo zgoraj izračunanih verjetnosti lahko narišemo odločitveno drevo s slike 50. Opazimo, da Seadovo mnenje ne vpliva na našo odločitev o prodaji, zato naj ga Rexhep ne vpraša in tako pričakuje dobiček  $3\,000\text{€}$ .

### Naloga 3.7.

Izračunajmo najprej pričakovane vrednosti v vozliščih  $C$ ,  $D$  in  $E$  odločitvenega drevesa s slike 4.

$$\begin{aligned}
C &= 10 \cdot p + 2 \cdot p - 5 \cdot (1 - 2p) = 22p - 5 \\
D &= 3 \cdot 2p - 2 \cdot (1 - 2p) &= 10p - 2 \\
E &= 1 \cdot 3p + 0 \cdot (1 - 3p) &= 3p
\end{aligned}$$



Slika 50: Odločitveno drevo za nalogo 3.6.

Obravnavajmo najprej odločitev v vozlišču  $B$ . Za pot k vozlišču  $D$  se odločimo, če velja  $10p - 2 \geq 3p$  oziroma  $p \geq 2/7$ , sicer se odločimo za pot k vozlišču  $E$ . Obravnavajmo sedaj še odločitev v vozlišču  $A$  – za pot k vozlišču  $C$  se odločimo, če velja:

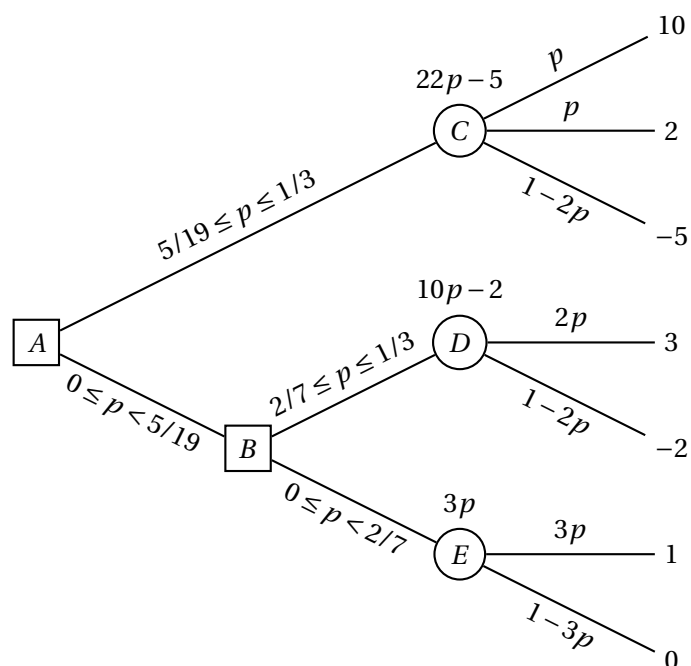
$$\begin{aligned}
 p < \frac{2}{7}: \quad 22p - 5 \geq 3p & \Rightarrow \frac{5}{19} \leq p < \frac{2}{7} \\
 p \geq \frac{2}{7}: \quad 22p - 5 \geq 10p - 2 & \Rightarrow p \geq \frac{2}{7} \geq \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

Odločamo se torej tako:

- če je  $0 \leq p < 5/19$ , se odločimo za pot preko vozlišča  $B$  k vozlišču  $E$ , pričakovana vrednost je  $3p \in [0, 15/19)$ ; in
- če je  $5/19 \leq p \leq 1/3$ , se odločimo za pot k vozlišču  $C$ , pričakovana vrednost je  $22p - 5 \in [15/19, 7/3]$ .

Proces odločanja je prikazan na sliki 51.





Slika 51: Odločitveno drevo za nalogo 3.7 v odvisnosti od vrednosti parametra  $p$ .

### Naloga 3.8.

Izračunamo lahko, da pot z avtobusom 1 traja 18 minut oziroma minuto dlje ob rdečem semaforju pri FF, pot z avtobusom 6 in naknadno pešačenje traja 16 minut ter minuto dlje ob rdečem semaforju pri FF in še dve minuti dlje ob rdečem semaforju pri FE, pot z avtobusom 14 in naknadno pešačenje pa traja 15 minut ter tri minute dlje ob čakanju na vlak in še dve minuti dlje ob rdečem semaforju pri FE. Če gremo na avtobus 6 in pri FF naletimo na zeleno luč, potem je verjetnost, da tudi avtobus 1 tam naleti na zeleno luč, enaka

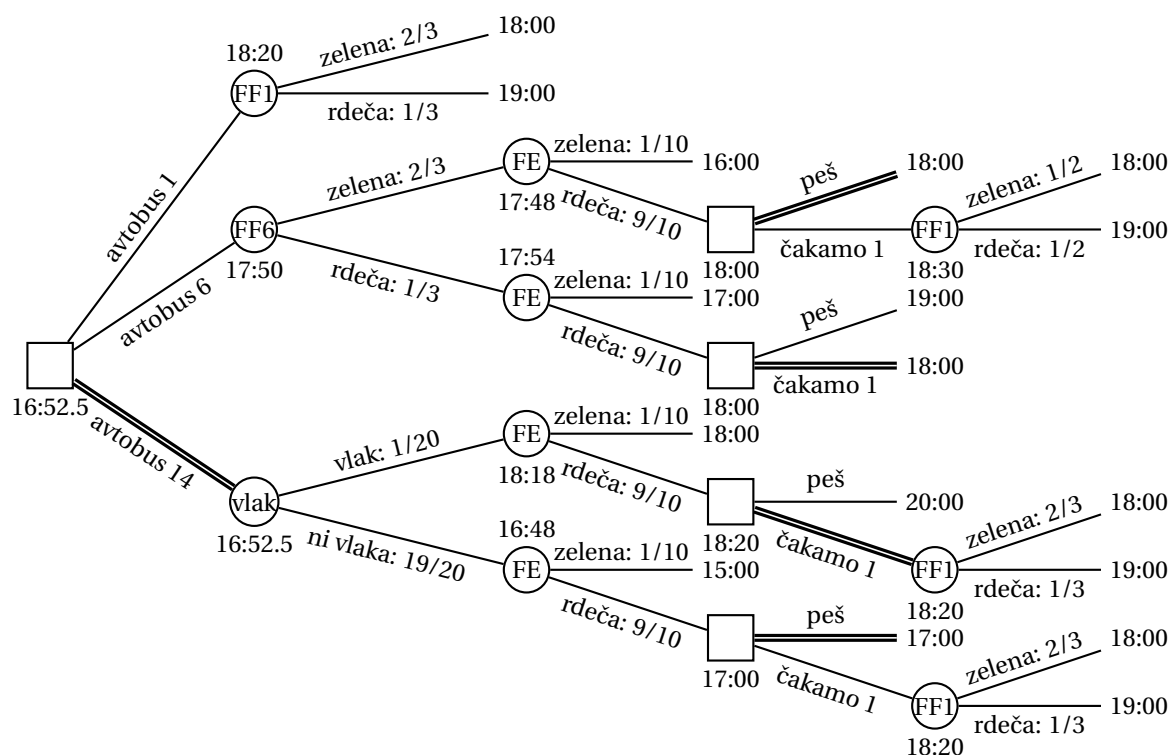
$$P(\text{avtobus 1 ima zeleno pri FF} \mid \text{avtobus 6 ima zeleno pri FF}) = \frac{1/3}{2/3} = \frac{1}{2}.$$

S temi podatki lahko narišemo odločitveno drevo s slike 52, s katerega je razvidno, da pričakovani čas trajanja minimiziramo, če gremo na avtobus 14, potem pa v primeru čakanja na vlak in rdeče luči pri FE počakamo na avtobus 1, sicer pa pot nadaljujemo peš. Pričakovani čas trajanja poti je tako 16 minut in 52.5 sekund.

### Naloga 3.9.

Naj bo  $A$  dogodek, da izvedenec pripiše večje možnosti prvemu podjetju, ter  $B_1$ ,  $B_2$  in  $B_0$  dogodki, da uspe prvo, drugo oziroma nobeno podjetje. Izračunajmo verjetnosti za mnenje izvedenca ter uspešnosti podjetij v odvisnosti od njega.

$$P(A) = 0.4 \cdot 0.8 + 0.1 \cdot 0.3 + 0.5 \cdot 0.4 = 0.55$$

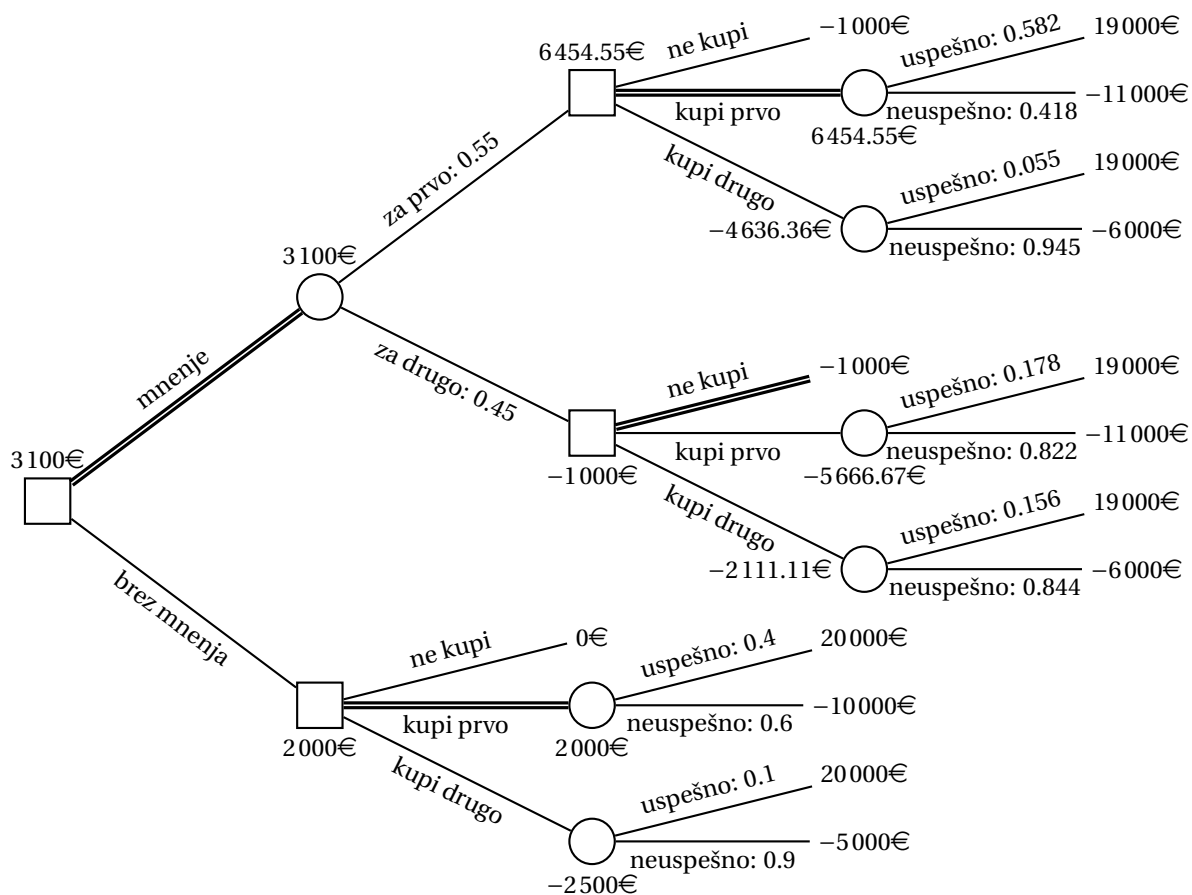


Slika 52: Odločitveno drevo za nalogo 3.8.

$$P(\bar{A}) = 0.4 \cdot 0.2 + 0.1 \cdot 0.7 + 0.5 \cdot 0.6 = 0.45$$

$P(B_0   A) =$	$\frac{0.5 \cdot 0.4}{0.55}$	$= \frac{4}{11}$
$P(B_1   A) =$	$\frac{0.4 \cdot 0.8}{0.55}$	$= \frac{32}{55}$
$P(B_2   A) =$	$\frac{0.1 \cdot 0.3}{0.55}$	$= \frac{3}{55}$
$P(B_0   \bar{A}) =$	$\frac{0.5 \cdot 0.6}{0.45}$	$= \frac{2}{3}$
$P(B_1   \bar{A}) =$	$\frac{0.4 \cdot 0.2}{0.45}$	$= \frac{8}{45}$
$P(B_2   \bar{A}) =$	$\frac{0.1 \cdot 0.7}{0.45}$	$= \frac{7}{45}$

S pomočjo zgoraj izračunanih verjetnosti lahko narišemo odločitveno drevo s slike 53. Odločimo se torej za mnenje izvedenca – če je to naklonjeno prvemu podjetju, kupimo njegove delnice, sicer pa ne kupimo ničesar. Pričakovan dobiček je 3100€.



Slika 53: Odločitveno drevo za nalogo 3.9.

### Naloga 3.10.

Naj bo  $A$  dogodek, da nasprotnik na začetku vloži 10 žetonov,  $B_n$  dogodek, da odgovorimo z  $n$  žetoni ( $n \in \{0, 10, 20\}$ ),  $C$  dogodek, da nasprotnik za tem izenači, in  $D$  dogodek, da dobimo igro. Izračunajmo ustrezne pogojne verjetnosti.

$$\begin{aligned}
 P(A) &= 0.6 \cdot 0.3 + 0.4 \cdot 0.8 &= 0.5 \\
 P(\bar{A}) &= 0.6 \cdot 0.7 + 0.4 \cdot 0.2 &= 0.5 \\
 P(C | A \cap B_{20}) &= \frac{0.6 \cdot 0.3 \cdot 0.1 + 0.4 \cdot 0.8 \cdot 0.8}{0.5} &= 0.548 \\
 P(\bar{C} | A \cap B_{20}) &= \frac{0.6 \cdot 0.3 \cdot 0.9 + 0.4 \cdot 0.8 \cdot 0.2}{0.5} &= 0.452 \\
 P(C | \bar{A} \cap B_{10}) &= \frac{0.6 \cdot 0.7 \cdot 0.2 + 0.4 \cdot 0.2 \cdot 0.7}{0.5} &= 0.28 \\
 P(\bar{C} | \bar{A} \cap B_{10}) &= \frac{0.6 \cdot 0.7 \cdot 0.8 + 0.4 \cdot 0.2 \cdot 0.3}{0.5} &= 0.72
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(C | \bar{A} \cap B_{20}) &= \frac{0.6 \cdot 0.7 \cdot 0.1 + 0.4 \cdot 0.2 \cdot 0.8}{0.5} = 0.212 \\
P(\bar{C} | \bar{A} \cap B_{20}) &= \frac{0.6 \cdot 0.7 \cdot 0.9 + 0.4 \cdot 0.2 \cdot 0.2}{0.5} = 0.788 \\
P(D | A \cap B_{10}) &= \frac{0.6 \cdot 0.3 \cdot 0.8 + 0.4 \cdot 0.8 \cdot 0.1}{0.5} = 0.352 \\
P(\bar{D} | A \cap B_{10}) &= \frac{0.6 \cdot 0.3 \cdot 0.2 + 0.4 \cdot 0.8 \cdot 0.9}{0.5} = 0.648 \\
P(D | A \cap B_{20} \cap C) &= \frac{0.6 \cdot 0.3 \cdot 0.1 \cdot 0.8 + 0.4 \cdot 0.8 \cdot 0.8 \cdot 0.1}{0.5 \cdot 0.548} \approx 0.146 \\
P(\bar{D} | A \cap B_{20} \cap C) &= \frac{0.6 \cdot 0.3 \cdot 0.1 \cdot 0.2 + 0.4 \cdot 0.8 \cdot 0.8 \cdot 0.9}{0.5 \cdot 0.548} \approx 0.854 \\
P(D | \bar{A} \cap B_0) &= \frac{0.6 \cdot 0.7 \cdot 0.8 + 0.4 \cdot 0.2 \cdot 0.1}{0.5} = 0.688 \\
P(\bar{D} | \bar{A} \cap B_0) &= \frac{0.6 \cdot 0.7 \cdot 0.2 + 0.4 \cdot 0.2 \cdot 0.9}{0.5} = 0.312 \\
P(D | \bar{A} \cap B_{10} \cap C) &= \frac{0.6 \cdot 0.7 \cdot 0.2 \cdot 0.8 + 0.4 \cdot 0.2 \cdot 0.7 \cdot 0.1}{0.5 \cdot 0.28} = 0.52 \\
P(\bar{D} | \bar{A} \cap B_{10} \cap C) &= \frac{0.6 \cdot 0.7 \cdot 0.2 \cdot 0.2 + 0.4 \cdot 0.2 \cdot 0.7 \cdot 0.9}{0.5 \cdot 0.28} = 0.48 \\
P(D | \bar{A} \cap B_{20} \cap C) &= \frac{0.6 \cdot 0.7 \cdot 0.1 \cdot 0.8 + 0.4 \cdot 0.2 \cdot 0.8 \cdot 0.1}{0.5 \cdot 0.212} \approx 0.377 \\
P(\bar{D} | \bar{A} \cap B_{20} \cap C) &= \frac{0.6 \cdot 0.7 \cdot 0.1 \cdot 0.2 + 0.4 \cdot 0.2 \cdot 0.8 \cdot 0.9}{0.5 \cdot 0.212} \approx 0.623
\end{aligned}$$

S pomočjo zgoraj izračunanih verjetnosti lahko narišemo odločitveno drevo s slike 54. Opazimo, da se nam v vsakem primeru izplača višati za 10 žetonov (tj., če nasprotnik na začetku vloži 10 žetonov, odgovorimo z 20 žetoni). Pričakovani dobiček je 10.364 žetonov.

### Naloga 3.11.

Izračunajmo najprej pričakovane vrednosti v vozliščih  $F$ ,  $G$  in  $H$  odločitvenega drevesa s slike 6.

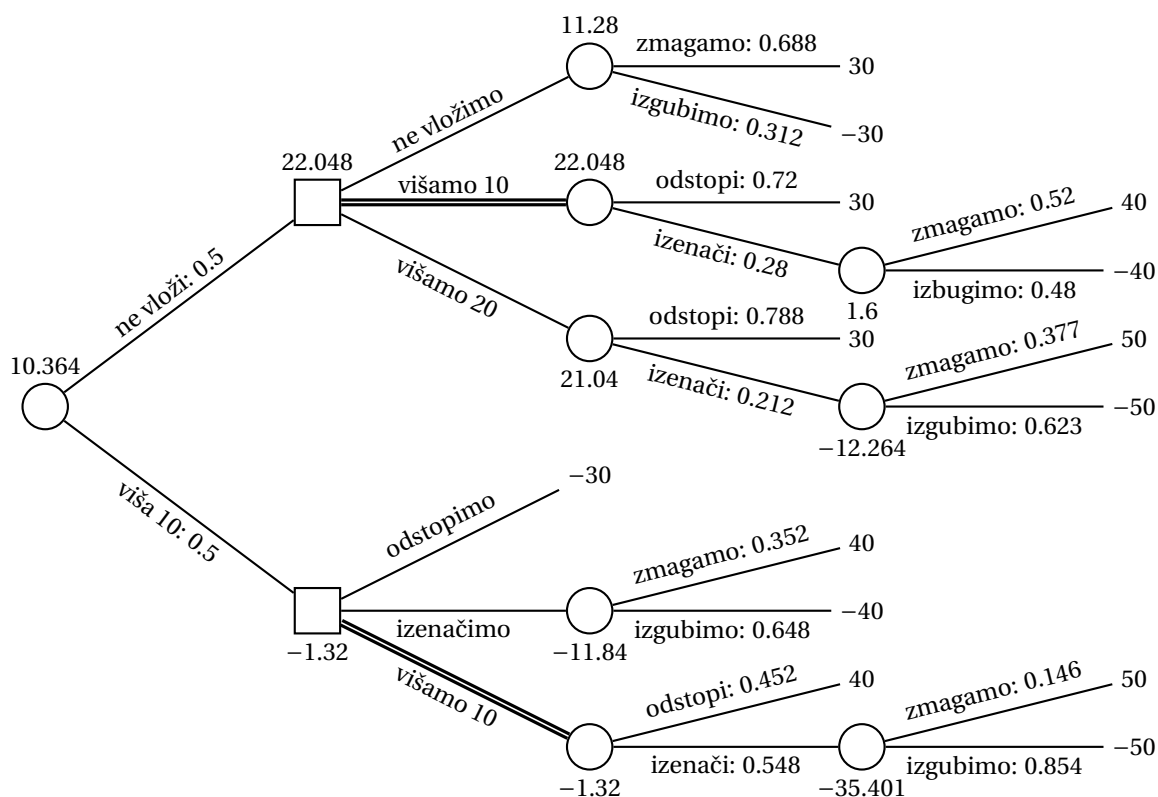
$$F = 25 \cdot 2p - 10 \cdot (1 - 2p) = 70p - 10$$

$$G = 50 \cdot p - 10 \cdot (1 - p) = 60p - 10$$

$$H = 30 \cdot 4p - 30 \cdot (1 - 4p) = 240p - 30$$

Obravnavajmo najprej odločitve v vozliščih  $C$ ,  $D$  in  $E$ . Za pot od vozlišča  $C$  k vozlišču  $F$  se odločimo, če velja  $70p - 10 \geq 0$  oziroma  $p \geq 1/7$ . Za pot od vozlišča  $D$  k vozlišču  $G$  se odločimo, če velja  $60p - 10 \geq -5$  oziroma  $p \geq 1/12$ . Za pot od vozlišča  $E$  k vozlišču  $H$  se odločimo, če velja  $240p - 30 \geq -5$  oziroma  $p \geq 5/48$ . Sedaj lahko izračunamo pričakovano vrednost v vozlišču  $B$  v odvisnosti od parametra  $p$ .

$$0 \leq p < \frac{1}{12} \Rightarrow B = 0.6 \cdot (-5) + 0.4 \cdot (-5) = -5$$



Slika 54: Odločitveno drevo za nalogo 3.10.

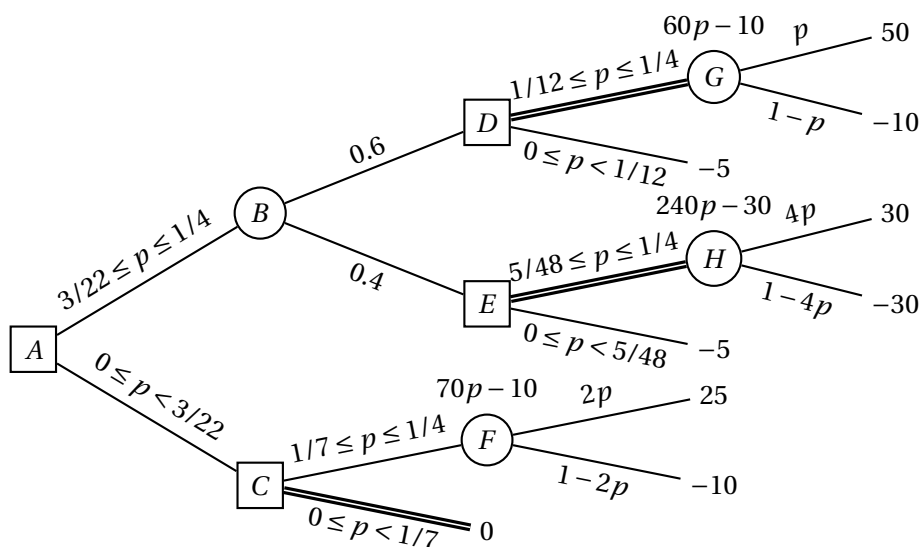
$$\begin{aligned} \frac{1}{12} \leq p < \frac{5}{48} &\Rightarrow B = 0.6 \cdot (60p - 10) + 0.4 \cdot (-5) = 36p - 8 \\ \frac{5}{48} \leq p \leq \frac{1}{4} &\Rightarrow B = 0.6 \cdot (60p - 10) + 0.4 \cdot (240p - 30) = 132p - 18 \end{aligned}$$

Obravnavajmo sedaj še odločitev v vozlišču  $A$  – za pot k vozlišču  $B$  se odločimo, če velja:

$$\begin{aligned} 0 \leq p < \frac{1}{12} : \quad -5 \geq 0 &\Rightarrow \perp \\ \frac{1}{12} \leq p < \frac{5}{48} : \quad 36p - 8 \geq 0 &\Rightarrow \perp \\ \frac{5}{48} \leq p < \frac{1}{7} : \quad 132p - 18 \geq 0 &\Rightarrow \frac{3}{22} \leq p < \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} \leq p \leq \frac{1}{4} : \quad 132p - 18 \geq 70p - 10 &\Rightarrow \frac{1}{7} \leq p \leq \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Odločamo se torej po sledečem pravilu.

- Če je  $0 \leq p < 3/22$ , se odločimo za pot preko vozlišča  $C$  v list z vrednostjo 0.
- Če je  $1/7 \leq p < 3/22$ , se odločimo za pot preko vozlišča  $B$ .



Slika 55: Odločitveno drevo za nalogo 3.11 v odvisnosti od vrednosti parametra  $p$ .

- Če pridemo v vozlišče  $D$ , se odločimo za pot preko vozlišča  $G$ .
- Če pridemo v vozlišče  $E$ , se odločimo za pot preko vozlišča  $H$ .

Pričakovana vrednost je  $132p - 18 \in [0, 15]$ .

Proces odločanja je prikazan na sliki 55.

### Naloga 3.12.

(a) Izračunajmo pričakovane dobičke pri različnih pogojih:

Izdela 500, prodaja po 50€, tržno zanimiv:

$$-10\,000\text{€} + 500 \cdot 50\text{€} = 15\,000\text{€}$$

Izdela 500, prodaja po 50€, tržno nezanimiv:

$$-10\,000\text{€} + 250 \cdot 50\text{€} = 2\,500\text{€}$$

Izdela 500, prodaja po 60€, tržno zanimiv:

$$-10\,000\text{€} + 500 \cdot 60\text{€} = 20\,000\text{€}$$

Izdela 500, prodaja po 60€, tržno nezanimiv:

$$-10\,000\text{€} + 100 \cdot 60\text{€} = -4\,000\text{€}$$

Izdela 1 000, prodaja po 50€, tržno zanimiv:

$$-18\,000\text{€} + 650 \cdot 50\text{€} = 14\,500\text{€}$$

Izdela 1 000, prodaja po 50€, tržno nezanimiv:

$$-18\,000\text{€} + 250 \cdot 50\text{€} = -5\,500\text{€}$$

Izdela 1 000, prodaja po 60€, tržno zanimiv:

$$-18\,000\text{€} + 550 \cdot 60\text{€} = 15\,000\text{€}$$

Izdela 1 000, prodaja po 60€, tržno nezanimiv:

$$-18\,000\text{€} + 100 \cdot 60\text{€} = -12\,000\text{€}$$

Odločitveno drevo je prikazano na sliki 56. Podjetnik naj se odloči, da naroči izdelavo 500 izdelkov, te pa prodaja po ceni 60€. Pričakovani dobiček je tedaj 15 200€.

(b) Najprej določimo verjetnosti, ki jih bomo potrebovali za odločitev.

$$P(\text{zmaga}) = 0.6 \cdot 0.8 + 0.1 \cdot 0.2 = 0.5$$

$$P(\text{ne zmaga}) = 0.4 \cdot 0.8 + 0.9 \cdot 0.2 = 0.5$$

$$P(\text{zanimiv} \mid \text{zmaga}) = \frac{0.6 \cdot 0.8}{0.5} = 0.96$$

$$P(\text{ni zanimiv} \mid \text{zmaga}) = \frac{0.1 \cdot 0.2}{0.5} = 0.04$$

$$P(\text{zanimiv} \mid \text{ne zmaga}) = \frac{0.4 \cdot 0.8}{0.5} = 0.64$$

$$P(\text{ni zanimiv} \mid \text{ne zmaga}) = \frac{0.9 \cdot 0.2}{0.5} = 0.36$$

Sedaj izračunajmo pričakovane dobičke pri različnih pogojih po zmagi na razpisu. Opazimo, da v nobenem pogoju pričakovano število prodanih izdelkov ne bo preseglo količine 980 izdelkov, kolikor jih ostane po kontroli kvalitete. Če ne zmaga na razpisu, so pričakovani dobički enaki tistim iz točke (a) pri izdelavi 1 000 kosov.

Zmaga, prodaja po 50€, tržno zanimiv:

$$-18\,000\text{€} + 650 \cdot 50\text{€} \cdot 1.2 + k = 21\,000\text{€} + k$$

Zmaga, prodaja po 50€, tržno nezanimiv:

$$-18\,000\text{€} + 250 \cdot 50\text{€} \cdot 1.2 + k = -3\,000\text{€} + k$$

Zmaga, prodaja po 60€, tržno zanimiv:

$$-18\,000\text{€} + 550 \cdot 60\text{€} \cdot 1.2 + k = 21\,600\text{€} + k$$

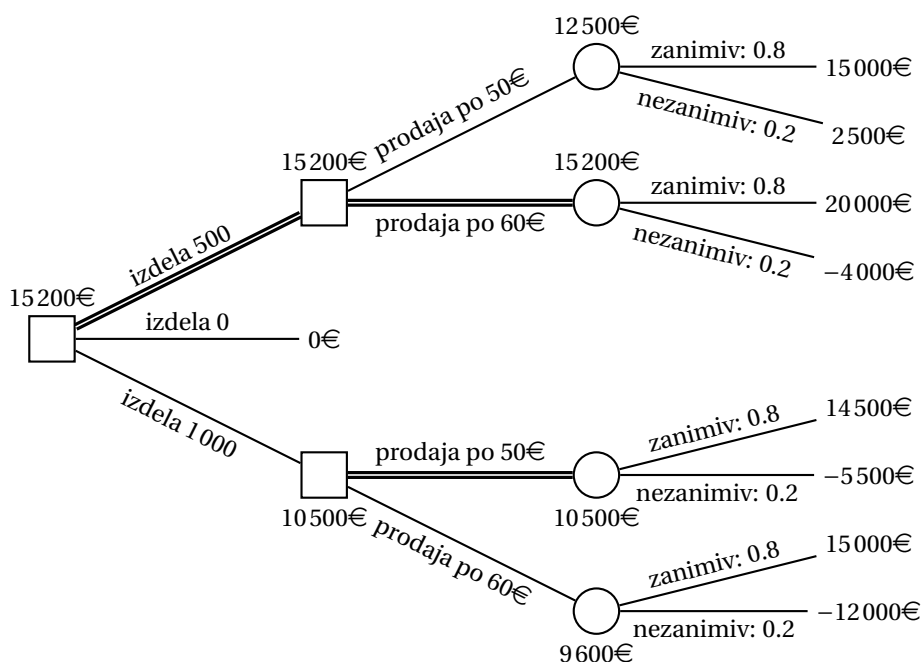
Zmaga, prodaja po 60€, tržno nezanimiv:

$$-18\,000\text{€} + 100 \cdot 60\text{€} \cdot 1.2 + k = -10\,800\text{€} + k$$

Z zgornjimi podatki lahko narišemo odločitveno drevo s slike 57. Izračunajmo pričakovane dobičke v vozliščih  $E, F, G, H$ .

$$E = 0.96 \cdot (21\,000\text{€} + k) + 0.04 \cdot (-3\,000\text{€} + k) = 20\,040\text{€} + k$$

$$F = 0.96 \cdot (21\,600\text{€} + k) + 0.04 \cdot (-10\,800\text{€} + k) = 20\,304\text{€} + k$$



Slika 56: Odločitveno drevo za nalogo 3.12(a).

$$\begin{aligned}
 G &= 0.64 \cdot 14500\text{€} - 0.36 \cdot 5500\text{€} = 7300\text{€} \\
 H &= 0.64 \cdot 15000\text{€} - 0.36 \cdot 12000\text{€} = 5280\text{€}
 \end{aligned}$$

Očitno je v vozlišču  $C$  ugodnejša pot k vozlišču  $F$ , v vozlišču  $D$  pa je ugodnejša pot k vozlišču  $G$  – velja torej  $C = 20304\text{€} + k$  in  $D = 7300\text{€}$ . Sedaj lahko izračunamo še pričakovano vrednost v vozlišču  $B$ .

$$B = 0.5 \cdot (20304\text{€} + k) + 0.5 \cdot 7300\text{€} = 13802\text{€} + \frac{k}{2}$$

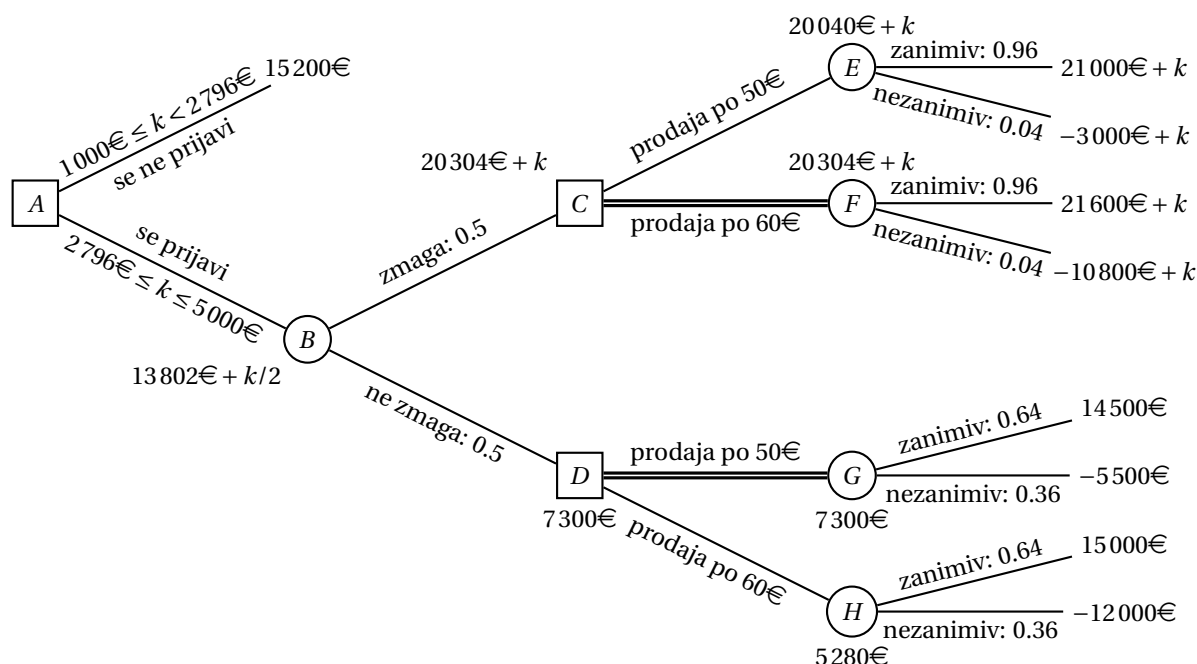
Podjetnik naj se torej prijav na razpis, če velja  $13802\text{€} + k/2 \geq 15200\text{€}$  oziroma  $k \geq 2796\text{€}$ . Če nato zmaga na razpisu, naj izdelke prodaja po ceni 60€, v nasprotnem primeru pa naj jih prodaja po ceni 50€. Pričakovani dobiček je tedaj  $13802\text{€} + k/2 \in [15200\text{€}, 16302\text{€}]$ .

Če velja  $k < 2796\text{€}$ , naj se podjetnik ne prijavi na razpis. Tako kot v točki (a) naj naroči izdelavo 500 izdelkov, te pa prodaja po ceni 60€. Pričakovani dobiček je tedaj 15200€.

### Naloga 3.13.

Če se odločimo za pot okoli gorovja, bomo porabili 12 ur, če se pa odločimo za pot čez prelaz, bomo porabili 6, 10 oziroma 14 ur, če je ta čist, delno zasnežen oziroma neprevozen. Če se pred tem odločimo za obisk vrača, se čas potovanja podaljša za eno uro.





Slika 57: Odločitveno drevo za nalogo 3.12(b) v odvisnosti od vrednosti parametra  $k$ .

Pričakovano število ur potovanja, če ne obiščemo vrača in se odločimo za pot čez prelaz, je enako

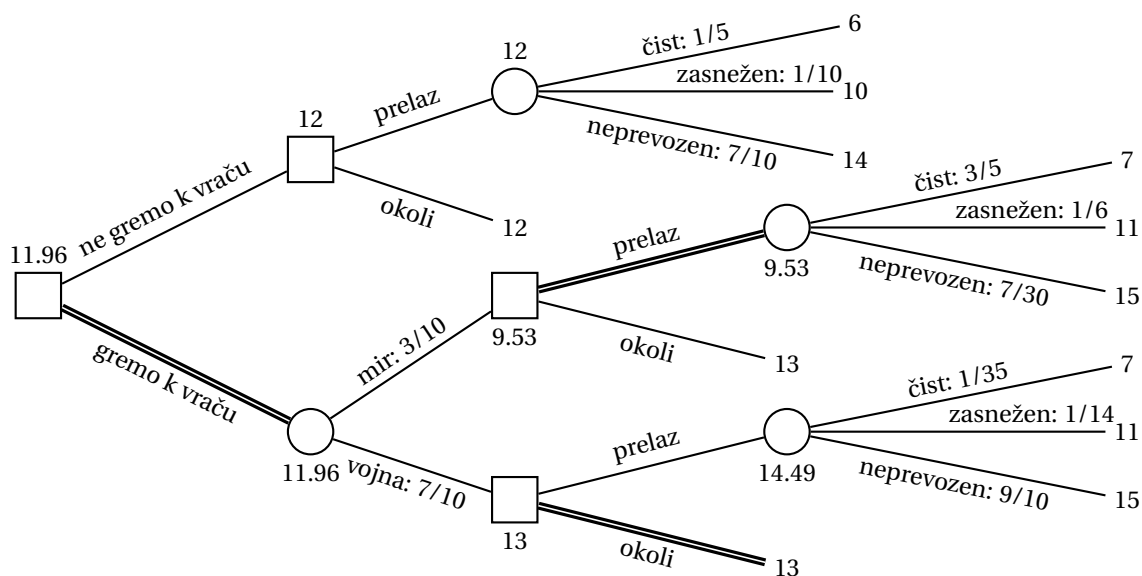
$$0.2 \cdot 6 + 0.1 \cdot 10 + 0.7 \cdot 14 = 12,$$

kar je ravno enako kot pot okoli gorovja.

Izračunajmo še verjetnosti za primer, da se odločimo za obisk vrača.

$$\begin{aligned} P(\text{mir}) &= 0.9 \cdot 0.2 + 0.5 \cdot 0.1 + 0.1 \cdot 0.7 = \frac{3}{10} \\ P(\text{vojna}) &= 0.1 \cdot 0.2 + 0.5 \cdot 0.1 + 0.9 \cdot 0.7 = \frac{7}{10} \\ P(\text{čist} \mid \text{mir}) &= \frac{0.9 \cdot 0.2}{3/10} = \frac{3}{5} \\ P(\text{delno zasnežen} \mid \text{mir}) &= \frac{0.5 \cdot 0.1}{3/10} = \frac{1}{6} \\ P(\text{neprevozen} \mid \text{mir}) &= \frac{0.1 \cdot 0.7}{3/10} = \frac{7}{30} \\ P(\text{čist} \mid \text{vojna}) &= \frac{0.1 \cdot 0.2}{7/10} = \frac{1}{35} \\ P(\text{delno zasnežen} \mid \text{vojna}) &= \frac{0.5 \cdot 0.1}{7/10} = \frac{1}{14} \\ P(\text{neprevozen} \mid \text{vojna}) &= \frac{0.9 \cdot 0.7}{7/10} = \frac{9}{10} \end{aligned}$$

S pomočjo zgoraj izračunanih verjetnosti lahko narišemo odločitveno drevo s



Slika 58: Odločitveno drevo za nalogo 3.13.

slike 58. Opazimo, da se nam izplača iti k vraču ter se odločiti za pot čez prelaz, če nam pove, da na gori vlada mir, in za pot okoli gorovja v nasprotnem primeru.

### Naloga 3.14.

Izračunajmo najprej pričakovane vrednosti v vozliščih  $C$ ,  $F$  in  $G$  odločitvenega drevesa s slike 8.

$$C = 0.5 \cdot (40p + 20) = 20p + 10$$

$$F = 50 \cdot p - 10 \cdot (1 - p) = 60p - 10$$

$$G = -30 \cdot p + 30 \cdot (1 - p) = -60p + 30$$

Obravnavajmo najprej odločitev v vozlišču  $D$ . Za pot k vozlišču  $F$  se odločimo, če velja  $60p - 10 \geq -5$  oziroma  $p \geq 1/12$ .

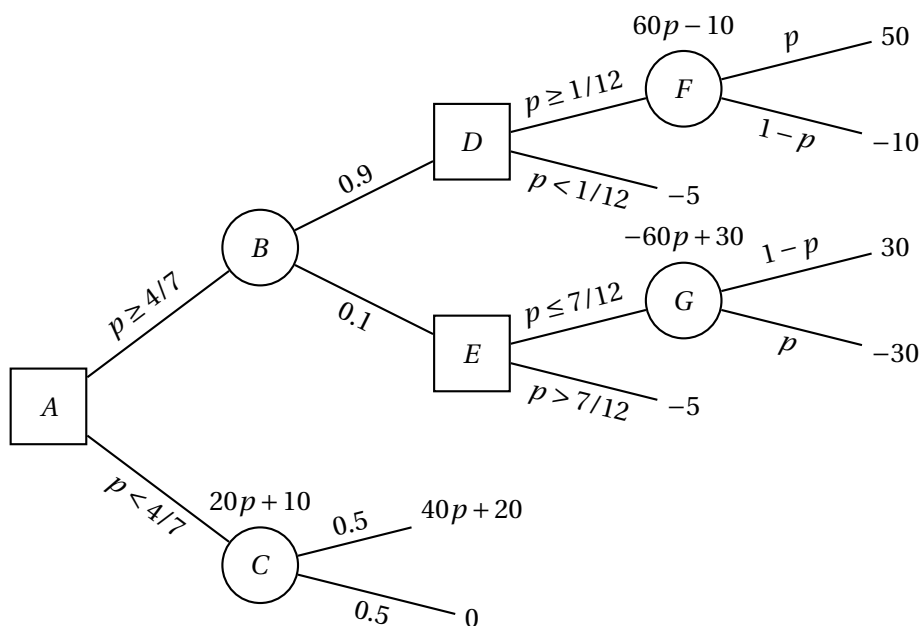
Obravnavajmo sedaj še odločitev v vozlišču  $E$ . Za pot k vozlišču  $G$  se odločimo, če velja  $-60p + 30 \geq -5$  oziroma  $p \leq 7/12$ .

Pričakovana vrednost v vozlišču  $B$  bo sledeča.

$$\begin{aligned} p < \frac{1}{12} : & \quad 0.9 \cdot (-5) + (-60p + 30) \cdot 0.1 = -1.5 - 6p \\ \frac{1}{12} \leq p \leq \frac{7}{12} : & \quad 0.9 \cdot (60p - 10) + 0.1 \cdot (-60p + 30) = -6 + 48p \\ p > \frac{7}{12} : & \quad 0.9 \cdot (60p - 10) + 0.1 \cdot (-5) = -9.5 + 54p \end{aligned}$$

Obravnavajmo sedaj še odločitev v vozlišču  $A$ .

$$0 \leq p < \frac{1}{12} : \quad \max\{-1.5 - 6p, 20p + 10\} = 20p + 10$$



Slika 59: Odločitveno drevo za nalogo 3.14 v odvisnosti od vrednosti parametra  $p$ .

$$\begin{aligned} \frac{1}{12} \leq p \leq \frac{7}{12} : \quad & \max\{-6 + 48p, 20p + 10\} = \begin{cases} 20p + 10 & p < \frac{4}{7} \\ -6 + 48p & p \geq \frac{4}{7} \end{cases} \\ p > \frac{7}{12} : \quad & \max\{-9.5 + 54p, 20p + 10\} = -9.5 + 54p \end{aligned}$$

Proces odločanja je prikazan na sliki 59.

### Naloga 3.15.

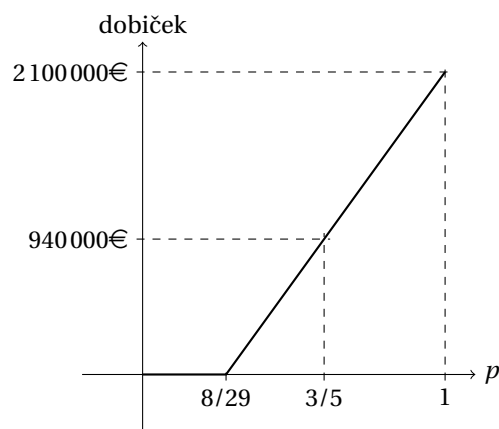
- (a) Imamo eno odločitev – ali naj zaposlimo g. Ajkalaja. Če ga ne zaposlimo, je dobiček 0€, če pa ga zaposlimo, pa pridemo v stanje, v katerem imamo z verjetnostjo  $p$  dobiček 2 100 000€, z verjetnostjo  $1 - p$  pa -800 000€. V tem stanju je torej pričakovan dobiček enak

$$p \cdot 2\,100\,000\text{€} - (1 - p) \cdot 800\,000\text{€} = p \cdot 2\,900\,000\text{€} - 800\,000\text{€}.$$

Za  $p < 8/29$  torej pričakujemo izgubo in se nam ga ne izplača zaposliti, sicer pa imamo dobiček in se ga nam tako izplača zaposliti. Graf pričakovanega dobička je prikazan na sliki 60. Pri podani vrednosti  $p = 3/5$  se nam torej izplača zaposliti g. Ajkalaja, saj tedaj pričakujemo dobiček 940 000€.

- (b) EVPI izračunamo tako, da od pričakovanega dobička pri znanem izidu odštejemo pričakovani dobiček pri neznanem izidu:

$$\text{EVPI} = 3/5 \cdot 2\,100\,000\text{€} + 2/5 \cdot 0\text{€} - 940\,000\text{€} = 320\,000\text{€}$$



Slika 60: Graf pričakovanega dobička za nalogo 3.15(a).

Ker je EVPI večji od cene dodatnega testiranja, izračunajmo še EVE. Najprej določimo verjetnosti:

$$P(\text{test pozitiven}) = 7/8 \cdot 3/5 + 1/4 \cdot 2/5 = 5/8$$

$$P(\text{test negativen}) = 1/8 \cdot 3/5 + 3/4 \cdot 2/5 = 3/8$$

$$P(\text{uspešen rezultat} \mid \text{test pozitiven}) = \frac{7/8 \cdot 3/5}{5/8} = 21/25$$

$$P(\text{neuspešen rezultat} \mid \text{test pozitiven}) = \frac{1/4 \cdot 2/5}{5/8} = 4/25$$

$$P(\text{uspešen rezultat} \mid \text{test negativen}) = \frac{1/8 \cdot 3/5}{3/8} = 1/5$$

$$P(\text{neuspešen rezultat} \mid \text{test negativen}) = \frac{3/4 \cdot 2/5}{3/8} = 4/5$$

Sedaj lahko izračunamo EVE:

$$\begin{aligned} \text{EVE} &= (21/25 \cdot 2\,100\,000\text{€} - 4/25 \cdot 800\,000\text{€}) \cdot 5/8 + \\ &\quad (1/5 \cdot 0\text{€} + 4/5 \cdot 0\text{€}) \cdot 3/8 - 940\,000\text{€} = 82\,500\text{€} \end{aligned}$$

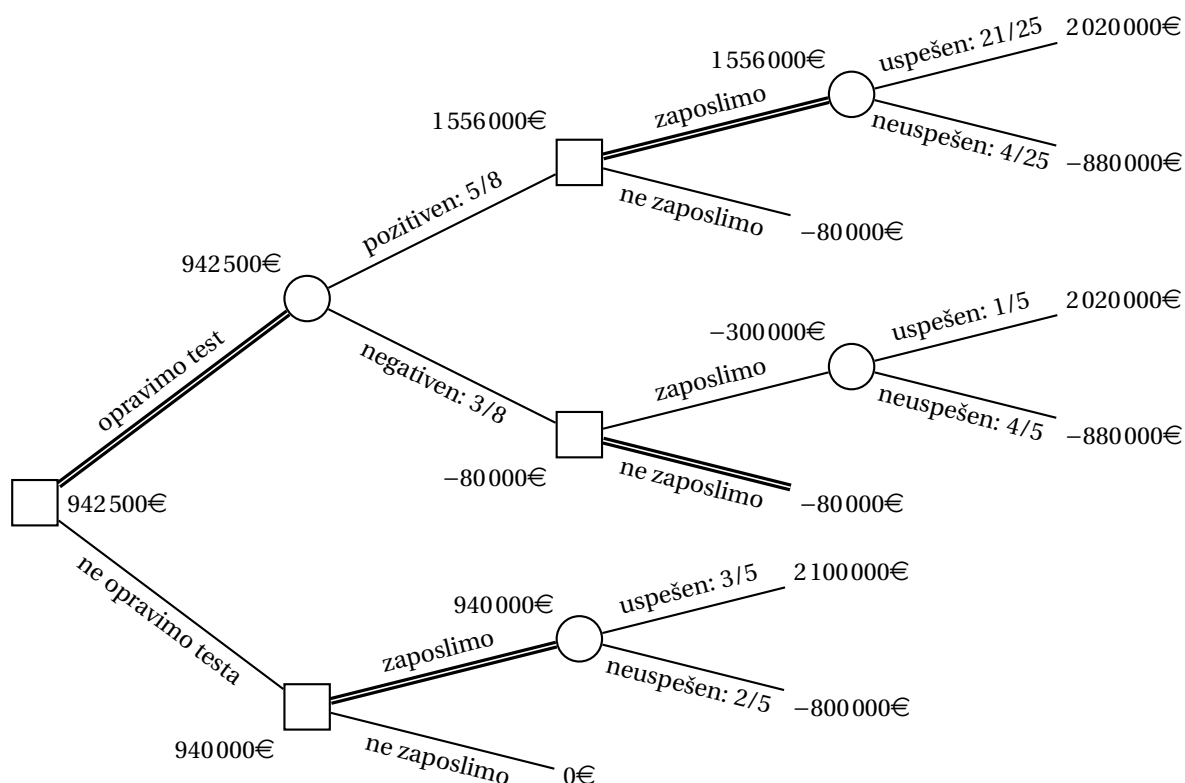
Ker je EVE večji od cene testiranja, se torej odločimo za testiranje.

- (c) Odločitveno drevo je prikazano na sliki 61. Odločimo se za test – če je ta pozitiven, zaposlimo g. Ajkalaja, sicer pa ne.

### Naloga 3.16.

- (a) Imamo eno samo odločitev – ali naj izvedemo mašenje po metodi dr. Totalkova. Če ga ne izvedemo, je dobiček 0\$, če pa ga, pa preidemo v stanje, v katerem imamo z verjetnostjo  $p$  dobiček 2800M\$, z verjetnostjo  $1 - p$  pa  $-700\text{M\$}$ . V tem primeru je pričakovani dobiček enak

$$p \cdot 2800\text{M\$} - (1 - p) \cdot 700\text{M\$} = p \cdot 3500\text{M\$} - 700\text{M\$}.$$



Slika 61: Odločitveno drevo za nalogo 3.15(c).

Za  $p < 1/5$  torej pričakujemo izgubo in se podjetju mašenja ne izplača izvesti, sicer pa podjetje pričakuje dobiček, tako da se izvedba mašenja izplača. Graf pričakovanega dobička je prikazan na sliki 62. Pri podani vrednosti  $p = 3/7$  se podjetju torej izplača izvesti mašenje, pri čemer pričakuje dobiček 800 M\$.

- (b) EVPI izračunamo tako, da od pričakovanega dobička pri znanem izidu odštejemo pričakovani dobiček pri neznanem izidu:

$$EVPI = 3/7 \cdot 2800 \text{ M\$} + 4/7 \cdot 0 \text{ M\$} - 800 \text{ M\$} = 400 \text{ M\$}$$

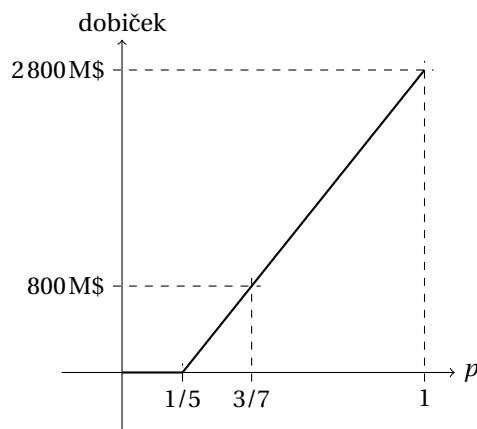
Ker je EVPI večji od cene dodatnega testiranja, izračunajmo še EVE. Najprej določimo verjetnosti:

$$P(\text{raziskava pozitivna}) = \frac{7}{9} \cdot \frac{3}{7} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{7} = \frac{11}{21}$$

$$P(\text{raziskava negativna}) = \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{7} + \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{7} = \frac{10}{21}$$

$$P(\text{uspešen projekt} \mid \text{raziskava pozitivna}) = \frac{7/9 \cdot 3/7}{11/21} = \frac{7}{11}$$

$$P(\text{neuspešen projekt} \mid \text{raziskava pozitivna}) = \frac{1/3 \cdot 4/7}{11/21} = \frac{4}{11}$$



Slika 62: Graf pričakovanega dobička za nalogo 3.16(a).

$$P(\text{uspešen projekt} \mid \text{raziskava negativna}) = \frac{2/9 \cdot 3/7}{10/21} = \frac{1}{5}$$

$$P(\text{neuspešen projekt} \mid \text{raziskava negativna}) = \frac{2/3 \cdot 4/7}{10/21} = \frac{4}{5}$$

Sedaj lahko izračunamo EVE:

$$\begin{aligned} \text{EVE} &= (7/11 \cdot 2800 \text{ M\$} - 4/11 \cdot 700 \text{ M\$}) \cdot 11/21 + \\ &\quad (1/5 \cdot 0 \text{ M\$} + 4/5 \cdot 0 \text{ M\$}) \cdot 10/21 - 800 \text{ M\$} = 0 \text{ M\$} \end{aligned}$$

Ker je EVE manjši od cene raziskave, se zanjo ne odločimo.

- (c) Odločitveno drevo je prikazano na sliki 63. Za raziskavo se ne bomo odločili, pač pa bomo poskusili zamašiti vrtino po metodi dr. Totalkova.

### Naloga 3.17.

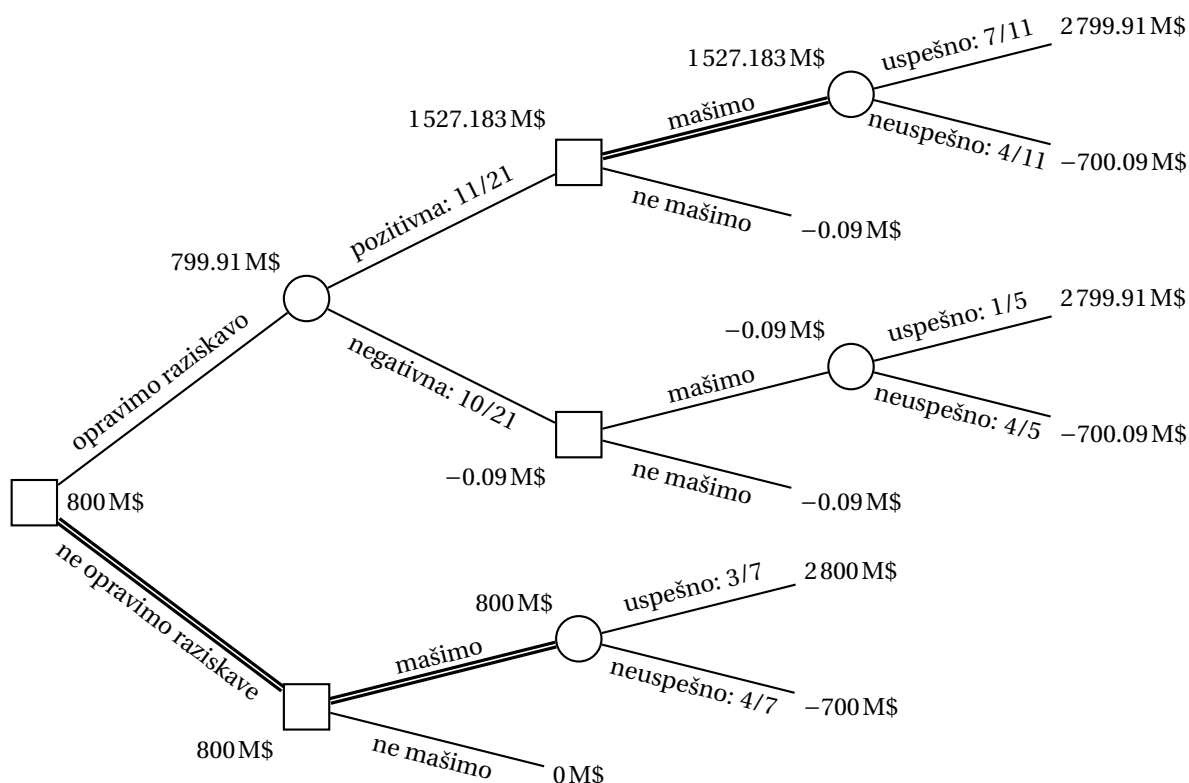
- (a) Imamo eno samo odločitev – ali naj nabavimo letalo. Če ga ne nabavimo, imamo 0€ dobička, če pa ga, pa preidemo v stanje, v katerem imamo z verjetnostjo 0.2 dobiček  $1\,000\,000\text{€} - 170\,000\text{€} = 830\,000\text{€}$ , z verjetnostjo 0.3 dobiček  $340\,000\text{€} - 170\,000\text{€} = 170\,000\text{€}$ , z verjetnostjo 0.5 pa dobiček  $10\,000\text{€} - 170\,000\text{€} = -160\,000\text{€}$ . V tem primeru je pričakovani dobiček enak

$$0.2 \cdot 830\,000\text{€} + 0.3 \cdot 170\,000\text{€} - 0.5 \cdot 160\,000\text{€} = 137\,000\text{€}.$$

Letalski družbi se torej nabava letala izplača, pri tem pa pričakuje dobiček 137 000€.

- (b) Izračunajmo verjetnosti za primer, da naročimo izvedensko mnenje.

$$P(\text{ugodno}) = 0.9 \cdot 0.2 + 0.6 \cdot 0.3 + 0.1 \cdot 0.5 = 0.41$$



Slika 63: Odločitveno drevo za nalogo 3.16(c).

$$P(\text{neugodno}) = 0.1 \cdot 0.2 + 0.4 \cdot 0.3 + 0.9 \cdot 0.5 = 0.59$$

$$P(\text{odlično} \mid \text{ugodno}) = \frac{0.9 \cdot 0.2}{0.41} \approx 0.439$$

$$P(\text{zadovoljivo} \mid \text{ugodno}) = \frac{0.6 \cdot 0.3}{0.41} \approx 0.439$$

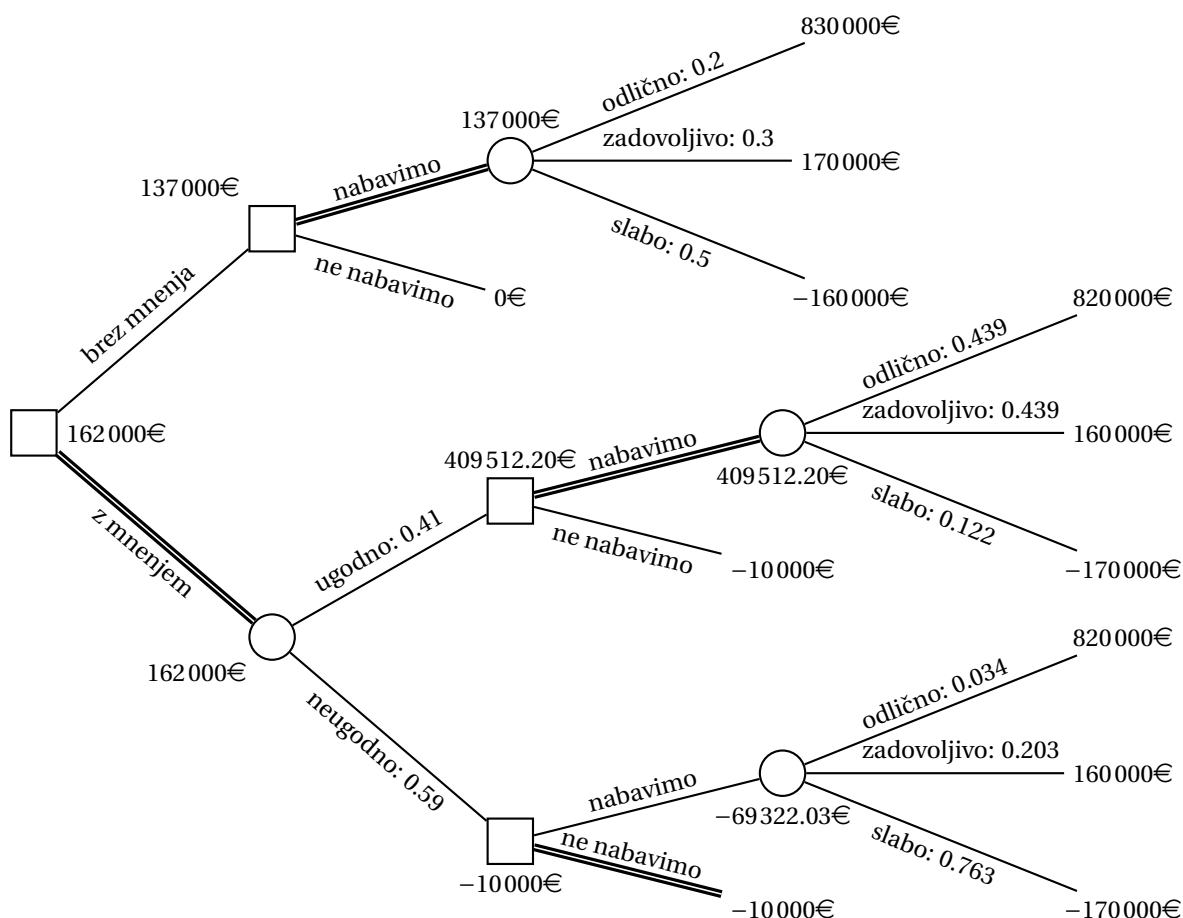
$$P(\text{slabo} \mid \text{ugodno}) = \frac{0.1 \cdot 0.5}{0.41} \approx 0.122$$

$$P(\text{odlično} \mid \text{neugodno}) = \frac{0.1 \cdot 0.2}{0.59} \approx 0.034$$

$$P(\text{zadovoljivo} \mid \text{neugodno}) = \frac{0.4 \cdot 0.3}{0.59} \approx 0.203$$

$$P(\text{slabo} \mid \text{neugodno}) = \frac{0.9 \cdot 0.5}{0.59} \approx 0.763$$

S pomočjo zgoraj izračunanih verjetnosti lahko narišemo odločitveno drevo s slike 64. Opazimo, da se nam izplača naročiti izvedensko mnenje, ter letalo nabaviti, če je to ugodno, in ga ne nabaviti, če mnenje ni ugodno.



Slika 64: Odločitveno drevo za nalogo 3.17.

### Naloga 3.18.

- (a) Študent ima eno samo odločitev – ali naj nadaljuje študij. Če ga ne nadaljuje, ima 0€ dobička, če pa ga, pa preide v stanje, v katerem ima z verjetnostjo 0.8 dobiček 200 000€, z verjetnostjo 0.2 pa –40 000€. V tem primeru je pričakovani dobiček enak

$$0.8 \cdot 200\,000\text{€} - 0.2 \cdot 40\,000\text{€} = 152\,000\text{€}.$$

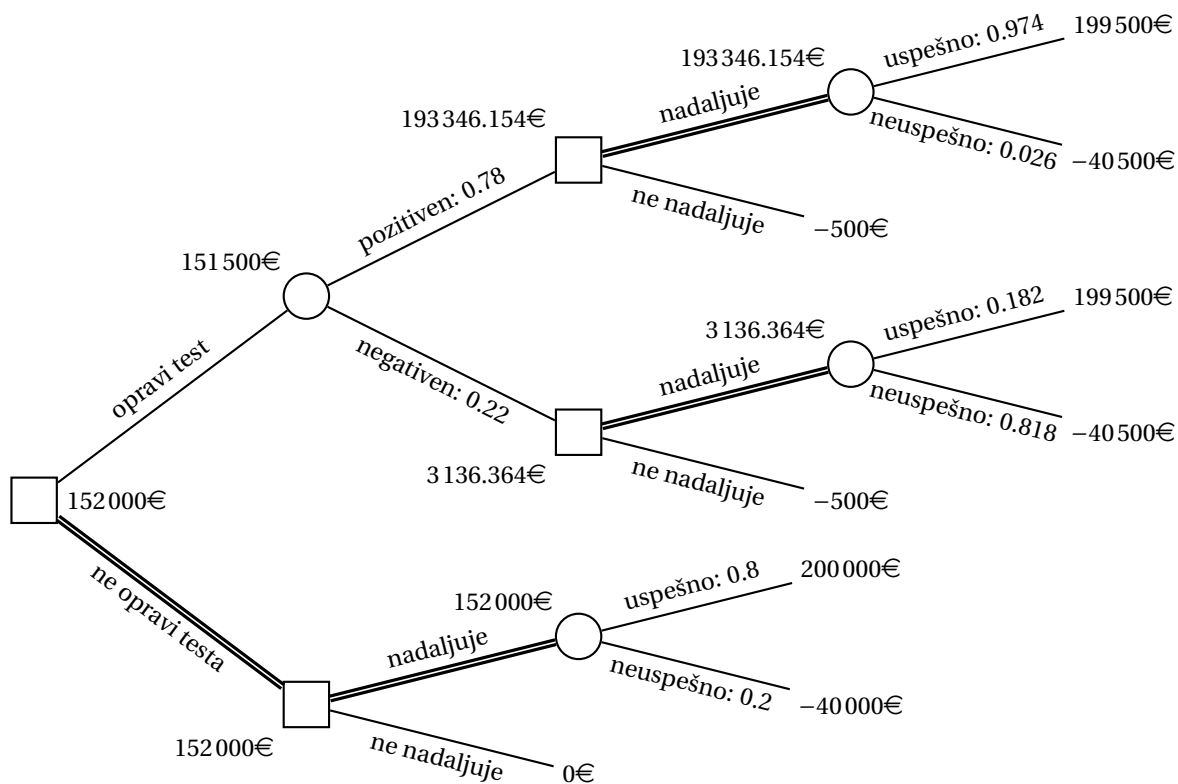
Študentu se torej nadaljevanje študija izplača, pri tem pa pričakuje dobiček 152 000€.

- (b) Izračunajmo verjetnosti za primer, da se študent odloči za testiranje.

$$P(\text{test pozitiven}) = \frac{19}{20} \cdot 0.8 + \frac{1}{10} \cdot 0.2 = 0.78$$

$$P(\text{test negativen}) = \frac{1}{20} \cdot 0.8 + \frac{9}{10} \cdot 0.2 = 0.22$$





Slika 65: Odločitveno drevo za nalogo 3.18.

$$P(\text{uspešen študij} \mid \text{test pozitiven}) = \frac{19/20 \cdot 0.8}{0.78} \approx 0.974$$

$$P(\text{neuspešen študij} \mid \text{test pozitiven}) = \frac{1/10 \cdot 0.2}{0.78} \approx 0.026$$

$$P(\text{uspešen študij} \mid \text{test negativen}) = \frac{1/20 \cdot 0.8}{0.22} \approx 0.182$$

$$P(\text{neuspešen študij} \mid \text{test negativen}) = \frac{9/10 \cdot 0.2}{0.22} \approx 0.818$$

S pomočjo zgoraj izračunanih verjetnosti lahko narišemo odločitveno drevo s slike 65. Opazimo, da se študentu ne izplača prijaviti na testiranje, saj mu to ne da zadostne informacije za morebitno spremembo odločitve.

### Naloga 3.19.

- (a) Imamo eno samo odločitev – ali naj podjetju odobrimo posojilo. Če ga ne odobrimo, imamo 0€ dobička, če pa ga, preidemo v stanje, v katerem imamo z verjetnostjo 0.3 dobiček v višini 20000€, z verjetnostjo 0.5 dobiček v višini 10000€ in z verjetnostjo 0.2 dobiček v višini –15000€. V tem primeru je

pričakovani dobiček enak

$$0.3 \cdot 20\,000\text{€} + 0.5 \cdot 10\,000\text{€} - 0.2 \cdot 15\,000\text{€} = 8\,000\text{€}.$$

Direktorici torej svetujemo, naj odobri posojilo, saj bo tedaj pričakovala dobiček 8000€.

Izračunajmo še EVPI. Tukaj upoštevamo, da posojilo odobrimo, če bo to prineslo dobiček.

$$\text{EVPI} = 0.3 \cdot 20\,000\text{€} + 0.5 \cdot 10\,000\text{€} + 0.2 \cdot 0\text{€} = 11\,000\text{€}$$

(b) Izračunajmo verjetnosti za primer, da direktorica naroči test.

$$P(\text{test pozitiven}) = \frac{2}{5} \cdot 0.3 + \frac{1}{10} \cdot 0.5 + \frac{1}{10} \cdot 0.2 = 0.19$$

$$P(\text{test nevtralen}) = \frac{2}{5} \cdot 0.3 + \frac{1}{2} \cdot 0.5 + \frac{2}{5} \cdot 0.2 = 0.45$$

$$P(\text{test negativen}) = \frac{1}{5} \cdot 0.3 + \frac{2}{5} \cdot 0.5 + \frac{1}{2} \cdot 0.2 = 0.36$$

$$P(\text{podjetje uspešno} \mid \text{test pozitiven}) = \frac{2/5 \cdot 0.3}{0.19} \approx 0.632$$

$$P(\text{podjetje povprečno uspešno} \mid \text{test pozitiven}) = \frac{1/10 \cdot 0.5}{0.19} \approx 0.263$$

$$P(\text{podjetje neuspešno} \mid \text{test pozitiven}) = \frac{1/10 \cdot 0.2}{0.19} \approx 0.105$$

$$P(\text{podjetje uspešno} \mid \text{test nevtralen}) = \frac{2/5 \cdot 0.3}{0.45} \approx 0.267$$

$$P(\text{podjetje povprečno uspešno} \mid \text{test nevtralen}) = \frac{1/2 \cdot 0.5}{0.45} \approx 0.556$$

$$P(\text{podjetje neuspešno} \mid \text{test nevtralen}) = \frac{2/5 \cdot 0.2}{0.45} \approx 0.178$$

$$P(\text{podjetje uspešno} \mid \text{test negativen}) = \frac{1/5 \cdot 0.3}{0.36} \approx 0.167$$

$$P(\text{podjetje povprečno uspešno} \mid \text{test negativen}) = \frac{2/5 \cdot 0.5}{0.36} \approx 0.556$$

$$P(\text{podjetje neuspešno} \mid \text{test negativen}) = \frac{1/2 \cdot 0.2}{0.36} \approx 0.278$$

S pomočjo zgoraj izračunanih verjetnosti lahko narišemo odločitveno drevo s slike 66. Opazimo, da se direktorici ne izplača naročiti testa, saj ji ta ne da zadostne informacije za morebitno spremembo odločitve.



Pri optimistovem kriteriju se ravnamo glede na najboljši možen izid. Pri 5-letni vezavi je to 250€, pri letni vezavi pa 224€, zato se odločimo za 5-letno vezavo.

Pri pesimistovem (Waldovem) kriteriju se ravnamo glede na najslabši možen izid. Pri 5-letni vezavi je to 90€, pri letni vezavi pa 120€, zato se odločimo za letno vezavo.

Pri Laplaceovem kriteriju so vse možnosti enako verjetne. Pri 5-letni vezavi je torej pričakovani dobiček enak  $(250€ + 250€ + 250€ + 90€)/4 = 210€$ , pri letni vezavi pa  $(200€ + 224€ + 184€ + 120€)/4 = 182€$ , zato se odločimo za 5-letno vezavo.

Pri Savageovem kriteriju želimo minimizirati največje možno obžalovanje. Pri 5-letni vezavi je največje obžalovanje enako  $120€ - 90€ = 30€$ , pri letni vezavi pa  $250€ - \min\{200€, 224€, 184€\} = 66€$ , zato se odločimo za 5-letno vezavo.

Pri Hurwiczevem kriteriju upoštevamo, da se najboljši izid zgodi z verjetnostjo  $\alpha$ , najslabši pa z verjetnostjo  $1 - \alpha$ . Pri 5-letni vezavi je torej pričakovani dobiček enak  $\alpha \cdot 250€ + (1 - \alpha) \cdot 90€ = \alpha \cdot 160€ + 90€$ , pri letni vezavi pa  $\alpha \cdot 224€ + (1 - \alpha) \cdot 120€ = \alpha \cdot 104€ + 120€$ . Pri vrednosti  $\alpha = 15/28$  sta obe možnosti enakovredni. Pri večjih vrednostih  $\alpha$  se odločimo za 5-letno vezavo, pri manjših pa za letno vezavo.

### Naloga 3.21.

- (a) Naj bo  $X_k$  slučajna spremenljivka, ki označuje dobiček pri prodaji  $k$  kart ( $k \in \{100, 101, 102\}$ ). Izračunajmo pričakovane dobičke

$$E(X_{100}) = 100 \cdot 100€ = 10000€$$

$$E(X_{101}) = 101 \cdot 100€ - 0.25 \cdot 200€ = 10050€$$

$$E(X_{102}) = 102 \cdot 100€ - (0.25 \cdot 2 + 0.5) \cdot 200€ = 10000€$$

Letalska družba naj torej proda 101 karto.

- (b) Naj bo  $A_i$  dogodek, da analiza napove odpoved  $i$  potnikov, in  $B_j$  dogodek, da imamo dejansko  $j$  dopovedi ( $i, j = 0, 1, 2$ ). Poznamo pogojne verjetnosti  $P(A_i | B_j) = p_{ij}$ . Izračunajmo najprej verjetnosti  $P(A_j)$ .

$$P(A_0) = 0.7 \cdot 0.25 + 0.1 \cdot 0.5 + 0 \cdot 0.25 = 0.225$$

$$P(A_1) = 0.2 \cdot 0.25 + 0.8 \cdot 0.5 + 0.1 \cdot 0.25 = 0.475$$

$$P(A_2) = 0.1 \cdot 0.25 + 0.1 \cdot 0.5 + 0.9 \cdot 0.25 = 0.3$$

Izračunajmo še verjetnosti posameznega števila odpovedi ob različnih izidih analize.

$$P(B_0 | A_0) = \frac{0.7 \cdot 0.25}{0.225} = \frac{7}{9}$$

$$P(B_1 | A_0) = \frac{0.1 \cdot 0.5}{0.225} = \frac{2}{9}$$

$$\begin{aligned}
P(B_2 | A_0) &= \frac{0 \cdot 0.25}{0.225} = 0 \\
P(B_0 | A_1) &= \frac{0.2 \cdot 0.25}{0.475} = \frac{2}{19} \\
P(B_1 | A_1) &= \frac{0.8 \cdot 0.5}{0.475} = \frac{16}{19} \\
P(B_2 | A_1) &= \frac{0.1 \cdot 0.25}{0.475} = \frac{1}{19} \\
P(B_0 | A_2) &= \frac{0.1 \cdot 0.25}{0.3} = \frac{1}{12} \\
P(B_1 | A_2) &= \frac{0.1 \cdot 0.5}{0.3} = \frac{1}{6} \\
P(B_2 | A_2) &= \frac{0.9 \cdot 0.25}{0.3} = \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

Sedaj lahko izračunamo pričakovane dobičke ob različnih izidih analize.

$$\begin{aligned}
E(X_{100} | A_0) &= 100 \cdot 100\text{€} &= \underline{10000\text{€}} \\
E(X_{101} | A_0) &= 101 \cdot 100\text{€} - \frac{7}{9} \cdot 200\text{€} &\approx 9944.44\text{€} \\
E(X_{102} | A_0) &= 102 \cdot 100\text{€} - \left(\frac{7}{9} \cdot 2 + \frac{2}{9}\right) \cdot 200\text{€} &\approx 9844.44\text{€} \\
E(X_{100} | A_1) &= 100 \cdot 100\text{€} &= 10000\text{€} \\
E(X_{101} | A_1) &= 101 \cdot 100\text{€} - \frac{2}{19} \cdot 200\text{€} &\approx \underline{10078.95\text{€}} \\
E(X_{102} | A_1) &= 102 \cdot 100\text{€} - \left(\frac{2}{19} \cdot 2 + \frac{16}{19}\right) \cdot 200\text{€} &\approx 9989.47\text{€} \\
E(X_{100} | A_2) &= 100 \cdot 100\text{€} &= 10000\text{€} \\
E(X_{101} | A_2) &= 101 \cdot 100\text{€} - \frac{1}{12} \cdot 200\text{€} &\approx 10083.33\text{€} \\
E(X_{102} | A_2) &= 102 \cdot 100\text{€} - \left(\frac{1}{12} \cdot 2 + \frac{1}{6}\right) \cdot 200\text{€} &\approx \underline{10133.33\text{€}}
\end{aligned}$$

Najboljše izbire v vsakem primeru so podčrtane. Ker v nobenem primeru pričakovan dobiček ne preseže pričakovanega dobička brez analize za več kot 200€, se nam torej analize ne izplača izvesti.

### Naloga 3.22.

### Naloga 3.23.

- (a) Naj slučajna spremenljivka  $X$  predstavlja dnevni zaslužek,  $n$  pa naj bo število naročenih časopisov. Izračunajmo pričakovane zaslužke v odvisnosti od  $n$ .

$$\begin{aligned}
E(X | n \leq 6) &= n \cdot 1\text{€} - n \cdot 0.8\text{€} && \leq 1.2\text{€} \\
E(X | n = 7) &= (0.1 \cdot 6 + 0.9 \cdot 7) \cdot 1\text{€} - 7 \cdot 0.8\text{€} && = 1.3\text{€}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(X | n = 8) &= (0.1 \cdot 6 + 0.2 \cdot 7 + 0.7 \cdot 8) \cdot 1\text{€} - 8 \cdot 0.8\text{€} &= 1.2\text{€} \\
E(X | n = 9) &= (0.1 \cdot 6 + 0.2 \cdot 7 + 0.3 \cdot 8 + 0.4 \cdot 9) \cdot 1\text{€} - 9 \cdot 0.8\text{€} &= 0.8\text{€} \\
E(X | n \geq 10) &= (0.1 \cdot 6 + 0.2 \cdot 7 + 0.3 \cdot 8 + 0.3 \cdot 9 + 0.1 \cdot 10) \cdot 1\text{€} - n \cdot 0.8\text{€} \leq 0.1\text{€}
\end{aligned}$$

Ljubo bo torej imel največji pričakovani zaslužek 1.3€ na dan, če vsakič naroči 7 časopisov.

- (b) V mesecu lahko pri naročilu 7 časopisov vsak dan, ko ta izide, pričakuje zaslužek  $25 \cdot 1.3\text{€} = 32.5\text{€}$ .

### Naloga 3.24.

Definirajmo spremenljivke in izpišimo znane podatke.

$X$  ... strošek

$C$  ... izberemo pokvarjen izdelek

$D_i$  ... imamo  $i$  pokvarjenih izdelkov

$E$  ... tovarna pregleda vseh 10 izdelkov

$F$  ... tovarna ne pregleda nobenega izdelka

$G$  ... tovarna pregleda naključen izdelek

$$p_1 = 0.7$$

$$p_2 = 0.2$$

$$p_3 = 0.1$$

- (a) Izračunajmo, koliko tovarno stane, da pregleda vse izdelke in popravi pokvarjene. Vemo, da podjetje plača  $45\text{€} \cdot 10$  za 10 pregledov.

$$E(X | E \cap D_1) = 450\text{€} + 350\text{€} = 800\text{€}$$

$$E(X | E \cap D_2) = 450\text{€} + 350\text{€} \cdot 2 = 1\,150\text{€}$$

$$E(X | E \cap D_3) = 450\text{€} + 350\text{€} \cdot 3 = 1\,500\text{€}$$

Pričakovani strošek, če podjetje pregleda vseh 10 izdelkov, je torej

$$E(X | E) = 0.7 \cdot 800\text{€} + 0.2 \cdot 1\,150\text{€} + 0.1 \cdot 1\,500\text{€} = 940\text{€}$$

Sedaj si pogledajmo še, koliko znaša pričakovani strošek, če tovarna ne pregleda nobenega izdelka.

$$E(X | F) = 0.7 \cdot 350\text{€} + 0.2 \cdot 2 \cdot 350\text{€} + 0.1 \cdot 3 \cdot 350\text{€} = 490\text{€}$$

Če dobljena stroška primerjamo, lahko vidimo, da ima podjetje manjši strošek, če ne pregleda nobenega dobavljenega izdelka.

- (b) Strošek za pregled vseh komponent je enak kot v primeru (a), in sicer 940€. Izračunajmo še pričakovani strošek, če tovarna naključno pregleda eno komponento. Problem ločimo na tri dele: imamo en, dva ali tri pokvarjene izdelke. Vsakega od teh primerov ločimo še na dva dela: ali izberemo pokvarjen izdelek ali ne.

$$E(X | G \cap C \cap D_1) = 45\text{€}$$

$$E(X | G \cap \overline{C} \cap D_1) = 45\text{€} + 350\text{€} = 395\text{€}$$

$$E(X | G \cap D_1) = \frac{1}{10} \cdot 45\text{€} + \frac{9}{10} \cdot 395\text{€} = 360\text{€}$$

$$E(X | G \cap C \cap D_2) = 45\text{€} + 350\text{€} = 395\text{€}$$

$$E(X | G \cap \overline{C} \cap D_2) = 45\text{€} + 350\text{€} \cdot 2 = 745\text{€}$$

$$E(X | G \cap D_2) = \frac{2}{10} \cdot 395\text{€} + \frac{8}{10} \cdot 745\text{€} = 675\text{€}$$

$$E(X | G \cap C \cap D_3) = 45\text{€} + 350\text{€} \cdot 2 = 745\text{€}$$

$$E(X | G \cap \overline{C} \cap D_3) = 45\text{€} + 350\text{€} \cdot 3 = 1095\text{€}$$

$$E(X | G \cap D_3) = \frac{3}{10} \cdot 745\text{€} + \frac{7}{10} \cdot 1095\text{€} = 990\text{€}$$

Sedaj lahko izračunamo pričakovani strošek, če tovarna izbere naključen izdelek, ga pregleda in po potrebi popravi:

$$E(X | G) = 0.7 \cdot 360\text{€} + 0.2 \cdot 675\text{€} + 0.1 \cdot 990\text{€} = 486\text{€}$$

Vidimo, da velja  $E(X | G) < E(X | E)$ , zato je za tovarno bolje, da izbere eno naključno komponento za pregled, kot če pregleda vseh 10 komponent.

### Naloga 3.25.

Očitno se nam po uspešnem poskusu ne izplača več poskušati. Tako naj slučajni spremenljivki  $X_i$  in  $Y_i$  ( $0 \leq i \leq 4$ ) predstavljata profit v primerih, ko se odločimo za  $(i+1)$ -ti poskus oziroma se odločimo končati igro po  $i$  poskusih, ob predpostavki, da so bili prejšnji poskusi neuspešni. Imamo torej

$$E(X_i) = \frac{1}{5-i} \cdot (70\text{€} - i \cdot 30\text{€}) + \frac{4-i}{5-i} \cdot \max\{E(X_{i+1}), E(Y_{i+1})\} \quad \text{in}$$

$$E(Y_i) = -i \cdot 30\text{€}.$$

Izračunajmo ustrezne vrednosti.

$$E(X_4) = -50\text{€}$$

$$E(Y_4) = -120\text{€}$$

$$E(X_3) = -35\text{€}$$

$$E(Y_3) = -90\text{€}$$

$$E(X_2) = -20\text{€}$$

$$E(Y_2) = -60\text{€}$$

$$E(X_1) = -5\text{€}$$

$$E(Y_1) = -30\text{€}$$

$$E(X_0) = 10\text{€}$$

$$E(Y_0) = 0\text{€}$$

Vidimo, da za vse  $i$  ( $0 \leq i \leq 4$ ) velja  $E(X_{i+1}) > E(Y_{i+1})$ , kar pomeni, da je optimalna strategija taka, da igramo, dokler ne dobimo zlatnika. Pričakovani profit je potem 10€.

### Naloga 3.26.

### Naloga 3.27.

Definirajmo spremenljivke, ki jih bomo potrebovali, in izpišimo znane podatke.

$X$ ...zaslužek

$A$ ...recept uspe

$B$ ...prosijo za nasvet

$C$ ...ugodno mnenje

$D$ ...sami proizvajajo

$$P(A) = \frac{2}{5}$$

$$P(\bar{A}) = \frac{3}{5}$$

$$P(C|A) = \frac{3}{4}$$

$$P(C|\bar{A}) = \frac{1}{2}$$

$$P(\bar{C}|A) = \frac{1}{4}$$

$$P(\bar{C}|\bar{A}) = \frac{1}{2}$$

Izračunajmo verjetnosti in pričakovane vrednosti, ki jih nato vpišemo v odločitveno drevo.

$$P(C) = P(C|A)P(A) + P(C|\bar{A})P(\bar{A}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{5}$$

$$P(\bar{C}) = P(\bar{C}|A)P(A) + P(\bar{C}|\bar{A})P(\bar{A}) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

$$P(A|C) = \frac{P(C|A)P(A)}{P(C)} = \frac{3/4 \cdot 2/5}{3/5} = \frac{1}{2}$$

$$P(\bar{A}|C) = \frac{P(C|\bar{A})P(\bar{A})}{P(C)} = \frac{1/2 \cdot 3/5}{3/5} = \frac{1}{2}$$

$$P(A|\bar{C}) = \frac{P(\bar{C}|A)P(A)}{P(\bar{C})} = \frac{1/4 \cdot 2/5}{2/5} = \frac{1}{4}$$

$$P(\bar{A}|\bar{C}) = \frac{P(\bar{C}|\bar{A})P(\bar{A})}{P(\bar{C})} = \frac{1/2 \cdot 3/5}{2/5} = \frac{3}{4}$$

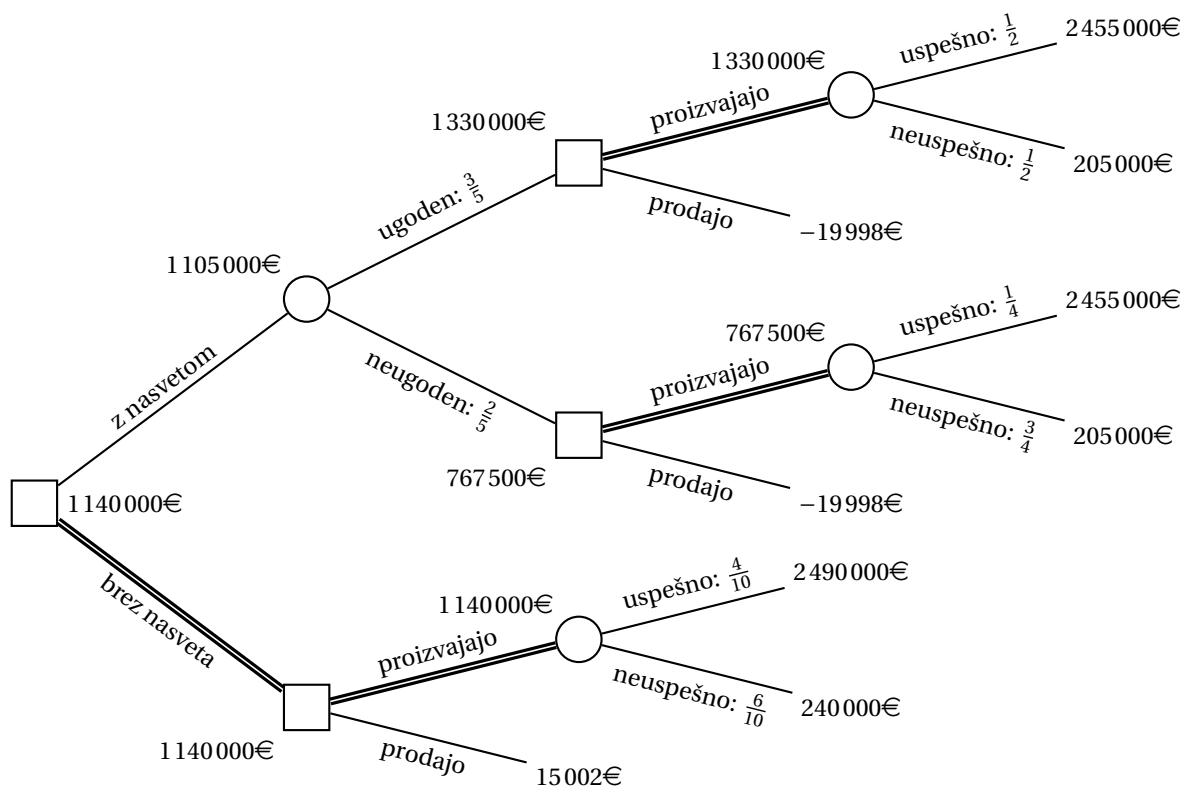
$$E(X|D \cap \bar{B} \cap A) = 2490000\text{€}$$

$$P(A|\bar{B}) = 0.4$$

$$E(X|D \cap \bar{B} \cap \bar{A}) = 240000\text{€}$$

$$P(\bar{A}|\bar{B}) = 0.6$$





Slika 67: Odločitveno drevo za nalogo 3.27.

$$E(X | \bar{D} \cap \bar{B}) = 15002\text{€}$$

$$E(X | B \cap C \cap A) = 2455000\text{€}$$

$$P(A | B \cap C) = 0.5$$

$$E(X | B \cap C \cap \bar{A}) = 205000\text{€}$$

$$P(\bar{A} | B \cap C) = 0.5$$

$$E(X | \bar{D} \cap B \cap C) = -19998\text{€}$$

$$E(X | B \cap \bar{C} \cap A) = 2455000\text{€}$$

$$P(A | B \cap \bar{C}) = 0.25$$

$$E(X | B \cap \bar{C} \cap \bar{A}) = 205000\text{€}$$

$$P(\bar{A} | B \cap \bar{C}) = 0.75$$

$$E(X | \bar{D} \cap B \cap \bar{C}) = -19998\text{€}$$

Ko s pomočjo odločitvenega drevesa s slike 67 izračunamo preostale pričakovane vrednosti, lahko vidimo, da velja

$$E(X | B) < E(X | \bar{B}),$$

zato je za kavarno ugodneje, da ne prosi za nasvet in se odloči za proizvodnjo.

**Naloga 3.28.**

**Naloga 3.29.**

Če se podjetje odloči za samostojno prodajo (brez predhodne akcijske ponudbe), bo ob uspehu imelo  $100\,000 \cdot (3\text{€} - 0.5\text{€}) - 1\,000\text{€} = 249\,000\text{€}$  dobička, ob neuspehu pa  $10\,000 \cdot 3\text{€} - 100\,000 \cdot 0.5\text{€} - 1\,000\text{€} = -21\,000\text{€}$ , torej  $21\,000\text{€}$  izgube. Ker je pričakovani dobiček enak

$$0.7 \cdot 249\,000\text{€} - 0.3 \cdot 21\,000\text{€} = 168\,000\text{€},$$

kar je več kot  $100\,000 \cdot 1\text{€} = 100\,000\text{€}$ , kolikor bi zaslužili ob prodaji multinacionalki, se podjetju v primeru, da se ne odločijo za akcijsko ponudbo, bolj izplača samostojna prodaja.

Izračunajmo še dobičke, če se odločijo za akcijsko ponudbo:

Akcija uspe, produkt uspe:

$$1\,000 \cdot 2.5\text{€} + 99\,000 \cdot 3\text{€} - 100\,000 \cdot 0.5\text{€} - 2 \cdot 1\,000\text{€} = 247\,500\text{€}$$

Akcija uspe, produkt ne uspe:

$$1\,000 \cdot 2.5\text{€} + 9\,000 \cdot 3\text{€} - 100\,000 \cdot 0.5\text{€} - 2 \cdot 1\,000\text{€} = -22\,500\text{€}$$

Akcija uspe, prodajo multinacionalki:

$$1\,000 \cdot (2.5\text{€} - 0.5\text{€}) + 99\,000 \cdot 1\text{€} - 1\,000\text{€} = 100\,000\text{€}$$

Akcija ne uspe, produkt uspe:

$$100 \cdot 2.5\text{€} + 99\,900 \cdot 3\text{€} - 100\,000 \cdot 0.5\text{€} - 2 \cdot 1\,000\text{€} = 247\,950\text{€}$$

Akcija ne uspe, produkt ne uspe:

$$100 \cdot 2.5\text{€} + 9\,900 \cdot 3\text{€} - 100\,000 \cdot 0.5\text{€} - 2 \cdot 1\,000\text{€} = -22\,050\text{€}$$

Akcija ne uspe, prodajo multinacionalki:

$$100 \cdot 2.5\text{€} - 1\,000 \cdot 0.5\text{€} - 1\,000\text{€} + 99\,000 \cdot 1\text{€} = 97\,750\text{€}$$

Izračunajmo še verjetnosti uspeha akcije ter uspešnosti produkta ob vsaki napovedi.

$$P(\text{akcija uspešna}) = 0.7 \cdot 0.8 + 0.3 \cdot 0.1 = 0.59$$

$$P(\text{akcija neuspešna}) = 0.7 \cdot 0.2 + 0.3 \cdot 0.9 = 0.41$$

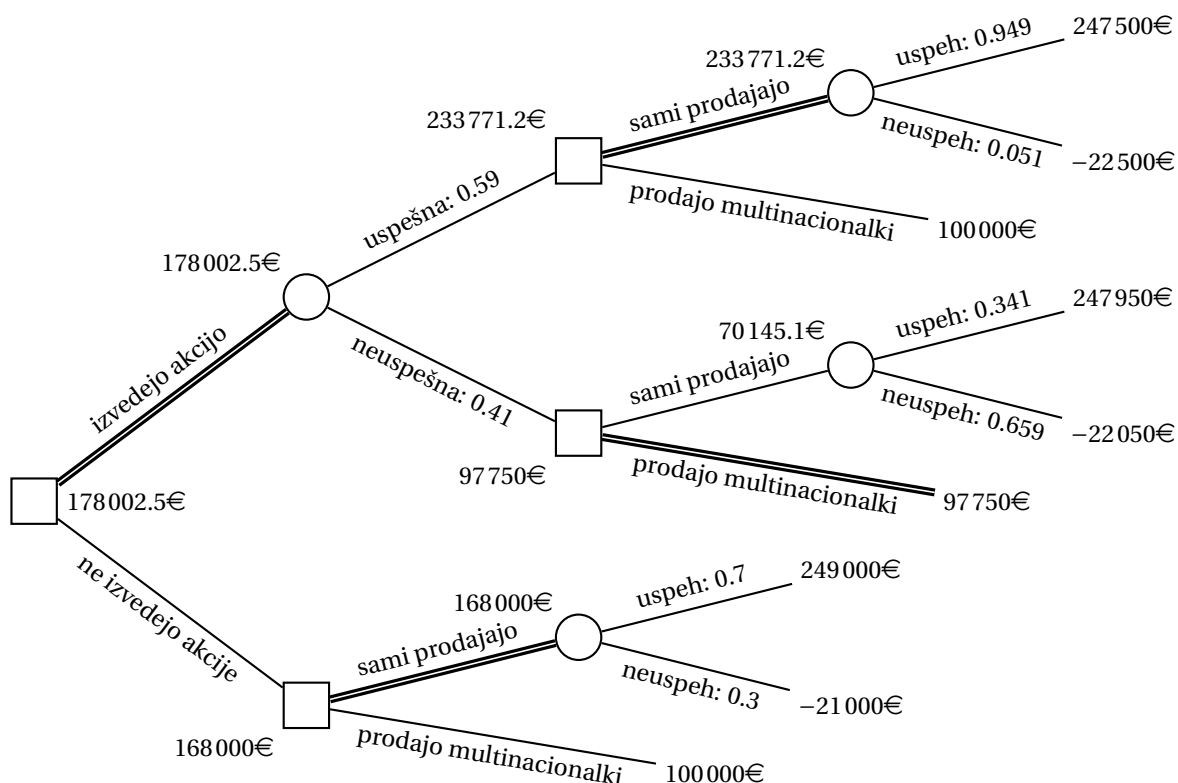
$$P(\text{produkt uspe} \mid \text{akcija uspešna}) = \frac{0.7 \cdot 0.8}{0.59} = \frac{56}{59} \approx 0.949$$

$$P(\text{produkt ne uspe} \mid \text{akcija uspešna}) = \frac{0.3 \cdot 0.1}{0.59} = \frac{3}{59} \approx 0.051$$

$$P(\text{produkt uspe} \mid \text{akcija neuspešna}) = \frac{0.7 \cdot 0.2}{0.41} = \frac{14}{41} \approx 0.341$$

$$P(\text{produkt ne uspe} \mid \text{akcija neuspešna}) = \frac{0.3 \cdot 0.9}{0.41} = \frac{27}{41} \approx 0.659$$

S pomočjo zgoraj izračunanih verjetnosti lahko narišemo odločitveno drevo s slike 68. Opazimo, da se podjetju izplača izvesti akcijo, saj je pričakovani dobiček v tem primeru  $178\,002.5\text{€}$ . Če akcija uspe, naj se odločijo za samostojno prodajo, če pa ne uspe, pa naj zaloge prodajo multinacionalki.



Slika 68: Odločitveno drevo za nalogo 3.29.

### Naloga 3.30.

Izračunajmo verjetnosti za potek servisa in stanje strojev po izvedenem servisu.

$$P(\text{servis poteka gladko}) = 0.9 \cdot 0.4 + 0.2 \cdot 0.6 = 0.48$$

$$P(\text{servis se zavleče}) = 0.1 \cdot 0.4 + 0.8 \cdot 0.6 = 0.52$$

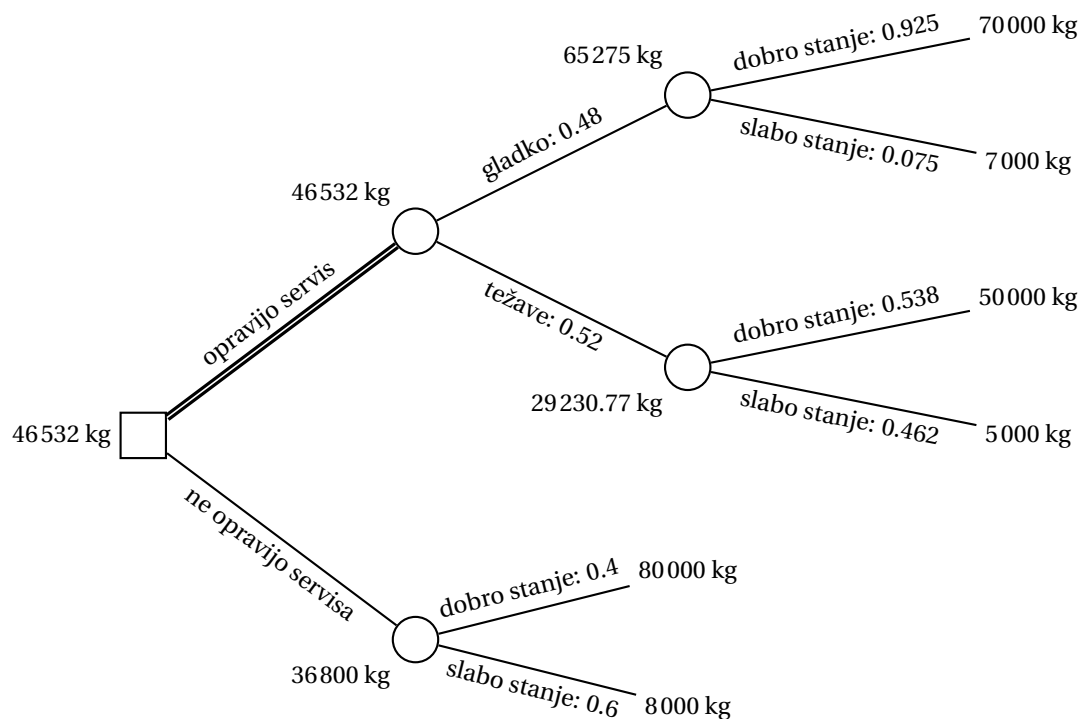
$$P(\text{stroji v dobrem stanju} \mid \text{servis poteka gladko}) = \frac{0.9 \cdot 0.4 + 0.2 \cdot 0.6 \cdot 0.7}{0.48} = 0.925$$

$$P(\text{stroji v slabem stanju} \mid \text{servis poteka gladko}) = \frac{0.2 \cdot 0.6 \cdot 0.3}{0.48} = 0.075$$

$$P(\text{stroji v dobrem stanju} \mid \text{servis se zavleče}) = \frac{0.1 \cdot 0.4 + 0.8 \cdot 0.6 \cdot 0.5}{0.52} \approx 0.538$$

$$P(\text{stroji v slabem stanju} \mid \text{servis se zavleče}) = \frac{0.8 \cdot 0.6 \cdot 0.5}{0.52} \approx 0.462$$

S pomočjo zgoraj izračunanih verjetnosti lahko narišemo odločitveno drevo s slike 69. Opazimo, da se podjetju izplača opraviti servis, pričakovana količina proizvedene čokolade pa je tedaj 46532 kg.



Slika 69: Odločitveno drevo za nalogo 3.30.

### Naloga 3.31.

Izračunajmo najprej pričakovane vrednosti v vozliščih  $F$  in  $G$  odločitvenega drevesa s slike 9.

$$F = 160 \cdot p + 40 \cdot (1 - p) = 120p + 40$$

$$G = 120 \cdot 2p + 20 \cdot (1 - 2p) = 200p + 20$$

Obravnavajmo najprej odločitev v vozlišču  $D$ . Za pot k vozlišču  $F$  se odločimo, če velja  $120p + 40 < 60$  oziroma  $p < 1/6$ .

Obravnavajmo sedaj še odločitev v vozlišču  $E$ . Za pot k vozlišču  $G$  se odločimo, če velja  $200p + 20 < 50$  oziroma  $p < 3/20$ .

Pričakovana vrednost v vozlišču  $B$  bo sledeča.

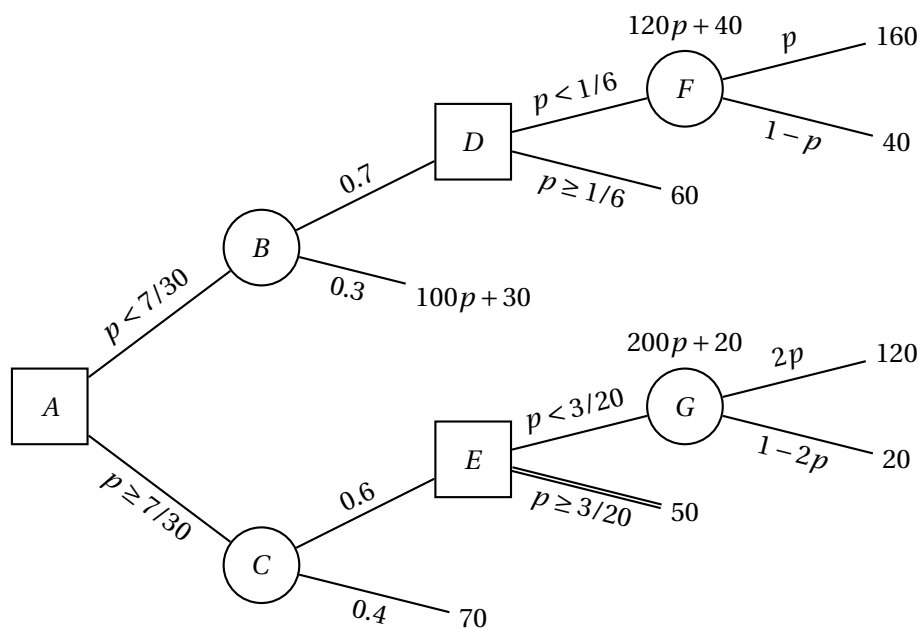
$$p < \frac{1}{6} : \quad 0.7 \cdot (120p + 40) + 0.3 \cdot (100p + 30) = 114p + 37$$

$$p \geq \frac{1}{6} : \quad 0.7 \cdot 60 + 0.3 \cdot (100p + 30) = 30p + 51$$

Izračunajmo še pričakovano vrednost v vozlišču  $C$ .

$$p < \frac{3}{20} : \quad 0.6 \cdot (200p + 20) + 0.4 \cdot 70 = 120p + 40$$

$$p \geq \frac{3}{20} : \quad 0.6 \cdot 50 + 0.4 \cdot 70 = 58$$



Slika 70: Odločitveno drevo za nalogo 3.31 v odvisnosti od vrednosti parametra  $p$ .

Nazadnje obravnavajmo še odločitev v vozlišču  $A$ .

$$\begin{aligned}
 0 \leq p < \frac{3}{20} : \quad & \min\{114p + 37, 120p + 40\} = 114p + 37 \\
 \frac{3}{20} \leq p < \frac{1}{6} : \quad & \min\{114p + 37, 58\} = 114p + 37 \\
 \frac{1}{6} \leq p \leq \frac{1}{2} : \quad & \min\{30p + 51, 58\} = \begin{cases} 30p + 51 & p < \frac{7}{30} \\ 58 & p \geq \frac{7}{30} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Proces odločanja je prikazan na sliki 70. Ker velja  $\frac{7}{30} > \frac{3}{20}$ , opazimo, da v primeru  $p \geq \frac{7}{30}$  iz vozlišča  $E$  nikoli ne izberemo poti proti vozlišču  $G$ .

## 2.4 Dinamično programiranje

### Naloga 4.1.

- (a) Naj bo  $p_i$  največja skupna profitabilnost, če obravnavamo le plakatna mesta do  $x_i$ . Poleg tega naj bo  $y_i$  indeks zadnjega plakatnega mesta, ki je od trenutnega oddaljeno največ  $d$  kilometrov. Določimo začetne pogoje in rekurzivne enačbe.

$$y_0 = 0, \quad p_0 = 0$$

$$y_i = \max\{j \mid y_{i-1} \leq j \leq i, x_j \leq x_i - d\}, \quad p_i = \max\{p_{i-1}, v_i + p_{y_i}\} \quad (1 \leq i \leq n)$$

Vrednosti  $p_i$  računamo naraščajoče po indeksu  $i$  ( $1 \leq i \leq n$ ). Optimalno skupno profitabilnost dobimo kot  $p^* = p_n$ .

- (b) Po rekurzivni enačbi iz točke (a) izračunajmo vrednosti  $y_i$  in  $p_i$  ( $0 \leq i \leq n$ ).

$$\begin{array}{lll} y_0 = 0 & p_0 = 0 & \\ y_1 = 0 & p_1 = \max\{0, \underline{8} + 0\} & = 8 \\ y_2 = 0 & p_2 = \max\{\underline{8}, 8 + 0\} & = 8 \\ y_3 = 2 & p_3 = \max\{8, \underline{12} + 8\} & = 20 \\ y_4 = 2 & p_4 = \max\{\underline{20}, 10 + 8\} & = 20 \\ y_5 = 2 & p_5 = \max\{\underline{20}, 7 + 8\} & = 20 \\ y_6 = 3 & p_6 = \max\{20, \underline{5} + \underline{20}\} & = 25 \\ y_7 = 5 & p_7 = \max\{25, \underline{6} + \underline{20}\} & = 26 \\ y_8 = 6 & p_8 = \max\{26, \underline{10} + \underline{25}\} & = 35 \end{array}$$

Optimalna skupna profitabilnost je torej  $p^* = p_8 = 35$ , dobimo pa jo tako, da sledimo izbranim vrednostim (zgoraj so podčrtane). Na  $x_8$  postavimo plakat; ker je  $y_8 = 6$ , ugotovimo, da na  $x_6$  postavimo plakat; ker je  $y_6 = 3$ , ugotovimo, da na  $x_3$  postavimo plakat; ker je  $y_3 = 2$ , ugotovimo, da na  $x_2$  ne postavimo plakata in ga postavimo na  $x_1$ . Izbrane lokacije so torej  $x_1, x_3, x_6$  in  $x_8$ .

- (c) Ker je  $(x_i)_{i=1}^n$  naraščajoče zaporedje, opazimo, da lahko vrednosti  $y_i$  računamo tako, da povečujemo predhodni indeks, dokler ga še lahko. Ker vrednost  $y_i$  potrebujemo le še v  $(i+1)$ -tem koraku, bomo hranili samo trenutno vrednost  $y$ . Poleg  $p_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) bomo računali še vrednosti

$$j_i = \begin{cases} y_i & \text{če izberemo postavitev plakata na } i\text{-to mesto, in} \\ i-1 & \text{sicer;} \end{cases} \quad \text{ter}$$

$$b_i = \begin{cases} \text{TRUE} & \text{če izberemo postavitev plakata na } i\text{-to mesto, in} \\ \text{FALSE} & \text{sicer.} \end{cases}$$

Iz teh vrednosti bomo lahko rekonstruirali optimalno postavitev plakatov. Zapišimo algoritem, ki vrne optimalno skupno profitabilnost ter seznam lokacij, kamor naj postavimo plakate.

```

function PLAKATI( $(x_i)_{i=1}^n, (v_i)_{i=1}^n, d$ )
   $p_0 \leftarrow 0$ 
   $y \leftarrow 0$ 
   $S \leftarrow$  prazen seznam
  for  $i = 1, \dots, n$  do
    while  $x_{y+1} \leq x_i - d$  do izračunamo  $y_i$ 
       $y \leftarrow y + 1$ 
    end while
     $p_i, j_i, b_i \leftarrow \max\{(p_{i-1}, i-1, \text{FALSE}), (v_i + p_y, y, \text{TRUE})\}$  rekurzivna enačba
  end for
   $P \leftarrow$  prazen seznam
   $i \leftarrow n$ 
  while  $i > 0$  do rekonstruiramo rešitev
    if  $b_i$  then
       $P.\text{append}(x_i)$  postavimo plakat na mesto  $x_i$ 
    end if
     $i \leftarrow j_i$ 
  end while
   $P.\text{reverse}()$  obrnemo, da bo seznam naraščajoč
  return  $(p_n, P)$  vrnemo profitabilnost in lokacije
end function

```

Opazimo, da obe zunanji zanki naredita  $O(n)$  korakov. Največ toliko korakov naredimo tudi v notranji zanki **while**, saj vrednost  $y$  samo povečujemo, ta pa nikdar ne preseže  $n$ . Časovna zahtevnost algoritma je torej  $O(n)$ .

#### Naloga 4.2.

- (a) Naj bosta  $I_j$  in  $c_j$  optimalna izbira predmetov ter njihova skupna vrednost, če imamo nahrbtnik z nosilnostjo  $j$  kilogramov. Določimo začetni pogoj in rekurzivno enačbo.

$$(c_0, I_0) = (0, \emptyset)$$

$$(c_j, I_j) = \max\left(\{(c_{j-1}, I_{j-1})\} \cup \{(c_{j-t_i} + v_i, I_{j-t_i} \cup \{i\}) \mid 1 \leq i \leq n, t_i \leq j, i \notin I_{j-t_i}\}\right)$$

Vrednosti  $c_j$  in  $I_j$  računamo naraščajoče po indeksu  $j$  ( $1 \leq j \leq M$ ). Optimalno skupno vrednost dobimo kot  $c^* = c_M$ , optimalno izbiro predmetov pa kot  $I^* = I_M$ .

- (b) Potek algoritma je prikazan v tabeli 12. V vsaki vrstici je podčrtana vrednost pri tistem predmetu, ki ga dodamo v ustreznem koraku. Če nobena vrednost ni podčrtana, do izboljšave ni prišlo in zato uporabimo predhodno rešitev. Preberemo lahko, da je optimalna izbira predmetov 3, 4 in 5 s skupno vrednostjo 29.

		$v_i$	9	9	8	11	10	15	3	12
		$t_i$	3	5	1	4	3	8	2	7
$j$	$c_j$	$I_j$	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	$\emptyset$								
1	8	{3}			<u>0+8</u>					
2	8	{3}							0+3	
3	11	{3,7}	0+9				0+10		<u>8+3</u>	
4	18	{3,5}	8+9			0+11	<u>8+10</u>		8+3	
5	19	{3,4}	8+9	0+9		<u>8+11</u>	8+10			
6	21	{3,5,7}	11+9	8+9		8+11	<u>11+10</u>		18+3	
7	27	{1,3,5}	<u>18+9</u>	8+9		11+11			19+3	0+12
8	29	{3,4,5}	19+9	11+9		<u>18+11</u>	19+10	0+15		8+12

Tabela 12: Potek reševanja za nalogo 4.2(b).

### Naloga 4.3.

- (a) Naj bo  $p_{ij}$  cena minimalne vsote poti od  $a_{11}$  do  $a_{ij}$ . Določimo začetni pogoj in rekurzivne enačbe.

$$p_{11} = a_{11}$$

$$p_{1j} = a_{1j} + p_{i,j-1} \quad (2 \leq j \leq n)$$

$$p_{i1} = a_{i1} + p_{i-1,1} \quad (2 \leq i \leq m)$$

$$p_{ij} = a_{ij} + \min\{p_{i-1,j}, p_{i,j-1}\} \quad (2 \leq i \leq m, 2 \leq j \leq n)$$

Vrednosti  $p_{ij}$  računamo v leksikografskem vrstnem redu indeksov (npr. najprej naraščajoče po  $i$ , nato pa naraščajoče po  $j$ ). Minimalno vsoto poti dobimo kot  $p^* = p_{mn}$ .

- (b) Vrednosti  $p_{ij}$  ( $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq n$ ) zapišimo v matriki skupaj z informacijo, katero predhodno vrednost smo upoštevali.

$$(p_{ij})_{i,j=1}^5 = \begin{pmatrix} 131 & \leftarrow 804 & \leftarrow 1038 & \leftarrow 1141 & \leftarrow 1159 \\ \uparrow 332 & \leftarrow 428 & \leftarrow 770 & \leftarrow 1735 & \uparrow 1309 \\ \uparrow 962 & \uparrow 1231 & \uparrow 1516 & \leftarrow 1938 & \uparrow 1420 \\ \uparrow 1499 & \uparrow 1930 & \uparrow 2013 & \uparrow 2059 & \uparrow 2376 \\ \uparrow 2304 & \uparrow 2662 & \uparrow 2537 & \uparrow 2096 & \leftarrow 2428 \end{pmatrix}$$

Vidimo lahko, da je optimalna pot  $(a_{11}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{33}, a_{34}, a_{44}, a_{54}, a_{55})$  z vsoto 2428.

- (c) Da bomo lahko rekonstruirali pot, bomo hranili še vrednosti  $k_{ij}$  z indeksi predhodne lokacije.

$$k_{1j} = (1, j-1) \quad (2 \leq j \leq n)$$



$$k_{i1} = (i-1, 1) \quad (2 \leq i \leq m)$$

$$k_{ij} = \begin{cases} (i-1, j) & \text{če } p_{i-1,j} \leq p_{i,j-1}, \text{ in} \\ (i, j-1) & \text{sicer} \end{cases} \quad (2 \leq i \leq m, 2 \leq j \leq n)$$

Zapišimo algoritem, ki vrne minimalno vsoto in pot, ki jo doseže.

```

function MATRIXSUM( $(a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$ )
  for  $i = 1, \dots, m$  do
    for  $j = 1, \dots, n$  do
      if  $i = 1 \wedge j = 1$  then                                rekurzivna enačba
         $s \leftarrow 0$ 
      else if  $i = 1$  then
         $s \leftarrow p_{i,j-1}$ 
         $k_{ij} = (i, j-1)$ 
      else if  $j = 1$  then
         $s \leftarrow p_{i-1,j}$ 
         $k_{ij} = (i-1, j)$ 
      else
         $(s, k_{ij}) \leftarrow \min\{(p_{i,j-1}, (i, j-1)), (p_{i-1,j}, (i-1, j))\}$ 
      end if
       $p_{ij} = a_{ij} + s$ 
    end for
  end for
   $P \leftarrow$  prazen seznam
   $(i, j) \leftarrow (m, n)$ 
  while  $i > 1 \vee j > 1$  do                                rekonstruiramo rešitev
     $P.append((i, j))$                                        postavimo plakat na mesto  $x_i$ 
     $(i, j) \leftarrow k_{i,j}$ 
  end while
   $P.append((1, 1))$                                          dodamo še levi zgornji kot
   $P.reverse()$                                              obrnemo, da dobimo pot v pravem vrstnem redu
  return  $(p_{mn}, P)$                                        vrnemo vsoto in pot
end function

```

Dvojna zanka **for** opravi  $mn$  korakov, zanka **while** pa opravi  $m + n - 2$  korakov. Časovna zahtevnost algoritma je torej  $O(mn)$ .

#### Naloga 4.4.

Naj  $b_{ij}$  pove, ali je strnjen podniz  $a_i a_{i+1} \dots a_{j-2} a_{j-1}$  palindromski, torej, ali velja  $a_{i+k-1} = a_{j-k}$  za vsak  $k$  ( $1 \leq k \leq j-i$ ). Ker so vsi podnizi dolžin 0 in 1 palindromski, lahko določimo začetne pogoje in rekurzivno enačbo.

$$b_{i,i} = \top \quad (1 \leq i \leq n+1)$$

$$b_{i,i+1} = \top \quad (1 \leq i \leq n)$$

$$b_{i,j} = b_{i+1,j-1} \wedge (a_i = a_{j-1}) \quad (1 \leq i < j-1 \leq n)$$

Vrednosti  $b_{ij}$  računamo v leksikografskem vrstnem redu glede na  $(j-i, i)$ . Dolžino  $p^*$  najdaljšega palindromskega strnjenega podniza dobimo kot največjo

razliko indeksov, za katere je  $b_{ij}$  resničen, torej

$$p^* = \max \{j - i \mid 1 \leq i \leq j \leq n + 1 \wedge b_{ij}\}.$$

Hkrati lahko seveda dobimo tudi začetek in konec najdaljšega palindromskega strnjenega podniza.

Zapišimo algoritem, ki vrne dolžino najdaljšega palindromskega strnjenega podniza  $a_i a_{i+1} \dots a_{j-2} a_{j-1}$  skupaj z indeksoma  $i$  in  $j$ . Vrednost  $p^*$  ter pripadajoča indeksa bomo računali sproti.

```

function PALINDROM( $((a_i)_{i=1}^n)$ )
  if  $n = 0$  then                                če je niz prazen, imamo podniz dolžine 0
    return  $(0, 1, 1)$ 
  end if
   $(p^*, i^*, j^*) \leftarrow (1, n, n + 1)$           podniz dolžine 1
  for  $i = 1, \dots, n$  do                          začetni pogoji
     $b_{ii} \leftarrow \text{TRUE}$ 
     $b_{i, i+1} \leftarrow \text{TRUE}$ 
  end for
   $b_{n+1, n+1} \leftarrow \text{TRUE}$ 
  for  $h = 2, \dots, n$  do                          rekurzivna enačba
    for  $i = 1, \dots, n - h + 1$  do
       $b_{i, i+h} \leftarrow b_{i+1, i+h-1} \wedge (a_i = a_{i+h-1})$ 
      if  $b_{i, i+h}$  then                            če najdemo palindrom, posodobimo izhod
         $(p^*, i^*, j^*) \leftarrow (h, i, i + h)$ 
      end if
    end for
  end for
  return  $(p^*, i^*, j^*)$                           vrnemo dolžino in meje
end function

```

V prvi zanki **for** naredimo  $n$  korakov, v dvojni zanki pa

$$\sum_{h=2}^n (n - h + 1) = \sum_{j=1}^{n-1} j = \frac{n(n-1)}{2} = O(n^2)$$

korakov. Časovna zahtevnost algoritma je torej  $O(n^2)$ .

Problem je mogoče reševati tudi v linearnem času z **Manacherjevim algoritmom**.

#### Naloga 4.5.

- (a) Naj bo  $p_{hi}$  največja vsota komponent strnjene podmatrike z vrsticami od  $h$ -te do  $i$ -te vrstice matrike  $A$ , katere zadnji stolpec je  $j$ -ti stolpec matrike  $A$ . Poleg tega naj bo  $s_{ij}$  vsota prvih  $i$  komponent v  $j$ -tem stolpcu matrike  $A$ . Določimo začetne pogoje in rekurzivne enačbe.

$$\begin{aligned}
 s_{0j} &= 0 & (1 \leq j \leq n) \\
 s_{ij} &= a_{ij} + s_{i-1,j} & (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)
 \end{aligned}$$

$$p_{hi0} = 0 \quad (1 \leq h \leq i \leq m)$$

$$p_{hik} = s_{ik} - s_{h-1,k} + \max\{0, p_{h,i,k-1}\} \quad (1 \leq h \leq i \leq m, 1 \leq k \leq n)$$

Najprej za vsak  $j$  ( $1 \leq j \leq n$ ) izračunamo vrednosti  $s_{ij}$  naraščajoče po indeksu  $i$ , nato pa za vsaka  $h$  in  $i$  ( $1 \leq h \leq i \leq m$ ) izračunamo vrednosti  $p_{hik}$  naraščajoče po indeksu  $k$ . Največjo vsoto komponent dobimo kot  $p^* = \max\{p_{hik} \mid 1 \leq h \leq i \leq m, 0 \leq k \leq n\}$ .

(b) Najprej poračunajmo vrednosti  $s_{ij}$ .

$$(s_{ij})_{i,j=1}^4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ -2 & -3 & 10 & 6 \\ -5 & -1 & 8 & 10 \\ -4 & -6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

Sedaj poračunajmo še vrednosti  $p_{hik}$ .

$p_{hik}$		$k$			
$h$	$i$	1	2	3	4
1	1	1	0	2	6
1	2	-2	-3	10	16
1	3	-5	-1	8	18
1	4	-4	-6	7	15
2	2	-3	-2	8	10
2	3	-6	0	6	12
2	4	-5	-5	5	9
3	3	-3	2	0	4
3	4	-2	-2	-3	2
4	4	1	-4	-1	-2

Opazimo, da je največja vsota komponent enaka  $p^* = p_{134} = 18$ . Indeks  $j$  prvega stolpca iskane podmatrike je taka vrednost, da za vse  $\ell$  ( $j \leq \ell \leq k$ ) velja  $p_{13\ell} > 0$ . V našem primeru je torej  $j = 3$  – iskana podmatrika je torej

$$A_{1\dots 3,3\dots 4} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 8 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(c) Zapišimo algoritem, ki bo vrnil največjo vsoto komponent strnjene podmatrike skupaj s paroma, ki določata prvo in zadnjo vrstico oziroma stolpec.

```

function MAXSTRNJENAPODMATRIKA( $(a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$ )
  for  $j = 1, \dots, n$  do                                računanje  $s_{ij}$ 
     $s_{0j} \leftarrow 0$                                        začetni pogoj
    for  $i = 1, \dots, m$  do
       $s_{ij} \leftarrow a_{ij} + s_{i-1,j}$                     rekurzivna enačba
    end for

```

```

end for
 $p^*, h^*, i^*, j^*, k^* \leftarrow 0, 0, 0, 0, 0$                                 ničelna rešitev
for  $h = 1, \dots, n$  do                                                računanje  $p_{hik}$ 
  for  $i = h, \dots, n$  do
     $p_{hi0} \leftarrow 0$                                                 začetni pogoj
     $j \leftarrow 1$                                                     vsoto začnemo s prvim stolpcem
    for  $k = 1, \dots, m$  do
       $p_{hik} \leftarrow s_{ik} - s_{h-1,k} + \max\{0, p_{h,i,k-1}\}$       rekurzivna enačba
      if  $p_{hik} > p^*$  then                                            preverimo, ali imamo boljšo rešitev
         $p^*, h^*, i^*, j^*, k^* \leftarrow p_{hik}, h, i, j, k$ 
      else if  $p_{hik} < 0$  then                                         če je vsota negativna,
         $j \leftarrow k + 1$                                            bomo naslednjo vsoto začeli v naslednjem stolpcu
      end if
    end for
  end for
end for
return  $p^*, (h^*, i^*), (j^*, k^*)$ 
end function

```

Za računanje  $s_{ij}$  potrebujemo  $O(mn)$  korakov, za računanje  $p_{hik}$  pa  $O(mn^2)$  korakov. Skupna časovna zahtevnost algoritma je torej  $O(mn^2)$ . Opazimo, da se v primeru, ko velja  $n > m$ , matriko  $A$  izplača transponirati, saj tako dobimo časovno zahtevnost  $O(m^2n)$ .

#### Naloga 4.6.

- (a) Naj bo  $p_j$  število kovancev, ki jih potrebujemo za izplačilo vsote  $j$ . Določimo začetni pogoj in rekurzivne enačbe.

$$p_0 = 0$$

$$p_j = 1 + \min \{p_{j-v_i} \mid 1 \leq i \leq n, v_i \leq j\} \quad (1 \leq j \leq C)$$

Vrednosti  $p_j$  ( $0 \leq j \leq C$ ) računamo naraščajoče po indeksu  $j$ . Najmanjše število kovancev dobimo s  $p^* = p_C$ .

- (b) Izračunajmo vrednosti  $p_j$  pri danih podatkih.

$p_0 = 0$		$p_{13} = 1 + \min\{2, 3, 2, 2\} = 3$
$p_1 = 1 + \min\{0\} = 1$		$p_{14} = 1 + \min\{3, 3, 2, 1\} = 2$
$p_2 = 1 + \min\{1, 0\} = 1$		$p_{15} = 1 + \min\{2, 3, 2, 2\} = 3$
$p_3 = 1 + \min\{1, 1\} = 2$		$p_{16} = 1 + \min\{3, 2, 3, 2\} = 3$
$p_4 = 1 + \min\{2, 1\} = 2$		$p_{17} = 1 + \min\{3, 3, 2, 2\} = 3$
$p_5 = 1 + \min\{2, 2, 0\} = 1$		$p_{18} = 1 + \min\{3, 3, 3, 3\} = 4$
$p_6 = 1 + \min\{1, 2, 1\} = 2$		$p_{19} = 1 + \min\{4, 3, 2, 2\} = 3$
$p_7 = 1 + \min\{2, 1, 1, 0\} = 1$		$p_{20} = 1 + \min\{3, 4, 3, 3\} = 4$

$$\begin{aligned}
p_8 &= 1 + \min\{1, 2, 2, 1\} = 2 & p_{21} &= 1 + \min\{4, 3, 3, 2\} = 3 \\
p_9 &= 1 + \min\{2, 1, 2, 1\} = 2 & p_{22} &= 1 + \min\{3, 4, 3, 3\} = 4 \\
p_{10} &= 1 + \min\{2, 2, 1, 2\} = 2 & p_{23} &= 1 + \min\{4, 3, 4, 3\} = 4 \\
p_{11} &= 1 + \min\{2, 2, 2, 2\} = 3 & p_{24} &= 1 + \min\{4, 4, 3, 3\} = 4 \\
p_{12} &= 1 + \min\{3, 2, 1, 1\} = 2 & p_{25} &= 1 + \min\{4, 4, 4, 4\} = 5
\end{aligned}$$

Za izplačilo vrednosti 25 torej potrebujemo vsaj 5 kovancev. Iz zgornjega izračuna lahko izplačilo rekonstruiramo tako, da uporabimo tak kovanec, da je za izplačilo preostanka potrebnih najmanj kovancev. Opazimo, da lahko vsoto 25 s petimi kovanci izplačamo na tri različne načine:

$$25 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 5 + 2 \cdot 7 = 2 \cdot 2 + 3 \cdot 7 = 5 \cdot 5.$$

#### Naloga 4.7.

Naj bo  $p_i$  največja količina denarja, ki jo lahko tat pridobi, če oropa  $i$ -to hišo. Določimo začetna pogoja in rekurzivne enačbe.

$$\begin{aligned}
p_0 &= 0, & p_1 &= c_1 \\
p_i &= \max\{p_{i-1}, p_{i-2} + c_i\} & (2 \leq i \leq n)
\end{aligned}$$

Vrednosti  $p_i$  ( $0 \leq i \leq n$ ) računamo naraščajoče po indeksu  $n$ . Največjo količino denarja dobimo s  $p^* = p_n$ . Da poiščemo, katere hiše se tatu izplača oropati, pregledamo vrednosti  $p_i$  v padajočem vrstnem redu ( $n \geq i \geq 1$ ): če velja  $p_i > p_{i-1}$ , naj  $i$ -to hišo oropa in pregled nadaljujemo pri  $p_{i-2}$ , sicer pa naj  $i$ -te hiše ne oropa in pregled nadaljujemo pri  $p_{i-1}$ .

#### Naloga 4.8.

- (a) Naj bo  $x_0 = 0$  in  $x_{n+1} = \ell$ , ter naj bo  $p_{ij}$  cena rezanja dela hloda od  $x_i$  do  $x_{j+1}$ . Določimo začetne pogoje in rekurzivne enačbe.

$$\begin{aligned}
p_{ii} &= 0 & (0 \leq i \leq n) \\
p_{ij} &= x_{j+1} - x_i + \min\{p_{ih} + p_{h+1,j} \mid i \leq h < j\} & (0 \leq i < j \leq n)
\end{aligned}$$

Vrednosti  $p_{ij}$  ( $0 \leq i \leq j \leq n$ ) računamo v leksikografskem vrstnem redu glede na  $(j - i, i)$ . Najmanjšo ceno rezanja dobimo kot  $p^* = p_{0n}$ .

Za izračun spremenljivke  $p_{ij}$  potrebujemo  $j - i$  korakov. Skupno število korakov algoritma je torej

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n (j - i) &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} j = \sum_{i=0}^n \frac{(n-i)(n-i+1)}{2} = \\
&= \sum_{i=0}^n \frac{i(i+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = O(n^3).
\end{aligned}$$

(b) Izračunajmo vrednosti  $p_{ij}$  ( $0 \leq i < j \leq n$ ).

$$\begin{aligned}
 p_{01} &= 5 - 0 + \min\{0 + 0\} &= 5 \\
 p_{12} &= 7 - 3 + \min\{0 + 0\} &= 4 \\
 p_{23} &= 8 - 5 + \min\{0 + 0\} &= 3 \\
 p_{34} &= 10 - 7 + \min\{0 + 0\} &= 3 \\
 p_{02} &= 7 - 0 + \min\{0 + 4, 5 + 0\} &= 11 \\
 p_{13} &= 8 - 3 + \min\{0 + 3, 4 + 0\} &= 8 \\
 p_{24} &= 10 - 5 + \min\{0 + 3, 3 + 0\} &= 8 \\
 p_{03} &= 8 - 0 + \min\{0 + 8, 5 + 3, 11 + 0\} &= 16 \\
 p_{14} &= 10 - 3 + \min\{0 + 8, 4 + 3, 8 + 0\} &= 14 \\
 p_{04} &= 10 - 0 + \min\{0 + 14, 5 + 8, 11 + 3, 16 + 0\} &= 23
 \end{aligned}$$

Najmanjša cena rezanja je torej 23, dosežemo pa jo tako, da najprej razrežemo na mestu  $x_2 = 5$ , nato pa en del še na mestu  $x_1 = 3$ , drugi del pa še na mestih  $x_3 = 7$  in  $x_4 = 8$  (pri slednjih dveh vrstni red ni pomemben).

#### Naloga 4.9.

Naj bo  $z_{ij}$  največji zaslužek, ki ga lahko imamo, če  $i$  zabojev razporedimo v prvih  $j$  trgovin. Določimo začetne pogoje in rekurzivne enačbe.

$$\begin{aligned}
 z_{i1} &= p_{i1} & (0 \leq i \leq m) \\
 z_{ij} &= \max\{z_{h,j-1} + p_{i-h,j} \mid 0 \leq h \leq i\} & (0 \leq i \leq m, 2 \leq j \leq n)
 \end{aligned}$$

Vrednosti  $z_{ij}$  računamo v leksikografskem vrstnem redu glede na  $(j, i)$ . Največji skupni zaslužek dobimo kot  $z^* = z_{mn}$ .

(a) Izračunajmo vrednosti  $z_{ij}$  ( $0 \leq i \leq m, 2 \leq j \leq n$ ).

$$\begin{aligned}
 z_{02} &= 0 + 0 &= 0 \\
 z_{12} &= \max\{0 + 6, 5 + 0\} &= 6 \\
 z_{22} &= \max\{0 + 11, 5 + 6, 9 + 0\} &= 11 \\
 z_{32} &= \max\{0 + 15, 5 + 11, 9 + 6, 14 + 0\} &= 16 \\
 z_{42} &= \max\{0 + 19, 5 + 15, 9 + 11, 14 + 6, 17 + 0\} &= 20 \\
 z_{52} &= \max\{0 + 22, 5 + 19, 9 + 15, 14 + 11, 17 + 6, 21 + 0\} &= 25 \\
 z_{03} &= 0 + 0 &= 0 \\
 z_{13} &= \max\{0 + 4, 6 + 0\} &= 6 \\
 z_{23} &= \max\{0 + 9, 6 + 4, 11 + 0\} &= 11 \\
 z_{33} &= \max\{0 + 13, 6 + 9, 11 + 4, 16 + 0\} &= 16 \\
 z_{43} &= \max\{0 + 18, 6 + 13, 11 + 9, 16 + 4, 20 + 0\} &= 20
 \end{aligned}$$

$$z_{53} = \max\{0 + 20, 6 + 18, 11 + 13, \underline{16 + 9}, 20 + 4, 25 + 0\} = 25$$

Največji zaslužek je torej  $z^* = z_{53} = 25$ . Poiščimo še optimalno razporeditev zabojev.

$$\begin{array}{ll} z_{53} = z_{32} + p_{23} & 2 \text{ zaboja v tretjo trgovino} \\ z_{32} = z_{11} + p_{22} & 2 \text{ zaboja v drugo trgovino} \\ z_{11} = p_{11} & 1 \text{ zaboj v prvo trgovino} \end{array}$$

Druga optimalna razporeditev je, da gredo 3 zaboji v prvo trgovino, 2 v drugo trgovino in noben v tretjo.

- (b) Da bomo lahko rekonstruirali rešitev, bomo hranili še vrednosti  $k_{ij}$  ( $0 \leq i \leq m$ ,  $2 \leq j \leq n$ ), tako da bo veljalo  $z_{ij} = z_{k_{ij}, j-1} + p_{i-k_{ij}, j}$ .

```
function JAGODE( $(p_{ij})_{i,j=0,1}^{m,n}$ )
  for  $i = 0, \dots, m$  do
     $z_{i1} \leftarrow p_{i1}$ 
     $k_{i1} \leftarrow 0$ 
  end for
  for  $j = 2, \dots, n$  do
    for  $i = 0, \dots, m$  do
       $z_{ij}, k_{ij} \leftarrow \max\{(z_{h,j-1} + p_{i-h,j}, h) \mid 0 \leq h \leq i\}$ 
    end for
  end for
  resitev  $\leftarrow$  tabela z  $n$  polji
   $j \leftarrow m$ 
  for  $i = n, \dots, 1$  do
     $resitev[i] \leftarrow j - k_{ij}$ 
     $j \leftarrow k_{ij}$ 
  end for
  return ( $z_{mn}, resitev$ )
end function
```

Algoritem teče v času  $O(m^2 n)$ .

#### Naloga 4.10.

Naj bodo  $m(x)$ ,  $f_2(x)$  in  $f_3(x)$  začetni tržni delež oziroma deleža, ohranjena po drugi in tretji fazi, ob vložku  $x$  milijonov evrov v posamezno fazo. Uporabili bomo sledeče rekurzivne enačbe.

$$\begin{aligned} p_3(x) &= f_3(x) \\ p_2(x) &= \max\{f_2(x-y)p_3(y) \mid 0 \leq y \leq x\} \\ p_1(x) &= \max\{m(x-y)p_2(y) \mid 0 \leq y \leq x\} \end{aligned}$$

Optimalni tržni delež (v milijonih evrov) pri vložku 4M€ bomo dobili kot  $p^* = p_1(4)$ .

- (a) Najprej izračunajmo  $p_2(x)$  za  $x \in \{0, 1, 2, 3\}$ . Ker je  $m(0) = 0$ , nas namreč  $p_2(4)$  ne zanima.

$$p_2(0) = 0.2 \cdot 0.3 = 0.06$$

$$p_2(1) = \max\{0.4 \cdot 0.3, 0.2 \cdot 0.5\} = 0.12$$

$$p_2(2) = \max\{0.5 \cdot 0.3, 0.4 \cdot 0.5, 0.2 \cdot 0.6\} = 0.2$$

$$p_2(3) = \max\{0.6 \cdot 0.3, 0.5 \cdot 0.5, 0.4 \cdot 0.6, 0.2 \cdot 0.7\} = 0.25$$

Izračunajmo še  $p^* = p_1(4)$ .

$$p_1(4) = \max\{50 \cdot 0.06, 40 \cdot 0.12, 30 \cdot 0.2, 20 \cdot 0.25\} = 6$$

Optimalni končni tržni delež 6% torej dosežemo tako, da v prvo vazo vložimo 2 M€, v vsako od naslednjih dveh faz pa po 1 M€.

- (b) Najprej izračunajmo  $p_2(x)$  za  $0 \leq x \leq 4$ .

$$\begin{aligned} p_2(x) &= \max\{(0.4 + 0.1x - 0.1y)(0.6 + 0.07y) \mid 0 \leq y \leq x\} \\ &= \max\{-0.007y^2 + (0.007x - 0.032)y + 0.06x + 0.24 \mid 0 \leq y \leq x\} \end{aligned}$$

Odvajajmo zgornji izraz po  $y$ , da poiščemo maksimum na intervalu  $[0, x]$ .

$$0 = -0.014y + 0.007x - 0.032$$

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{16}{7}$$

Za  $x \in [0, 32/7]$  je ta vrednost manjša od 0 – ker imamo kvadraten polinom z negativnim vodilnim členom, je maksimum torej dosežen pri  $y = 0$ . Ker je  $4 < 32/7$ , torej velja

$$p_2(x) = 0.06x + 0.24 \quad (0 \leq x \leq 4)$$

– tj., v tretjo fazo se nam ne izplača vlagati. Sedaj izračunajmo še  $p^* = p_1(4)$ .

$$\begin{aligned} p_1(4) &= \max\{(4 - z)(6 + z)(0.06z + 0.24) \mid 0 \leq z \leq 4\} \\ &= \max\{-0.06z^3 - 0.36z^2 + 0.96z + 5.76 \mid 0 \leq z \leq 4\} \end{aligned}$$

Poglejmo, kje ima zgornji izraz maksimum na intervalu  $[0, 4]$ .

$$0 = -0.18z^2 - 0.72z + 0.96$$

$$z = \frac{-12 \pm 4\sqrt{21}}{6}$$

Ker imamo kubičen polinom z negativnim vodilnim členom, je maksimum dosežen pri večji od zgornjih rešitev, torej  $z \approx 1.055$ . Optimalni tržni delež je tako  $p^* \approx 6.302$ , dobimo pa ga tako, da 1.055 M€ vložimo v drugo fazo, preostanek pa v prvo fazo.



**Naloga 4.11.**

- (a) Naj bo  $p_{ij}$  največje število metov za določitev nadstropja, če moramo določiti izmed  $i$  nadstropij in imamo na voljo  $j$  lončkov. Določimo začetne pogoje in rekurzivne enačbe.

$$\begin{aligned} p_{0j} &= 0 & (1 \leq j \leq k) \\ p_{i1} &= i & (0 \leq i \leq n) \\ p_{ij} &= 1 + \min \{ \max \{ p_{h-1, j-1}, p_{i-h, j} \} \mid 1 \leq h \leq i \} & (1 \leq i \leq n, 2 \leq j \leq k) \end{aligned}$$

Vrednosti  $p_{ij}$  ( $1 \leq i \leq n, 2 \leq j \leq k$ ) računamo v leksikografskem vrstnem redu indeksov. Največje število metov pri optimalni strategiji dobimo kot  $p^* = p_{nk}$ .

- (b) Da bomo lahko rekonstruirali strategijo, bomo hranili še vrednosti  $r_{ij}$  ( $1 \leq i \leq n, 2 \leq j \leq k$ ), ki nam povedo, iz katerega od  $i$ -tih nadstropij, med katerimi določamo, naj vržemo lonček, če imamo na voljo še  $j$  lončkov. Velja torej

$$p_{ij} = 1 + \max \{ p_{r_{ij}-1, j-1}, p_{i-r_{ij}, j} \} \quad (1 \leq i \leq n, 2 \leq j \leq k).$$

Sedaj lahko zapišemo algoritem za določanje optimalne strategije metanja.

```

function LONČKI( $n, k$ )
  for  $j = 1, \dots, k$  do
     $p_{0j} \leftarrow 0$                                 robni pogoji za 0 nadstropij
  end for
  for  $i = 1, \dots, n$  do
     $p_{i1} \leftarrow i$                                 robni pogoji za 1 lonček
     $r_{i1} \leftarrow 1$                                 če imamo samo 1 lonček, ga vržemo iz najnižjega nadstropja
    for  $j = 2, \dots, k$  do                                rekurzivna enačba
       $p_{ij}, r_{ij} \leftarrow \min \{ (1 + \max \{ p_{h-1, j-1}, p_{i-h, j} \}, h) \mid 1 \leq h \leq i \}$ 
    end for
  end for
  function STRATEGIJA( $i, j, h$ )                                pomožna funkcija za izračun strategije
    if  $j = 0$  then                                če smo ostali brez lončkov,
      return  $[h]$                                 potem se ne razbijejo do  $h$ -tega nadstropja
    end if
     $\ell \leftarrow$  prazen seznam
    while  $i > 0$  do                                dodamo nadstropje za naslednji met in strategijo,
       $\ell.append((h + r_{ij}, STRATEGIJA(r_{ij} - 1, j - 1, h)))$                                 če se razbije
       $h \leftarrow h + r_{ij}$                                 če se ne razbije, nadaljujemo z višjimi nadstropji
       $i \leftarrow i - r_{ij}$ 
    end while
     $\ell.append(h)$                                 če do konca ostane cel, imamo najvišje nadstropje
    return  $\ell$ 
  end function
  return  $(p_{nk}, STRATEGIJA(n, k, 0))$ 
end function

```

Funkcija LONČKI poleg največjega potrebnega števila metov vrne še strategijo metanja. Ta je podana kot seznam parov, kjer prvi element pove nadstropje, iz katerega naj vržemo lonček, drugi element pa nadaljnjo strategijo, če se lonček razbije. Če lonček preživi padec, nadaljujemo z naslednjim elementom seznama. Zadnji element seznama je številka najvišjega nadstropja, iz katerega lahko vržemo lonček, da se ta ne razbije, če je ta preživel vse predhodne mete v seznamu.

Algoritem najprej izračuna vrednosti spremenljivk z rekurzivnimi enačbami, pri čemer naredi  $O(nk)$  korakov. Strategijo potem sestavi z rekurzivnimi klici funkcije STRATEGIJA. Če bi strategijo zapisali kot drevo, bi opazili, da ima to drevo natanko  $n + 1$  listov (enega za vsak možen rezultat), saj vsak met razdeli množico možnih rezultatov na dva dela. Velikost strategije je torej  $O(n)$ , takšna pa je tudi časovna zahtevnost njenega sestavljanja, saj v vsakem obhodu zanke **while** dodamo en element. Skupna časovna zahtevnost algoritma je torej  $O(nk)$ .

#### Naloga 4.12.

Naj bo  $r_{ij}$  največja pričakovana porast v prodaji, če prvim  $j$  regijam dodelimo  $i$  trgovskih potnikov. Določimo začetne pogoje in rekurzivne enačbe.

$$\begin{aligned} r_{i1} &= p_{i1} & (1 \leq i \leq 4) \\ r_{ij} &= \max\{r_{h,j-1} + p_{i-h,j} \mid 1 \leq h < i\} & (2 \leq i \leq 3, i \leq j \leq i+3) \end{aligned}$$

Vrednosti  $r_{ij}$  računamo v leksikografskem vrstnem redu glede na  $(j, i)$ . Največji pričakovani porast dobimo kot  $r^* = r_{63}$ .

Izračunajmo vrednosti  $r_{ij}$  ( $2 \leq i \leq 3, i \leq j \leq i+3$ ).

$$\begin{aligned} r_{22} &= 35 + 21 & = 56 \\ r_{32} &= \max\{35 + 42, 48 + 21\} & = 77 \\ r_{42} &= \max\{35 + 56, 48 + 42, 70 + 21\} & = 91 \\ r_{52} &= \max\{35 + 70, 48 + 56, 70 + 42, 89 + 21\} & = 112 \\ r_{33} &= 56 + 28 & = 84 \\ r_{43} &= \max\{56 + 41, 77 + 28\} & = 105 \\ r_{53} &= \max\{56 + 63, 77 + 41, 91 + 28\} & = 119 \\ r_{63} &= \max\{56 + 75, 77 + 63, 91 + 41, 112 + 28\} & = 140 \end{aligned}$$

Največji pričakovani porast je torej  $r^* = r_{63} = 140$ . Poiščimo še optimalno razporeditev trgovskih potnikov.

$$\begin{aligned} r_{63} &= r_{32} + p_{33} & 3 \text{ trgovski potniki v tretjo regijo} \\ r_{32} &= r_{11} + p_{22} & 2 \text{ trgovska potnika v drugo regijo} \\ r_{11} &= p_{11} & 1 \text{ trgovski potnik v prvo regijo} \end{aligned}$$

Druga optimalna razporeditev je, da razporedimo 3 trgovske potnike v prvo regijo, 2 v drugo regijo in 1 v tretjo regijo.

**Naloga 4.13.**

Nelinearni program bomo rešili s pomočjo sledečih rekurzivnih enačb.

$$p_2(x) = 2x$$

$$p_1(x) = \max \left\{ 2y^2 + p_2(x-2y) \mid 0 \leq y \leq \frac{x}{2} \right\}$$

$$p_3(x) = \max \{ p_1(x-z) + 4z - z^2 \mid 0 \leq z \leq x \}$$

Optimalno vrednost ciljne funkcije bomo dobili kot  $p^* = p_3(4)$ .

Najprej izračunajmo  $p_1(x)$ , kjer je  $0 \leq x \leq 4$ .

$$p_1(x) = \max \left\{ 2y^2 + 2x - 4y \mid 0 \leq y \leq \frac{x}{2} \right\}$$

Zgornji izraz je kvadraten polinom v  $y$  s pozitivnim vodilnim členom, ki tako maksimum doseže na eni izmed robnih točk, torej z vrednostjo  $2x$  ali  $\frac{x^2}{2}$ . Ker za vse  $x \leq 4$  velja  $2x \geq \frac{x^2}{2}$ , imamo torej  $p_1(x) = 2x$  za vse  $x \in [0, 4]$ . V optimalni rešitvi nelinearnega programa bo torej veljalo  $x_1 = 0$ .

Sedaj izračunajmo še  $p^* = p_3(4)$ .

$$p_3(4) = \max \{ 2(4-z) + 4z - z^2 \mid 0 \leq z \leq 4 \}$$

Zgornji izraz je kvadraten polinom v  $z$  z negativnim vodilnim členom. Da poiščemo maksimum, pogledajmo, kje ima njegov odvod vrednost 0.

$$0 = 2 - 2z$$

$$z = 1$$

Optimalna rešitev nelinearnega programa je torej  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 3$ ,  $x_3 = 1$ , vrednost ciljne funkcije pa je tedaj enaka  $p^* = 9$ .

**Naloga 4.14.**

Naj bo  $p_i(x)$  največja verjetnost, da bo igralec na srečo na koncu imel natanko 100€, če bo v  $i$ -to igro vstopil z  $x$  evri. Opazimo, da če tretjo igro začne z manj kot 50€, je ne bo mogel končati s 100€. Če ima  $x$  evrov, kjer je  $50 \leq x < 100$ , potem bo stavil  $100 - x$  evrov in upal na zmago; pri  $x > 100$  pa bo stavil  $x - 100$  evrov in upal na poraz. Če ima natanko 100€, potem ne bo stavil in si tako zagotovil, da bo tudi na koncu imel natanko 100€. Določimo torej začetne pogoje in rekurzivne enačbe.

$$p_3(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 50 \\ \frac{1}{2} & 50 \leq x < 100 \\ 1 & x = 100 \\ \frac{1}{2} & x > 100 \end{cases}$$

$$p_2(x) = \max \left\{ \frac{p_3(x-y) + p_3(x+y)}{2} \mid 0 \leq y \leq x \right\}$$

$$p_1(x) = \max \left\{ \frac{p_2(x-y) + p_2(x+y)}{2} \mid 0 \leq y \leq x \right\}$$

Maksimalno verjetnost dobimo kot  $p^* = p_1(75)$ .

Izračunajmo sedaj  $p_2(x)$  in  $p^* = p_1(75)$ .

$$p_2(x) = \frac{1}{2} \begin{cases} 0+0 & 0 \leq x < 25 \\ \max \left\{ 0+0, 0+\frac{1}{2} \right\} & 25 \leq x < 50 \\ \max \left\{ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}, 0+\frac{1}{2}, 0+1 \right\} & x = 50 \\ \max \left\{ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}, 0+\frac{1}{2}, 0+1, 0+\frac{1}{2} \right\} & 50 < x < 75 \\ \max \left\{ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+1, 0+\frac{1}{2} \right\} & x = 75 \\ \max \left\{ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+1, \frac{1}{2}+\frac{1}{2}, 0+\frac{1}{2} \right\} & 75 < x < 100 \\ \max \left\{ 1+1, \frac{1}{2}+\frac{1}{2}, 0+\frac{1}{2} \right\} & x = 100 \\ \max \left\{ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{2}, 0+\frac{1}{2} \right\} & x > 100 \end{cases} = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 25 \\ \frac{1}{4} & 25 \leq x < 50 \\ \frac{1}{2} & 50 \leq x < 75 \\ \frac{3}{4} & 75 \leq x < 100 \\ 1 & x = 100 \\ \frac{3}{4} & x \geq 100 \end{cases}$$

$$p_1(75) = \frac{1}{2} \max \left\{ \frac{3}{4} + \frac{3}{4}, \frac{1}{2} + \frac{3}{4}, \frac{1}{2} + 1, \frac{1}{4} + \frac{3}{4}, 0 + \frac{3}{4} \right\} = \frac{3}{4}$$

Maksimalna verjetnost je torej  $p^* = \frac{3}{4}$ . Poiščimo strategijo, pri kateri jo dobimo.

$$p_1(75) = \frac{p_2(75-0) + p_2(75+0)}{2} \quad \text{v prvi igri ne stavimo}$$

$$p_2(75) = \frac{p_3(75-25) + p_3(75+25)}{2} \quad \text{v drugi igri stavimo 25€}$$

$$p_3(50) = \frac{1}{2} \quad \text{če izgubimo, v tretji stavimo 25€}$$

$$p_3(100) = 1 \quad \text{če zmagamo, v tretji ne stavimo}$$

Pri drugi optimalni strategiji v prvi igri stavimo 25€, v drugi igri pa ne glede na izid prve igre ne stavimo. V tretji igri potem ravnamo enako kot v zgornji strategiji.

**Naloga 4.15.**

**Naloga 4.16.**

**Naloga 4.17.**

- (a) Naj bo  $x_i$  največji produkt strnjenega podzaporedja, ki se konča pri številu  $a_i$ , in  $y_i$  najmanjši tak produkt. Določimo začetne pogoje in rekurzivne enačbe.

$$x_1 = y_1 = a_1$$

$$x_i = \max\{a_i, a_i x_{i-1}, a_i y_{i-1}\} \quad (2 \leq i \leq n)$$

$$y_i = \min\{a_i, a_i x_{i-1}, a_i y_{i-1}\} \quad (2 \leq i \leq n)$$

Vrednosti  $x_i$  in  $y_i$  računamo naraščajoče po indeksu  $i$ . Največji produkt strnjenega podzaporedja dobimo kot  $x^* = \max\{x_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ .

- (b) Za izračun vrednosti  $x_i$  in  $y_i$  pri vsakem  $i$  potrebujemo konstantno časa. Ker naredimo  $n$  takih korakov, je časovna zahtevnost algoritma  $O(n)$ .
- (c) Izračunajmo vrednosti  $x_i$  in  $y_i$  ( $2 \leq i \leq 10$ ).

$$\begin{aligned} x_2 &= \max\{-2, \underline{-2 \cdot 0.9}, -2 \cdot 0.9\} &= -1.8 \\ y_2 &= \min\{\underline{-2}, -2 \cdot 0.9, -2 \cdot 0.9\} &= -2 \\ x_3 &= \max\{-0.6, -0.6 \cdot -1.8, \underline{-0.6 \cdot -2}\} &= 1.2 \\ y_3 &= \min\{\underline{-0.6}, -0.6 \cdot -1.8, -0.6 \cdot -2\} &= -0.6 \\ x_4 &= \max\{-0.5, -0.5 \cdot 1.2, \underline{-0.5 \cdot -0.6}\} &= 0.3 \\ y_4 &= \min\{-0.5, \underline{-0.5 \cdot 1.2}, -0.5 \cdot -0.6\} &= -0.6 \\ x_5 &= \max\{-2, -2 \cdot 0.3, \underline{-2 \cdot -0.6}\} &= 1.2 \\ y_5 &= \min\{\underline{-2}, -2 \cdot 0.3, -2 \cdot -0.6\} &= -2 \\ x_6 &= \max\{5, \underline{5 \cdot 1.2}, 5 \cdot -2\} &= 6 \\ y_6 &= \min\{5, 5 \cdot 1.2, \underline{5 \cdot -2}\} &= -10 \\ x_7 &= \max\{0.1, \underline{0.1 \cdot 6}, 0.1 \cdot -10\} &= 0.6 \\ y_7 &= \min\{0.1, 0.1 \cdot 6, \underline{0.1 \cdot -10}\} &= -1 \\ x_8 &= \max\{\underline{3}, 3 \cdot 0.6, 3 \cdot -1\} &= 3 \\ y_8 &= \min\{3, 3 \cdot 0.6, \underline{3 \cdot -1}\} &= -3 \\ x_9 &= \max\{0.5, \underline{0.5 \cdot 3}, 0.5 \cdot -3\} &= 1.5 \\ y_9 &= \min\{0.5, 0.5 \cdot 3, \underline{0.5 \cdot -3}\} &= -1.5 \\ x_{10} &= \max\{-3, -3 \cdot 1.5, \underline{-3 \cdot -1.5}\} &= 4.5 \\ y_{10} &= \min\{-3, \underline{-3 \cdot 1.5}, -3 \cdot -1.5\} &= -4.5 \end{aligned}$$

Največji produkt strnjenega zaporedja je torej  $x^* = 6 = \prod_{i=2}^6 a_i$ .

#### Naloga 4.18.

#### Naloga 4.19.

- (a) Za izračun pričakovanega dobička bomo definirali funkcije  $v_i(z)$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Zapišimo njihove definicije.

$$\begin{aligned} v_1(z) &= n_1 + k_1 z \\ v_2(z) &= \max\{v_1(z - y) + n_2 + k_2 y \mid a_2 \leq y \leq z - a_1\} \\ v_3(z) &= \max\{v_2(z - y) \cdot (n_3 + k_3 y) \mid a_3 \leq y \leq z - a_1 - a_2\} \end{aligned}$$

Pričakovani dobiček dobimo tako, da izračunamo  $v_3(m)$ .

(b) Vstavimo podatke v zgornje formule.

$$v_1(z) = 3 + 1.5z$$

$$\begin{aligned} v_2(z) &= \max \{3 + 1.5(z - y) + 4 + 2y \mid 3 \leq y \leq z - 4\} \\ &= \max \{7 + 1.5z + 0.5y \mid 3 \leq y \leq z - 4\} \\ &= 5 + 2z \quad (z \geq 7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_3(15) &= \max \{(5 + 2(15 - y)) \cdot (0.4 + 0.3y) \mid 2 \leq y \leq 8\} \\ &= \max \{-0.6y^2 + 9.7y + 14 \mid 2 \leq y \leq 8\} \end{aligned}$$

Naj bo  $f(y) = -0.6y^2 + 9.7y + 14$  – gre za kvadraten polinom z negativnim vodilnim členom, tako da ima maksimum tam, kjer je odvod ničeln.

$$\begin{aligned} 0 &= f'(y) = -1.2y + 9.7 \\ y &= 9.7/1.2 > 8 \end{aligned}$$

Opazimo torej, da maksimum leži desno od intervala  $[2, 8]$ , kar pomeni, da velja  $v_3(15) = f(8) = 53.6$ . Podjetje bo torej maksimiziralo pričakovani dobiček na 53.8 milijonov evrov, če dodeli 8 milijonov evrov marketingu, 3 milijone evrov oblikovalcem in 4 milijone evrov razvijalcem.

#### Naloga 4.20.

#### Naloga 4.21.

(a) Naj bosta  $p_i$  in  $q_i$  največji vsoti za ustrezne postavitve domin do  $i$ -tega polja, pri čemer na  $i$ -tem polju dovolimo le del domine z znakom + oziroma – (tj., prepovemo – oziroma +, dovolimo pa, da  $i$ -to polje ni pokrito). Določimo začetne pogoje in rekurzivne enačbe.

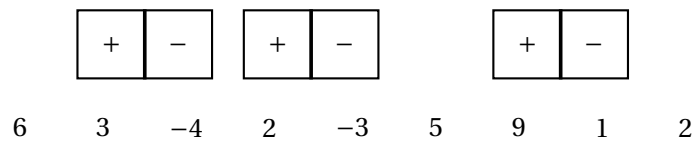
$$\begin{aligned} p_0 = p_1 = 0, \quad p_i &= \max\{p_{i-1}, q_{i-1}, p_{i-2} - a_{i-1} + a_i\} \quad (2 \leq i \leq n) \\ q_0 = q_1 = 0, \quad q_i &= \max\{p_{i-1}, q_{i-1}, q_{i-2} + a_{i-1} - a_i\} \quad (2 \leq i \leq n) \end{aligned}$$

Vrednosti  $p_i$  in  $q_i$  ( $0 \leq i \leq n$ ) računamo naraščajoče po indeksu  $i$ . Največjo vsoto dobimo kot  $p^* = \max\{p_n, q_n\}$ .

(b) Za izračun vrednosti  $p_i$  in  $q_i$  pri vsakem  $i$  potrebujemo konstantno časa. Ker naredimo  $n$  takih korakov, je časovna zahtevnost algoritma  $O(n)$ .

(c) Izračunajmo vrednosti  $p_i$  in  $q_i$  ( $2 \leq i \leq 9$ ).

$$\begin{aligned} p_2 &= \max\{0, 0, 0 - 6 + 3\} = 0 & q_2 &= \max\{0, 0, 0 + 6 - 3\} = 3 \\ p_3 &= \max\{0, 3, 0 - 3 + (-4)\} = 3 & q_3 &= \max\{0, 3, 0 + 3 + (-4)\} = 7 \\ p_4 &= \max\{3, 7, 0 - (-4) + 2\} = 7 & q_4 &= \max\{3, 7, 3 + (-4) - 2\} = 7 \end{aligned}$$



Slika 71: Optimalno pokritje za nalogo 4.21(c).

$$\begin{aligned}
 p_5 &= \max\{7, 7, 3 - 2 + (-3)\} = 7 & q_5 &= \max\{7, 7, 7 + 2 - (-3)\} = 12 \\
 p_6 &= \max\{7, 12, 7 - (-3) + 5\} = 15 & q_6 &= \max\{7, 12, 7 + (-3) - 5\} = 12 \\
 p_7 &= \max\{15, 12, 7 - 5 + 9\} = 15 & q_7 &= \max\{15, 12, 7 + 5 - 9\} = 15 \\
 p_8 &= \max\{15, 15, 15 - 9 + 1\} = 15 & q_8 &= \max\{15, 15, 15 + 9 - 1\} = 23 \\
 p_9 &= \max\{15, 23, 15 - 1 + 2\} = 23 & q_9 &= \max\{15, 23, 15 + 1 - 2\} = 23
 \end{aligned}$$

Optimalno pokritje ima torej vsoto  $p^* = \max\{p_9, q_9\} = 23$ . Poglejmo, kam moramo postaviti domine.

$$\begin{aligned}
 p^* &= p_9 = q_8 = q_6 + a_7 - a_8 & [+ -] & \text{na } (7, 8) \\
 q_6 &= q_5 = q_3 + a_4 - a_5 & [+ -] & \text{na } (4, 5) \\
 q_3 &= q_1 + a_2 - a_3 & [+ -] & \text{na } (2, 3)
 \end{aligned}$$

Postavitve je prikazana na sliki 71.

**Naloga 4.22.**

**Naloga 4.23.**

**Naloga 4.24.**

**Naloga 4.25.**

**Naloga 4.26.**

**Naloga 4.27.**

**Naloga 4.28.**

**Naloga 4.29.**

**Naloga 4.30.**

**Naloga 4.31.**

**Naloga 4.32.****Naloga 4.33.**

- (a) Naj bodo  $s_{ij}$  pričakovani stroški, ki bodo nastali, če Stekelce pri  $i$ -tem naročilu ( $i = 1, 2$ ) potrebuje še  $j$  kroglic ( $j = 0, 1, 2$ ). Določimo začetne pogoje in rekurzivne enačbe.

$$\begin{aligned}s_{22} &= \min(\{k\} \cup \{z_2 + cx + (p + x(1-p))p^{x-1}k \mid x \geq 2, x \in \mathbb{Z}\}) \\s_{21} &= \min(\{k\} \cup \{z_2 + cx + p^x k \mid x \geq 1, x \in \mathbb{Z}\}) \\s_{12} &= \min(\{s_{22}\} \cup \{z_1 + cx + p^x s_{22} + x(1-p)p^{x-1}s_{21} \mid x \geq 1, x \in \mathbb{Z}\})\end{aligned}$$

Tukaj  $c$  predstavlja ceno posamezne kroglice,  $z_i$  ( $i = 1, 2$ ) stroške zagona izdelave pri  $i$ -tem naročilu,  $k$  kazen ob neizstavitvi naročila, in  $p$  verjetnost, da bo posamezna kroglica neuporabna. Pričakovani stroški so  $s^* = s_{12}$ .

Izračunajmo zgornje vrednosti pri  $c = 100\text{€}$ ,  $z_1 = z_2 = 300\text{€}$ ,  $k = 800\text{€}$  in  $p = 0.5$ . Opazimo, da imajo izrazi na desni natanko en lokalni minimum (za  $x \in \mathbb{R}$ ), tako da zadostuje obravnavati le tiste vrednosti  $x$ , kjer vrednost izraza še pada.

$$\begin{aligned}s_{22} &= \min\{800\text{€}, 1\,100\text{€}, 1\,000\text{€}, 950\text{€}, 950\text{€}, \dots\} &&= 800\text{€} \\s_{21} &= \min\{800\text{€}, 800\text{€}, 700\text{€}, 700\text{€}, \dots\} &&= 700\text{€} \\s_{12} &= \min\{800\text{€}, 1\,150\text{€}, 1\,050\text{€}, 962.5\text{€}, 925\text{€}, 934.375\text{€}, \dots\} &&= 800\text{€}\end{aligned}$$

Kroglic se ji torej ne izplača naročati, saj bo do najmanjših pričakovanih stroškov prišlo, če enostavno plača kazni.

- (b) Rekurzivne enačbe iz prejšnje točke rešimo še za primer, ko velja  $z_1 = 150\text{€}$ . Ker so ostali parametri nespremenjeni, zadostuje, da znova izračunamo le vrednost  $s_{12}$ .

$$s_{12} = \min\{800\text{€}, 1\,000\text{€}, 900\text{€}, 812.5\text{€}, 775\text{€}, 784.375\text{€}, \dots\} = 775\text{€}$$

Pri prvem naročilu naj torej naroči 4 kroglice. Če bo le ena uporabna, naj drugič naroči še 2 ali 3 kroglice, če pa nobena ne bo uporabna, naj plača kazni.

**Naloga 4.34.****Naloga 4.35.**



**Naloga 4.36.**

Naj bo  $v_{ij}$  največja vsota števil izmed  $a_1, a_2, \dots, a_i$ , ki ne preseže vrednosti  $j$ . Definirajmo še  $s = \lfloor \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n a_i \rfloor$  (tj., največja možna vrednost za  $\min\{\sum S_1, \sum S_2\}$ ). Določimo začetne pogoje in rekurzivne enačbe.

$$\begin{aligned} v_{00} = v_{i0} = v_{0j} &= 0 & (1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq s) \\ v_{ij} &= \max(\{v_{i-1,j}\} \cup \{a_i + v_{i-1,j-a_i} \mid a_i \leq j\}) & (1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq s) \end{aligned}$$

Vrednosti  $v_{ij}$  računamo v leksikografskem vrstnem redu indeksov (npr. najprej naraščajoče po  $i$ , nato pa naraščajoče po  $j$ ). Optimalna vrednost  $v^* = v_{ns}$  nam pove največjo vrednost za  $\sum S_1$  (brez škode za splošnost lahko predpostavimo, da ta ne preseže  $\sum S_2$ ); razliko dobimo kot  $\sum_{i=1}^n a_i - 2v^*$ .

**Naloga 4.37.****Naloga 4.38.****Naloga 4.39.****Naloga 4.40.****Naloga 4.41.****Naloga 4.42.****Naloga 4.43.**

- (a) Naj bo  $V_i$  največja vsota nesosednjih členov zaporedja, ki jo lahko dobimo, če gledamo samo elemente od 1 do  $i$ , in vključuje  $a_i$ .

$$\begin{aligned} V_{-1} &= 0 \\ V_0 &= 0 \\ V_i &= \max_{j < i-1} (V_j) + a_i & (1 \leq i \leq n) \end{aligned}$$

Vidimo, da na  $i$ -tem koraku iščemo največjo prejšnjo nesosednjo vsoto  $V_j$ , ki ji bomo priključili element  $a_i$ , torej izračunamo največjo vsoto, ki zadošča pogoju nesosednosti in vključuje člen  $a_i$ .

Za izračun vrednosti  $V_i$  moramo imeti podane že vse prejšnje  $V_j$ , torej vse  $V_j$  z  $j < i$ . To dosežemo tako, da te vrednosti računamo naraščajoče z začetkom v 1 in koncem v  $n$ . Po izračunu vseh vrednosti  $V_i$  bo maksimalna vrednost iskanega problema enaka  $V^* = \max_{1 \leq i \leq n} (V_i)$ .

Podamo lahko še alternativno rekurzivno zvezo za ta problem, in sicer definirajmo  $U_i$  kot največjo vsoto nesosednjih členov zaporedja, ki jo dobimo,

če gledamo samo elemente od 1 do  $i$ . Ta definicija se razlikuje od zgornje po tem, da dobljena vsota ne vključuje nujno elementa  $a_i$ .

$$\begin{aligned}U_{-1} &= 0 \\U_0 &= 0 \\U_i &= \max(U_{i-2} + a_i, U_{i-1}) \quad (1 \leq i \leq n)\end{aligned}$$

Ideja tega rekurzivnega zapisa je podobna zgornji, le da se namesto iskanja maksimuma odločamo, ali bomo  $i$ -ti člen vključili v vsoto oziroma ga bomo izpustili.

Vrstni red iskanja vrednosti  $U_i$  določimo z naraščajočim zaporedjem indeksov  $i$ , ko  $1 \leq i \leq n$ , saj imamo tako pred reševanjem problema  $U_i$  definirane vse predhodne vrednosti. Ko izračunamo vse vrednosti  $U_i$ , je maksimum vsote zaporedja enak  $U^* = U_n$ , kar sledi neposredno iz definicije vrednosti  $U_n$ .

(b) Algoritem bo sledil drugi rekurzivni zvezi.

```
function MAXVSOTA( $(a_i)_{i=1}^n$ )
   $U_{-1} \leftarrow 0$ 
   $U_0 \leftarrow 0$ 
  for  $i = 1, 2, \dots, n$  do
     $U_i \leftarrow \max(U_{i-2} + a_i, U_{i-1})$ 
  end for
   $\ell \leftarrow$  prazen seznam
   $i \leftarrow n$ 
  while  $i > 0$  do
    if  $U_i = U_{i-1}$  then
       $i \leftarrow i - 1$ 
    else
       $\ell.append(i)$ 
       $i \leftarrow i - 2$ 
    end if
  end while
   $\ell.reverse()$ 
  return  $(U_n, \ell)$ 
end function
```

Algoritem enostavno upošteva drugo rekurzivno zvezo in iterativno, naraščajoče po  $i$ , računa vrednosti  $U_i$ , dokler ne pride do  $U_n$ , kar vrne kot optimalno vrednost. Časovna zahtevnost je očitno  $O(n)$ , saj zanko izvedemo enkrat, v vsakem obhodu pa porabimo konstantno časa.

Izvajanje algoritma na primeru  $a = [-2, 3, 10, -4, 7, 21, 5, 0, -10]$  si lahko ogledamo v tabeli 13. Iz zadnje vrstice lahko ugotovimo, da je podzaporedje z največjo vsoto  $(a_3, a_6) = (10, 21)$ .

Algoritem vrne tudi indekse elementov podzaporedja, ki maksimizira vsoto. To doseže tako, da primerja sosednje elemente zaporedja  $(U_i)_{i=0}^n$  – če se  $U_{i-1}$  in  $U_i$  razlikujeta, potem mora očitno veljati  $U_i = U_{i-2} + a_i$ , sicer pa element

$i$	$U_{-1}$	$U_0$	$U_1$	$U_2$	$U_3$	$U_4$	$U_5$	$U_6$	$U_7$	$U_8$	$U_9$
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	3	10	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	3	10	10	0	0	0	0	0
5	0	0	0	3	10	10	17	0	0	0	0
6	0	0	0	3	10	10	17	31	0	0	0
7	0	0	0	3	10	10	17	31	31	0	0
8	0	0	0	3	10	10	17	31	31	31	0
9	0	0	0	3	10	10	17	31	31	31	31

Tabela 13: Potek izvajanja algoritma za nalogo 4.43.

$a_i$  ni bil uporabljen v vsoti. Po koncu izvajanja zanke tako dobimo seznam indeksov elementov zaporedja, ki smo jih dejansko prišteli v vsoto.

#### Naloga 4.44.

- (a) Definirajmo usmerjen graf  $G_a$ , ki ima za vozlišča števila  $1, 2, \dots, n$  in povezavo  $i \rightarrow j$  natanko tedaj, ko velja  $i < j \leq i + a_i$ . Skratka, vsakemu členu (indeksu) zaporedja dodelimo vozlišče in ga povežemo s tistimi, ki so iz njega dosegljiva v enem koraku.

Problem smo prevedli na osnovno nalogo dinamičnega programiranja, saj moramo poiskati najkrajšo pot med začetno in končno točko v usmerjenem, acikličnem grafu  $G_a$ .

Naj bo  $d_i$  najkrajša pot od vozlišča  $i$  do vozlišča  $j$  v grafu  $G_a$ . Rekurzivno zvezo potem lahko zapišemo kot

$$d_n = 0$$

$$d_i = 1 + \min \{d_k \mid i + 1 \leq k \leq \min(i + a_i, n)\} \quad (1 \leq i < n)$$

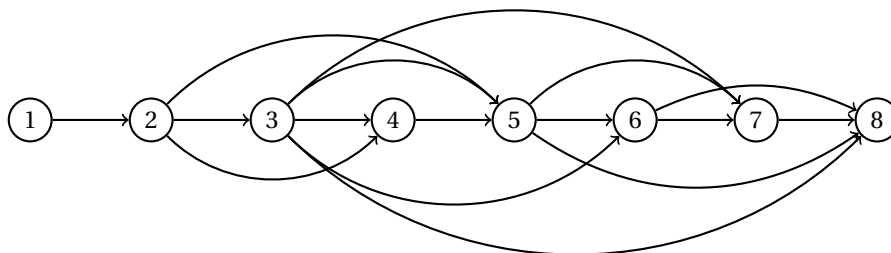
Da bomo imeli vse prejšnje probleme rešene pred trenutnim, bomo vrednosti  $d_i$  računali padajoče po  $i$  za  $1 \leq i \leq n$ , saj začnemo v zadnjem vozlišču  $n$  in se nato pomikamo nazaj. Po razrešitvi vseh problemov optimum  $d^*$  dobimo kot vrednost  $d_1$ , torej  $f(S) = d^* = d_1$ , kar sledi iz definicije vrednosti  $d_i$ .

- (b) Algoritem bo sledil rekurzivni zvezi.

```

function SKOKI( $((a_i)_{i=1}^n)$ )
   $d_n \leftarrow 0$ 
  for  $i = n - 1, n - 2, \dots, 1$  do
     $d_i, p_i \leftarrow \min \{(1 + d_k, k) \mid i + 1 \leq k \leq \min(i + a_i, n)\}$ 

```



Slika 72: Predstavitev skokov z grafom za nalogo 4.44(b).

```

end for

pot ← prazen seznam



i ← 1

while i < n do
    pot.append(i)
    i ← pi
end while

pot.append(n)



return (d1, pot)

end function

```

Algoritem ima časovno zahtevnost enako  $O(|V| + |E|)$ , kjer sta  $V$  in  $E$  množici vozlišč in povezav v grafu  $G_a$ , saj za vsako vozlišče pregledamo njegove vhodne povezave. Število vozlišč v našem grafu je  $n$ , število povezav pa je odvisno od elementov v vhodnem seznamu  $S$ . V najslabšem primeru lahko za vhod velja  $a_i \geq n - i$  za vsak  $i$ . Časovna zahtevnost našega algoritma bo potem  $O(n^2)$ , saj je število vozlišč enako  $n$ , število povezav pa lahko izračunamo kot

$$(n-1) + (n-2) + \dots + 1 + 0 = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2 - n}{2} = O(n^2).$$

Poglejmo si delovanje algoritma na primeru  $S = [1, 3, 5, 1, 3, 10, 6, 13]$ . Ustrezni graf  $G_a$  je prikazan na sliki 72. V tabeli 14 je prikazan potek izvajanja algoritma. Algoritem nam vrne optimalno pot  $[1, 2, 3, 8]$ , torej je  $f(S) = 3$ .

#### Naloga 4.45.

#### Naloga 4.46.

Problem bomo razdelili na tri dele, pri čemer bomo v  $i$ -tem delu obravnavali situacijo, ko vlagamo v prvih  $i$  investicij. Vrednost  $p_i(x)$  naj torej označuje največji zaslužek, če v prvih  $i$  investicij vložimo znesek  $x$ .

Ker vrednost  $r_1(x)$  narašča z  $x$ , velja  $p_1(x) = r_1(x)$ . Sedaj določimo  $p_2(x)$ .

$$p_2(x) = \max \{ p_1(y) + r_2(x-y) \mid 0 \leq y \leq x \}$$

$i$	$a_i$	$d_i$	$p_i$
8	13	0	
7	6	1	8
6	10	1	8
5	3	1	8
4	1	2	5
3	5	1	8
2	3	2	3
1	1	3	2

Tabela 14: Potek izvajanja algoritma za nalogo 4.44(b).

$$\begin{aligned}
&= \begin{cases} \max \left( \begin{aligned} &\{3x - 3y + 7 \mid 0 \leq y < 1, y \leq x - 1\} \\ &\cup \{3x + 4y + 9 \mid 1 \leq y \leq x - 1\} \\ &\cup \{0 \mid x - 1 < y < 1\} \\ &\cup \{7y + 2 \mid x - 1 < y \leq x, y \geq 1\} \end{aligned} \right) & \text{če } x \geq 1, \text{ in} \\ 0 & \text{sicer} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 3x + 7 & 1 \leq x < \frac{5}{4}, \\ 7x + 2 & \frac{5}{4} \leq x < 2, \\ 7x + 5 & x \geq 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

Največji zaslužek bomo dobili kot  $p^* = p_3(6)$ .

$$\begin{aligned}
p_3(6) &= \max \{p_2(z) + r_3(6 - z) \mid 0 \leq z \leq 6\} \\
&= \max \left( \begin{aligned} &\{-4z + 29 \mid 0 \leq z < 1\} \\ &\cup \left\{ -z + 36 \mid 1 \leq z < \frac{5}{4} \right\} \\ &\cup \left\{ 3z + 31 \mid \frac{5}{4} \leq z < 2 \right\} \\ &\cup \{3z + 34 \mid 2 \leq z \leq 5\} \\ &\cup \{7z + 5 \mid 5 < z \leq 6\} \end{aligned} \right) \\
&= 49
\end{aligned}$$

Ker velja  $p^* = p_3(6) = p_2(5) + r_3(1) = r_1(4) + r_2(1) + r_3(1)$ , največji zaslužek 49 000€ dosežemo, če vložimo 4 000€ v prvo investicijo in po 1 000€ v drugi dve investiciji.

#### Naloga 4.47.

- (a) Naj bo  $p_i$  najmanjša cena postavitve baznih postaj do  $i$ -te milje tako, da se v celoti pokrije interval  $[0, i]$ . Določimo začetne pogoje in rekurzivne enačbe.

$$p_{-1} = p_0 = 0$$

$$p_i = \min\{a_{i-1} + p_{i-2}, a_i + p_{i-1}\} \quad (1 \leq i \leq n)$$

Vrednosti  $p_i$  računamo naraščajoče po indeksu  $i$  ( $0 \leq i \leq n$ ). Najmanjšo ceno postavitve baznih postaj dobimo s  $p^* = p_n$ .

- (b) Za izračun vrednosti  $p_i$  za posamezen  $i$  potrebujemo konstantno mnogo časa. Ker ta izračun opravimo  $(n - 1)$ -krat, je torej časovna zahtevnost ustreznega algoritma  $O(n)$ .
- (c) Izračunajmo vrednosti  $p_i$  ( $1 \leq i \leq 10$ ).

$$\begin{aligned} p_1 &= \min\{\underline{4} + 0, 6 + 0\} &= 4 \\ p_2 &= \min\{6 + 0, \underline{1} + 4\} &= 5 \\ p_3 &= \min\{\underline{1} + 4, 10 + 5\} &= 5 \\ p_4 &= \min\{\underline{10} + 5, 14 + 5\} &= 15 \\ p_5 &= \min\{\underline{14} + 5, 21 + 15\} &= 19 \\ p_6 &= \min\{21 + 15, \underline{15} + 19\} &= 34 \\ p_7 &= \min\{\underline{15} + 19, 6 + 34\} &= 34 \\ p_8 &= \min\{\underline{6} + 34, 10 + 34\} &= 40 \\ p_9 &= \min\{10 + 34, \underline{3} + 40\} &= 43 \\ p_{10} &= \min\{\underline{3} + 40, 2 + 43\} &= 43 \end{aligned}$$

Cena postavitve baznih postaj je torej  $p^* = p_{10} = 43$ . Poglejmo, kam moramo postaviti bazne postaje.

$$\begin{array}{ll} p_{10} = a_9 + p_8 & \text{postaja na 9} \\ p_8 = a_7 + p_6 & \text{postaja na 7} \\ p_6 = a_6 + p_5 & \text{postaja na 6} \\ p_5 = a_4 + p_3 & \text{postaja na 4} \\ p_3 = a_2 + p_1 & \text{postaja na 2} \\ p_1 = a_0 & \text{postaja na 0} \end{array}$$

- (d) Naj bo  $q_i$  najmanjša cena postavitve baznih postaj (pri čemer dovolimo tudi večje postaje) do  $i$ -te milje tako, da se v celoti pokrije interval  $[0, i]$ . Določimo začetne pogoje in rekurzivne enačbe.

$$\begin{aligned} b_{-1} &= \infty \\ q_{-3} = q_{-2} = q_{-1} &= q_0 = 0 \\ q_i &= \min\{b_{i-2} + \min\{q_{i-4}, q_{i-3}\}, \\ &\quad b_{i-1} + \min\{q_{i-3}, q_{i-2}\}, \\ &\quad b_i + \min\{q_{i-2}, q_{i-1}\}, \\ &\quad a_{i-1} + q_{i-2}, \end{aligned}$$

$$a_i + q_{i-1} \quad (1 \leq i \leq n)$$

Vrednosti  $q_i$  računamo naraščajoče po indeksu  $i$  ( $0 \leq i \leq n$ ). Najmanjšo ceno postavitve baznih postaj dobimo s  $q^* = q_n$ .

(e) Izračunajmo vrednosti  $q_i$  ( $1 \leq i \leq 10$ ).

$$\begin{aligned} q_1 &= \min\{\infty + 0, 10 + 0, 12 + 0, \underline{4 + 0}, 6 + 0\} &= 4 \\ q_2 &= \min\{10 + 0, 12 + 0, \underline{3 + 0}, 6 + 0, 1 + 4\} &= 3 \\ q_3 &= \min\{12 + 0, \underline{3 + 0}, 18 + 3, 1 + 4, 10 + 3\} &= 3 \\ q_4 &= \min\{\underline{3 + 0}, 18 + 3, 24 + 3, 10 + 3, 14 + 3\} &= 3 \\ q_5 &= \min\{18 + 3, 24 + 3, 25 + 3, \underline{14 + 3}, 21 + 3\} &= 17 \\ q_6 &= \min\{24 + 3, 25 + 3, \underline{20 + 3}, 21 + 3, 15 + 17\} &= 23 \\ q_7 &= \min\{25 + 3, \underline{20 + 3}, 11 + 17, 15 + 17, 6 + 23\} &= 23 \\ q_8 &= \min\{\underline{20 + 3}, 11 + 17, 16 + 23, 6 + 23, 10 + 23\} &= 23 \\ q_9 &= \min\{11 + 17, 16 + 23, 7 + 23, 10 + 23, \underline{3 + 23}\} &= 26 \\ q_{10} &= \min\{16 + 23, 7 + 23, 4 + 23, \underline{3 + 23}, 2 + 26\} &= 26 \end{aligned}$$

Cena postavitve baznih postaj je torej  $q^* = q_{10} = 26$ . Poglejmo, kam moramo postaviti bazne postaje.

$$\begin{aligned} q_{10} &= a_9 + q_8 && \text{manjša postaja na 9} \\ q_8 &= b_6 + q_4 && \text{večja postaja na 6} \\ q_4 &= b_2 + q_0 && \text{večja postaja na 2} \end{aligned}$$

#### Naloga 4.48.

(a) Zapišimo začetni pogoj in rekurzivne enačbe.

$$\begin{aligned} c_0 &= 0 \\ c_i &= c_{i-1} + p_i \quad (1 \leq i \leq n) \end{aligned}$$

Vrednosti  $c_i$  ( $0 \leq i \leq n$ ) računamo naraščajoče po indeksu  $i$ , za izračun pa porabimo  $O(n)$  časa.

(b) Naj bo  $x_{ij}$  ( $1 \leq i \leq j \leq n$ ) cena postavitve razdelilnikov, ki razdelijo vodo za delavnice od  $i$  do  $j$ . Zapišimo začetne pogoje in rekurzivne enačbe.

$$\begin{aligned} x_{ii} &= 0 && (1 \leq i \leq n) \\ x_{ij} &= c_j - c_{i-1} + \min\{x_{ik} + x_{k+1,j} \mid i \leq k < j\} && (1 \leq i < j \leq n) \end{aligned}$$

Vrednosti  $x_{ij}$  ( $1 \leq i \leq j \leq n$ ) računamo naraščajoče po razliki  $j - i$ , nato pa še naraščajoče po indeksu  $i$ . Optimalno rešitev dobimo kot  $x^* = x_{1n}$ . Časovna zahtevnost izračuna je  $O(n^3)$ .

(c) Najprej izračunajmo vrednosti  $c_i$  ( $1 \leq i \leq 6$ ).

$$\begin{aligned}c_1 &= 0 + 4 = 4 \\c_2 &= 4 + 19 = 23 \\c_3 &= 23 + 17 = 40 \\c_4 &= 40 + 7 = 47 \\c_5 &= 47 + 5 = 52 \\c_6 &= 52 + 9 = 61\end{aligned}$$

Sedaj izračunajmo še vrednosti  $x_{ij}$  ( $1 \leq i < j \leq 6$ ).

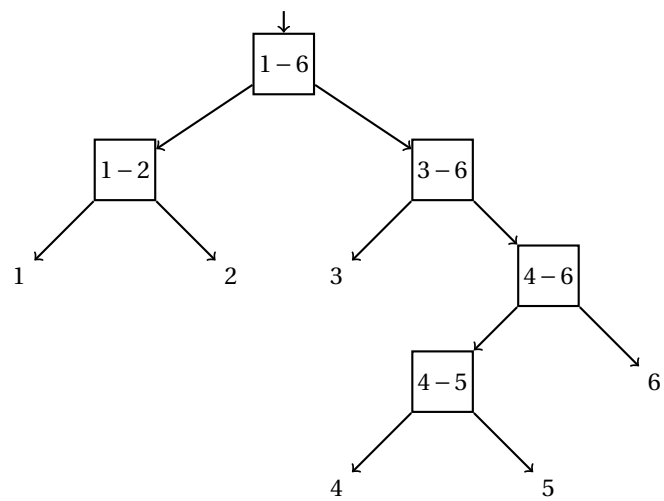
$$\begin{aligned}x_{12} &= 23 - 0 + 0 + 0 &= 23 \\x_{23} &= 40 - 4 + 0 + 0 &= 36 \\x_{34} &= 47 - 23 + 0 + 0 &= 24 \\x_{45} &= 52 - 40 + 0 + 0 &= 12 \\x_{56} &= 61 - 47 + 0 + 0 &= 14 \\x_{13} &= 40 - 0 + \min\{0 + 36, \underline{23 + 0}\} &= 63 \\x_{24} &= 47 - 4 + \min\{\underline{0 + 24}, 36 + 0\} &= 67 \\x_{35} &= 52 - 23 + \min\{\underline{0 + 12}, 24 + 0\} &= 41 \\x_{46} &= 61 - 40 + \min\{0 + 14, \underline{12 + 0}\} &= 33 \\x_{14} &= 47 - 0 + \min\{0 + 67, \underline{23 + 24}, 63 + 0\} &= 94 \\x_{25} &= 52 - 4 + \min\{\underline{0 + 41}, 36 + 12, 67 + 0\} &= 89 \\x_{36} &= 61 - 23 + \min\{\underline{0 + 33}, 24 + 14, 41 + 0\} &= 71 \\x_{15} &= 52 - 0 + \min\{0 + 89, \underline{23 + 41}, 63 + 12, 94 + 0\} &= 116 \\x_{26} &= 61 - 4 + \min\{0 + 71, \underline{36 + 33}, 67 + 14, 89 + 0\} &= 126 \\x_{16} &= 61 - 0 + \min\{0 + 126, \underline{23 + 71}, 63 + 33, 94 + 14, 116 + 0\} &= 155\end{aligned}$$

Cena postavitve razdelilnikov je torej  $x^* = x_{16} = 155$ . Poglejmo, kako naj jih postavimo.

$$\begin{array}{ll}x_{16} = c_6 - c_0 + x_{12} + x_{36} & \text{delimo na 1, 2 in 3 do 6} \\x_{12} = c_2 - c_0 + x_{11} + x_{22} & \text{delimo na 1 in 2} \\x_{36} = c_6 - c_2 + x_{33} + x_{46} & \text{delimo na 3 in 4 do 6} \\x_{46} = c_6 - c_3 + x_{45} + x_{66} & \text{delimo na 4, 5 in 6} \\x_{45} = c_5 - c_3 + x_{44} + x_{55} & \text{delimo na 4 in 5}\end{array}$$

Postavitev je prikazana na sliki [73](#).





Slika 73: Postavitev razdelilnikov za nalogo 4.48(c).

## 2.5 Algoritmi na grafih

### Naloga 5.1.

Graf  $G$  bomo predstavili kot matriko  $G.A$ , indeksirano z vozlišči, kar bomo implementirali s slovarjem slovarjev. Napišimo ustrezne metode.

```
function INIT( $G$ )                                     časovna zahtevnost:  $O(1)$ 
     $G.A \leftarrow$  prazen slovar
end function
function ADDVERTEX( $G, u$ )                             časovna zahtevnost:  $O(n)$ 
     $G.A[u] \leftarrow$  slovar z vrednostjo 0 za vsak ključ slovarja  $G.A$ 
    for  $v \in G.A$  do
         $G.A[v][u] \leftarrow 0$ 
    end for
end function
function ADDEDGE( $G, u, v$ )                             časovna zahtevnost:  $O(1)$ 
     $G.A[u][v] \leftarrow 1$ 
     $G.A[v][u] \leftarrow 1$ 
end function
function DELEDGE( $G, u, v$ )                             časovna zahtevnost:  $O(1)$ 
     $G.A[u][v] \leftarrow 0$ 
     $G.A[v][u] \leftarrow 0$ 
end function
function DELVERTEX( $G, u$ )                             časovna zahtevnost:  $O(n)$ 
    izbriši  $G.A[u]$ 
    for  $v \in G.A$  do
        izbriši  $G.A[v][u]$ 
    end for
end function
function ADJ( $G, u$ )                                    časovna zahtevnost:  $O(n)$ 
    return  $\{v \in G.A[u] \mid G.A[u][v] = 1\}$ 
end function
```

V podanih časovnih zahtevnostih  $n$  predstavlja število vozlišč v grafu. Prostorska zahtevnost podatkovne strukture je  $O(n^2)$ .

Opomnimo, da lahko preverjanje, ali sta dve vozlišči sosedni (torej če velja  $v \in \text{ADJ}(G, u)$  za dani vozlišči  $u, v$ ), opravimo v času  $O(1)$ .

### Naloga 5.2.

Graf  $G$  bomo predstavili kot slovar  $G.E$ , ki vsakemu vozlišču priredi množico njegovih sosedov. Napišimo ustrezne metode.

```
function INIT( $G$ )                                     časovna zahtevnost:  $O(1)$ 
     $G.E \leftarrow$  prazen slovar
end function
function ADDVERTEX( $G, u$ )                             časovna zahtevnost:  $O(1)$ 
     $G.E[u] \leftarrow$  prazna množica
end function
function ADDEDGE( $G, u, v$ )                             časovna zahtevnost:  $O(1)$ 
     $G.E[u].\text{add}(v)$ 
```

```

    G.E[v].add(u)
end function
function DELEDGE(G, u, v)                                časovna zahtevnost:  $O(1)$ 
    G.E[u].remove(v)
    G.E[v].remove(u)
end function
function DELVERTEX(G, u)                                  časovna zahtevnost:  $O(n)$ 
    izbriši G.E[u]
    for  $v \in G.E$  do
        G.E[v].remove(u)
    end for
end function
function ADJ(G, u)                                         časovna zahtevnost:  $O(d_G(u))$ 
    return G.E[u]
end function

```

V podanih časovnih zahtevnostih  $n$  predstavlja število vozlišč v grafu,  $d_G(u)$  pa stopnjo vozlišča  $u$  v grafu  $G$ . Prostorska zahtevnost podatkovne struktura je  $O(m + n)$ , kjer  $m$  predstavlja število povezav v grafu.

Opomnimo, da lahko preverjanje, ali sta dve vozlišči sosedni (torej če velja  $v \in \text{ADJ}(G, u)$  za dani vozlišči  $u, v$ ), opravimo v času  $O(1)$ .

### Naloga 5.3.

Strukturo iz naloge 5.1 spremenimo tako, da lahko hrani poljubno dvojiško matriko (torej ne nujno simetrične). To naredimo tako, da popravimo metodi ADDEDGE in DELEDGE, in sicer tako, da spreminjamo samo vrednost  $G.A[u][v]$ . Časovne zahtevnosti metod in prostorska zahtevnost strukture se pri tem ne spremenijo.

Strukturo iz naloge 5.1 spremenimo tako, da relacija, določena s slovarjem  $G.E$ , ni nujno simetrična. To naredimo tako, da popravimo metodi ADDEDGE in DELEDGE, in sicer tako, da spreminjamo samo množico  $G.E[u]$ . Tudi tukaj se časovne in prostorske zahtevnosti ne spremenijo.

V digrafi lahko ločimo sosednost po vhodnih in izhodnih povezavah. V ta namen bi lahko za vsako imeli svojo metodo. Pri matrični predstavitvi lahko samo zamenjamo indeksa v metodi ADJ, če pa želimo ohraniti časovno zahtevnost pri predstavitvi s seznamami sosedov, pa bi morali poleg slovarja za izhodne povezave hraniti še slovar za vhodne povezave.

### Naloga 5.4.

Uporabili bomo predstavitev grafa s seznamom sosedov (glej nalogo 5.2).

```

function TRIKOTNIK(G)
    for  $u \in G.E$  do
        for  $v \in \text{ADJ}(G, u)$  do
            for  $w \in \text{ADJ}(G, v)$  do
                if  $u \in \text{ADJ}(G, w)$  then
                    return TRUE
                end if
            end for
        end for
    end for
end function

```

```

    end for
  end for
end for return FALSE
end function

```

Da pregledamo vse pare  $(u, v)$ , porabimo  $O(n)$  korakov, da obiščemo vsa vozlišča, in še  $O(m)$  korakov, da obiščemo vse povezave. Tukaj je  $n$  število vozlišč in  $m$  število povezav grafa. Za vsak tak par pregledamo še sosedo  $w$  vozlišča  $v$  – teh je vsakič največ  $\Delta$  (največja stopnja grafa  $G$ ). Nazadnje še v času  $O(1)$  preverimo, ali sta vozlišči  $u$  in  $w$  sosedni. Skupna časovna zahtevnost algoritma je torej  $O(n + m\Delta)$ .

### Naloga 5.5.

Zapišimo algoritem, ki bo vrnil zvezdo digrafa  $D$ , če ta obstaja, in NULL sicer.

```

function ZVEZDA( $D = (V, E)$ )
   $z \leftarrow \text{NULL}$                                 začnemo brez kandidata
  for  $u \in V$  do
     $S \leftarrow \text{ADJ}(D, u)$                     sosedi vozlišča  $u$ 
    if  $|S| == |V| - 1 \wedge u \notin S$  then        ali je  $u$  kandidat?
      if  $z \neq \text{NULL}$  then
        return NULL                            če smo že imeli kandidata, nimamo zvezde
      end if
       $z \leftarrow u$                             nastavimo kandidata
    else if  $|S| \neq 0$  then                      nekandidati ne smejo imeti povezav
      return NULL
    end if
  end for
  return  $z$ 
end function

```

Če je digraf  $D$  predstavljen kot seznam sosedov (glej nalogi 5.2 in 5.3), pri čemer množice sosedov hranijo svojo velikost, bo algoritem teklen v času  $O(n)$ , kjer je  $n$  število vozlišč.

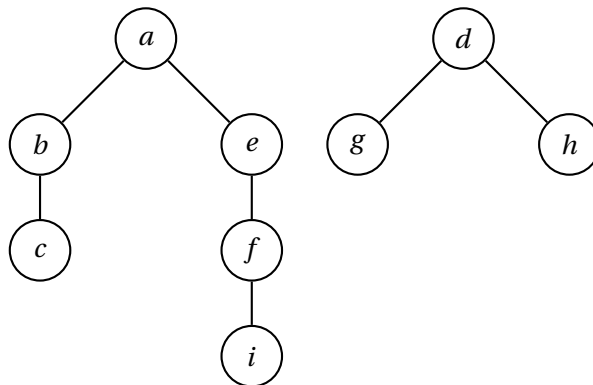
### Naloga 5.6.

Sledili bomo naslednjemu algoritmu.

```

function BFS( $G = (V, E), S, \text{VISIT}$ )
  visited  $\leftarrow$  slovar z vrednostjo FALSE za vsak  $v \in V$ 
  pred  $\leftarrow$  slovar z vrednostjo NULL za vsak  $v \in V$ 
  for  $s \in S$  do
    if  $\neg \text{visited}[s]$  then
      visited[s]  $\leftarrow$  TRUE
       $Q \leftarrow [s]$ 
      while  $\neg Q.\text{isEmpty}()$  do
         $u \leftarrow Q.\text{pop}()$ 
        VISIT( $u, \text{pred}[u]$ )
        for  $v \in \text{ADJ}(G, u)$  do
          if  $\neg \text{visited}[v]$  then
            visited[v]  $\leftarrow$  TRUE
            pred[v]  $\leftarrow u$ 
          end if
        end for
      end while
    end if
  end for
end function

```



Slika 74: Gozd iskanja v širino za nalogo 5.6.

```

        Q.append(v)
    end if
end for
end while
end if
end for
return pred
end function

```

Časovna zahtevnost preiskovanja je  $O(m + n)$  (kjer je  $n$  število vozlišč in  $m$  število povezav grafa), poleg tega pa algoritem opravi še  $O(n)$  klicev funkcije VISIT.

Potek zgornjega algoritma na grafu s slike 12 (pri čemer za množico začetnih vozlišč  $S$  vzamemo množico vseh vozlišč  $V$ , za VISIT pa vzamemo NOOP, torej ne naredimo ničesar), pri čemer sledimo abecednemu vrstnemu redu vozlišč, je prikazan v tabeli 15. Gozd iskanja v širino je prikazan na sliki 74, iz katere je razvidno, da so drevesne povezave

$(a, b), (b, c), (a, e), (e, f), (f, i), (d, g), (d, h)$ .

### Naloga 5.7.

Premier grafa je največja razdalja med dvema njegovima vozliščema. Poiskali ga bomo tako, da bomo opravili iskanje v širino iz vsakega vozlišča grafa (pomagali si bomo torej z algoritmom BFS iz naloge 5.6) ter vrnili največjo globino dobljenega drevesa.

```

function PREMIER( $G = (V, E)$ )
     $D \leftarrow 0$ 
     $d \leftarrow$  prazen slovar
    function VISIT( $u, v$ )
        if  $v = \text{NULL}$  then
             $d[u] \leftarrow 0$ 
        else
             $d[u] \leftarrow d[v] + 1$ 
        end if
    end function

```

$s$	$u$	$v$	$Q$	množica označenih vozlišč
$a$			$[a]$	$\{a\}$
$a$	$a$	$b$	$[b]$	$\{a, b\}$
$a$	$a$	$e$	$[b, e]$	$\{a, b, e\}$
$a$	$b$	$c$	$[e, c]$	$\{a, b, c, e\}$
$a$	$b$	$e$		$\{a, b, c, e\}$
$a$	$e$	$a$	$[c]$	$\{a, b, c, e\}$
$a$	$e$	$b$		$\{a, b, c, e\}$
$a$	$e$	$f$	$[c, f]$	$\{a, b, c, e, f\}$
$a$	$c$	$b$	$[f]$	$\{a, b, c, e, f\}$
$a$	$c$	$f$		$\{a, b, c, e, f\}$
$a$	$f$	$c$		$\{a, b, c, e, f\}$
$a$	$f$	$e$		$\{a, b, c, e, f\}$
$a$	$f$	$i$	$[i]$	$\{a, b, c, e, f, i\}$
$a$	$i$	$f$	$[\ ]$	$\{a, b, c, e, f, i\}$
$b$				$\{a, b, c, e, f, i\}$
$c$				$\{a, b, c, e, f, i\}$
$d$			$[d]$	$\{a, b, c, d, e, f, i\}$
$d$	$d$	$g$	$[g]$	$\{a, b, c, d, e, f, g, i\}$
$d$	$d$	$h$	$[g, h]$	$\{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$
$d$	$g$	$d$	$[h]$	$\{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$
$d$	$g$	$h$		$\{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$
$d$	$h$	$d$		$\{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$
$d$	$h$	$g$	$[\ ]$	$\{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$
$e$				$\{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$
$f$				$\{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$
$g$				$\{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$
$h$				$\{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$
$i$				$\{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$

Tabela 15: Potek izvajanja algoritma za nalogo 5.6.

```

end function
for  $v \in V$  do
  for  $u \in V$  do
     $d[u] \leftarrow \infty$ 
  end for
  BFS( $G, \{v\}, \text{VISIT}$ )
   $D \leftarrow \max\{D, \max\{d[u] \mid u \in V\}\}$ 
end for
return  $D$ 
end function

```

Časovna zahtevnost algoritma je  $O(n(m + n))$ , kjer je  $n$  število vozlišč in  $m$  število

povezav podanega grafa.

### Naloga 5.8.

Sledili bomo naslednjemu algoritmu. Predpostavili bomo, da imamo na voljo podatkovno strukturo za prednostno vrsto, ki za vsak element hrani njegovo prioriteto (to lahko tudi spreminjamo). Podatkovna struktura ima metodo `pop()`, ki vrne in odstrani element z najmanjšo prioriteto skupaj z njegovo prioriteto. Tukaj bodo elementi vozlišča grafa, prioritete pa dolžine najkrajših najdenih poti od začetnega vozlišča.

```
function DIJKSTRA( $G = (V, E), s \in V, L : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ )  
   $d \leftarrow$  slovar z vrednostjo  $\infty$  za vsako vozlišče  $v \in V$   
   $pred \leftarrow$  slovar z vrednostjo NULL za vsako vozlišče  $v \in V$   
   $Q \leftarrow$  prednostna vrsta s prioriteto  $\infty$  za vsako vozlišče  $v \in V$  (na vrhu je vozlišče z najmanjšo prioriteto)  
   $Q[s] \leftarrow 0$   
  while  $\neg Q.isEmpty()$  do  
     $u, d[u] \leftarrow Q.pop()$   
    for  $v \in \text{ADJ}(G, u)$  do  
      if  $v \in Q \wedge Q[v] > d[u] + L_{uv}$  then  
         $Q[v] \leftarrow d[u] + L_{uv}$   
         $pred[v] \leftarrow u$   
      end if  
    end for  
  end while  
  return ( $d, pred$ )  
end function
```

Če za prednostno vrsto uporabimo običajen slovar, je časovna zahtevnost metode `pop()` linearna v številu elementov slovarja, spreminjanje vrednosti v slovarje pa se opravi v konstantnem času. Časovna zahtevnost zgornjega algoritma je tako  $O(n^2)$ , kjer je  $n$  število vozlišč v grafu.

Če pa za prednostno vrsto vzamemo kopico, sta časovni zahtevnosti metode `pop()` in spreminjanja vrednosti v kopici logaritemski v velikosti kopice. Časovna zahtevnost zgornjega algoritma je v tem primeru  $O((m+n) \log n)$ , kjer je  $m$  število povezav v grafu.

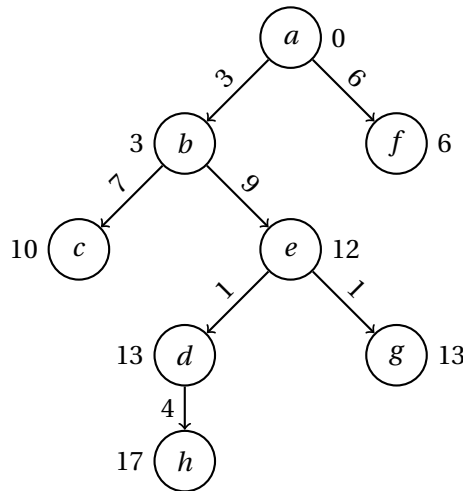
Potek zgornjega algoritma na grafu s slike 13, pri čemer sledimo abecednemu vrstnemu redu vozlišč, je prikazan v tabeli 16. Drevo najkrajših poti je prikazano na sliki 75.

### Naloga 5.9.

Trditev je napačna, saj z odštevanem konstantnega števila vsaki povezavi na grafu nekatere poti skrajšamo za več kot druge. Razlog za to je, da bo konstanta odšteta na vsaki povezavi, torej bodo poti, ki vsebujejo več povezav, prejele večjo olajšavo. Da bo to jasno, si pogledjmo primer, za katerega bomo našli dve različni drevesi najkrajših poti pri utežeh  $\ell$  in  $\ell'$ . Za primer vzemimo graf s slike 76. Vidimo, da je na začetnem grafu optimalna pot  $a \rightarrow b \rightarrow c$ , a ker vsebuje dve povezavi, se po prištevanju konstante 3 celotna pot podaljša za 6, pot  $a \rightarrow c$  pa se podaljša le za 3 in tako postane optimalna.

$u$	$v$	$Q$	razdalje in predhodniki
		$[(a, 0)]$	$[0, \infty, \infty, \infty, \infty, \infty, \infty, \infty]$
$a$	$b$	$[(b, 3)]$	$[0, 3_a, \infty, \infty, \infty, \infty, \infty, \infty]$
$a$	$f$	$[(b, 3), (f, 6)]$	$[0, 3_a, \infty, \infty, \infty, 6_a, \infty, \infty]$
$b$	$c$	$[(f, 6), (c, 10)]$	$[0, 3_a, 10_b, \infty, \infty, 6_a, \infty, \infty]$
$b$	$e$	$[(f, 6), (c, 10), (e, 12)]$	$[0, 3_a, 10_b, \infty, 12_b, 6_a, \infty, \infty]$
$f$	$g$	$[(c, 10), (e, 12), (g, 14)]$	$[0, 3_a, 10_b, \infty, 12_b, 6_a, 14_g, \infty]$
$c$	$d$	$[(e, 12), (g, 14), (d, 17)]$	$[0, 3_a, 10_b, 17_c, 12_b, 6_a, 14_g, \infty]$
$e$	$d$	$[(d, 13), (g, 14), (d, 17)]$	$[0, 3_a, 10_b, 13_e, 12_b, 6_a, 14_g, \infty]$
$e$	$g$	$[(g, 13), (d, 13), (g, 14), (d, 17)]$	$[0, 3_a, 10_b, 13_e, 12_b, 6_a, 13_e, \infty]$
$g$	$f$	$[(d, 13), (g, 14), (d, 17)]$	$[0, 3_a, 10_b, 13_e, 12_b, 6_a, 13_e, \infty]$
$d$	$b$	$[(g, 14), (d, 17)]$	$[0, 3_a, 10_b, 13_e, 12_b, 6_a, 13_e, \infty]$
$d$	$h$	$[(g, 14), (d, 17), (h, 17)]$	$[0, 3_a, 10_b, 13_e, 12_b, 6_a, 13_e, 17_d]$
$g$	$f$	$[(d, 17), (h, 17)]$	$[0, 3_a, 10_b, 13_e, 12_b, 6_a, 13_e, 17_d]$
$d$	$b$	$[(h, 17)]$	$[0, 3_a, 10_b, 13_e, 12_b, 6_a, 13_e, 17_d]$
$d$	$h$	$[(h, 17)]$	$[0, 3_a, 10_b, 13_e, 12_b, 6_a, 13_e, 17_d]$
$h$	$g$	$[\ ]$	$[0, 3_a, 10_b, 13_e, 12_b, 6_a, 13_e, 17_d]$

Tabela 16: Potek izvajanja algoritma za nalogo 5.8.



Slika 75: Drevo najkrajših poti za nalogo 5.8.

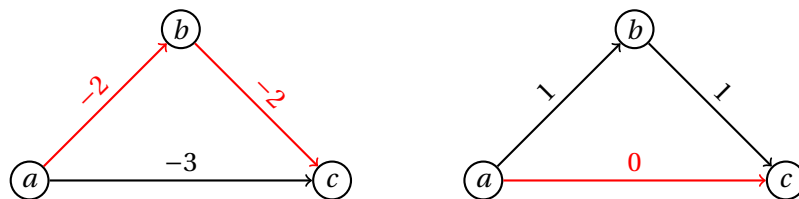
### Naloga 5.10.

- (a) Algoritem BFS iz naloge 5.6 bomo uporabili na pomožnem grafu s povezavami, dolgimi največ  $L$ . Preiskovanje bomo začeli v vozlišču  $t$ , tako da bomo s sledenjem predhodnikom iz vozlišča  $s$  rekonstruirali iskano pot.

**function** OBSTAJAPOT( $G = (V, E), s, t, \ell : E \rightarrow \mathbb{R}_+, L$ )

$E' \leftarrow \{e \in E \mid \ell_e \leq L\}$





Slika 76: Protiprimer trditve za nalogo 5.9.

```

 $G' \leftarrow (V, E')$ 
 $pred \leftarrow \text{BFS}(G', \{t\}, \text{NoOp})$ 
if  $s \neq t \wedge pred[s] = \text{NULL}$  then
    return NULL
end if
 $pot \leftarrow [s]$ 
 $u \leftarrow s$ 
while  $pred[u] \neq \text{NULL}$  do
     $u \leftarrow pred[u]$ 
     $pot.append(u)$ 
end while
return  $pot$ 
end function

```

Časovna zahtevnost algoritma je  $O(m + n)$ , kjer je  $n$  število vozlišč in  $m$  število povezav podanega grafa.

- (b) Uporabili bomo algoritem MINNAJDALJŠAPOVEZAVA. Gre za varianto algoritma DIJKSTRA iz naloge 5.8, ki namesto dolžine poti za vsako vozlišče hrani dolžino najdaljše povezave v poti do njega.

```

function MINNAJDALJŠAPOVEZAVA( $G = (V, E), s, t, \ell : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ )
     $Q \leftarrow$  prednostna vrsta s prioriteto  $\infty$  za vsako vozlišče  $v \in V$ 
     $Q[s] \leftarrow 0$ 
    while  $\neg Q.isEmpty()$  do
         $u, d \leftarrow Q.pop()$ 
        if  $u = t$  then
            return  $d$ 
        end if
        for  $v \in \text{Adj}(G, u)$  do
            if  $v \in Q \wedge Q[v] > \max\{d, \ell_{uv}\}$  then
                 $Q[v] \leftarrow \max\{d, \ell_{uv}\}$ 
            end if
        end for
    end while
    return  $\infty$ 
end function

```

Tako kot Dijkstrov algoritem tudi zgornji algoritem teče v času  $O(m \log n)$  (kjer je  $n$  število vozlišč in  $m$  število povezav podanega grafa – ob predpostavki, da je graf povezan), če za prednostno vrsto uporabimo kopico.

**Naloga 5.11.**

Zapišimo algoritem, ki poišče najkrajšo pot od  $s$  do  $t$ , pri čemer se preiskovanje začne v obeh koncih poti hkrati. Tako bomo v prednostno vrsto vsako vozlišče postavili dvakrat, preiskovanje pa bomo končali, ko bomo neko vozlišče drugič odstranili iz vrste. Iskana pot bo šla bodisi skozi to vozlišče, bodisi po povezavi med vozliščema, ki smo ju odstranili iz vrste po tem, ko sta bili doseženi iz različnih koncev iskane poti.

```

function DIJKSTRA2( $G = (V, E), s, t, L : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ )
   $Q \leftarrow$  prednostna vrsta s prioriteto  $\infty$  za  $(v, 0)$  in  $(v, 1)$  za vsako vozlišče  $v \in V$ 
   $d_0 \leftarrow$  prazen slovar
   $d_1 \leftarrow$  prazen slovar
   $pred_0 \leftarrow$  slovar z vrednostjo NULL za vsak  $v \in V$ 
   $pred_1 \leftarrow$  slovar z vrednostjo NULL za vsak  $v \in V$ 
   $Q[s, 0] \leftarrow 0$ 
   $Q[t, 1] \leftarrow 0$ 
   $(u, i), r \leftarrow Q.pop()$                                 vzamemo prvo vozlišče iz vrste
  while  $(u, 1 - i) \in Q$  do                                nadaljujemo, če je vozlišče še v vrsti
     $d_i[u] \leftarrow r$                                         zapomnimo si razdaljo
    for  $v \in \text{Adj}(G, u)$  do                                posodobimo razdalje sosedom
      if  $(v, i) \in Q \wedge Q[v, i] > d_i[u] + L_{uv}$  then
         $Q[v, i] \leftarrow d_i[u] + L_{uv}$ 
         $pred_i[v] \leftarrow u$ 
      end if
    end for
    if  $Q.isEmpty()$  then                                    če je vrsta prazna, ni poti od  $s$  do  $t$ 
      return  $(\infty, \text{NULL})$ 
    end if
     $(u, i), r \leftarrow Q.pop()$                                 vzamemo naslednje vozlišče
  end while
   $r, u \leftarrow \min(\{(r + d_{1-i}[u], u)\} \cup \{(d_i[v] + Q[v, 1 - i], v) \mid v \in d_i\})$  poiščemo vozlišče,
   $v \leftarrow u$                                               preko katerega poteka najkrajša pot
   $pot_0 \leftarrow [u]$ 
  while  $pred_0[u] \neq \text{NULL}$  do                                rekonstruiramo del poti od  $s$ 
     $u \leftarrow pred_0[u]$ 
     $pot_0.append(u)$ 
  end while
   $pot_0.reverse()$ 
   $pot_1 \leftarrow []$ 
  while  $pred_1[v] \neq \text{NULL}$  do                                rekonstruiramo del poti do  $t$ 
     $v \leftarrow pred_1[v]$ 
     $pot_1.append(v)$ 
  end while
  return  $(r, pot_0 + pot_1)$ 
end function

```

Pokažimo, da algoritem deluje pravilno. Naj bosta  $S$  in  $T$  množici vozlišč, ki jih algoritem ob izteku prve zanke **while** doseže iz  $s$  oziroma  $t$  (tj., odstrani ustrezni vnos v  $Q$ ) – do teh vozlišč torej poznamo dolžino najkrajše poti od  $s$  oziroma do  $t$ . V preseku množic  $S$  in  $T$  je natanko eno vozlišče, in sicer  $u$ . Za vsako vozlišče

$v \notin S \cup T$  velja  $d_G(s, v) \geq d_G(s, u)$  in  $d_G(v, t) \geq d_G(u, t)$ , tako da če najkrajša pot od  $s$  do  $t$  vsebuje vozlišče  $v$ , obstaja tudi najkrajša pot, ki vsebuje vozlišče  $u$ . Tako vidimo, da najkrajša pot med  $s$  in  $t$  bodisi vsebuje vozlišče  $u$ , bodisi vsebuje povezavo s krajiščema v  $S$  in  $T$ .

Če najkrajša pot med  $s$  in  $t$  bodisi vsebuje vozlišče  $u$ , potem algoritem očitno pravilno najde najkrajšo pot. Denimo sedaj, da najkrajša pot med  $s$  in  $t$  vsebuje povezavo  $vw$ , kjer je  $v \in S$  in  $w \in T$ . Očitno tudi najkrajši poti od  $s$  do  $w$  in od  $v$  do  $t$  vsebujeta povezavo  $vw$  (sicer bi obstajala krajša pot od  $s$  do  $t$  preko  $v$  ali  $w$ ), zato ob izteku prve zanke **while** velja  $d_G(s, w) = Q[w, 0]$  in  $d_G(v, t) = Q[v, 1]$ . Tako algoritem obravnava najkrajšo pot od  $s$  do  $t$  preko vozlišča  $v$  ali  $w$  in zato pravilno najde najkrajšo pot.

Tako kot Dijkstrov algoritem tudi zgornji algoritem teče v času  $O(m \log n)$  (kjer je  $n$  število vozlišč in  $m$  število povezav podanega grafa – ob predpostavki, da je graf povezan), če za prednostno vrsto uporabimo kopico.

### Naloga 5.12.

Sledili bomo naslednjemu algoritmu.

```

function DFS( $G = (V, E), S, \text{PREVISIT}, \text{POSTVISIT}$ )
  for  $v \in V$  do
     $\text{visited}[v] \leftarrow \text{FALSE}$ 
  end for
  function RAZIŠČI( $v, w$ )
    if  $\text{visited}[v]$  then
      return
    end if
     $\text{visited}[v] \leftarrow \text{TRUE}$ 
     $\text{PREVISIT}(v, w)$ 
    for  $u \in \text{ADJ}(G, v)$  do:
       $\text{RAZIŠČI}(u, v)$ 
    end for
     $\text{POSTVISIT}(v, w)$ 
  end function
  for  $v \in S$  do
     $\text{RAZIŠČI}(v, \text{NULL})$ 
  end for
end function

```

Časovna zahtevnost preiskovanja je  $O(m + n)$  (kjer je  $n$  število vozlišč in  $m$  število povezav grafa), poleg tega pa algoritem opravi še  $O(n)$  klicev funkcij  $\text{PREVISIT}$  in  $\text{POSTVISIT}$ .

Potek zgornjega algoritma na grafu s slike 12 (pri čemer za množico začetnih vozlišč  $S$  vzamemo množico vseh vozlišč  $V$ , za  $\text{PREVISIT}$  in  $\text{POSTVISIT}$  pa vzamemo  $\text{NOP}$ , torej ne naredimo ničesar), pri čemer sledimo abecednemu vrstnemu redu vozlišč, je prikazan v tabeli 17. Gozd iskanja v širino je prikazan na sliki 77, iz katere je razvidno, da so drevesne povezave

$(a, b), (b, c), (c, f), (f, e), (f, i), (d, g), (g, h)$ .

$v$	$u$	množica označenih vozlišč
$a$		$\{a\}$
$a$	$b$	$\{a, b\}$
$b$	$a$	$\{a, b\}$
$b$	$c$	$\{a, b, c\}$
$c$	$b$	$\{a, b, c\}$
$c$	$f$	$\{a, b, c, f\}$
$f$	$c$	$\{a, b, c, f\}$
$f$	$e$	$\{a, b, c, e, f\}$
$e$	$a$	$\{a, b, c, e, f\}$
$e$	$b$	$\{a, b, c, e, f\}$
$e$	$f$	$\{a, b, c, e, f\}$
$f$	$i$	$\{a, b, c, e, f, i\}$
$i$	$f$	$\{a, b, c, e, f, i\}$
$b$	$e$	$\{a, b, c, e, f, i\}$
$a$	$e$	$\{a, b, c, e, f, i\}$
$b$		$\{a, b, c, e, f, i\}$
$c$		$\{a, b, c, e, f, i\}$
$d$		$\{a, b, c, d, e, f, i\}$
$d$	$g$	$\{a, b, c, d, e, f, g, i\}$
$g$	$d$	$\{a, b, c, d, e, f, g, i\}$
$g$	$h$	$\{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$
$h$	$d$	$\{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$
$h$	$g$	$\{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$
$d$	$h$	$\{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$

Tabela 17: Potek izvajanja algoritma za nalogo 5.12.

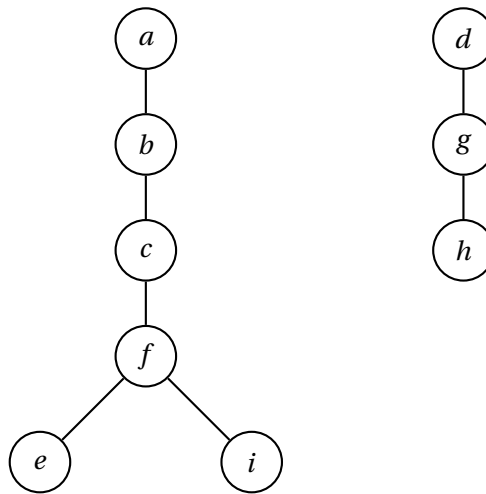
### Naloga 5.13.

Sledili bomo naslednjemu algoritmu.

```

function BELLMANFORD( $G = (V, E), s \in V, L: E \rightarrow \mathbb{R}$ )
   $d \leftarrow$  slovar z vrednostjo  $\infty$  za vsako vozlišče  $v \in V$ 
   $pred \leftarrow$  slovar z vrednostjo NULL za vsako vozlišče  $v \in V$ 
   $d[s] \leftarrow 0$ 
   $i \leftarrow 0$ 
   $B \leftarrow \text{TRUE}$ 
  while  $B$  do
     $i \leftarrow i + 1$ 
    if  $i > |V|$  then
      return graf ima negativen cikel
    end if
     $B \leftarrow \text{FALSE}$ 
    for  $uv \in E$  do

```



Slika 77: Gozd iskanja v globino za nalogo 5.12.

```

if  $d[v] > d[u] + L_{uv}$  then
     $d[v] \leftarrow d[u] + L_{uv}$ 
     $pred[v] \leftarrow u$ 
     $B \leftarrow \text{TRUE}$ 
end if
end for
end while
return  $(d, pred)$ 
end function

```

V  $i$ -tem obhodu zanke **while** slovar  $d$  vsebuje dolžine tistih najkrajših poti od  $s$  do vsakega drugega vozlišča, ki vsebujejo največ  $i$  povezav. Če graf nima negativnih ciklov, je v vsaki najkrajši poti največ  $n - 1$  povezav (kjer je  $n$  število vozlišč) in zato algoritem konča najkasneje po  $n$ -tem obhodu zanke **while**. V nasprotnem primeru obstaja najkrajša pot z neskončno povezavami, kar algoritem zazna ob vstopu v  $(n + 1)$ -vi obhod zanke. Časovna zahtevnost algoritma je tako  $O(mn)$ , kjer je  $m$  število povezav grafa.

Potek zgornjega algoritma na grafu s slike 14 je prikazan v tabeli 18. Drevo najkrajših poti je prikazano na sliki 78.

#### Naloga 5.14.

- (a) Upoštevamo, da je graf  $G = (V, E)$  acikličen, torej za vsaki vozlišči  $u, v \in V$  velja

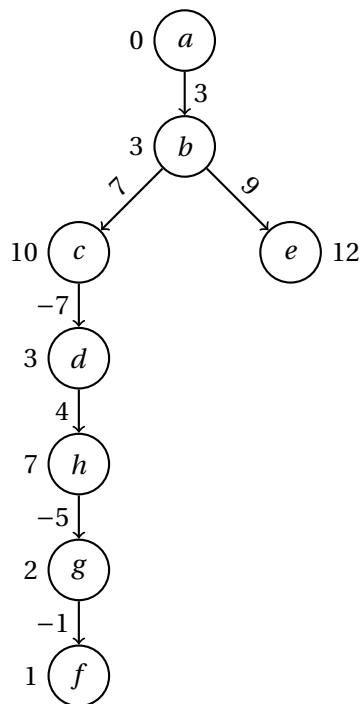
$$u \rightarrow v \implies postlabel(u) > postlabel(v),$$

kjer je  $postlabel$  števec, s katerim označimo vozlišče, ko ga v algoritmu DFS docela preiščemo.

Trditev lahko dokažemo z obravnavanjem dveh primerov, in sicer, ko z DFS pridemo v vozlišče  $u$  pred  $v$ , in ko pridemo v vozlišče  $v$  pred  $u$ . V prvem

$i$	$B$	$u$	$v$	$L_{uv}$	razdalje in predhodniki
	TRUE				$[0, \infty, \infty, \infty, \infty, \infty, \infty, \infty]$
1	TRUE	$a$	$b$	3	$[0, 3_a, \infty, \infty, \infty, \infty, \infty, \infty]$
1	TRUE	$a$	$f$	6	$[0, 3_a, \infty, \infty, \infty, 6_a, \infty, \infty]$
1	TRUE	$b$	$c$	7	$[0, 3_a, 10_b, \infty, \infty, 6_a, \infty, \infty]$
1	TRUE	$b$	$e$	9	$[0, 3_a, 10_b, \infty, 12_b, 6_a, \infty, \infty]$
1	TRUE	$c$	$d$	-7	$[0, 3_a, 10_b, 3_c, 12_b, 6_a, \infty, \infty]$
1	TRUE	$d$	$b$	9	$[0, 3_a, 10_b, 3_c, 12_b, 6_a, \infty, \infty]$
1	TRUE	$d$	$h$	4	$[0, 3_a, 10_b, 3_c, 12_b, 6_a, \infty, 7_d]$
1	TRUE	$e$	$d$	1	$[0, 3_a, 10_b, 3_c, 12_b, 6_a, \infty, 7_d]$
1	TRUE	$e$	$g$	1	$[0, 3_a, 10_b, 3_c, 12_b, 6_a, 13_e, 7_d]$
1	TRUE	$f$	$g$	8	$[0, 3_a, 10_b, 3_c, 12_b, 6_a, 13_e, 7_d]$
1	TRUE	$g$	$f$	-1	$[0, 3_a, 10_b, 3_c, 12_b, 6_a, 13_e, 7_d]$
1	TRUE	$h$	$g$	-5	$[0, 3_a, 10_b, 3_c, 12_b, 6_a, 2_h, 7_d]$
2	FALSE	$a$	$b$	3	$[0, 3_a, 10_b, 3_c, 12_b, 6_a, 2_h, 7_d]$
2	FALSE	$a$	$f$	6	$[0, 3_a, 10_b, 3_c, 12_b, 6_a, 2_h, 7_d]$
2	FALSE	$b$	$c$	7	$[0, 3_a, 10_b, 3_c, 12_b, 6_a, 2_h, 7_d]$
2	FALSE	$b$	$e$	9	$[0, 3_a, 10_b, 3_c, 12_b, 6_a, 2_h, 7_d]$
2	FALSE	$c$	$d$	-7	$[0, 3_a, 10_b, 3_c, 12_b, 6_a, 2_h, 7_d]$
2	FALSE	$d$	$b$	9	$[0, 3_a, 10_b, 3_c, 12_b, 6_a, 2_h, 7_d]$
2	FALSE	$d$	$h$	4	$[0, 3_a, 10_b, 3_c, 12_b, 6_a, 2_h, 7_d]$
2	FALSE	$e$	$d$	1	$[0, 3_a, 10_b, 3_c, 12_b, 6_a, 2_h, 7_d]$
2	FALSE	$e$	$g$	1	$[0, 3_a, 10_b, 3_c, 12_b, 6_a, 2_h, 7_d]$
2	FALSE	$f$	$g$	8	$[0, 3_a, 10_b, 3_c, 12_b, 6_a, 2_h, 7_d]$
2	TRUE	$g$	$f$	-1	$[0, 3_a, 10_b, 3_c, 12_b, 1_g, 2_h, 7_d]$
2	TRUE	$h$	$g$	-5	$[0, 3_a, 10_b, 3_c, 12_b, 1_g, 2_h, 7_d]$
3	FALSE	$a$	$b$	3	$[0, 3_a, 10_b, 3_c, 12_b, 1_g, 2_h, 7_d]$
3	FALSE	$a$	$f$	6	$[0, 3_a, 10_b, 3_c, 12_b, 1_g, 2_h, 7_d]$
3	FALSE	$b$	$c$	7	$[0, 3_a, 10_b, 3_c, 12_b, 1_g, 2_h, 7_d]$
3	FALSE	$b$	$e$	9	$[0, 3_a, 10_b, 3_c, 12_b, 1_g, 2_h, 7_d]$
3	FALSE	$c$	$d$	-7	$[0, 3_a, 10_b, 3_c, 12_b, 1_g, 2_h, 7_d]$
3	FALSE	$d$	$b$	9	$[0, 3_a, 10_b, 3_c, 12_b, 1_g, 2_h, 7_d]$
3	FALSE	$d$	$h$	4	$[0, 3_a, 10_b, 3_c, 12_b, 1_g, 2_h, 7_d]$
3	FALSE	$e$	$d$	1	$[0, 3_a, 10_b, 3_c, 12_b, 1_g, 2_h, 7_d]$
3	FALSE	$e$	$g$	1	$[0, 3_a, 10_b, 3_c, 12_b, 1_g, 2_h, 7_d]$
3	FALSE	$f$	$g$	8	$[0, 3_a, 10_b, 3_c, 12_b, 1_g, 2_h, 7_d]$
3	FALSE	$g$	$f$	-1	$[0, 3_a, 10_b, 3_c, 12_b, 1_g, 2_h, 7_d]$
3	FALSE	$h$	$g$	-5	$[0, 3_a, 10_b, 3_c, 12_b, 1_g, 2_h, 7_d]$

Tabela 18: Potek izvajanja algoritma za nalogo 5.13.



Slika 78: Drevo najkrajših poti za nalogo 5.13.

primeru bomo pred določitvijo pooznake vozlišču  $u$  morali obiskati vse njegove sosesede, torej tudi  $v$ , ki mu bomo določili pooznako pred  $u$ . V drugem primeru pridemo prej do  $v$ , a ker je graf acikličen, od  $v$  ne bomo prišli do  $u$ , torej bomo spet  $v$  obdelali prej.

Trditev nam omogoča zapis krajšega algoritma, ki bo uporabil algoritem DFS iz naloge 5.12. Njegova ideja je, da padajoče uredimo vozlišča po njihovih poznakah in tako dobimo inverzno topološko ureditev. To dosežemo tako, da po popolni obdelavi vozlišča tega postavimo na sklad.

```

function TOPO( $G = (V, E)$ )
     $toposklad \leftarrow []$ 
    function POSTVISIT( $u, v$ )
         $toposklad.append(u)$ 
    end function
    DFS( $G, V, \text{NOP}, \text{POSTVISIT}$ )
     $toposklad.reverse()$ 
    return  $toposklad$ 
end function

```

Časovna zahtevnost algoritma je  $O(m + n)$ , kjer je  $n$  število vozlišč in  $m$  število povezav grafa.

Klic  $\text{TOPO}(G)$  nam vrne ureditev vozlišč  $[g, a, h, b, c, f, d, e]$ .

- (b) Tukaj bomo uporabili rezultat iz prejšnje točke in osnoven koncept dinamič-

nega programiranja.

Označimo z  $L_{uv}$  utež povezave  $u \rightarrow v$ . Naj  $d_G(u)$  predstavlja najkrajšo razdaljo od izbranega vozlišča  $s$  do vozlišča  $u$ .

$$\begin{aligned} d_G(s) &= 0 \\ d_G(u) &= \min_{v \rightarrow u} (d_G(v) + L_{vu}) \quad (u \in V \setminus \{s\}) \end{aligned}$$

Da bomo imeli vse potrebne  $d_G(v)$  definirane pred izračunom  $d_G(u)$ , poskrbimo z rezultatom iz prejšnje točke, saj pri topološki ureditvi vodijo vse povezave le naprej. Po premiku na naslednje vozlišče tako ne potrebujemo kasnejših vozlišč, pač pa le prejšnja, za katera vrednost že poznamo.

Imamo torej vse, kar potrebujemo za izračun najkrajše poti. Za beleženje vozlišč, skozi katera vodi ta pot, bomo uporabili seznam predhodnikov, ki bo nakazoval, katero vozlišče smo izbrali za predhodnika.

$$\begin{aligned} \text{pred}(s) &= \text{NULL} \\ \text{pred}(u) &= \underset{v \rightarrow u}{\text{argmin}} (d_G(v) + L_{vu}) \quad (u \in V \setminus \{s\}) \end{aligned}$$

Zapišimo algoritem, ki poišče razdalje od  $s$  do ostalih vozlišč. Poleg razdalj bo za vsako vozlišče povedal še, iz katerega vozlišča smo prišli do njega.

```
function NAJKRAJŠAPOT( $G = (V, E), s, L : E \rightarrow \mathbb{R}$ )
   $d_G \leftarrow$  slovar z vrednostjo  $\infty$  za vsako vozlišče  $v \in V$ 
   $d_G[s] \leftarrow 0$ 
   $\text{pred} \leftarrow$  slovar z vrednostjo NULL za vsako vozlišče  $v \in V$ 
  for  $u \in \text{TOPO}(G)$  do
    for  $v \in \text{ADJ}(G, u)$  do
      if  $d_G[v] > d_G[u] + L_{uv}$  then
         $d_G[v] \leftarrow d_G[u] + L_{uv}$ 
         $\text{pred}[v] \leftarrow u$ 
      end if
    end for
  end for
  return ( $d_G, \text{pred}$ )
end function
```

Časovna zahtevnost algoritma je  $O(m + n)$ , kjer je  $n$  število vozlišč in  $m$  število povezav grafa.

Če želimo rekonstruirati pot, sledimo predhodnikom podanega končnega vozlišča  $t$ , dokler ne pridemo do  $s$ .

```
function REKONSTRUIRAJPOT( $d_G, \text{pred}, t$ )
   $u \leftarrow t$ 
   $\text{pot} \leftarrow [t]$ 
  while  $\text{pred}[u] \neq \text{NULL}$  do
     $u \leftarrow \text{pred}[u]$ 
     $\text{pot.append}(u)$ 
  end while
```



$u$	$v$	$d_G$														$pred[v]$
		$d_G(v)$	$>$	$d_G(u)$	$+$	$L_{uv}$	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$g$	$h$		
$g$	$a$	$\infty$	$>$	$0$	$+$	$(-1)$	$-1$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$0$	$\infty$	$g$	
$g$	$d$	$\infty$	$>$	$0$	$+$	$6$	$-1$	$\infty$	$\infty$	$6$	$\infty$	$\infty$	$0$	$\infty$	$g$	
$g$	$f$	$\infty$	$>$	$0$	$+$	$6$	$-1$	$\infty$	$\infty$	$6$	$\infty$	$6$	$0$	$\infty$	$g$	
$g$	$h$	$\infty$	$>$	$0$	$+$	$6$	$-1$	$\infty$	$\infty$	$6$	$\infty$	$6$	$0$	$6$	$g$	
$a$	$b$	$\infty$	$>$	$-1$	$+$	$2$	$-1$	$1$	$\infty$	$6$	$\infty$	$6$	$0$	$6$	$a$	
$a$	$c$	$\infty$	$>$	$-1$	$+$	$(-2)$	$-1$	$1$	$-3$	$6$	$\infty$	$6$	$0$	$6$	$a$	
$a$	$h$	$6$	$>$	$-1$	$+$	$0$	$-1$	$1$	$-3$	$6$	$\infty$	$6$	$0$	$-1$	$a$	
$h$	$b$	$1$	$>$	$-1$	$+$	$3$	$-1$	$1$	$-3$	$6$	$\infty$	$6$	$0$	$-1$	$a$	
$h$	$f$	$6$	$>$	$-1$	$+$	$6$	$-1$	$1$	$-3$	$6$	$\infty$	$5$	$0$	$-1$	$h$	
$b$	$c$	$-3$	$>$	$1$	$+$	$6$	$-1$	$1$	$-3$	$6$	$\infty$	$5$	$0$	$-1$	$a$	
$b$	$e$	$\infty$	$>$	$1$	$+$	$(-2)$	$-1$	$1$	$-3$	$6$	$-1$	$5$	$0$	$-1$	$b$	
$c$	$d$	$6$	$>$	$-3$	$+$	$2$	$-1$	$1$	$-3$	$-1$	$-1$	$5$	$0$	$-1$	$c$	
$c$	$f$	$5$	$>$	$-3$	$+$	$6$	$-1$	$1$	$-3$	$-1$	$-1$	$3$	$0$	$-1$	$c$	
$d$	$e$	$-1$	$>$	$-1$	$+$	$7$	$-1$	$1$	$-3$	$-1$	$-1$	$3$	$0$	$-1$	$b$	

Tabela 19: Potek izvajanja algoritma NAJKRAJŠAPOT za nalogo 5.14(b).

```

    pot.reverse()
    return pot
end function

```

Klic  $\text{NAJKRAJŠAPOT}(G, g, L)$  vrne seznam  $d_G$  z razdaljami od vozlišča  $g$  do ostalih vozlišč grafa in seznam  $pred$  s prednikom vsakega vozlišča v najkrajši poti od  $g$ . Potek izvajanja algoritma je prikazan v tabeli 19. Klic  $\text{REKONSTRUIRAJPOT}(d_G, pred, e)$  nato vrne seznam vozlišč, skozi katera je algoritem potoval, da je opravil pot od  $g$  do  $e$  – to so  $[g, a, b, e]$ . Dolžino te poti lahko preberemo kot  $d_G[e] = -1$ .

Pripomnimo, da algoritem deluje pravilno ne glede na položaj začetnega vozlišča  $s$  v topološki ureditvi. Za vsako vozlišče  $u$ , ki v topološki ureditvi nastopa pred  $s$ , namreč velja  $d_G(u) = \infty$ , tako da se ne nastavi kot predhodnik nobenemu vozlišču. Tako se vozlišču  $s$  ne bo nastavil predhodnik. Algoritem lahko nekoliko pohitimo tako, da gledamo vozlišča v topološki ureditvi le od  $s$  naprej, prejšnja pa ignoriramo, saj iz  $s$  ne moremo priti do njih. Prav tako bi se lahko ustavili, ko dosežemo vozlišče  $t$ .

- (c) Uporabimo algoritem NAJDALJŠAPOT, ki deluje na enak način kot NAJKRAJŠAPOT, le da namesto  $\infty$  vzame v  $d_G$  za začetne vrednosti  $-\infty$ , v zanki pa na vsakem koraku preverja pogoj  $d_G[v] < d_G[u] + L_{uv}$ . Časovna zahtevnost algoritma tako ostane enaka. Klic  $\text{REKONSTRUIRAJPOT}(d_G, pred, e)$ , kjer je  $d_G, pred$  izhod klica  $\text{NAJDALJŠAPOT}(G, g, L)$ , vrne pot  $[g, h, b, c, d, e]$  dolžine 24. Potek izvajanja algoritma je prikazan v tabeli 20.

$u$	$v$	$d_G(v)$	$<$	$d_G(u)$	$+$	$L_{uv}$	$d_G$								$pred[v]$
							$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$g$	$h$	
$g$	$a$	$-\infty$	$<$	$0$	$+$	$(-1)$	$-1$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$0$	$-\infty$	$g$
$g$	$d$	$-\infty$	$<$	$0$	$+$	$6$	$-1$	$-\infty$	$-\infty$	$6$	$-\infty$	$-\infty$	$0$	$-\infty$	$g$
$g$	$f$	$-\infty$	$<$	$0$	$+$	$6$	$-1$	$-\infty$	$-\infty$	$6$	$-\infty$	$6$	$0$	$-\infty$	$g$
$g$	$h$	$-\infty$	$<$	$0$	$+$	$6$	$-1$	$-\infty$	$-\infty$	$6$	$-\infty$	$6$	$0$	$6$	$g$
$a$	$b$	$-\infty$	$<$	$-1$	$+$	$2$	$-1$	$1$	$-\infty$	$6$	$-\infty$	$6$	$0$	$6$	$a$
$a$	$c$	$-\infty$	$<$	$-1$	$+$	$(-2)$	$-1$	$1$	$-3$	$6$	$-\infty$	$6$	$0$	$6$	$a$
$a$	$h$	$6$	$<$	$-1$	$+$	$0$	$-1$	$1$	$-3$	$6$	$-\infty$	$6$	$0$	$6$	$g$
$h$	$b$	$1$	$<$	$6$	$+$	$3$	$-1$	$9$	$-3$	$6$	$-\infty$	$6$	$0$	$6$	$h$
$h$	$f$	$6$	$<$	$6$	$+$	$6$	$-1$	$9$	$-3$	$6$	$-\infty$	$12$	$0$	$6$	$h$
$b$	$c$	$-3$	$<$	$9$	$+$	$6$	$-1$	$9$	$15$	$6$	$-\infty$	$12$	$0$	$6$	$b$
$b$	$e$	$-\infty$	$<$	$9$	$+$	$(-2)$	$-1$	$9$	$15$	$6$	$7$	$12$	$0$	$6$	$b$
$c$	$d$	$6$	$<$	$15$	$+$	$2$	$-1$	$9$	$15$	$17$	$7$	$12$	$0$	$6$	$c$
$c$	$f$	$12$	$<$	$15$	$+$	$6$	$-1$	$9$	$15$	$17$	$7$	$21$	$0$	$6$	$c$
$d$	$e$	$7$	$<$	$17$	$+$	$7$	$-1$	$9$	$15$	$17$	$24$	$21$	$0$	$6$	$d$

Tabela 20: Potek izvajanja algoritma NAJDALJŠAPOT za nalogo 5.14(c).

### Naloga 5.15.

- (a) Algoritem deluje podobno kot algoritem NAJKRAJŠAPOT iz naloge 5.14(b), le da vsakič prišteje število možnih poti iz trenutnega vozlišča. Pri tem sledi topološki ureditvi, ki jo izračuna z algoritmom TOPO iz naloge 5.14(a).

**function** ŠTEVILOPOTI( $G = (V, E), s, t, L : E \rightarrow \mathbb{R}$ )

$C \leftarrow$  slovar z vrednostjo 0 za vsako vozlišče  $v \in V$

$C[s] \leftarrow 1$

**for**  $u \in \text{TOPO}(G)$  **do**

**for**  $v \in \text{ADJ}(G, u)$  **do**

$C[v] \leftarrow C[v] + C[u] \cdot L_{uv}$

**end for**

**end for**

**return**  $C[t]$

**end function**

Časovna zahtevnost algoritma je  $O(m + n)$ , kjer je  $n$  število vozlišč in  $m$  število povezav grafa.

- (b) Potek izvajanja algoritma na grafu s slike 16 je prikazan v tabeli 21. Pri tem je uporabljena topološka ureditev vozlišč  $[s, a, b, d, c, e, f, g, t]$ . Od vozlišča  $s$  do vozlišča  $t$  je mogoče priti na 58000 načinov.

### Naloga 5.16.

### Naloga 5.17.

$u$	$v$	$L_{uv}$	$C[s, a, b, c, d, e, f, g, t]$
			[1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
$s$	$a$	10	[1, 10, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
$s$	$b$	10	[1, 10, 10, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
$s$	$c$	10	[1, 10, 10, 10, 0, 0, 0, 0, 0]
$s$	$d$	10	[1, 10, 10, 10, 10, 0, 0, 0, 0]
$a$	$b$	5	[1, 10, 60, 10, 10, 0, 0, 0, 0]
$a$	$e$	5	[1, 10, 60, 10, 10, 50, 0, 0, 0]
$b$	$e$	2	[1, 10, 60, 10, 10, 170, 0, 0, 0]
$d$	$c$	5	[1, 10, 60, 60, 10, 170, 0, 0, 0]
$c$	$f$	2	[1, 10, 60, 60, 10, 170, 120, 0, 0]
$e$	$g$	10	[1, 10, 60, 60, 10, 170, 120, 1700, 0]
$f$	$g$	10	[1, 10, 60, 60, 10, 170, 120, 2900, 0]
$g$	$t$	10	[1, 10, 60, 60, 10, 170, 120, 2900, 58000]

Tabela 21: Potek izvajanja algoritma za nalogo 5.15.

#### Naloga 5.18.

- (a) Iz danega neusmerjenega grafa  $G = (V, E)$  in funkcije uteži vozlišč  $c : V \rightarrow [0, 1]$  bomo konstruirali usmerjen graf  $G' = (V, E')$ , kjer je  $E' = \{uv, vu \mid uv \in E\}$  (tj., vsako neusmerjeno povezavo iz  $G$  nadomestimo z nasprotno usmerjenima povezavama med krajiščema), in funkcijo uteži povezav  $L : E' \rightarrow [0, 1]$  s predpisom  $L(uv) = c(u)$  (tj., cena povezave je enaka ceni začetnega vozlišča v  $G$ ). Na grafu  $G'$  s funkcijo uteži povezav  $L$  nato poženemo varianto algoritma DIJKSTRA iz naloge 5.8.

```

function DIJKSTRAPROB( $G = (V, E), s \in V, L : E \rightarrow [0, 1]$ )
   $d \leftarrow$  slovar z vrednostjo 0 za vsako vozlišče  $v \in V$ 
   $pred \leftarrow$  slovar z vrednostjo NULL za vsako vozlišče  $v \in V$ 
   $Q \leftarrow$  prednostna vrsta s prioriteto 0 za vsako vozlišče  $v \in V$  (na vrhu je vozlišče
  z največjo prioriteto)
   $Q[s] \leftarrow 1$ 
  while  $\neg Q.isEmpty()$  do
     $u, d[u] \leftarrow Q.pop()$ 
    for  $v \in \text{ADJ}(G, u)$  do
      if  $v \in Q \wedge Q[v] < d[u] \cdot L_{uv}$  then
         $Q[v] \leftarrow d[u] \cdot L_{uv}$ 
         $pred[v] \leftarrow u$ 
      end if
    end for
  end while
  return ( $d, pred$ )
end function

```

V primerjavi z algoritmom DIJKSTRA smo torej zamenjali seštevanje z množenjem in obrnili primerjave, poleg tega pa smo še ustrezno spremenili začetne

LA	SF	PH	LV	RE	EP	AQ	DE	SLC	DA	OC	KC	OM	ME	SL	CH
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
*	1 <sub>LA</sub>	1 <sub>LA</sub>	1 <sub>LA</sub>												
	*			1 <sub>SF</sub>											
		*			0.8 <sub>PH</sub>	0.8 <sub>PH</sub>									
			*				0.5 <sub>LV</sub>	0.5 <sub>LV</sub>							
				*				0.7 <sub>RE</sub>							
					*				0.48 <sub>EP</sub>						
						*		0.56 <sub>AQ</sub>		0.56 <sub>AQ</sub>					
							0.63 <sub>SLC</sub>	*							
							*				0.504 <sub>DE</sub>	0.504 <sub>DE</sub>			
										*					
											*				
													0.336 <sub>OC</sub>		
														0.3528 <sub>KC</sub>	
									*						0.2016 <sub>OM</sub>
													0.384 <sub>DA</sub>		
													*		
														*	0.31752 <sub>SL</sub>
															*

Tabela 22: Potek izvajanja algoritma za nalogo 5.18(b).

vrednosti. Preslikava  $x \mapsto -\log x$  pošlje uteži na interval  $[0, \infty]$ , pri čemer se urejenost obrne, množenje se pa nadomesti s seštevanjem – zgornji algoritem je torej ekvivalenten algoritmu DIJKSTRA s tako preslikanimi utežmi, in ima tako isto časovno zahtevnost (tj.,  $O(n^2)$ , če za prednostno vrsto uporabimo običajen slovar, in  $O(m \log n)$ , če za prednostno vrsto vzamemo kopico, kjer je  $n$  število vozlišč in  $m$  število povezav v grafu).

- (b) Potek izvajanja zgornjega algoritma je prikazan v tabeli 22, iz katere razberemo, da je najvarnejša pot LA – SF – RE – SLC – DE – KC – SL – CH, z verjetnostjo, da nas ne oropajo, enako 0.31752.

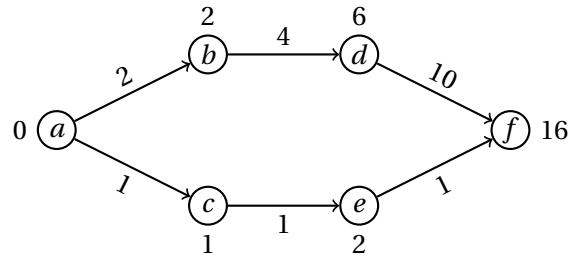
### Naloga 5.19.

Ideja algoritma je tesno povezana z algoritmom DIJKSTRA iz naloge 5.8. Če so vse vhodne razdalje pravilne, lahko predpostavimo, da so bile poiskane z Dijkstrovim algoritmom. Če torej sledimo poti, ki jo ta opravi, bomo lahko preverili prav vse nastavljene razdalje  $\delta_v$ .

```

function RAZDALJE( $G = (V, E)$ ,  $s \in V$ ,  $L: E \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $(\delta_v)_{v \in V}$ )
  if  $\delta_s \neq 0$  then
    return FALSE
  end if
   $doseženi \leftarrow$  slovar z vrednostjo FALSE za vsak  $v \in V$ 
   $\ell \leftarrow [s]$ 
  while  $\neg \ell.isEmpty()$  do
     $u \leftarrow \ell.pop()$ 
     $doseženi[u] \leftarrow \text{TRUE}$ 
    for  $v \in \text{ADJ}(G, u)$  do

```



Slika 79: Primer grafa za nalogo 5.19.

```

if  $\delta_u + L_{uv} = \delta_v$  then
  if  $\neg \text{doseženi}[v]$  then
     $\ell.\text{append}(v)$ 
  end if
else if  $\delta_u + L_{uv} < \delta_v$  then
  return FALSE
end if
end for
end while
return  $\forall v \in V : \text{doseženi}[v]$ 
end function

```

V primeru, ko vrednosti  $\delta_v$  ustrezajo razdaljam od  $s$ , bo algoritem deloval pravilno, kar sledi iz pravilnosti Dijkstrovega algoritma in predpostavke, da so vsa vozlišča dosegljiva iz  $s$ .

Če bo za neko vozlišče  $v$  vrednost  $\delta_v$  manjša od razdalje  $d_G(s, v)$ , potem algoritem vozlišča  $v$  ne bo označil. Če pa je vrednost  $\delta_v$  večja od razdalje  $d_G(s, v)$ , algoritem morda lahko označi vozlišče  $v$ , a se to lahko zgodi le, če pridemo do njega z manj kot optimalno potjo – to vozlišče je torej dosegljivo še iz vsaj ene druge poti. Predpostavimo, da je  $t$  najvišje vozlišče v drevesu najkrajših poti, ki ga algoritem označi, čeprav velja  $\delta_t > d_G(s, t)$ , in naj bo  $r$  njegov predhodnik v drevesu. Ker velja  $\delta_r = d_G(s, r)$ , bo algoritem pri pregledovanju sosedov vozlišča  $r$  ugotovil, da velja  $\delta_r + L_{rt} < \delta_t$ , in torej vrnil FALSE.

Algoritem pregleda vsako vozlišče največ enkrat in pri vsakem njegovem sosedu porabi konstantno časa. Časovno zahtevnost lahko torej izračunamo kot

$$\sum_{v \in V} (O(1) + \deg_G(u) \cdot O(1)) = O(|V|) + O(|E|) = O(|V| + |E|).$$

Poglejmo si, kako algoritem deluje na grafu  $G = (V, E)$  s slike 79, pri čemer vzamemo  $\delta_v = d_G(a, v)$  za vsak  $v \in V \setminus \{f\}$  in  $\delta_f = 16$ . Izvajanje algoritma z začetnim vozliščem  $a$  je prikazano v tabeli 23. Na zadnjem koraku so vsa vozlišča označena, a velja  $d_u + L_{uv} < \delta_v$ , tako da algoritem vrne FALSE.

**Naloga 5.20.**

$u$	$v$	$\delta_u$	$\delta_v$	$L_{uv}$	$dosežen[v]$
$a$	$b$	0	2	2	FALSE
$a$	$c$	0	1	1	FALSE
$b$	$d$	2	6	4	FALSE
$c$	$e$	1	2	1	FALSE
$d$	$f$	6	16	10	FALSE
$e$	$f$	2	16	1	TRUE

Tabela 23: Potek izvajanja algoritma na primeru s slike 79 za nalogo 5.19.

**Naloga 5.21.**

**Naloga 5.22.**

- (a) Topološko ureditev dobimo z uporabo algoritma TOPO iz naloge 5.14(a). Dobimo  $[s, b, a, d, h, e, c, f, i, g, t]$ . Graf v tej ureditvi si lahko ogledamo na sliki 80.
- (b) Najkrajšo pot od vozlišča  $s$  do vozlišča  $t$  lahko izračunamo z algoritmom NAJKRAJŠAPOT iz naloge 5.14(b). Ta nam vrne pot  $s - a - d - h - i - t$  dolžine 11. Delovanje algoritma si lahko ogledamo v tabeli 24.
- (c) Ker se algoritem odloča neodvisno od svojih prejšnjih odločitev, so vsi dogodki neodvisni. Verjetnost, da pridemo do vozlišča  $v$ , bo vsota verjetnosti vseh dogodkov potovanja po (različnih) poteh, ki se končajo v  $v$ . Verjetnost potovanja po določeni poti pa bo produkt verjetnosti potovanja po vsaki vsebujoči povezavi. Za verjetnosti  $q_v$  v usmerjenem acikličnem grafu torej velja zveza

$$q_v = \sum_{u \rightarrow v} p_{uv} q_u$$

$$q_s = 1.$$

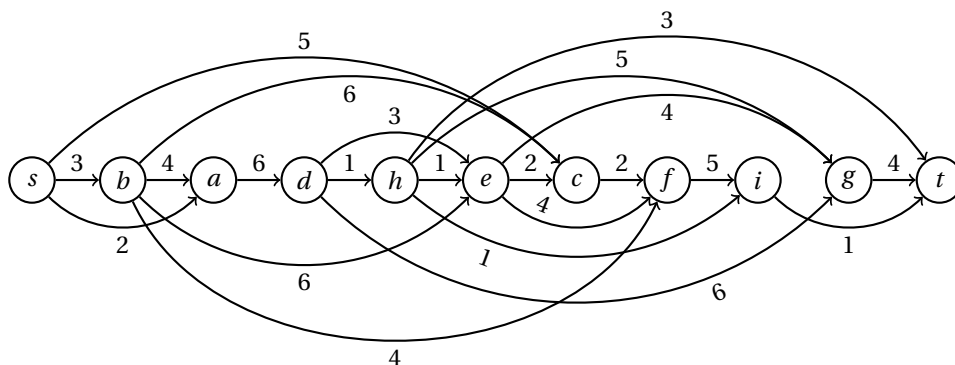
Vrednosti  $q_v$  bomo iskali po topološkem vrstnem redu.

```

function DAGVERJETNOSTI( $G = (V, E), s, \ell : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ )
   $q \leftarrow$  slovar z vrednostjo 0 za vsako vozlišče  $v \in V$ 
   $q[s] \leftarrow 1$ 
  for  $u \in \text{TOPO}(G)$  do
     $p \leftarrow \sum_{w \in \text{ADJ}_G(u)} \ell_{uw}$ 
    for  $v \in \text{ADJ}_G(u)$  do
       $q[v] \leftarrow q[v] + q[u] \ell_{uv} / p$ 
    end for
  end for
  return  $q$ 
end function

```

Časovna zahtevnost algoritma je  $O(m)$ , saj gremo po vsaki povezavi preko vsakega vozlišča enkrat, pri čemer pa moramo seveda poskrbeti, da vsote v



Slika 80: Predstavitev topološko urejenega grafa za nalogo 5.22(a).

$u$	$v$	$pred[v]$	$d_G[v]$
$s$	$a$	$s$	2
$s$	$b$	$s$	3
$s$	$c$	$s$	5
$b$	$a$	$s$	2
$b$	$c$	$s$	5
$b$	$e$	$b$	9
$b$	$f$	$b$	7
$a$	$d$	$a$	8
$d$	$e$	$b$	9
$d$	$g$	$d$	14
$d$	$h$	$d$	9
$h$	$e$	$b$	9
$h$	$g$	$d$	14
$h$	$i$	$h$	10
$h$	$t$	$h$	12
$e$	$c$	$s$	5
$e$	$f$	$b$	7
$e$	$g$	$e$	13
$g$	$t$	$h$	12
$c$	$f$	$b$	7
$f$	$i$	$h$	10
$i$	$t$	$i$	11

Tabela 24: Potek izvajanja algoritma NAJKRAJŠAPOT za nalogo 5.22(b).

števcu definicije vrednosti  $p_{uv}$  ne računamo vsakič sproti, pač pa to storimo pred posodabljanjem verjetnosti sosedom vozlišča  $u$ .

$u$	$v$	$Q$	BX	AM	BL	PR	BS	PA	LU	BN	WI	BU	MO	VE	LJ	ZG
LJ		[(LJ, 0)]	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	$\infty$
LJ	VE	[(VE, 35)]												35 <sub>LJ</sub>		
LJ	WI	[(WI, 33), (VE, 35)]									33 <sub>LJ</sub>					
LJ	ZG	[(ZG, 20), (WI, 33), (VE, 35)]														20 <sub>LJ</sub>
LJ	BU	[(ZG, 20), (BU, 25), (WI, 33), (VE, 35)]										25 <sub>LJ</sub>				
ZG	LJ	[(BU, 25), (WI, 33), (VE, 35)]														
ZG	BU	[(BU, 25), (WI, 33), (VE, 35)]														
BU	LJ	[(WI, 33), (VE, 35)]														
BU	ZG	[(WI, 33), (VE, 35)]														
BU	WI	[(WI, 33), (VE, 35)]														
BU	BS	[(WI, 33), (VE, 35), (BS, 40)]					40 <sub>BU</sub>									
WI	LJ	[(VE, 35), (BS, 40)]														
WI	BU	[(VE, 35), (BS, 40)]														
WI	BS	[(VE, 35), (BS, 40)]														
WI	PR	[(VE, 35), (BS, 40), (PR, 53)]				53 <sub>WI</sub>										
WI	BN	[(VE, 35), (BS, 40), (PR, 53), (BN, 68)]								68 <sub>WI</sub>						
VE	LJ	[(BS, 40), (PR, 53), (BN, 68)]														
VE	MO	[(BS, 40), (PR, 53), (BN, 68), (MO, 79)]											79 <sub>VE</sub>			
BS	BU	[(PR, 53), (BN, 68), (MO, 79)]														
BS	WI	[(PR, 53), (BN, 68), (MO, 79)]														
BS	PR	[(PR, 53), (BN, 68), (MO, 79)]														
PR	BS	[(BN, 68), (MO, 79)]														
PR	WI	[(BN, 68), (MO, 79)]														
PR	BL	[(BN, 68), (MO, 79), (BL, 83)]			83 <sub>PR</sub>											
BN	WI	[(MO, 79), (BL, 83)]														
BN	MO	[(MO, 79), (BL, 83)]														
BN	LU	[(MO, 79), (BL, 83), (LU, 101)]							101 <sub>BN</sub>							
MO	VE	[(BL, 83), (LU, 101)]														
MO	BN	[(BL, 83), (LU, 101)]														
MO	PA	[(BL, 83), (LU, 101), (PA, 133)]						133 <sub>MO</sub>								
BL	PR	[(LU, 101), (PA, 133)]														
BL	AM	[(LU, 101), (AM, 127), (PA, 133)]		127 <sub>BL</sub>												
LU	BN	[(AM, 127), (PA, 133)]														
LU	AM	[(AM, 127), (PA, 133)]														
LU	BX	[(AM, 127), (PA, 133), (BX, 150)]	150 <sub>LU</sub>													
LU	PA	[(AM, 127), (PA, 133), (BX, 150)]														
AM	BL	[(PA, 133), (BX, 150)]														
AM	LU	[(PA, 133), (BX, 150)]														
AM	BX	[(PA, 133), (BX, 150)]														
PA	MO	[(BX, 150)]														
PA	LU	[(BX, 150)]														
PA	BX	[(BX, 150)]														
BX	AM	[]														
BX	LU	[]														
BX	PA	[]														

Tabela 25: Potek izvajanja algoritma za nalogo 5.23.

### Naloga 5.23.

- (a) Imamo neusmerjen graf  $G = (V, E)$  z utežmi na vozliščih  $c_u$  ( $u \in V$ ) in povezavah  $\ell_{uv}$  ( $uv \in E$ ). Problem bi bilo najlažje reševati z Dijkstrovim algoritmom na usmerjenem grafu  $D = (V, A)$ , kjer je  $A = \{uv, vu \mid uv \in E\}$  množica usmerjenih povezav, z utežmi  $L_{uv} = \ell_{uv} + c_v$  ( $uv \in A$ ).
- (b) Potek reševanja problema je prikazan v tabeli 25. Najcenejša pot od LJ do BX je LJ – WI – BN – LU – BX s ceno 150.

### Naloga 5.24.



**Naloga 5.25.**

Dano cestno omrežje lahko predstavimo kot usmerjen graf  $G$ , kjer uteži predstavljajo čas potovanja po cestni povezavi. Na grafu  $G$  lahko uporabimo Floyd-Warshallov algoritem za izračun razdalje med vsemi pari vozlišč. Nato zgradimo dvodelen graf  $H$ , v katerem imamo po eno vozlišče za vsakega ponesrečenca in po  $\lceil \frac{n}{k} \rceil$  vozlišč za vsako bolnišnico, vozlišči pa sta povezani, če je razdalja od ponesrečenca do bolnišnice v grafu  $G$  največ pol ure. Na grafu  $H$  nato z madžarsko metodo poiščemo največje prirejanje  $M$ . Če ima najdeno prirejanje  $n$  povezav, potem smo našli ustrezno dodelitev ponesrečencev bolnišnicam, sicer pa ta ne obstaja.

**Naloga 5.26.****Naloga 5.27.****Naloga 5.28.****Naloga 5.29.****Naloga 5.30.****Naloga 5.31.****Naloga 5.32.****Naloga 5.33.****Naloga 5.34.****Naloga 5.35.**

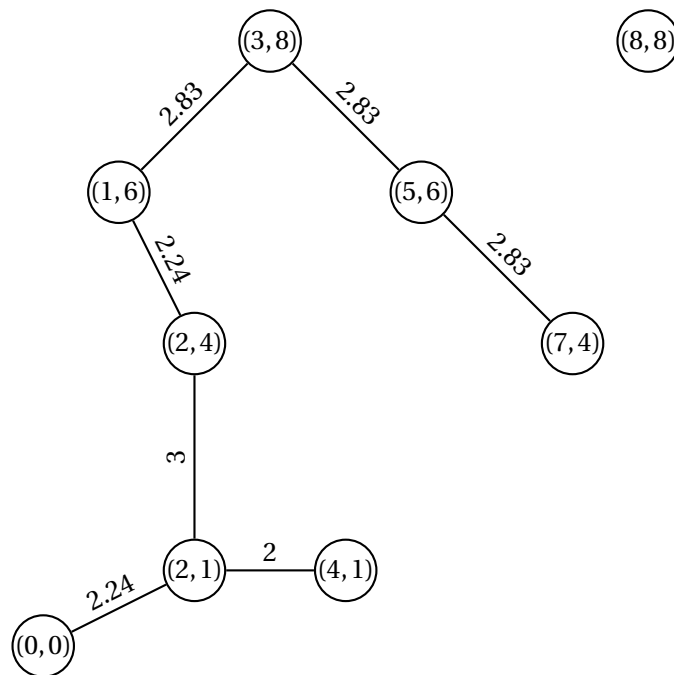
- (a) Definirajmo graf  $G = (V, E)$ , katerega množica vozlišč  $V \subset \mathbb{R}^2$  je enaka vhodnemu seznamu koordinat, za par različnih vozlišč  $v_i, v_j \in V$  pa velja  $(v_i, v_j) \in E$  natanko tedaj, ko  $\|v_i - v_j\| \leq d$ . Vozlišči sta torej povezani, če je razdalja med njima manjša od  $d$ , kar pomeni, da Rok lahko skoči iz ene na drugo. Sedaj moramo ugotoviti, če je točka, na kateri počiva Neli, dosegljiva Roku, za kar pa imamo na voljo algoritma DFS iz naloge 5.12 in BFS iz naloge 5.6.

Zapišimo kratek algoritem, pri čemer upoštevamo, da je  $s$  list, na katerem sedi Rok, in  $t$  list, na katerem sedi Neli.

```

function ŽABE( $G = (V, E), s, t$ )
  označen  $\leftarrow$  slovar s ključi  $v \in V$  in vrednostmi FALSE
  function VISIT( $u, v$ )
    označen[ $u$ ]  $\leftarrow$  TRUE
  end function
  BFS( $G, \{s\}, \text{VISIT}$ )
  return označen[ $t$ ]

```



Slika 81: Graf dopustnih skokov za nalogo 5.35.

**end function**

- (b) Po zgornjem opisu lahko torej povežemo dane točke v ravnini in dobimo graf  $G$ , prikazan na sliki 81. Graf je seveda neusmerjen, saj smo povezave definirali s simetrično relacijo. Za uteži smo vzeli razdalje med točkami, a jih za rešitev naloge ne bomo potrebovali. Sedaj s klicem  $\text{ŽABE}(G, (0, 0), (8, 8))$  ugotovimo, da Nelino vozlišče Roku ni dosegljivo.

**Naloga 5.36.**

**Naloga 5.37.**

**Naloga 5.38.**

**Naloga 5.39.**

**Naloga 5.40.**

**Naloga 5.41.**

Naj bo  $e = (s, t)$ . Če preverimo obstoj poti od  $s$  do  $t$ , ki ne vključuje povezave  $e$ , bomo s tem rešili nalogo, saj takšna pot obstaja natanko tedaj, ko je v grafu cikel, ki vsebuje povezavo  $e$ . Ideja bo torej uporabiti DFS algoritem iz naloge 5.12 na grafu  $G \setminus \{e\}$  z začetkom v  $s$  in tako preveriti, če lahko pridemo do  $t$ .

```

function CIKEL( $G = (V, E)$ ,  $e = (s, t)$ )
   $G' \leftarrow G \setminus \{e\}$ 
   $označeni \leftarrow$  slovar s ključi  $v \in V$  in vrednostmi FALSE
  function VISIT( $u, v$ )
     $označeni[u] \leftarrow$  TRUE
  end function
  DFS( $G', \{s\}, \text{VISIT}, \text{NOP}$ )
  return  $označeni[t]$ 
end function

```

**Naloga 5.42.**

**Naloga 5.43.**

(a) Definirali bomo usmerjen graf  $G' = (V', E')$ , kjer je

$$\begin{aligned}
 V' &= \{s, t\} \cup \{v_A, v_B \mid v \in V \setminus \{s, t\}\} \quad \text{in} \\
 E' &= \{u_X v_Y \mid uv \in E \setminus \{e\}, X, Y \in \{A, B\}, u, v \notin \{s, t\}\} \\
 &\quad \cup \{sv_Y \mid sv \in E \setminus \{e\}, Y \in \{A, B\}, v \notin \{s, t\}\} \\
 &\quad \cup \{u_X t \mid ut \in E \setminus \{e\}, X \in \{A, B\}, u \notin \{s, t\}\} \\
 &\quad \cup \{st \mid st \in E\}.
 \end{aligned}$$

Cene povezav ohranimo – velja torej

$$\begin{aligned}
 L'_{u_X v_Y} &= L_{uv} & (u_X v_Y \in E'), \\
 L'_{sv_Y} &= L_{sv} & (sv_Y \in E'), \\
 L'_{u_X t} &= L_{ut} & (u_X t \in E'), \\
 L'_{st} &= L_{st} & (st \in E').
 \end{aligned}$$

Z Dijkstrovim algoritmom lahko poiščemo najkrajšo pot od  $s$  do  $t$  v grafu  $G'$ , ki bo oblike  $s - w_{X_1}^{(1)} - w_{X_2}^{(2)} - \dots - w_{X_k}^{(k)} - t$ , kjer velja  $X_i \in \{A, B\}$  ( $1 \leq i \leq k$ ) in  $X_{i+1} \neq X_i = X_{i+2}$  ( $1 \leq i \leq k-2$ ). Iz te poti lahko izluščimo najkrajšo alternirajočo pot  $s - w^{(1)} - w^{(2)} - \dots - w^{(k)} - t$  v grafu  $G$ .

Graf  $G'$  ima  $2n-2$  vozlišč in  $m$  povezav, kjer je  $n$  število vozlišč in  $m$  število povezav v grafu  $G$ . Če v Dijkstrovem algoritmu za prednostno vrsto uporabimo kopico, je časovna zahtevnost algoritma tako  $O(m \log n)$ .

(b) Potek izvajanja Dijkstrovega algoritma na pomožnem grafu  $G'$  je prikazan v tabeli 26. Najkrajša pot v grafu  $G'$  je  $s - w_A - r_B - t$  dolžine 10, kar ustreza najkrajši alternirajoči poti  $s - w - r - t$  v grafu  $G$ .

Trenutno vozlišče	$s$	$r_A$	$r_B$	$u_A$	$u_B$	$v_A$	$v_B$	$w_A$	$w_B$	$t$
	0	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
$s$	0	$\infty$	$4_s$	$10_s$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$1_s$	$\infty$	$12_s$
$w_A$	0	$\infty$	$3_{w_A}$	$10_s$	$\infty$	$\infty$	$2_{w_A}$	$1_s$	$\infty$	$12_s$
$v_B$	0	$4_{v_B}$	$3_{w_A}$	$10_s$	$\infty$	$\infty$	$2_{w_A}$	$1_s$	$\infty$	$12_s$
$r_B$	0	$4_{v_B}$	$3_{w_A}$	$10_s$	$\infty$	$5_{r_B}$	$2_{w_A}$	$1_s$	$\infty$	$10_{r_B}$
$r_A$	0	$4_{v_B}$	$3_{w_A}$	$10_s$	$\infty$	$5_{r_B}$	$2_{w_A}$	$1_s$	$6_{r_A}$	$10_{r_B}$
$v_A$	0	$4_{v_B}$	$3_{w_A}$	$10_s$	$7_{v_A}$	$5_{r_B}$	$2_{w_A}$	$1_s$	$6_{r_A}$	$10_{r_B}$
$w_B$	0	$4_{v_B}$	$3_{w_A}$	$9_{w_B}$	$7_{v_A}$	$5_{r_B}$	$2_{w_A}$	$1_s$	$6_{r_A}$	$10_{r_B}$
$u_B$	0	$4_{v_B}$	$3_{w_A}$	$9_{w_B}$	$7_{v_A}$	$5_{r_B}$	$2_{w_A}$	$1_s$	$6_{r_A}$	$10_{r_B}$
$u_A$	0	$4_{v_B}$	$3_{w_A}$	$9_{w_B}$	$7_{v_A}$	$5_{r_B}$	$2_{w_A}$	$1_s$	$6_{r_A}$	$10_{r_B}$
$t$	0	$4_{v_B}$	$3_{w_A}$	$9_{w_B}$	$7_{v_A}$	$5_{r_B}$	$2_{w_A}$	$1_s$	$6_{r_A}$	$10_{r_B}$

Tabela 26: Potek reševanja za nalogo 5.43(b).

#### Naloga 5.44.

- (a) Algoritem BFS iz naloge 5.6 vrne želeni slovar. Ker lahko koren poljubno izberemo, lahko slovar *pred* dobimo s klicem  $\text{BFS}(T, V, \text{NoOp})$ . Neposredni nasledniki vozlišča  $u$  v drevesu  $T$  so tisti njegovi sosedi  $v \in \text{Adj}(T, u)$ , za katere velja  $v \neq \text{pred}[u]$ .
- (b) Naj bosta  $x_u$  in  $y_u$  teži najtežje neodvisne množice  $S$  v poddrevesu s korenem  $u$  (glede na slovar *pred*), za katero velja  $u \in S$  oziroma  $u \notin S$ . Potem velja

$$x_u = c_u + \sum_{\substack{v \sim u \\ v \neq \text{pred}[u]}} y_v \quad \text{in} \\ y_u = \sum_{\substack{v \sim u \\ v \neq \text{pred}[u]}} \max\{x_v, y_v\}.$$

Vrednosti  $x_u$  in  $y_u$  računamo od listov v smeri proti korenu  $r$  (tj., v topološki ureditvi glede na *pred*). Težo najtežje neodvisne množice dobimo kot  $c^* = \max\{x_r, y_r\}$ .

- (c) Da iz vrednosti  $x_u$  in  $y_u$  ( $u \in V$ ) izluščimo najtežjo neodvisno množico  $S$  v drevesu  $T$ , se sprehodimo od korena proti listom (npr. z iskanjem v širino) in posamezno vozlišče  $u$  dodamo v množico  $S$ , če njegov prednik ni v  $S$  in velja  $x_u \geq y_u$ .

**function** NAJTEŽJANEODVISNAMNOŽICA( $T = (V, E), r, (x_u)_{u \in V}, (y_u)_{u \in V}$ )  
 $S \leftarrow$  prazna množica  
**function** VISIT( $u, v$ )  
  **if**  $v \notin S \wedge x_u \geq y_u$  **then**  
     $S.\text{add}(u)$   
  **end if**

```

end function
  BFS( $T, \{r\}, \text{VISIT}$ )
return  $S$ 
end function

```

(d) Naj bo  $n$  število vozlišč drevesa  $T$ . Potem ima  $T$  natanko  $n - 1$  povezav. Za izračun najtežje neodvisne množice naredimo tri preglede v širino, pri čemer v vsakem vozlišču porabimo konstantno mnogo časa. Časovna zahtevnost celotnega algoritma je torej  $O(n)$ .

(e) Izračunajmo vrednosti  $x_u$  in  $y_u$  ( $u \in V$ ), če za koren vzamemo vozlišče  $a$ .

$x_i$	$= 9$	$y_i$	$= 0$
$x_j$	$= 4$	$y_j$	$= 0$
$x_k$	$= 2$	$y_k$	$= 0$
$x_d$	$= 1$	$y_d$	$= 0$
$x_e = 1 + 0 + 0$	$= 1$	$y_e = \max\{\underline{9}, 0\} + \max\{\underline{4}, 0\}$	$= 13$
$x_f$	$= 4$	$y_f$	$= 0$
$x_g = 8 + 0$	$= 8$	$y_g = \max\{\underline{2}, 0\}$	$= 2$
$x_h$	$= 4$	$y_h$	$= 0$
$x_b = 1 + 0 + 13 + 0 = 14$		$y_b = \max\{\underline{1}, 0\} + \max\{1, \underline{13}\} + \max\{\underline{4}, 0\} = 18$	
$x_c = 9 + 2 + 0 = 11$		$y_c = \max\{\underline{8}, 0\} + \max\{\underline{4}, 0\} = 12$	
$x_a = 8 + 18 + 12 = 38$		$y_a = \max\{14, \underline{18}\} + \max\{11, \underline{12}\} = 30$	

Teža najtežje neodvisne množice  $S$  je torej  $c^* = \max\{x_a, y_a\} = 38$ . Poglejmo, katera vozlišča so v množici  $S$ .

$c^* = x_a$	
$x_a = c_a + y_b + y_c$	$a \in S$
$y_b = x_d + y_e + x_f$	$b \notin S$
$y_c = x_g + x_h$	$c \notin S$
$x_d = c_d$	$d \in S$
$y_e = x_i + x_j$	$e \notin S$
$x_f = c_f$	$f \in S$
$x_g = c_g + y_k$	$g \in S$
$x_h = c_h$	$h \in S$
$x_i = c_i$	$i \in S$
$x_j = c_j$	$j \in S$
$y_k = 0$	$k \notin S$

Najtežja neodvisna množica je torej  $S = \{a, d, f, g, h, i, j\}$ .

**Naloga 5.45.**

(a) Za dani graf  $G = (V, E)$ , vozlišči  $s, t \in V$ , uteži povezav  $L_{uv}$  ( $uv \in E$ ) in uteži vozlišč  $c_v$  ( $v \in V$ ) bomo izračunali nove uteži povezav  $\ell_{uv} = L_{uv} + c_v$  ( $uv \in E$ ), ki predstavljajo skupen strošek prehoda od operaterja  $u$  k operaterju  $v$ . Ker so te uteži še vedno lahko tudi negativne, bomo v grafu  $G$  poiskali najkrajšo pot od  $s$  do  $t$  s pomočjo Bellman-Fordovega algoritma, ki teče v času  $O(mn)$ , kjer je  $n$  število vozlišč in  $m$  število povezav grafa  $G$ .

(b) Najprej izračunajmo nove uteži povezav.

$$\begin{aligned}
 \ell_{\text{brez}, \text{Bobitel}} &= 65 + 15 = 80 \\
 \ell_{\text{brez}, \text{Sodafon}} &= 85 + 10 = 95 \\
 \ell_{\text{brez}, \text{Rega}} &= 95 + 0 = 95 \\
 \ell_{\text{brez}, \text{Fenmobil}} &= 50 + 30 = 80 \\
 \ell_{\text{brez}, Z^0} &= 60 + 5 = 65 \\
 \ell_{\text{brez}, \text{TeleJanez}} &= 45 + 20 = 65 \\
 \ell_{\text{Bobitel}, \text{Sodafon}} &= 10 + 10 = 20 \\
 \ell_{\text{Sodafon}, \text{Rega}} &= -5 + 0 = -5 \\
 \ell_{\text{Rega}, \text{Fenmobil}} &= -15 + 30 = 15 \\
 \ell_{\text{Fenmobil}, Z^0} &= -10 + 5 = -5 \\
 \ell_{Z^0, \text{TeleJanez}} &= 5 + 20 = 25 \\
 \ell_{\text{TeleJanez}, \text{Bobitel}} &= 0 + 15 = 15 \\
 \ell_{\text{TeleJanez}, \text{Fenmobil}} &= -20 + 30 = 10 \\
 \ell_{\text{Fenmobil}, \text{Sodafon}} &= 5 + 10 = 15 \\
 \ell_{\text{Sodafon}, \text{TeleJanez}} &= 20 + 20 = 40
 \end{aligned}$$

Za izračun najcenejše poti od vozlišča *brez* do vozlišča *Rega* bomo sledili algoritmu BELLMANFORD iz naloge 5.13, pri čemer bomo upoštevali vrstni red povezav iz zgornjega seznama. Strnjen potek algoritma (samo koraki, kjer se katera od razdalj spremeni) je prikazan v tabeli 27. Za najcenejše zaporedje prehodov med operaterji tako dobimo *TeleJanez*, *Fenmobil*, *Sodafon*, *Rega*, skupni strošek pa je 75.

$i$	$u$	$v$	$\ell_{uv}$	$brez$	$Bobitel$	$Sodafon$	$Rega$	$Fenmobil$	$Z^0$	$TeleJanez$
1	$brez$	$ostali$		0	$80_{brez}$	$95_{brez}$	$95_{brez}$	$80_{brez}$	$65_{brez}$	$65_{brez}$
1	$Sodafon$	$Rega$	-5	0	$80_{brez}$	$95_{brez}$	$90_{Sodafon}$	$80_{brez}$	$65_{brez}$	$65_{brez}$
1	$TeleJanez$	$Fenmobil$	10	0	$80_{brez}$	$95_{brez}$	$90_{Sodafon}$	$75_{TeleJanez}$	$65_{brez}$	$65_{brez}$
1	$Fenmobil$	$Sodafon$	10	0	$80_{brez}$	$90_{Fenmobil}$	$90_{Sodafon}$	$75_{TeleJanez}$	$65_{brez}$	$65_{brez}$
2	$Sodafon$	$Rega$	-5	0	$80_{brez}$	$90_{Fenmobil}$	$85_{Sodafon}$	$75_{TeleJanez}$	$65_{brez}$	$65_{brez}$

Tabela 27: Potek izvajanja algoritma za nalogo 5.45(b).

## 2.6 CPM/PERT

### Naloga 6.1.

- (a) Projekt predstavimo z usmerjenim acikličnim grafom  $G = (V, E)$ , kjer vozlišča predstavljajo opravila, posebej pa dodamo še začetno vozlišče  $s$  in končno vozlišče  $t$ . Opravilo  $u$  povežemo z opravilom  $v$ , če je  $u$  pogoj za začetek opravila  $v$ . Poleg tega vozlišče  $s$  povežemo z opravili, ki nimajo predpogojev; opravila, ki niso predpogoj za katero drugo opravilo, pa povežemo z vozliščem  $t$ . Povezave iz opravila  $u$  utežimo s trajanjem opravila  $u$ , na povezave iz  $s$  pa postavimo utež 0.

Na grafu  $G$  uporabimo algoritem NAJDALJŠAPOT iz naloge 5.14(c) z začetkom v  $s$  in tako za vsako opravilo dobimo najzgodnejši čas, ko ga lahko začnemo. Dolžina najdaljše poti do vozlišča  $t$  predstavlja najkrajše možno trajanje celotnega projekta. Nato na obratnem grafu  $G' = (V, E')$ , kjer je  $E' = \{vu \mid uv \in E\}$  množica obratnih povezav z enakimi utežmi, še enkrat uporabimo algoritem NAJDALJŠAPOT, tokrat z začetkom v  $t$ , in dobljene razdalje odštejemo od najkrajšega možnega trajanja projekta. Tako za vsako opravilo dobimo še najpoznejši možen čas začetka, da se celotno trajanje projekta ne poveča. Pri kritičnih opravilih sta oba časa enaka.

Projekt lahko predstavimo z uteženim grafom s slike 82, iz katerega je razvidna topološka ureditev  $s, a, f, g, b, e, c, d, t$ . V tabeli 28 so podani rezultati, dobljeni z zgornjim postopkom. Vidimo, da je najkrajše trajanje projekta 31 dni, kritična opravila pa so  $a, b, c, d, e$ .

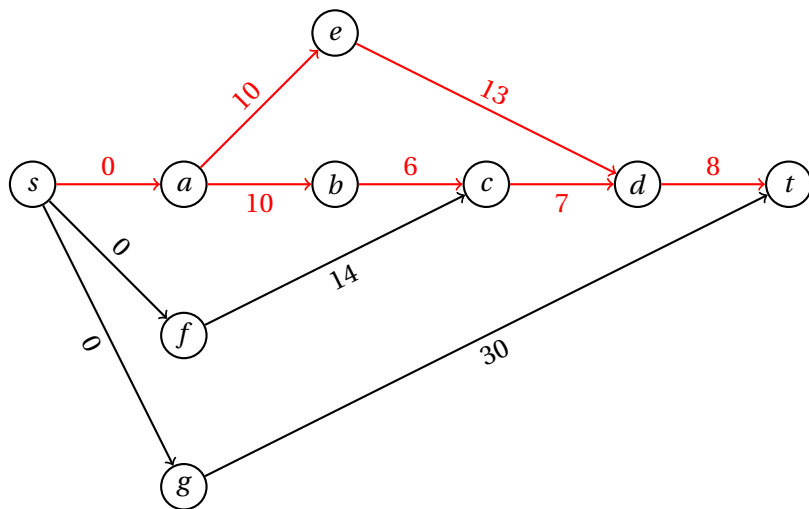
- (b) Opazimo, da vsa kritična opravila ležijo na dveh poteh od  $s$  do  $t$ . Kritični poti sta torej  $s - a - e - d - t$  in  $s - a - b - c - d - t$ .
- (c) Iz tabele 28 je razvidno, da je najmanj kritično opravilo  $f$ , saj ga lahko brez podaljševanja celotnega trajanja podaljšamo za 2 dni, kar je več kot katerokoli drugo opravilo.
- (d) Skrajšati želimo katero od kritičnih opravil, ki leži na obeh kritičnih poteh (taki sta  $a$  in  $d$ ), saj sicer ne bomo skrajšali celotnega trajanja projekta. Ker ima pot  $s - g - t$  dolžino 30 dni, bomo lahko celotno trajanje skrajšali za največ 1 dan. To lahko dosežemo, če skrajšamo opravilo  $a$ , ki bo tako namesto 10 trajalo 9 dni, skupaj pa bo projekt trajal 30 dni.

### Naloga 6.2.

Zapisali bomo linearni program, ki bo za vsako opravilo imel spremenljivki  $x_u$  in  $y_u$ , ki določata število dni, za katerega skrajšamo trajanje opravila  $u$ , oziroma čas začetka izvajanja opravila  $u$ .

$$\min \quad 200x_a + 100x_b + 150x_c + 160x_d + 250x_e + 240x_f + 300x_g$$





Slika 82: Graf odvisnosti med opravili in kritična pot za nalogo 6.1.

	<i>s</i>	<i>a</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>b</i>	<i>e</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>t</i>
najzgodnejši začetek	0	0 <sub>s</sub>	0 <sub>s</sub>	0 <sub>s</sub>	10 <sub>a</sub>	10 <sub>a</sub>	16 <sub>b</sub>	23 <sub>c,e</sub>	31 <sub>d</sub>
najpoznejši začetek	0 <sub>a</sub>	0 <sub>e</sub>	2 <sub>c</sub>	1 <sub>t</sub>	10 <sub>c</sub>	10 <sub>d</sub>	16 <sub>d</sub>	23 <sub>t</sub>	31
razlika	0	0*	2	1	0*	0*	0*	0*	0

Tabela 28: Razporejanje opravil za nalogo 6.1.

Opravila brez pogojev:

$$y_a, y_d, y_e \geq 0$$

Odvisnosti med opravili:

$$y_b - y_a + x_a \geq 10$$

$$y_e - y_a + x_a \geq 10$$

$$y_c - y_b + x_b \geq 6$$

$$y_d - y_c + x_c \geq 7$$

$$y_d - y_e + x_e \geq 13$$

$$y_c - y_f + x_f \geq 14$$

Želeni čas trajanja:

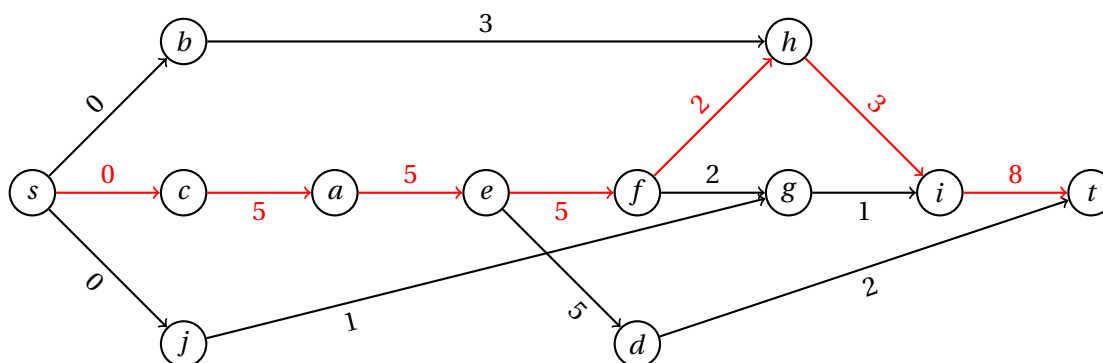
$$y_d - x_d \leq 19$$

$$y_g - x_g \leq -3$$

Minimalno trajanje opravil:

$$0 \leq x_a \leq 3$$

$$0 \leq x_b \leq 1$$



Slika 83: Graf odvisnosti med opravili in kritična pot za nalogo 6.3.

	<i>s</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>j</i>	<i>a</i>	<i>e</i>	<i>d</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>h</i>	<i>i</i>	<i>t</i>
najprej	0	0 <sub>s</sub>	0 <sub>s</sub>	0 <sub>s</sub>	5 <sub>b</sub>	10 <sub>a</sub>	15 <sub>e</sub>	15 <sub>e</sub>	17 <sub>f</sub>	17 <sub>f</sub>	20 <sub>h</sub>	28 <sub>i</sub>
najkasneje	0 <sub>c</sub>	14 <sub>h</sub>	0 <sub>a</sub>	18 <sub>g</sub>	5 <sub>e</sub>	10 <sub>f</sub>	26 <sub>t</sub>	15 <sub>h</sub>	19 <sub>i</sub>	17 <sub>i</sub>	20 <sub>t</sub>	28
razlika	0	14	0*	18	0*	0*	11	0*	2	0*	0*	0

Tabela 29: Razporejanje opravil za nalogo 6.3.

$$0 \leq x_c \leq 2$$

$$0 \leq x_d \leq 2$$

$$0 \leq x_e \leq 4$$

$$0 \leq x_f \leq 3$$

$$0 \leq x_g \leq 5$$

### Naloga 6.3.

- Projekt lahko predstavimo z uteženim grafom s slike 83, iz katerega je razvidna topološka ureditev  $s, b, c, j, a, e, d, f, g, h, i, t$ .
- V tabeli 28 so podani najzgodnejši začetki opravil in najpoznejši začetki, da se celotno trajanje priprave ne podaljša. Priprava bo torej trajala najmanj 28 minut, edina kritična pot pa je  $s - c - a - e - f - h - i - t$ , ki tako vsebuje tudi vsa kritična opravila.
- Iz tabele 28 je razvidno, da je najmanj kritično opravilo  $j$ , saj lahko njegovo trajanje podaljšamo za 18 minut, ne da bi vplivali na trajanje celotnega projekta.

**Naloga 6.4.**

Prvi kuhar bo prevzel opravila  $c, a, e, f, h, i$ , drugi pa opravila  $b, j, d, g$ . Iz tabele 29 je razvidno, da ga najbolj omejuje razporeditev opravilo  $g$  – najhitreje ga lahko začne 17 minut po začetku priprave, in tedaj ga konča 18 minut po začetku. Taka razporeditev mu dovoljuje, da z opravilom  $d$  začne 15 minut po začetku priprave in ga konča do začetka opravila  $g$ . Opravili  $b$  in  $j$  lahko tako opravi pred tem – začne torej 11 minut po začetku priprave in obe zaključi (vrstni red ni pomemben), preden se loti opravila  $d$ . Drugi kuhar lahko tako zaporedoma izvede opravila  $b, j, d, g$ , z začetkom 11 minut po začetku priprave in s koncem 7 minut kasneje (torej brez prestanka).

**Naloga 6.5.**

- (a) Pričakovana trajanja in variance so prikazane v tabeli 30.
- (b) Projekt lahko predstavimo z uteženim grafom s slike 84, iz katerega je razvidna topološka ureditev  $s, b, d, c, e, t$ .
- (c) V tabeli 30 so podani pričakovani najzgodnejši začetki opravil in najpoznejši začetki, da se celotno trajanje priprave ne podaljša. Pričakovano trajanje projekta je torej  $\mu = 10.83$  tednov, kritična pot pa je  $s - a - b - c - t$ .
- (d) Izračunajmo standardni odklon trajanja pričakovane kritične poti.

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{9} + 0 + \frac{1}{4}} = 0.601$$

Naj bo  $X$  slučajna spremenljivka, ki meri čas izvajanja pričakovane kritične poti. Izračunajmo verjetnost končanja v roku  $T = 11$  tednov.

$$P(X \leq 11) = \Phi\left(\frac{T - \mu}{\sigma}\right) = \Phi(0.277) = 0.609$$

Ob predpostavki, da bodo dela zaključena in bodo tako prejeli izplačilo 250 000 €, je pričakovan dobiček enak

$$250\,000\text{€} - (1 - P(X \leq 11)) \cdot 500\,000\text{€} = 54\,622.18\text{€}.$$

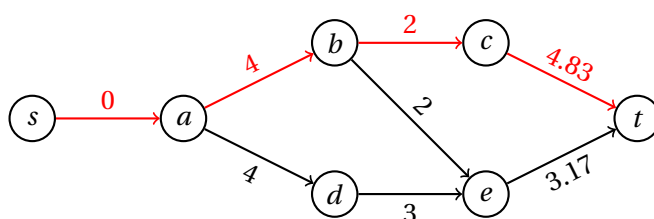
Ker je pričakovani dobiček pozitiven, se podjetju izplača prijaviti na razpis.

**Naloga 6.6.**

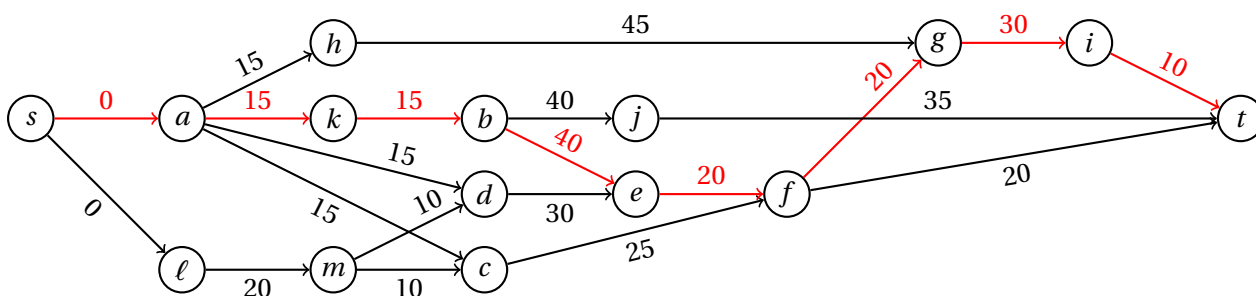
- (a) Projekt lahko predstavimo z uteženim grafom s slike 85, iz katerega je razvidna topološka ureditev  $s, a, \ell, h, k, m, b, d, c, j, e, f, g, i, t$ .
- (b) V tabeli 31 so podani najzgodnejši začetki opravil in najpoznejši začetki, da se celotno trajanje projekta ne podaljša. Izdelava bo torej trajala 150 dni, edina kritična pot pa je  $s - a - k - b - e - f - g - i - t$ , ki tako vsebuje tudi vsa kritična opravila.

	$s$	$a$	$b$	$d$	$c$	$e$	$t$
pričakovano trajanje		4	2	3	$\frac{29}{6}$	$\frac{19}{6}$	
varianca		$\frac{1}{9}$	0	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	
najzgodnejši začetek	0	$0_s$	$4_a$	$4_a$	$6_b$	$7_d$	$10.83_c$
najpoznejši začetek	$0_a$	$0_b$	$4_c$	$4.67_e$	$6_t$	$7.67_t$	10.83
razlika	0	$0^*$	$0^*$	0.67	$0^*$	0.67	0

Tabela 30: Razporejanje opravil za nalogo 6.5.



Slika 84: Graf odvisnosti med opravili in kritična pot za nalogo 6.5.



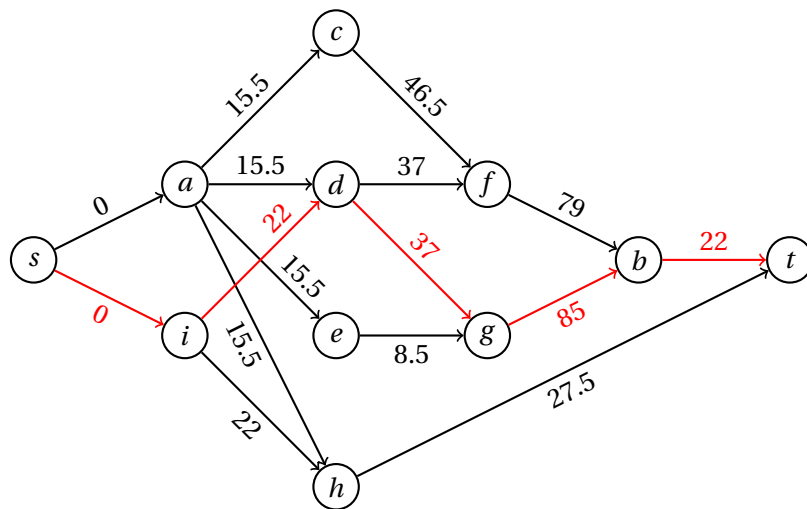
Slika 85: Graf odvisnosti med opravili in kritična pot za nalogo 6.6.

	$s$	$a$	$\ell$	$h$	$k$	$m$	$b$	$d$	$c$	$j$	$e$	$f$	$g$	$i$	$t$
najprej	0	$0_s$	$0_s$	$15_a$	$15_a$	$20_\ell$	$30_k$	$30_m$	$30_m$	$70_b$	$70_b$	$90_e$	$110_f$	$140_g$	$150_i$
najkasneje	$0_a$	$0_k$	$10_m$	$65_g$	$15_b$	$30_d$	$30_e$	$40_e$	$65_f$	$115_t$	$70_f$	$90_g$	$110_i$	$140_t$	150
razlika	0	$0^*$	10	50	$0^*$	10	$0^*$	10	35	45	$0^*$	$0^*$	$0^*$	$0^*$	0

Tabela 31: Razporejanje opravil za nalogo 6.6.

- (c) Iz tabele 31 je razvidno, da je najmanj kritično opravilo  $h$ , saj lahko njegovo trajanje podaljšamo za 50 dni, ne da bi vplivali na trajanje celotnega projekta.

### Naloga 6.7.



Slika 86: Graf odvisnosti med opravili in kritična pot za nalogo 6.10.

**Naloga 6.8.**

**Naloga 6.9.**

**Naloga 6.10.**

- Projekt lahko predstavimo z uteženim grafom s slike 86, iz katerega je razvidna topološka ureditev  $s, a, i, c, d, e, h, f, g, b, t$ . Uteži povezav ustrezajo pričakovanim trajanjem opravil, ki so prikazana v tabeli 32.
- V tabeli 32 so podani najzgodnejši začetki opravil in najpoznejši začetki, da se celotno trajanje gradnje ne podaljša. Pričakovano trajanje gradnje je torej  $\mu = 166$  dni, edina kritična pot pa je  $s - i - d - g - b - t$ , ki tako vsebuje tudi vsa kritična opravila.
- Iz tabele 32 je razvidno, da je najmanj kritično opravilo  $h$ , saj lahko njegovo trajanje podaljšamo za 116.5 dni v primerjavi s pričakovanim, ne da bi vplivali na trajanje celotnega projekta.
- Izračunajmo standardni odklon trajanja pričakovane kritične poti.

$$\sigma = \sqrt{1 + 9 + 16 + 4} = 5.477$$

Naj bo  $X$  slučajna spremenljivka, ki meri čas izvajanja pričakovane kritične poti. Izračunajmo verjetnost končanja v roku  $T = 180$  dni.

$$P(X \leq 180) = \Phi\left(\frac{T - \mu}{\sigma}\right) = \Phi(2.556) = 0.9947$$

	<i>s</i>	<i>a</i>	<i>i</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>h</i>	<i>f</i>	<i>g</i>	<i>b</i>	<i>t</i>
pričakovano		15.5	22	46.5	37	8.5	27.5	79	85	22	
varianca		2.25	1	10.03	9	0.69	2.25	36	16	4	
najprej	0	0 <sub>s</sub>	0 <sub>s</sub>	15.5 <sub>a</sub>	22 <sub>i</sub>	15.5 <sub>a</sub>	22 <sub>i</sub>	62 <sub>c</sub>	59 <sub>d</sub>	144 <sub>g</sub>	166 <sub>b</sub>
najkasneje	0 <sub>i</sub>	3 <sub>c</sub>	0 <sub>d</sub>	18.5 <sub>f</sub>	22 <sub>g</sub>	50.5 <sub>g</sub>	138.5 <sub>t</sub>	65 <sub>b</sub>	59 <sub>b</sub>	144 <sub>t</sub>	166
razlika	0	3	0*	3	0*	35	116.5	3	0*	0*	0

Tabela 32: Razporejanje opravil za nalogo 6.10.

### Naloga 6.11.

- (a) Projekt lahko predstavimo z uteženim grafom s slike 87, iz katerega je razvidna topološka ureditev  $s, a, b, d, c, e, g, f, h, t$ . V tabeli 33 so podani najzgodnejši začetki opravil in najpoznejši začetki, da se celotno trajanje gradnje ne podaljša. Gradnja bo trajala najmanj 215 dni, edina kritična pot pa je  $s - a - c - g - t$ , ki tako vsebuje vsa kritična opravila.
- (b) Iz tabele 33 je razvidno, da je najmanj kritično opravilo  $d$ , saj lahko njegovo trajanje podaljšamo za 100 dni, ne da bi vplivali na trajanje celotnega projekta.
- (c) Zapišimo linearni program, ki bo za vsako opravilo imel spremenljivki  $x_u$  in  $y_u$ , ki določata število dni, za katerega skrajšamo trajanje opravila  $u$ , oziroma čas začetka izvajanja opravila  $u$ .

$$\begin{aligned} \min \quad & 300x_a + 200x_b + 700x_c + 1100x_d \\ & + 1500x_e + 900x_f + 400x_g + 150x_h \end{aligned}$$

Opravila brez pogojev:

$$y_a, \quad y_b \geq 0$$

Odvisnosti med opravili:

$$y_c - y_a + x_a \geq 45$$

$$y_c - y_b + x_b \geq 20$$

$$y_d - y_a + x_a \geq 45$$

$$y_e - y_c + x_c \geq 90$$

$$y_f - y_d + x_d \geq 25$$

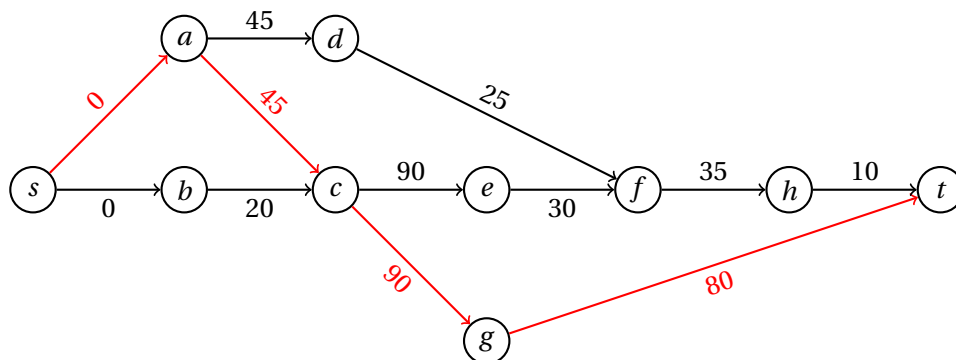
$$y_f - y_e + x_e \geq 30$$

$$y_g - y_c + x_c \geq 90$$

$$y_h - y_f + x_f \geq 35$$

Želeni čas trajanja:

$$y_g - x_g \leq 120$$



Slika 87: Graf odvisnosti med opravili in kritična pot za nalogo 6.11.

	<i>s</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>d</i>	<i>c</i>	<i>e</i>	<i>g</i>	<i>f</i>	<i>h</i>	<i>t</i>
najzgodnejši začetek	0	0 <sub>s</sub>	0 <sub>s</sub>	45 <sub>a</sub>	45 <sub>a</sub>	135 <sub>c</sub>	135 <sub>c</sub>	165 <sub>e</sub>	200 <sub>f</sub>	215 <sub>g</sub>
najpoznejši začetek	0	0 <sub>c</sub>	25 <sub>c</sub>	145 <sub>f</sub>	45 <sub>g</sub>	140 <sub>f</sub>	135 <sub>t</sub>	170 <sub>h</sub>	205 <sub>t</sub>	215
razlika	0	0*	25	100	0*	5	0*	5	5	0

Tabela 33: Razporejanje opravil za nalogo 6.11.

$$y_h - x_h \leq 190$$

Minimalno trajanje opravil:

$$\begin{aligned} 0 &\leq x_a \leq 5 \\ 0 &\leq x_b \leq 5 \\ 0 &\leq x_c \leq 20 \\ 0 &\leq x_d \leq 3 \\ 0 &\leq x_e \leq 4 \\ 0 &\leq x_f \leq 7 \\ 0 &\leq x_g \leq 15 \\ 0 &\leq x_h \leq 2 \end{aligned}$$

## 2.7 Upravljanje zalog

### Naloga 7.1.

Imamo sledeče podatke (pri časovni enoti 1 teden).

$$\begin{aligned}v &= 600 & K &= 25\text{€} \\ c &= 3\text{€} & s &= 0.05\text{€}\end{aligned}$$

Ker artiklov ne proizvajamo (tj., ob dostavi imamo na voljo celotno količino naročila), vzamemo  $\lambda = \infty$  in torej  $\alpha = v$ .

- (a) Ker primanjkljaj ni dovoljen, vzamemo  $p = \infty$  in torej  $\beta = 1$ . S temi podatki poračunamo optimalni interval naročanja  $\tau^*$  in optimalno velikost naročila  $M^*$ .

$$\begin{aligned}\tau^* &= \sqrt{\frac{2K\beta}{s\alpha}} = \sqrt{\frac{50}{30}} \approx 1.291 \\ M^* &= \sqrt{\frac{2K\alpha}{s\beta}} = \sqrt{\frac{30000}{0.05}} \approx 774.597\end{aligned}$$

Optimalni interval naročanja je torej 1.291 tedna oziroma 9.037 dni, vsakič naj pa trgovina naroči okoli 775 škatel toaletnega papirja.

- (b) Vzamemo  $p = 2\text{€}$  in torej  $\beta = 1 + s/p = 1.025$ . Izračunajmo optimalni interval naročanja in optimalno vrednost naročila še v tem primeru.

$$\begin{aligned}\tau^* &= \sqrt{\frac{2K\beta}{s\alpha}} = \sqrt{\frac{51.25}{30}} \approx 1.307 \\ M^* &= \sqrt{\frac{2K\alpha}{s\beta}} = \sqrt{\frac{30000}{0.05125}} \approx 765.092\end{aligned}$$

Optimalni interval naročanja je v tem primeru torej 1.307 tedna oziroma 9.149 dni, vsakič naj pa trgovina naroči okoli 765 škatel toaletnega papirja.

### Naloga 7.2.

V tovarni bodo naročili  $v = 20\,000$  zvočnikov, pri čemer jih posamezno naročilo stane  $K = 500\text{€}$ . Pri naročilu velikosti vsaj  $n_i$  je cena posameznega zvočnika enaka  $c_i$ , cena skladiščenja pa je  $s_i = 0.2 \cdot c_i$  ( $1 \leq i \leq 5$ ), pri čemer imamo

$$\begin{aligned}(n_i)_{i=1}^5 &= (1, 2000, 5000, 8000, 20000) \quad \text{in} \\ (c_i)_{i=1}^5 &= (150\text{€}, 135\text{€}, 125\text{€}, 120\text{€}, 115\text{€}) \quad .\end{aligned}$$

Ker zvočnikov ne proizvajajo sami in primanjkljaj ni dovoljen, velja  $\lambda = p = \infty$  in torej  $\alpha = v$ ,  $\beta = 1$ .



Naj bo  $M_i$  optimalna velikost naročila, če lahko zvočnike kupujemo po ceni  $c_i$  ( $1 \leq i \leq 5$ ).

$$M_i = \sqrt{\frac{2K\alpha}{s_i\beta}}$$

$$(M_i)_{i=1}^5 = (816.497, 860.663, 894.427, 912.871, 932.505)$$

Opazimo, da  $M_i \geq n_i$  velja samo pri  $i = 1$ . Za velikost optimalnega naročila  $M_i^*$  po ceni  $c_i$  torej velja  $M_1^* = M_1$  in  $M_i^* = n_i$  ( $2 \leq i \leq 5$ ). Za naročila velikosti  $M_i^*$  ( $1 \leq i \leq 5$ ) izračunajmo skupne stroške naročanja in skladiščenja  $S_i$ .

$$S_i = \frac{M_i^* s_i}{2} + K \frac{v}{M_i^*} + v c_i$$

$$(S_i)_{i=1}^5 = (3024495, 2732000, 2564000, 2496250, 2530500)$$

Opazimo, da najmanjše stroške dosežemo, če naročamo po  $M^* = M_4^* = 8000$  zvočnikov po ceni  $c^* = c_4 = 120\text{€}$ . Izračunajmo še interval naročanja.

$$\tau^* = \frac{M^*}{v} = \frac{8000}{20000} = 0.4$$

Naročamo torej na 0.4 leta oziroma na 146 dni.

### Naloga 7.3.

Imamo sledeče podatke (pri časovni enoti 1 leto).

$$\begin{aligned} v &= 10000 & \lambda &= 25000 \\ K &= 200\text{€} & s &= 0.25\text{€} \end{aligned}$$

Primanjkljaja ne dovolimo, zato velja  $p = \infty$  in torej  $\beta = 1$ .

Izračunajmo optimalno dolžino cikla  $\tau^*$  in največjo zalogo  $M^*$ .

$$\alpha = v \left(1 - \frac{v}{\lambda}\right) = 10000 \cdot (1 - 0.4) = 6000$$

$$\tau^* = \sqrt{\frac{2K\beta}{s\alpha}} = \sqrt{\frac{400}{1500}} \approx 0.516$$

$$M^* = \sqrt{\frac{2K\alpha}{s\beta}} = \sqrt{\frac{2400000}{0.25}} \approx 3098.387$$

Optimalna dolžina cikla je torej približno 0.516 leta oziroma 188.485 dni, pri tem pa potrebujejo skladišče za 3099 akumulatorjev.

Izračunajmo še trajanje proizvodnje  $t^*$  in število izdelanih akumulatorjev  $q^*$  v posameznem ciklu.

$$\begin{aligned} t^* &= \frac{M^*}{\lambda - v} = \frac{3098.387}{15000} \approx 0.207 \\ q^* &= \tau^* v = t^* \lambda \approx 0.516 \cdot 10000 \approx 5163.978 \end{aligned}$$

Proizvodnja torej traja približno 0.207 leta oziroma 75.394 dni, skupno pa izdelajo okoli 5164 akumulatorjev.

**Naloga 7.4.**

Imamo sledeče podatke (pri časovni enoti 1 teden).

$$v = 10$$

$$s = 0.2\text{€}$$

$$K = 150\text{€}$$

$$\lambda = 12.5$$

$$p = 0.8\text{€}$$

Izračunajmo optimalno dolžino cikla  $\tau^*$  in največjo zalogo  $M^*$ .

$$\alpha = v \left(1 - \frac{v}{\lambda}\right) = 10 \cdot (1 - 0.8) = 2$$

$$\beta = 1 + \frac{s}{p} = 1 + \frac{0.2}{0.8} = 1.25$$

$$\tau^* = \sqrt{\frac{2K\beta}{s\alpha}} = \sqrt{\frac{375}{0.4}} \approx 30.619$$

$$M^* = \sqrt{\frac{2K\alpha}{s\beta}} = \sqrt{\frac{600}{0.25}} \approx 48.990$$

Optimalna dolžina cikla je torej približno 30.619 tednov, pri tem pa Marta potrebuje skladišče za 49 kosov nakita.

Izračunajmo še število izdelanih kosov nakita  $q^*$ , trajanje proizvodnje  $t^*$  in največji primanjkljaj  $m^*$  v posameznem ciklu.

$$q^* = \tau^* v \approx 30.619 \cdot 10 \approx 306.186$$

$$t^* = \frac{q^*}{\lambda} \approx \frac{306.186}{12.5} \approx 24.495$$

$$m^* = \tau^* \alpha - M^* \approx 30.619 \cdot 2 - 48.990 \approx 12.247$$

V vsakem intervalu torej Marta izdelava okoli 306 kosov nakita, pri čemer izdelovanje traja približno 24.495 tednov, primanjkljaj pa ne preseže 13 kosov nakita.

**Naloga 7.5.**

Imamo sledeče podatke (pri časovni enoti 1 teden).

$$v = 60$$

$$\lambda = 90$$

$$K = 180\text{€}$$

$$s = 0.5\text{€}$$

Pri teh podatkih izračunajmo še

$$\alpha = v \left(1 - \frac{v}{\lambda}\right) = 60 \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right) = 20.$$

- (a) Če primanjkljaja ne dovolimo, imamo  $p = \infty$  in torej  $\beta = 1$ . Izračunajmo optimalno dolžino cikla  $\tau^*$ , največjo zalogo  $M^*$  in enotske stroške  $S^*$ .

$$\begin{aligned}\tau^* &= \sqrt{\frac{2K\beta}{s\alpha}} = \sqrt{\frac{360}{10}} = 6 \\ M^* &= \sqrt{\frac{2K\alpha}{s\beta}} = \sqrt{\frac{7200}{0.5}} = 120 \\ S^* &= \sqrt{\frac{2Ks\alpha}{\beta}} = \sqrt{3600} \text{€} = 60 \text{€}\end{aligned}$$

Optimalna dolžina cikla je torej 6 tednov, pri tem pa mora vulkanizer imeti skladišče za 120 pnevmatik. Tedenski stroški proizvodnje in skladiščenja so 60€.

- (b) Izračunajmo še trajanje proizvodnje  $t^*$  in število izdelanih pnevmatik  $q^*$  v posameznem ciklu.

$$\begin{aligned}t^* &= \frac{M^*}{\lambda - v} = \frac{120}{30} = 4 \\ q^* &= t^* v = t^* \lambda = 4 \cdot 30 = 120\end{aligned}$$

Proizvodnja torej traja 4 tedne, skupno pa v tem času izdela 120 pnevmatik.

- (c) Vzamemo  $p = 2 \text{€}$  in torej  $\beta = 1 + s/p = 1.25$ . Izračunajmo optimalno dolžino cikla, potrebno velikost skladišča in enotske stroške še v tem primeru.

$$\begin{aligned}\tau^* &= \sqrt{\frac{2K\beta}{s\alpha}} = \sqrt{\frac{450}{10}} \approx 6.708 \\ M^* &= \sqrt{\frac{2K\alpha}{s\beta}} = \sqrt{\frac{7200}{0.625}} \approx 107.331 \\ S^* &= \sqrt{\frac{2Ks\alpha}{\beta}} = \sqrt{\frac{3600}{1.25}} \text{€} \approx 53.666 \text{€}\end{aligned}$$

Optimalni interval naročanja je v tem primeru torej 6.708 tednov, pri tem pa mora vulkanizer imeti skladišče za 108 pnevmatik. Tedenski stroški proizvodnje in skladiščenja so 53.666€.

Izračunajmo še največji primanjkljaj  $m^*$  v posameznem ciklu.

$$m^* = \tau^* \alpha - M^* \approx 6.708 \cdot 20 - 107.331 \approx 26.833$$

Največji primanjkljaj torej ne preseže 27 pnevmatik.

**Naloga 7.6.**

Imamo sledeče podatke (pri časovni enoti 1 mesec).

$$\begin{aligned}v &= 20 & K &= 750\text{€} \\s &= 10\text{€} & p &= 50\text{€}\end{aligned}$$

Pri teh podatkih izračunajmo še

$$\beta = 1 + \frac{s}{p} = 1 + \frac{10}{50} = 1.2.$$

Ker artiklov ne proizvajamo (tj., ob dostavi imamo na voljo celotno količino naročila), vzamemo  $\lambda = \infty$  in torej  $\alpha = v$ .

- (a) Izračunajmo optimalno dolžino cikla  $\tau^*$ , največjo zalogo  $M^*$  in enotske stroške  $S^*$ .

$$\begin{aligned}\tau^* &= \sqrt{\frac{2K\beta}{s\alpha}} = \sqrt{\frac{1800}{200}} = 3 \\M^* &= \sqrt{\frac{2K\alpha}{s\beta}} = \sqrt{\frac{30000}{12}} = 50 \\S^* &= \sqrt{\frac{2Ks\alpha}{\beta}} = \sqrt{\frac{300000}{1.2}} \text{€} = 500\text{€}\end{aligned}$$

Optimalna dolžina cikla je torej 3 mesece, pri tem pa mora trgovina imeti skladišče za 50 sedežnih garnitur. Mesečni stroški nabave in skladiščenja so 60€.

- (b) Izračunajmo še največji primanjkljaj  $m^*$  in velikost naročila  $q^*$ .

$$\begin{aligned}m^* &= \tau^* \alpha - M^* = 3 \cdot 20 - 50 = 10 \\q^* &= \tau^* v = 3 \cdot 20 = 60\end{aligned}$$

- (c) Drugo skladišče lahko hrani  $n' = 40$  sedežnih garnitur, mesečni strošek hrambe enega kosa pa je  $s' = 6\text{€}$ . Najprej preverimo, kakšna bi bila optimalna velikost skladišča pri takih stroških.

$$\begin{aligned}\beta' &= 1 + \frac{s'}{p} = 1 + \frac{6}{50} = 1.12 \\M' &= \sqrt{\frac{2K\alpha}{s'\beta'}} = \sqrt{\frac{30000}{6.72}} \approx 66.815\end{aligned}$$

Ker je  $M' > n'$ , zapišimo formulo za enotske stroške za primer, ko imamo v skladišču največ  $n'$  kosov.

$$S' = \frac{2K\alpha + (s' + p)n'^2}{2\alpha\tau'} + p\left(\frac{\alpha\tau'}{2} - n'\right) = 500\text{€} \cdot \tau' - 2000\text{€} + \frac{2990\text{€}}{\tau'}$$

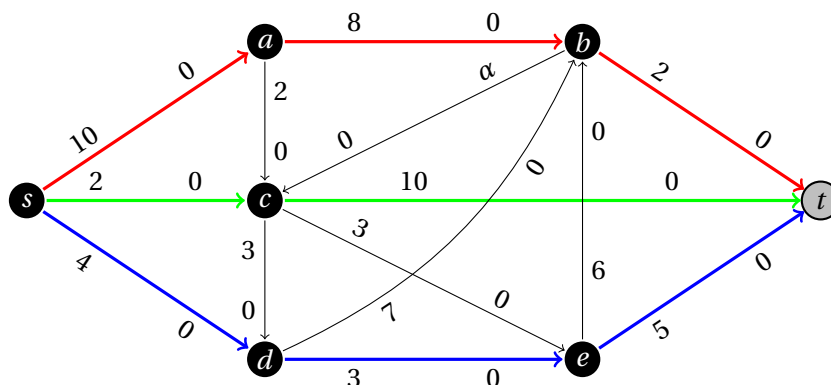
Ker iščemo dolžino intervala, kjer dosežemo minimalne stroške, poiščimo, kje ima odvod zgornjega izraza po  $\tau'$  ničlo za  $\tau' > 0$ .

$$0\text{€} = 500\text{€} - \frac{2990\text{€}}{\tau'^2}$$
$$\tau' = \sqrt{\frac{2990}{500}} \approx 2.445$$

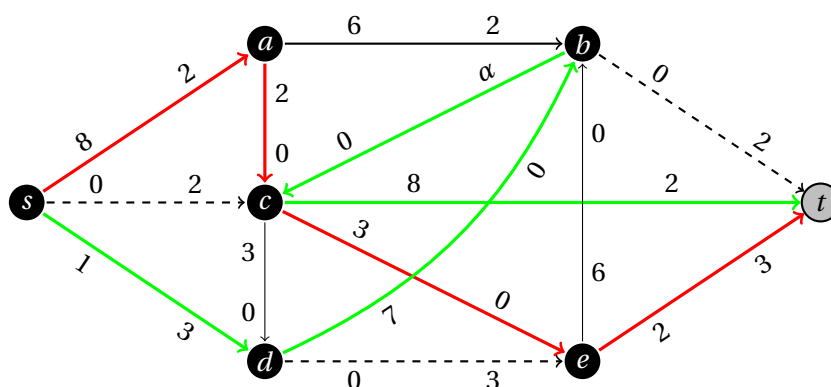
Optimalna dolžina cikla ob uporabi drugega skladišča je torej 2.445 meseca. Vstavimo v zgornjo formulo, da dobimo mesečne stroške.

$$S' = 500\text{€} \cdot 2.445 - 2000\text{€} + \frac{2990\text{€}}{2.445} \approx 445.404\text{€}$$

Ker so stroški nižji kot pri prvem skladišču, se trgovini izplača sprejeti ponudbo.



Slika 88: Prvi korak za nalogo 8.1.

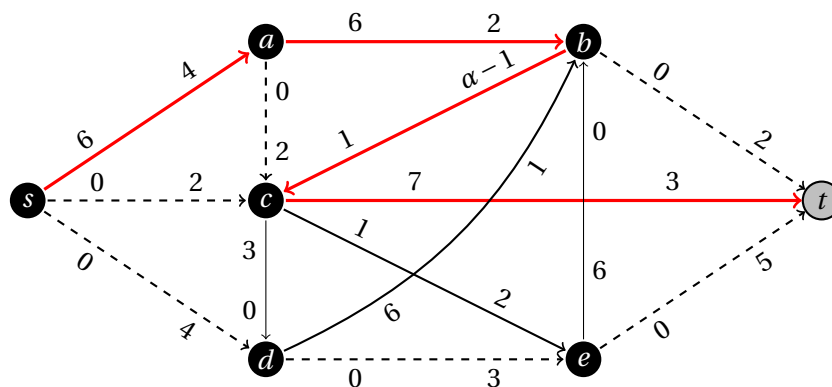


Slika 89: Drugi korak za nalogo 8.1.

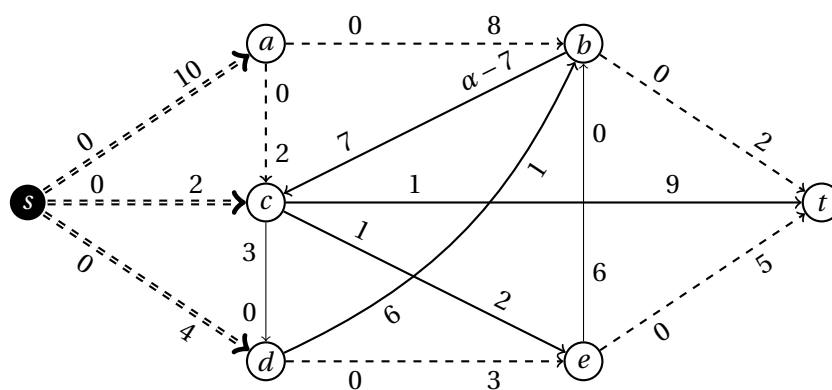
## 2.8 Pretoki in prerezi

### Naloga 8.1.

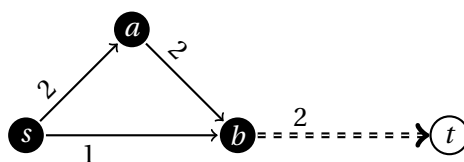
Predpostavimo, da je vrednost parametra  $\alpha$  dovolj velika, da ne vpliva na pretok skozi omrežje. Ob tej predpostavki poiščemo maksimalni pretok – postopek reševanja je prikazan na slikah 88, 89, 90 in 91. Dobimo maksimalni pretok  $10 + 2 + 4 = 2 + 9 + 5 = 16$ , najmanjša vrednost  $\alpha$ , pri kateri ga lahko dosežemo, pa bo enaka najmanjšemu možnemu pretoku po povezavi  $b \rightarrow c$ . Ta pretok bi lahko zmanjšali, če bi našli cikel iz premih povezav z neničelnimi pretoki in nezasičenih nasprotnih povezav, ki vsebuje povezavo  $b \rightarrow c$ . Toda iz slike 91 vidimo, da lahko iz vozlišča  $c$  nadaljujemo le kot  $c \rightarrow t \rightarrow c$  ali  $c \rightarrow e \rightarrow t \rightarrow c$  in tako ne moremo doseči vozlišča  $b$ . Pretoka po povezavi  $b \rightarrow c$  torej ni mogoče zmanjšati, tako da je iskana vrednost enaka  $\alpha = 7$ .



Slika 90: Tretji korak za nalogo 8.1.



Slika 91: Maksimalni pretok in minimalni prerez za nalogo 8.1.



Slika 92: Primer omrežja za nalogo 8.2.

### Naloga 8.2.

Ni nujno, da je povezava z najmanjšo kapaciteto vsebovana v minimalnem prerezu. Primer je podan na sliki 92 – povezava z najmanjšo kapaciteto je  $s \rightarrow b$ , medtem ko edini minimalni prerez sestoji iz povezave  $b \rightarrow t$ .

**Naloga 8.3.**

Predpostavimo, da so intervali podani kot pari celih števil  $(a_i, b_i)$  z  $a_i < b_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ).

- (a) Naj bo  $G = (V, E)$  usmerjen graf z množico vozlišč  $V = \{1, 2, \dots, n\}$  in povezavo  $i \rightarrow j$  ( $i, j \in V$ ) natanko tedaj, ko velja  $b_i = a_j$ . Ker za vsak  $i \in V$  velja  $a_i < b_i$ , je graf  $G$  acikliččen. Naša optimizacijska naloga je poiskati čim manjše število usmerjenih poti, ki pokrijejo vsako vozlišče grafa  $G$  natanko enkrat. Pri tem dovoljujemo tudi poti dolžine 0 – ta pokrijejo natanko eno vozlišče. Vsaka taka pot torej ustreza zaporedju terminov, ki jih bo pazil posamezen asistent.
- (b) Definirajmo omrežje  $G' = (V', E')$ , kjer je

$$V' = \{s, t\} \cup \{u_i, v_i \mid i \in V\},$$

$$E' = \{s \rightarrow u_i, v_i \rightarrow t \mid i \in V\} \cup \{u_i \rightarrow v_j \mid i \rightarrow j \in E\},$$

vse povezave pa imajo kapaciteto 1.

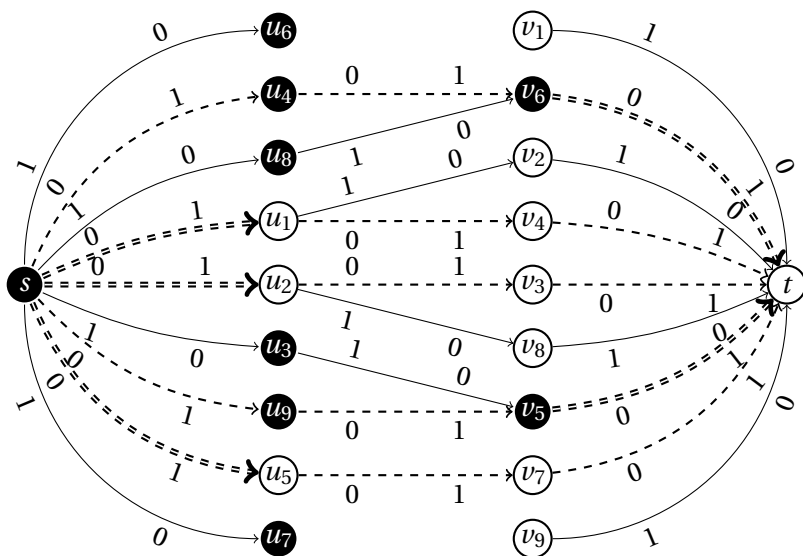
Denimo, da imamo celoštevilsko rešitev problema maksimalnega pretoka od vozlišča  $s$  do vozlišča  $t$  v omrežju  $G'$  – ker so kapacitete cela števila, nam Ford-Fulkersonov algoritem zagotavlja njen obstoj. Ker gre vsaka enota pretoka čez natanko eno povezavo  $u_i \rightarrow v_j$ , ki ustreza povezavi  $i \rightarrow j$  v grafu  $G$ , skupni pretok  $f$  ustreza dopustni rešitvi problema iz prejšnje točke z vsoto dolžin poti enako  $f$  – število poti je torej  $n - f$ . Tako maksimalni pretok ustreza optimalni rešitvi.

- (c) Na sliki 93 je prikazan maksimalen pretok za omrežje iz prejšnje točke pri danih podatkih, pri čemer so podani intervali oštevilčeni od 1 do 9. Najdeni maksimalni pretok  $f^* = 5$  torej ustreza dodelitvi terminov štirim asistentom: prvi pazi v terminih (7, 8), (8, 12) in (12, 15), drugi v terminih (8, 9) in (9, 10), tretji v terminih (7, 10), (10, 13) in (13, 15), četrti pa v terminu (9, 12).

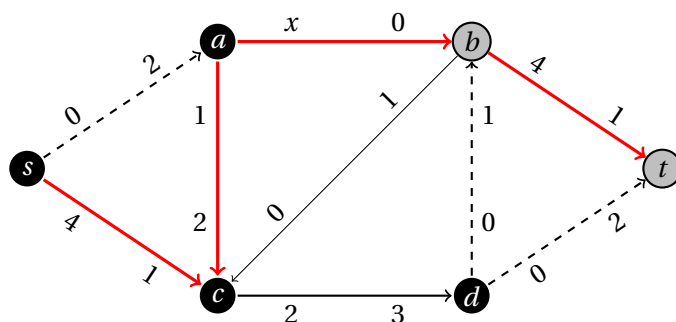
**Naloga 8.4.**

- (a) V poti  $s \rightarrow a \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow t$  nas najbolj omejujeta povezavi  $s \rightarrow a$  in  $d \rightarrow t$  s kapaciteto 2, v poti  $s \rightarrow c \rightarrow d \rightarrow b \rightarrow t$  pa povezava  $d \rightarrow b$  s kapaciteto 1. Ker ima edina skupna povezava  $c \rightarrow d$  kapaciteto 5, bo skupen pretok po povečanju po teh dveh poteh enak 3. Pridruženo omrežje je prikazano na sliki 94.
- (b) Na omrežju s slike 94 je  $s \rightarrow c \leftarrow a \rightarrow b \rightarrow t$  edina možna povečujoča pot. Pri  $0 \leq x < 2$  nas s količino  $x$  najbolj omejuje povezava  $a \rightarrow b$  – tedaj dobimo maksimalni pretok  $3 \leq 3 + x < 5$  in minimalni prerez  $\{a \rightarrow b, d \rightarrow b, d \rightarrow t\}$ , glej sliko 95.
- Pri  $x \geq 2$  nas s količino 2 najbolj omejuje povezava  $c \leftarrow a$  – tedaj dobimo maksimalni pretok 5 in minimalni prerez  $\{s \rightarrow a, d \rightarrow b, d \rightarrow t\}$ , glej sliko 96.





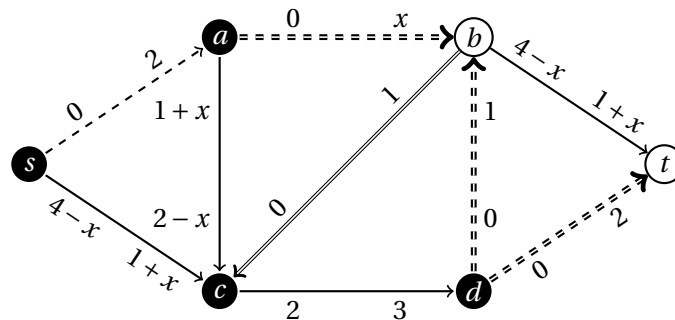
Slika 93: Maksimalni pretok in minimalni prerez za nalogo 8.3(c).



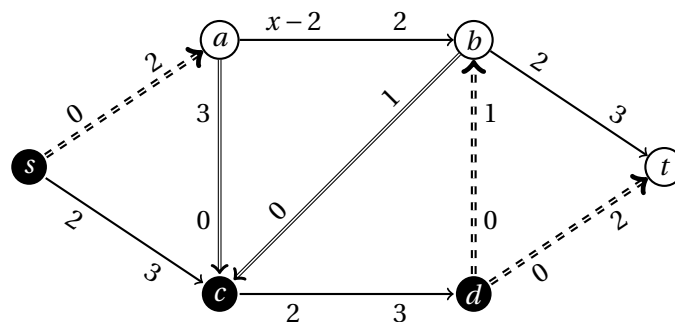
Slika 94: Pridruženo omrežje za nalogo 8.4(a) in povečujoča pot pri  $x > 0$ .

- (c) Iz slik 95 in 96 je razvidno, da lahko po poti  $s \rightarrow c \rightarrow d$  povečamo pretok za največ 2, tako da lahko s povečanjem kapacitete povezave  $d \rightarrow t$  za 1 za toliko povečamo maksimalni pretok omrežja. Ker lahko tudi po povezavi  $b \rightarrow t$  povečamo pretok za vsaj 2, enako dosežemo tudi s povečanjem kapacitete povezave  $d \rightarrow b$  za 1.

Ker lahko po povezavah  $s \rightarrow a$  in  $c \leftarrow a$  povečamo pretok v vozlišče  $a$  za največ  $2 - x$ , sledi, da lahko s povečanjem kapacitete povezave  $a \rightarrow b$  za 1 za toliko povečamo maksimalni pretok omrežja le v primeru, kadar velja  $0 \leq x \leq 1$ .



Slika 95: Maksimalni pretok pri  $0 \leq x < 2$  za nalogo 8.4(b).



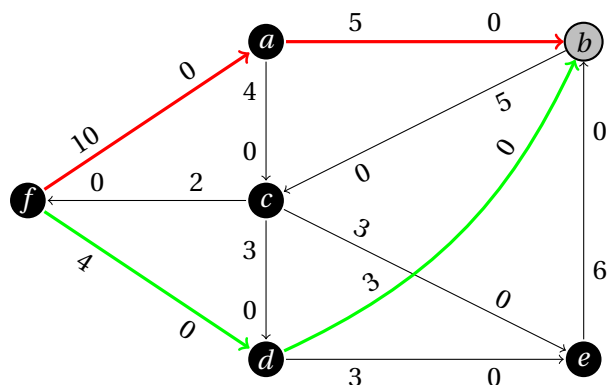
Slika 96: Maksimalni pretok pri  $x \geq 2$  za nalogo 8.4(b).

### Naloga 8.5.

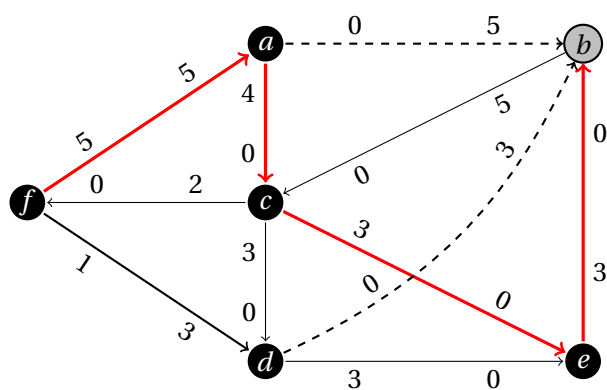
- S Ford-Fulkersonovim algoritmom poiščemo maksimalni  $(f, b)$ -tok na omrežju s slike 36. Postopek reševanja je prikazan na slikah 97, 98 in 99. Dobimo maksimalni pretok  $8 + 3 = 5 + 3 + 3 = 11$ .
- Zadostuje, da poiščemo tak par terminalov, ki maksimizira vsoto kapacitet izstopnih povezav (brez morebitnih povezav med izbranimi terminaloma). Če je eden od izbranih vstopnih terminalov  $f$ , potem največjo skupno kapaciteto 20 dosežemo, če za drugi vstopni terminal izberemo  $c$  ali  $e$ .

### Naloga 8.6.

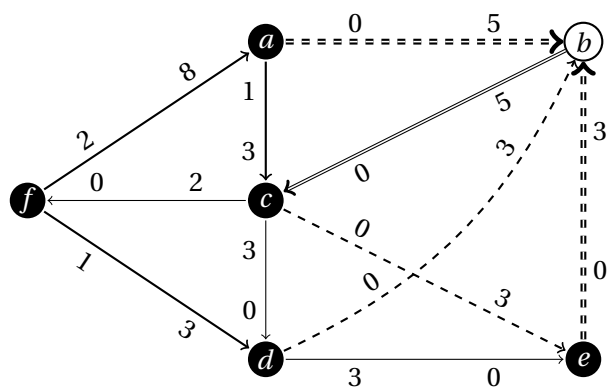
- Pravilno rešitev dobimo, če algoritem zaporedoma izbere povečujoče poti  $s \rightarrow u \rightarrow y \rightarrow t$  (pretok 3, odstraniti se povezavi  $u \rightarrow y$  in  $y \rightarrow t$ ),  $s \rightarrow u \rightarrow x \rightarrow t$  (pretok 3, odstrani se povezava  $u \rightarrow x$  in  $s \rightarrow v \rightarrow z \rightarrow t$  (pretok 2, odstrani se povezava  $s \rightarrow v$ ). Dobimo maksimalni pretok  $3 + 3 + 2 = 8$ , glej sliko 100.
- Na sliki 101 je prikazano omrežje z maksimalnim pretokom  $1 + 1 = 2$ . Če algoritem GREEDYFLOW na tem omrežju v prvem koraku izbere pot  $s \rightarrow a \rightarrow b \rightarrow t$  z minimalno kapaciteto 1, potem vse povezave iz te poti odstrani in tako ne najde druge povečujoče poti.



Slika 97: Prvi korak za nalogo 8.5(a).



Slika 98: Drugi korak za nalogo 8.5(a).



Slika 99: Maksimalni pretok in minimalni prerez za nalogo 8.5(a).

- (c) Za vsako omrežje obstaja izbira poti, da bo algoritem GREEDYFLOW dal maksimalni pretok. Zapišimo postopek, ki za dani graf  $G = (V, E)$ , slovar kapacitet povezav  $C$  in vozlišči  $s, t \in V$  vrne ustrezno zaporedje poti skupaj s poveča-

njem pretoka, ki ga prinese posamezna pot. V postopku bomo uporabili dvostrano vrsto (*double-ended queue*), na kateri bomo uporabili metode  $\text{append}(x)$  (dodajanje  $x$  na konec),  $\text{push}(x)$  (dodajanje  $x$  na začetek) in  $\text{pop}()$  (odstranjevanje z začetka).

```

function ZAPOREDJEPOTI( $G = (V, E), C, s, t$ )
     $Q \leftarrow$  prazna dvostrana vrsta
    if  $s = t$  then                                     če je izvor enak ponoru,
         $Q.\text{append}((s, \infty))$                          lahko prepeljemo poljubno količino
        return  $Q$ 
    end if
     $M \leftarrow$  minimalni  $(s, t)$ -prerez omrežja  $G$  s kapacitetami povezav  $C$ 
     $S, T \leftarrow$  množici z  $V = S \cup T, S \cap T = \emptyset, s \in S$  in  $t \in T$ , določeni s prerezom  $M$ 
     $G_s, G_t \leftarrow$  podgrafa grafa  $G$ , inducirana z množico vozlišč  $S$  oziroma  $T$ 
    for  $e = u \rightarrow v \in M$  do
         $Q_s \leftarrow \text{ZAPOREDJEPOTI}(G_s, C, s, u)$        rekurzivna klica dobita kopijo  $C$ ,
         $Q_t \leftarrow \text{ZAPOREDJEPOTI}(G_t, C, v, t)$        tako da ostane slovar nespremenjen
        while  $C[e] > 0$  do
             $P_s, \gamma_s \leftarrow Q_s.\text{pop}()$ 
             $P_t, \gamma_t \leftarrow Q_t.\text{pop}()$ 
             $\gamma \leftarrow \min\{\gamma_s, c[e], \gamma_t\}$ 
            for  $e_s \in P_s$  do                             popravimo povezave v  $G_s$ 
                if  $C[e_s] = \gamma$  then
                    odstrani  $e_s$  iz  $G_s$ 
                else
                     $C[e_s] \leftarrow C[e_s] - \gamma$ 
                end if
            end for
             $C[e] \leftarrow C[e] - \gamma$ 
            for  $e_t \in P_t$  do                             popravimo povezave v  $G_t$ 
                if  $C[e_t] = \gamma$  then
                    odstrani  $e_t$  iz  $G_t$ 
                else
                     $C[e_t] \leftarrow C[e_t] - \gamma$ 
                end if
            end for
             $Q.\text{append}((P_s \| e \| P_t, \gamma))$              dodamo novo pot v  $G$ 
            if  $\gamma < \gamma_s$  then                         če nobene povezave v  $P_s$  ne zasitimo,
                 $Q_s.\text{push}((P_s, \gamma_s - \gamma))$          jo vrnemo na začetek vrste
            end if                                         z zmanjšano kapaciteto
            if  $\gamma < \gamma_t$  then                         podobno še za  $P_t$ 
                 $Q_t.\text{push}((P_t, \gamma_t - \gamma))$ 
            end if
        end while
    end for
    return  $Q$                                            vrnemo vrsto poti v  $G$ 
end function

```

Algoritem deluje rekurzivno, pri čemer si pomaga z izračunom minimalnega prereza omrežja, ki tako graf razdeli na dva dela. Za vsako povezavo  $e = u \rightarrow v$

iz prereza se tako izračunata ustrezni zaporedji poti (kot vrsti) za pretok od  $s$  do  $u$  oziroma od  $v$  do  $t$  v ustreznem podomrežju. Zaporedje poti za omrežje  $G$  se potem dopolnjuje tako, da se preko povezave  $e$  združita poti z vrha obeh vrst, pri čemer se lahko pot vrne na vrh vrste, če se nobena povezava ne zasiti; ko se pa katera od povezav zasiti, se odstrani iz ustreznega grafa. Ker tak postopek posnema obnašanje algoritma GREEDYFLOW, se nikoli ne zgodi, da bi sestavili pot, ki vsebuje katero že odstranjeno povezavo. Obravnava povezave  $e$  se zaključi, ko se ta zasiti – tedaj vrsti poti v ustreznih podomrežjih nista nujno prazni, se pa ob predpostavki, da rekurzivni klici vračajo ustrezna zaporedja, tudi predhodno ne izpraznijo. Postopek se nato nadaljuje z naslednjo povezavo iz  $M$ . Ker se zaporedji poti za podomrežji ponovno izračunata, najdene poti ne bodo vsebovale predhodno odstranjenih povezav. Do robnega primera pride, ko je izvor enak ponoru – to se zgodi v rekurzivnih klicih, ki obravnavajo povezavo iz minimalnega prereza s krajiščem  $s$  oziroma  $t$ . Ker je v tem primeru zaporedje poti ustrezno, lahko po indukciji sklepamo, da algoritem deluje pravilno.

(d) Naj bo  $G_n = (V_n, E_n)$  ( $n \geq 2$ ) omrežje, kjer je

$$V_n = \{s, t\} \cup \{a_i, b_i \mid 1 \leq i \leq n\} \quad \text{in} \\ E_n = \{s \rightarrow a_i, a_i \rightarrow b_i, b_i \rightarrow t \mid 1 \leq i \leq n\} \cup \{b_i \rightarrow a_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n-1\},$$

pri čemer imajo vse povezave kapaciteto 1. Maksimalen pretok  $n$  dobimo tako, da peljemo količino 1 po poteh  $s \rightarrow a_i \rightarrow b_i \rightarrow t$  ( $1 \leq i \leq n$ ) – minimalni prerez tedaj sestoji iz povezav  $s \rightarrow a_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ). Če pa v prvem koraku algoritma GREEDYFLOW izberemo pot

$$s \rightarrow a_1 \rightarrow b_1 \rightarrow a_2 \rightarrow b_2 \rightarrow \cdots \rightarrow a_n \rightarrow b_n \rightarrow t,$$

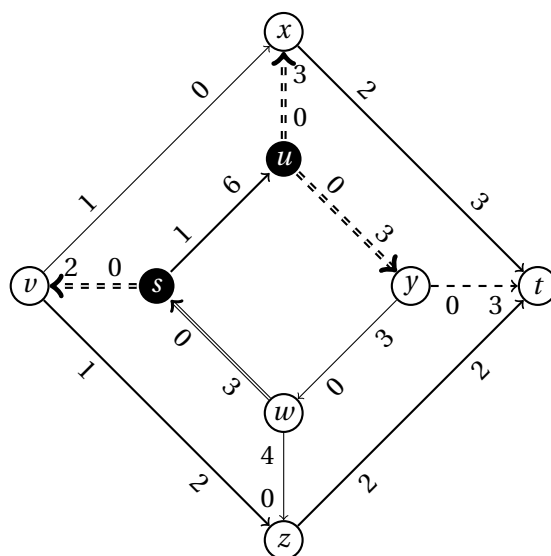
postanejo vse povezave v tej poti zasičene in se zato odstranijo iz grafa, zaradi česar algoritem druge povečujoče poti ne najde in tako konča s pretokom 1. Tako dobimo razliko  $n - 1$  in razmerje  $n$  za poljubno velik  $n$ .

### Naloga 8.7.

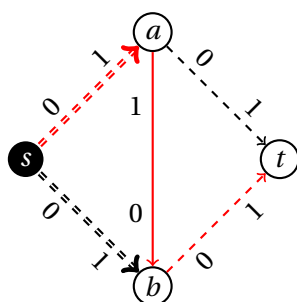
Za naravno število  $n$  naj bo  $G_n = (V_n, E_n)$  usmerjena pot od  $s$  do  $t$  z  $n$  povezavami, tj.,

$$V_n = \{s = v_0, v_1, \dots, v_n = t\} \quad \text{in} \\ E_n = \{v_{i-1} \rightarrow v_i \mid 1 \leq i \leq n\},$$

kjer imajo vse povezave kapaciteto 1. Maksimalni pretok v takem omrežju je tako 1, vsaka povezava pa sama sestavlja minimalen prerez. Tako graf  $G_n$  ustreza zahtevi iz točke (c). Za točko (a) lahko vzamemo  $G = G_1$ , za točko (b) pa  $G' = G_n$  za katerikoli  $n \geq 2$ .



Slika 100: Maksimalni pretok in minimalni prerez za nalogo 8.6(a).



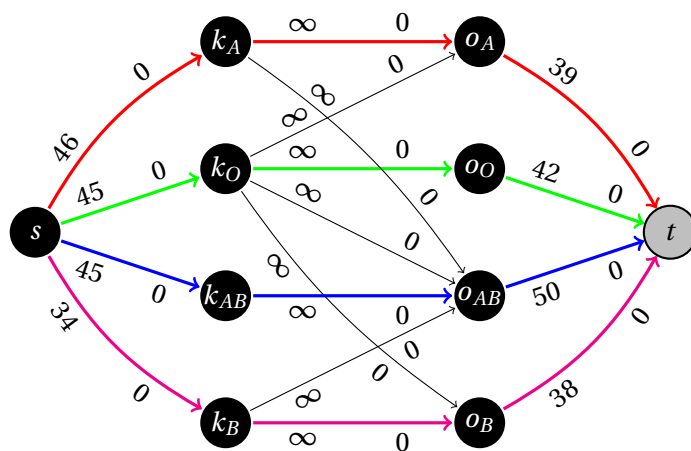
Slika 101: Primer omrežja in povečujoče poti za nalogo 8.6(b).

### Naloga 8.8.

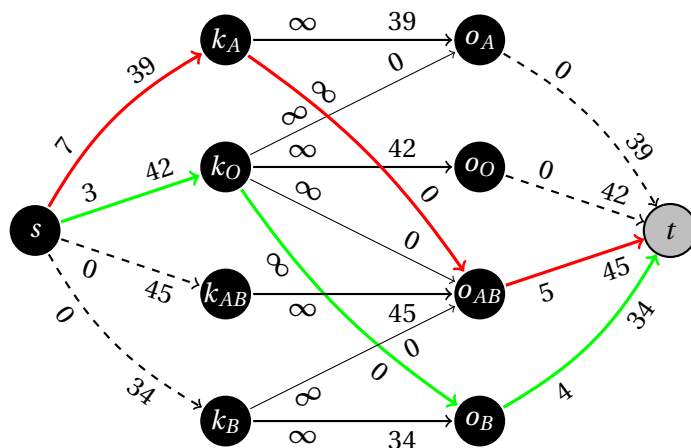
Ustrezno omrežje je prikazano na sliki 102, kjer je prikazana tudi začetna izbira povečujočih poti za Ford-Fulkersonov algoritem. Nadaljevanje postopka je prikazano na sliki 103, maksimalni pretok pa je prikazan na sliki 104, iz katere razberemo, da lahko oskrbimo največ  $44 + 45 + 45 + 34 = 39 + 42 + 50 + 37 = 168$  pacientov.

### Naloga 8.9.

- Iz slike 104 vidimo, da ostaneta neporabljeni dve enoti krvi. Ker sta povezavi  $s \rightarrow k_O$  in  $s \rightarrow k_{AB}$  v minimalnem prerezu ter obstaja cikel  $s \rightarrow k_A \rightarrow o_{AB} \leftarrow k_{AB} \leftarrow s$ , po katerem lahko pretok povečamo za največ 2, sledi, da sta neporabljeni enoti krvi iz krvnih skupin A ali AB.
- Iz slike 104 vidimo, da na kliniki potrebujejo kri še za eno osebo. Ker obstaja



Slika 102: Omrežje in prvi korak za nalogo 8.8.

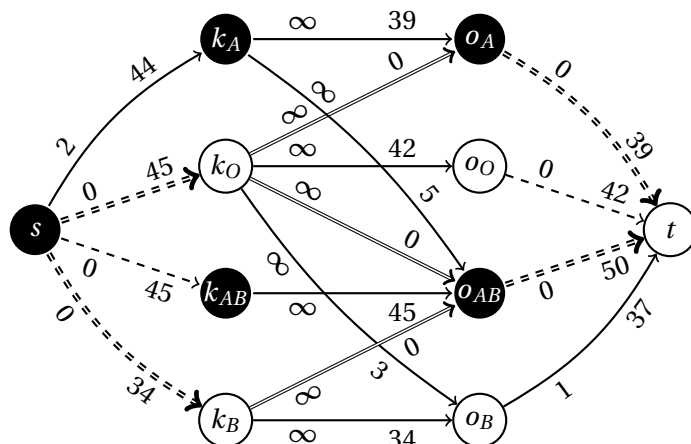


Slika 103: Drugi korak za nalogo 8.8.

cikel  $t \leftarrow o_O \leftarrow k_O \rightarrow o_B \rightarrow t$ , po katerem lahko pretok povečamo za največ 1, ter sta povezavi  $s \rightarrow k_O$  in  $s \rightarrow k_{AB}$  v minimalnem prerezu in povezava  $k_B \rightarrow o_B$  ne predstavlja omejitve pri povečevanju pretoka, sledi, da morajo na kliniki naročiti enoto krvi iz krvne skupine O ali B.

#### Naloga 8.10.

- Po vsaki od poti  $s \rightarrow a \rightarrow g \rightarrow m \rightarrow t$ ,  $s \rightarrow b \rightarrow h \rightarrow m \rightarrow t$ ,  $s \rightarrow c \rightarrow i \rightarrow m \rightarrow t$ ,  $s \rightarrow d \rightarrow j \rightarrow m \rightarrow t$ ,  $s \rightarrow e \rightarrow k \rightarrow m \rightarrow t$  in  $s \rightarrow f \rightarrow \ell \rightarrow m \rightarrow t$  lahko povečamo pretok za 5. Skupni pretok je torej 30, glej sliko 105.
- Na sliki 106 vidimo, kako lahko povečujemo pretok skozi čistilne naprave ob predpostavki, da so vrednosti  $\alpha_i$  ( $i \in \{1, 2, 3\}$ ) dovolj velike. Prva povečujoča



Slika 104: Maksimalni pretok in minimalni prerez za nalogo 8.8.

pot je speljana skozi postajo  $\{a, b, g, h\}$  – po njej lahko pretok povečamo za največ 5. Druga povečujoča pot je speljana skozi postajo  $\{c, d, i, j\}$  – po njej lahko pretok prav tako povečamo za največ 5. Maksimalen pretok skozi čistilno postajo je prikazan za  $\{e, f, k, \ell\}$ . Tako lahko skozi posamezno postajo pretok povečamo za največ 10.

Iz slike 105 je razvidno, da lahko pretok čez povezavo  $m \rightarrow t$  povečamo za največ 20. Tako bomo postavili cevi skupne kapacitete 20, kar nas bo stalo  $20 \cdot 100\text{€} = 2000\text{€}$ . To lahko dosežemo z inštalacijo dveh cevi kapacitete 10, kar nas dodatno stane  $2 \cdot 10000\text{€} = 20000\text{€}$ . Skupna cena projekta je torej  $22000\text{€}$ .

### Naloga 8.11.

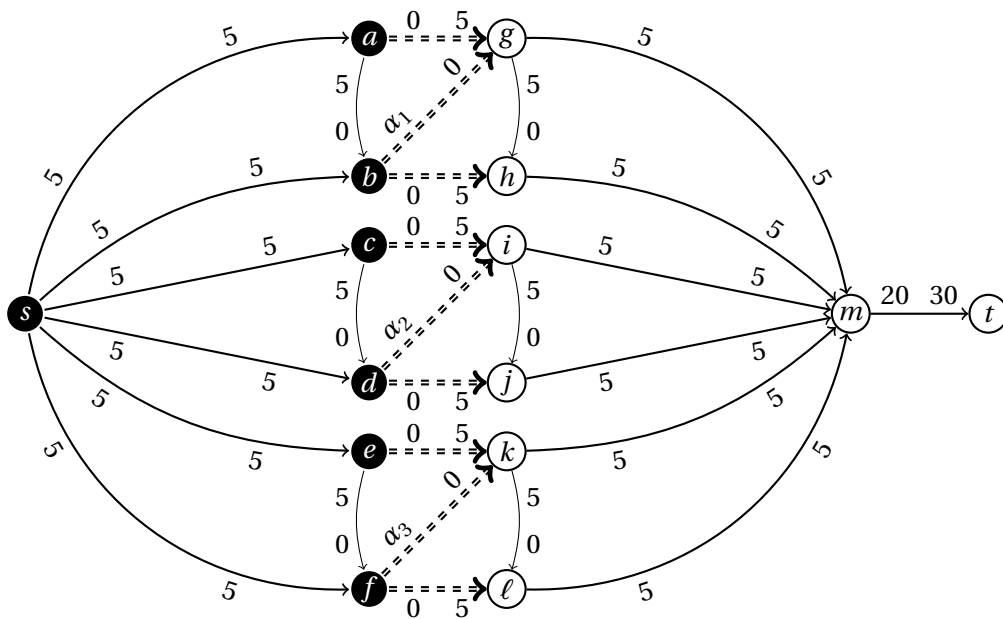
- (a) Sestavimo omrežje  $G = (V, E)$ , kjer je množica vozlišč

$$V = \{s, t\} \cup \{w_i \mid 1 \leq i \leq p\} \cup \{x_j \mid 1 \leq j \leq q\} \cup \{y_k, z_k \mid 1 \leq k \leq n\},$$

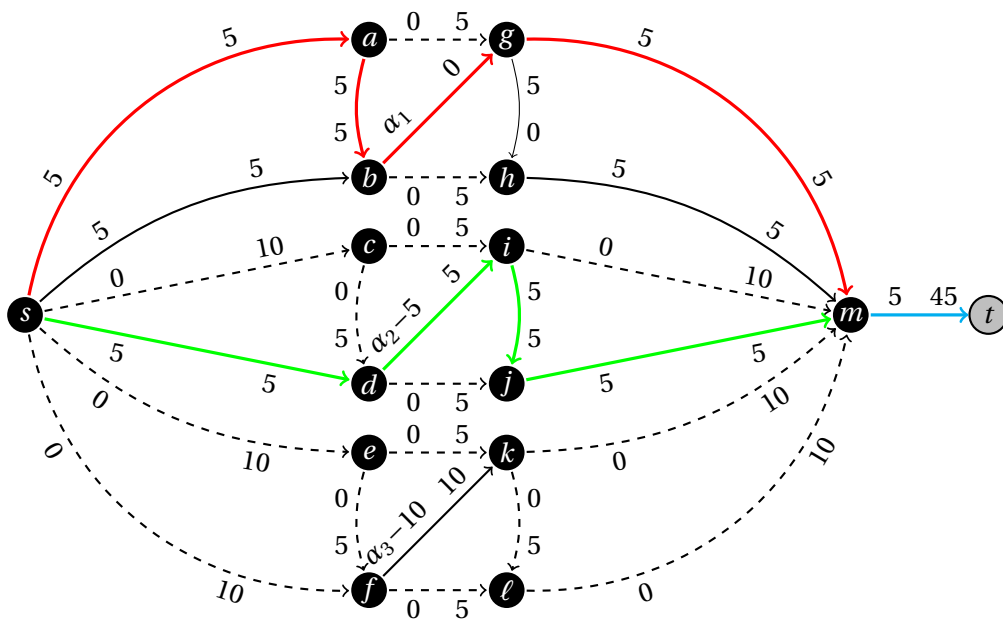
v množici povezav  $E$  pa imamo povezave  $s \rightarrow w_i$  s kapaciteto  $u_i$  ( $1 \leq i \leq p$ ),  $s \rightarrow x_j$  s kapaciteto  $v_j$  ( $1 \leq j \leq q$ ),  $w_i \rightarrow y_k$  s kapaciteto 1, če je osebi  $k$  všeč sendvič  $i$ ,  $x_j \rightarrow z_k$  s kapaciteto 1, če je osebi  $k$  všeč sok  $j$ , ter  $y_k \rightarrow t$  in  $z_k \rightarrow t$  s kapaciteto 1 ( $1 \leq k \leq n$ ). Zelena razdelitev hrane in pijače obstaja natanko tedaj, ko so v dobljenem maksimalnem pretoku vse povezave  $y_k \rightarrow t$  in  $z_k \rightarrow t$  ( $1 \leq k \leq n$ ) zasičene.

- (b) Ustrezno omrežje je prikazano na sliki 107, kjer je prikazana tudi začetna izbira povečujočih poti za Ford-Fulkersonov algoritem. Oznake v indeksih vozlišč ustrezajo prvim črkam v imenih sendvičev, sokov in oseb (brez strešic na šumnikih). Nadaljevanje postopka je prikazano na sliki 108, maksimalni pretok pa je prikazan na sliki 109. Ker v dobljenem maksimalnem



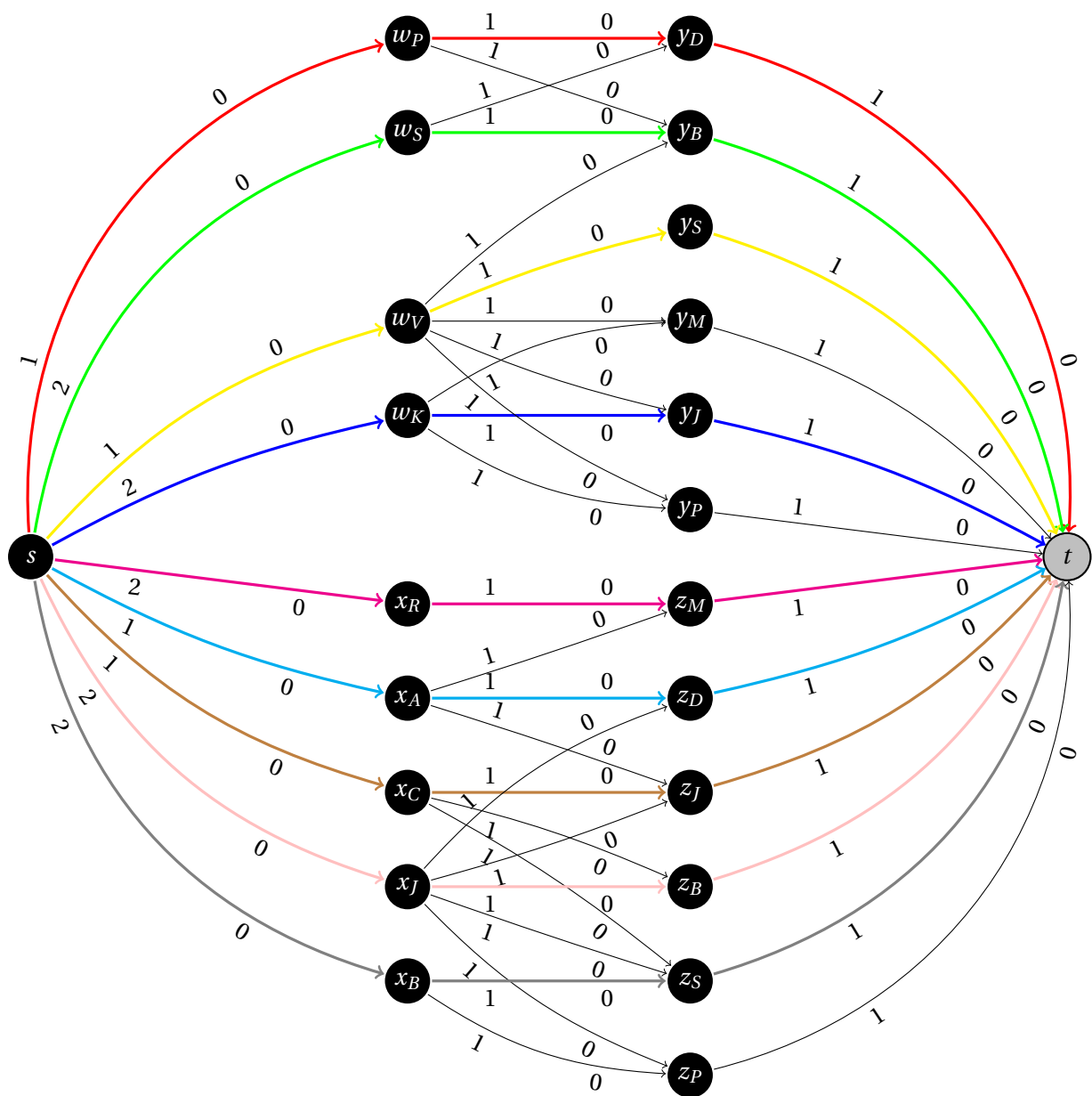


Slika 105: Maksimalni pretok in minimalni prerez za nalogo 8.10(a).

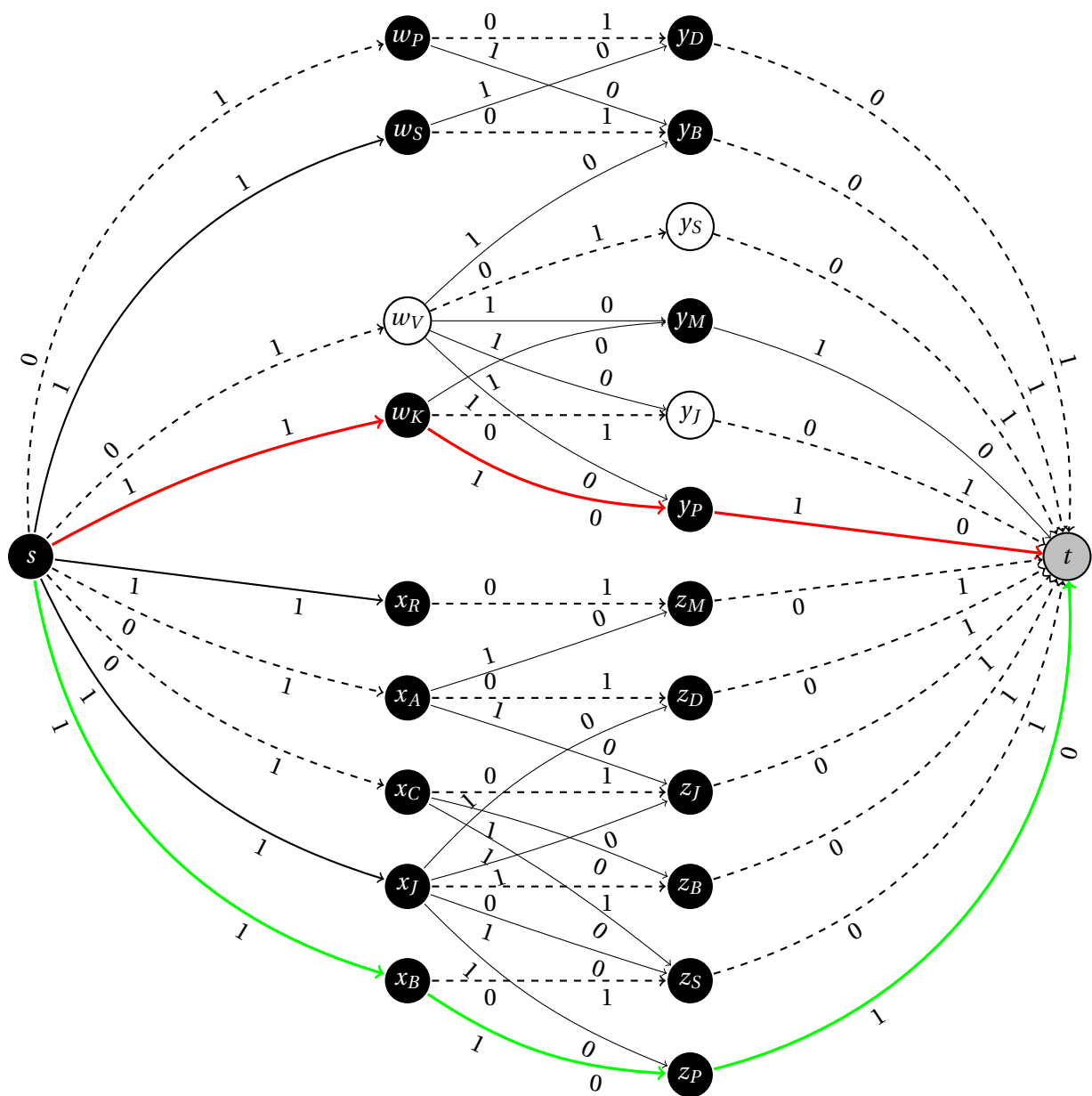


Slika 106: Povečevanje pretokov za nalogo 8.10(b).

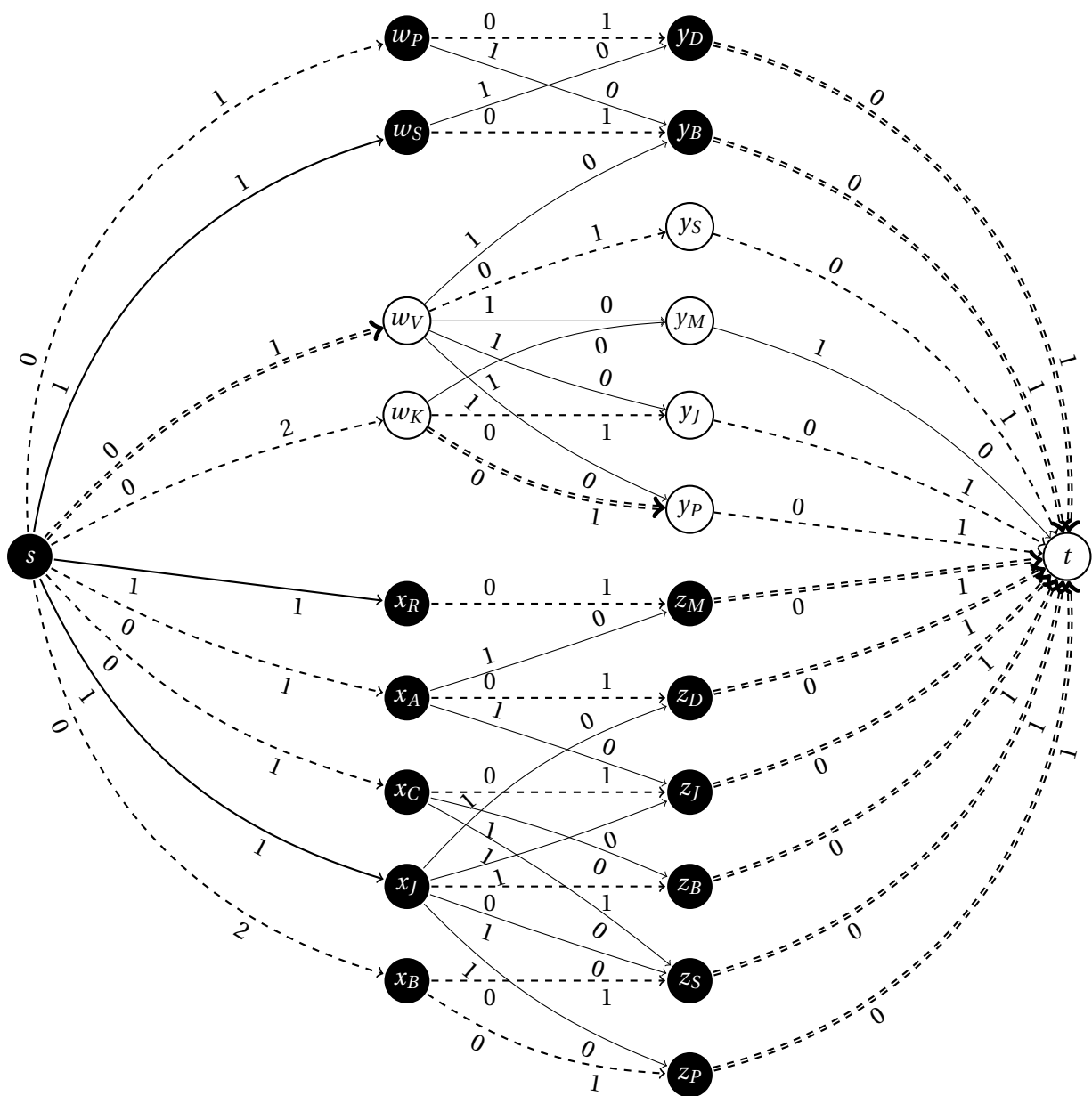
pretoku povezava  $y_M \rightarrow t$  ni zasičena, sledi, da ne obstaja zelena razdelitev sendvičev. Ker so pa vse povezave  $x_j \rightarrow z_k$  zasičene ( $j \in \{A, B, C, J, R\}$ ,  $k \in \{B, D, J, M, P, S\}$ ), sledi, da zelena razdelitev sokov obstaja.



Slika 107: Omrežje in prvi korak za nalogo 8.11(b).



Slika 108: Drugi korak za nalogo 8.11(b).



Slika 109: Maksimalni prerez in minimalni pretok za nalogo 8.11(b).

**Naloga 8.12.**

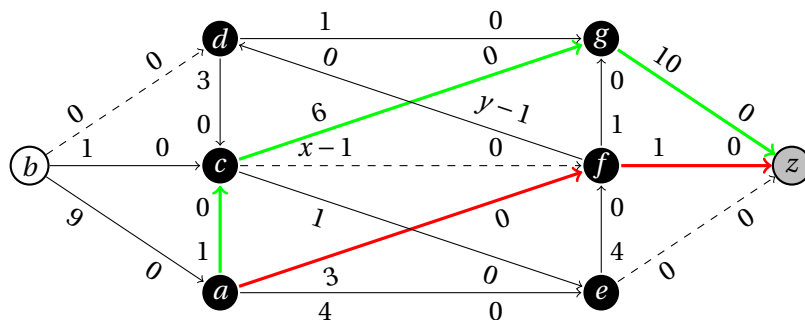
Zapišimo želeni algoritem.

```

function NAČRTRPOV( $n, m, L$ )
  if kateri od vnosov v  $L$  se ponovi then
    return Izvedba ni možna – lokacije bank niso vse različne
  end if
   $V \leftarrow \{s, t\} \cup \{u_{ij}, v_{ij} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ 
   $E \leftarrow \{s \rightarrow u_{ij} \mid (i, j) \in L\}$ 
     $\cup \{u_{ij} \rightarrow v_{ij} \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ 
     $\cup \{v_{ij} \rightarrow u_{i-1,j}, v_{i-1,j} \rightarrow u_{ij} \mid 2 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$ 
     $\cup \{v_{ij} \rightarrow u_{i,j-1}, v_{i,j-1} \rightarrow u_{ij} \mid 1 \leq i \leq n, 2 \leq j \leq m\}$ 
     $\cup \{v_{i1} \rightarrow t, v_{im} \rightarrow t \mid 2 \leq i \leq n-1\}$ 
     $\cup \{v_{1j} \rightarrow t, v_{nj} \rightarrow t \mid 2 \leq j \leq m-1\}$ 
     $\cup \{v_{ij} \rightarrow t \mid i \in \{1, n\}, j \in \{1, m\}\}$ 
   $C \leftarrow$  slovar kapacitet z vrednostjo 1 za vsako povezavo iz  $E$ 
   $F \leftarrow$  FORDFULKERSON( $G = (E, V), C, s, t$ )      vrne slovar pretokov za vsak  $e \in E$ 
  if  $\exists (i, j) \in L : F[s \rightarrow u_{ij}] < 1$  then
    return Izvedba ni možna – ni mogoče zagotoviti disjunktnih izhodnih poti
  end if
   $S \leftarrow$  prazen seznam
  for  $(i, j) \in L$  do                                sestavimo poti
     $P \leftarrow$  prazen seznam
     $x \leftarrow u_{ij}$ 
    while  $x \neq t$  do
       $P.append((i, j))$ 
       $i', j' \leftarrow$  indeksa, da je  $x = u_{i'j'}$ 
       $x' \leftarrow$  vozlišče, da je  $F[v_{i'j'} \rightarrow x'] = 1$ 
       $x, i, j \leftarrow x', i', j'$ 
    end while
     $S.append(P)$ 
  end for
  return  $S$ 
end function

```

Algoritem sestavi usmerjen graf, v katerem je križišče na lokaciji  $(i, j)$  predstavljeno s povezavo  $u_{ij} \rightarrow v_{ij}$ , med sosednjima križiščema  $(i, j)$  in  $(i', j')$  pa sta povezavi  $v_{ij} \rightarrow u_{i'j'}$  in  $v_{i'j'} \rightarrow u_{ij}$ . Poleg tega so v grafu še povezave od izvora  $s$  do vozlišča  $u_{ij}$  za vsako banko na križišču  $(i, j)$ , ki jo želijo oropati, in povezave  $v_{ij}$  do ponora  $t$  za vsako križišče  $(i, j)$  na robu centra. Ker imajo vse povezave kapaciteto 1, bo mogoče skozi vsako križišče potovati največ enkrat – tako bo mogoče tudi vsako ulico uporabiti največ enkrat. Maksimalen pretok bo  $|L|$  (ali ekvivalentno, pretok po povezavi  $s \rightarrow u_{ij}$  bo 1 za vsak  $(i, j) \in L$ ) natanko tedaj, ko je mogoče za vsako banko najti pot iz centra, ne da bi se te poti srečale v kakšnem križišču.



Slika 110: Omrežje in prvi korak za nalogo 8.13(a).

### Naloga 8.13.

Delali bomo z omrežjem, v katerem je kapaciteta povezav za 1 manjša od nosilnosti ustreznega rova.

- (a) Začetno omrežje je prikazano na sliki 110, kjer sta prikazani tudi povečujoči poti  $a \rightarrow f \rightarrow z$  in  $a \rightarrow c \rightarrow g \rightarrow z$  s kapaciteto 1. Naslednji dve poti,  $a \rightarrow e \rightarrow f \rightarrow g \rightarrow z$  in  $a \rightarrow f \rightarrow d \rightarrow g \rightarrow z$ , prav tako s kapaciteto 1, sta prikazani na sliki 111. Tako dobimo omrežje s slike 112, iz katerega je razvidno, da je maksimalni pretok 4. Organizatorji lahko torej po trasi spustijo 4 škrate, npr. po vsaki od prej omenjenih poti po enega.
- (b) Iz slike 112 je razvidno, da gre povezava  $c \rightarrow f$  v nasprotni smeri minimalnega prereza, tako da s povečevanjem njene kapacitete ne bomo povečali maksimalnega pretoka, medtem ko je povezava  $f \rightarrow d$  v minimalnem prerezu. Za primer  $y > 2$  je prikazana je povečujoča pot  $a \rightarrow e \rightarrow f \rightarrow d \rightarrow c \rightarrow g \rightarrow z$ , po kateri lahko pretok povečamo za največ 3.

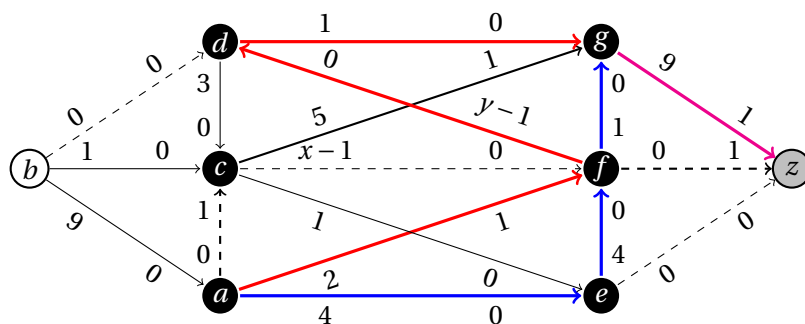
Dobljeno omrežje za primer  $y \geq 5$  je prikazano na sliki 113. Opazimo, da lahko v primeru  $y = 5$  v prikazanem minimalnem prerezu povezavi  $d \rightarrow c$  in  $d \rightarrow g$  nadomestimo s povezavo  $f \rightarrow d$ . Tako vidimo, da se nam vrednost  $y$  izplača povečati na največ 5 – ker je bila predhodna vrednost enaka 2, to ustreza 30 dnevom dela. Tedaj bodo organizatorji lahko spustili še 3 škrate po prej omenjeni poti, s čimer bodo lahko število udeležencev povečali na 7.

### Naloga 8.14.

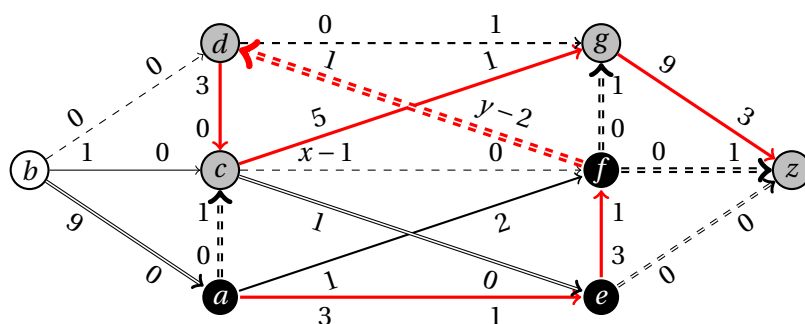
Naj bo  $G = (V, E)$  graf, ki predstavlja naše omrežje, pri čemer velja  $s, t \in V$ . Definirajmo omrežje  $G' = (V', E')$ , kjer je

$$V' = \{s = v_s, t = u_t\} \cup \{u_x, v_x \mid x \in V \setminus \{s, t\}\} \quad \text{in} \\ E' = \{v_x \rightarrow u_y \mid x \rightarrow y \in E\} \cup \{u_x \rightarrow v_x \mid x \in V \setminus \{s, t\}\},$$

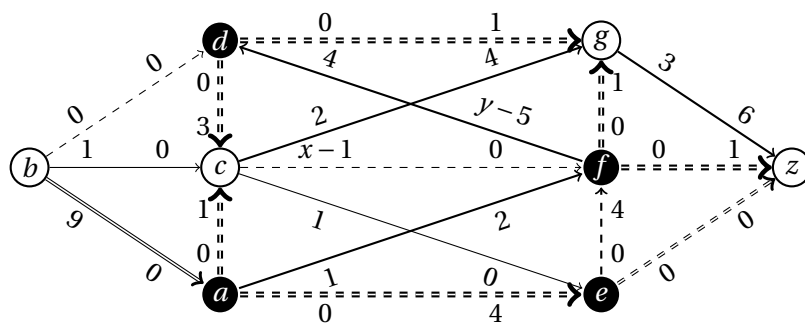
povezave  $v_x \rightarrow u_y$  ( $x \rightarrow y \in E$ ) imajo kapaciteto  $\infty$ , povezave  $u_x \rightarrow v_x$  ( $x \in V \setminus \{s, t\}$ ) pa imajo kapaciteto 1. Maksimalni pretok v omrežju ustreza številu strežnikov, ki



Slika 111: Drugi korak za nalogo 8.13(a).



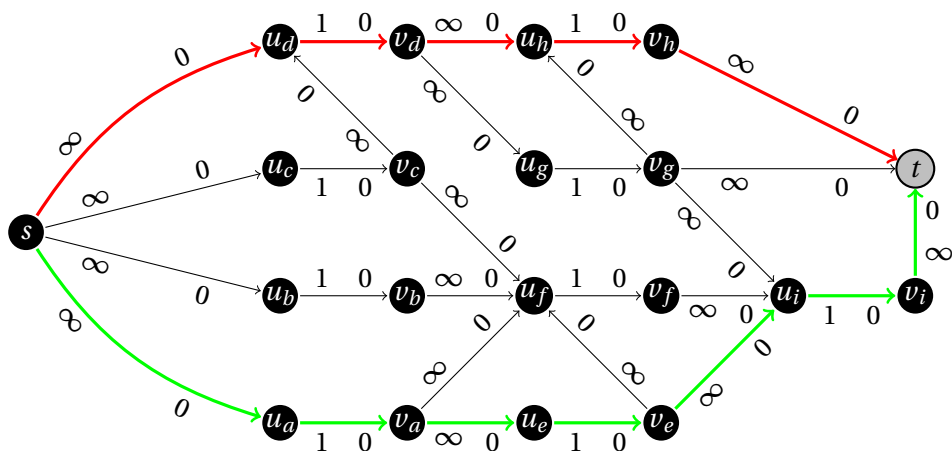
Slika 112: Maksimalni pretok in minimalni prerez za nalogo 8.13(a) ter povečujoča pot pri  $y > 2$ .



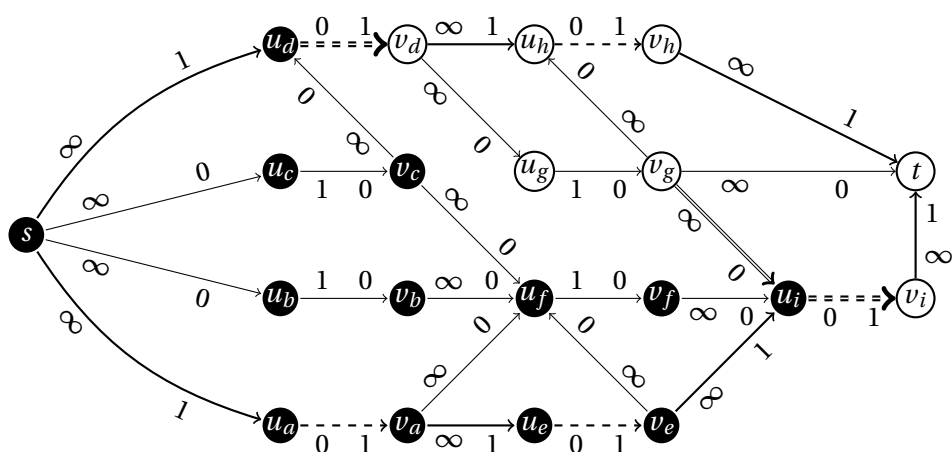
Slika 113: Maksimalni pretok in minimalni prerez za nalogo 8.13(b).

jih moramo onemogočiti, da prekinemo komunikacijo od  $s$  do  $t$ , minimalni prerez pa vsebuje povezave  $u_x \rightarrow v_x$  za tiste strežnike  $x$ , ki jih moramo onemogočiti.

Omrežje za graf s slike 41 je prikazano na sliki 114, kjer sta prikazani tudi povečujoči poti, s katerima pridemo do maksimalnega pretoka 2 in minimalnega prereza, prikazanega na sliki 115. Iz slike je razvidno, da moramo za prekinitev komunikacije od  $s$  do  $t$  onemogočiti strežnika  $d$  in  $i$ .



Slika 114: Omrežje in povečujoče poti za nalogo 8.14.



Slika 115: Maksimalni pretok in minimalni prerez za nalogo 8.14.

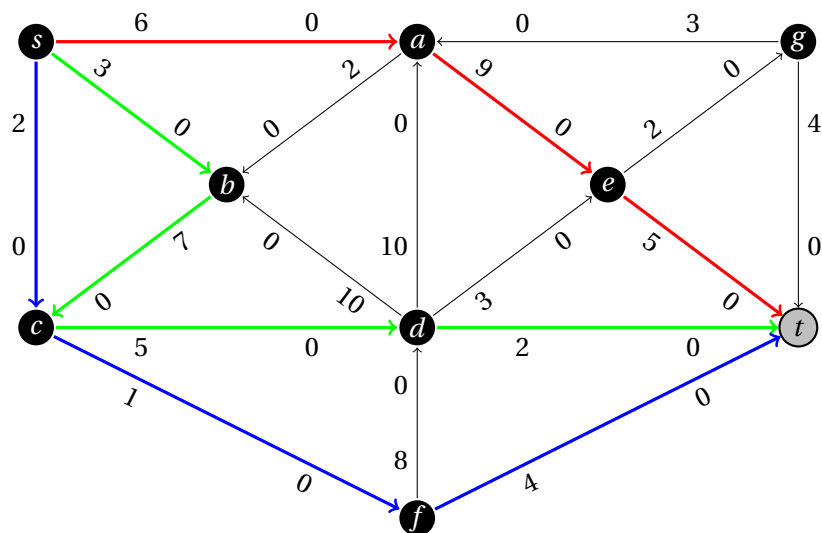
#### Naloga 8.15.

Poiščemo disjunktne povečujoče poti. Postopek reševanja je prikazan na slikah 116, 117, 118 in 119. Dobimo maksimalni pretok  $6 + 2 + 2 = 2 + 5 + 1 + 2 = 10$ .

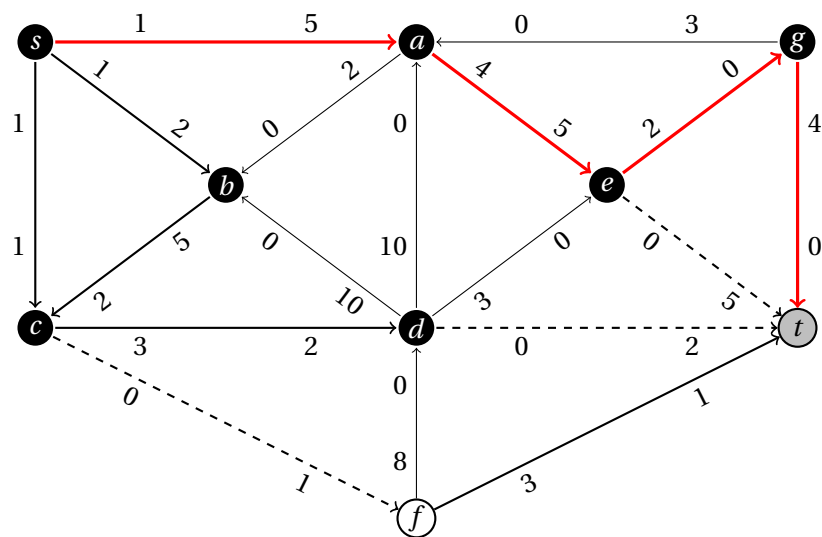
#### Naloga 8.16.

Poiščemo disjunktne povečujoče poti. Postopek reševanja je prikazan na slikah 120, 121 in 122. Dobimo maksimalni pretok  $2 + 3 + 2 + 3 = 1 + 4 + 4 + 1 = 10$ .





Slika 116: Prvi korak za nalogo 8.15.

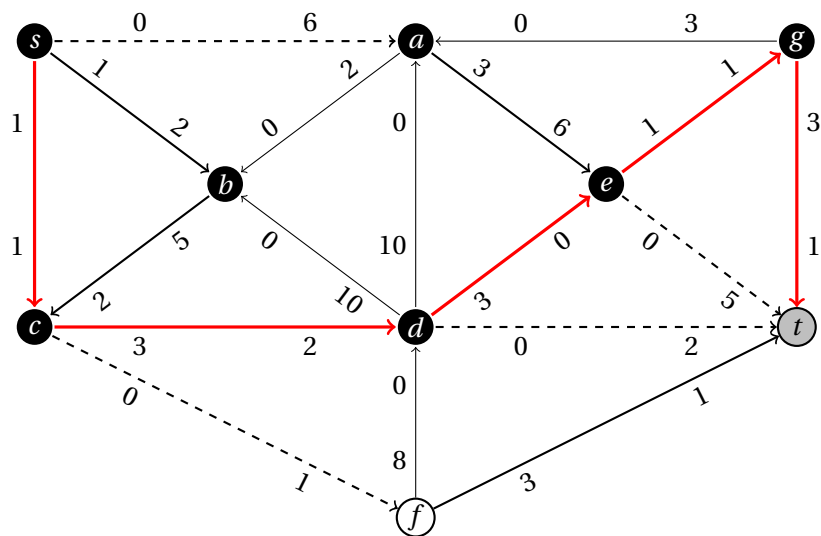


Slika 117: Drugi korak za nalogo 8.15.

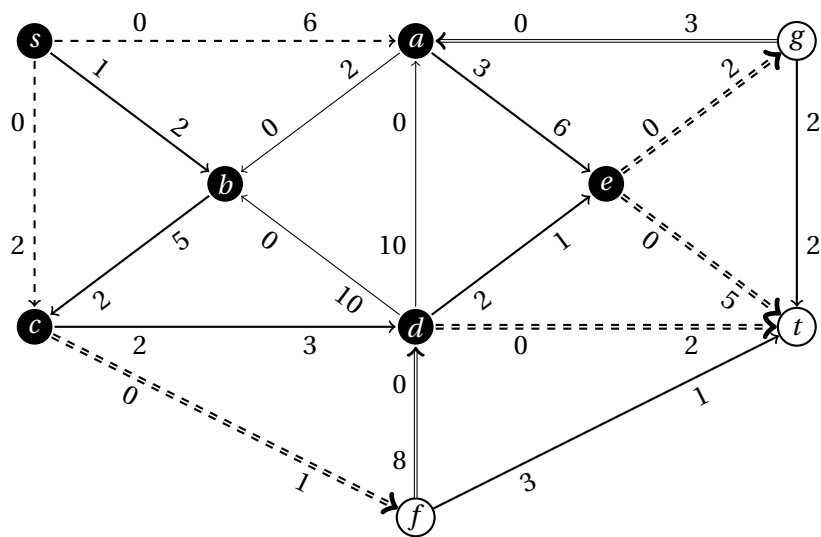
### Naloga 8.17.

Najprej poiščemo maksimalni pretok za  $\alpha = 0$  (tj., brez povezave s parametrom), glej sliko 123. Dobimo maksimalni pretok  $0 + 3 = 3 + 0 + 0 = 3$ , glej sliko 124.

Za  $\alpha > 0$  poiščemo povečujočo pot. Če je  $0 < \alpha \leq 3$ , povečamo pretok po povečujoči poti za  $\alpha$  in tako dobimo maksimalen pretok  $p^* = \alpha + 3$  ( $3 < p^* \leq 6$ ), saj sta obe povezavi iz izvora zasičeni, glej sliko 125. V nasprotnem primeru ( $\alpha > 3$ ) pretok povečamo za 3 in poiščemo novo povečujočo pot.



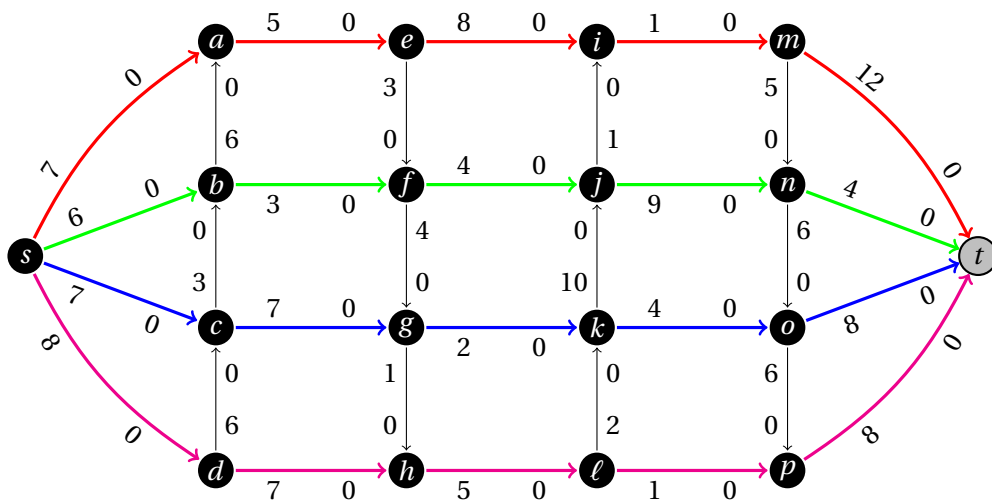
Slika 118: Tretji korak za nalogo 8.15.



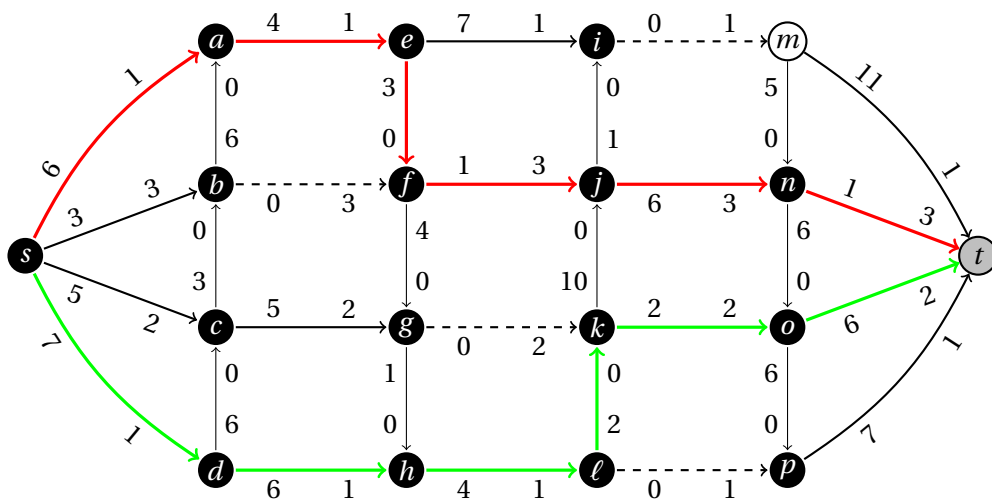
Slika 119: Maksimalni pretok in minimalni prerez za nalogo 8.15.

Če je  $3 < \alpha \leq 5$ , povečamo pretok po povečujoči poti za  $\alpha - 3$  in tako dobimo maksimalen pretok  $p^* = \alpha + 3$  ( $6 < p^* \leq 8$ ), saj sta obe povezavi iz izvora zasičeni, glej sliko 126. V nasprotnem primeru ( $\alpha > 5$ ) pretok povečamo za 2.

Za  $\alpha > 5$  dobimo maksimalni pretok  $5 + 3 = 3 + 2 + 3 = 8$ , glej sliko 127.



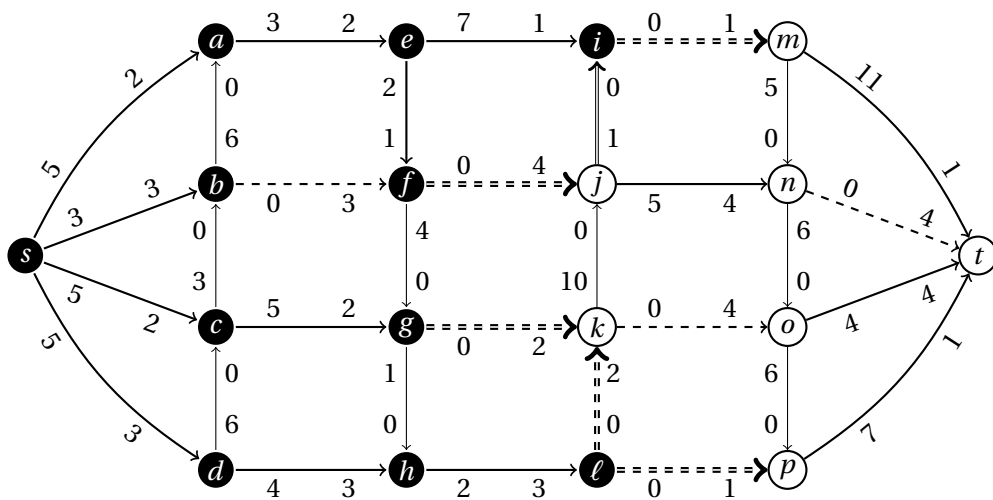
Slika 120: Prvi korak za nalogo 8.16.



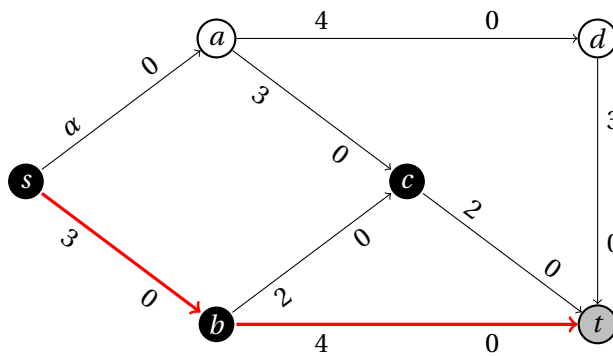
Slika 121: Drugi korak za nalogo 8.16.

### Naloga 8.18.

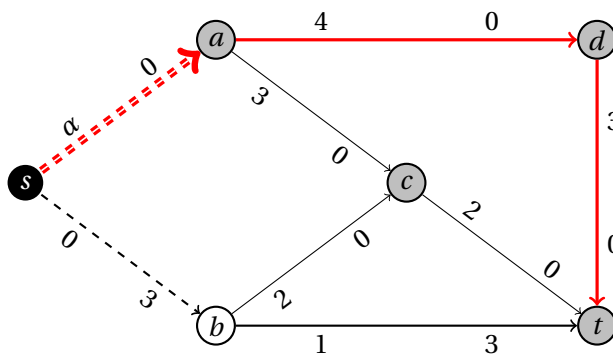
Poiščemo disjunktne povečujoče poti. Postopek reševanja je prikazan na slikah 128, 129, 130 in 131. Dobimo maksimalni pretok  $5 + 10 + 8 = 8 + 4 + 3 + 8 = 23$ . Če želimo povečati pretok, lahko povečamo kapaciteto take povezave v minimalnem prerezu, da je mogoče od njenega končnega vozlišča priti do vozlišča  $T$  po nezasičenih (ali obratnih nepraznih) povezavah. Na grafu s slike 131 so taka vozlišča označena s sivo barvo, povezave, katerih kapaciteto se nam izplača povečati, pa z vijolično barvo.



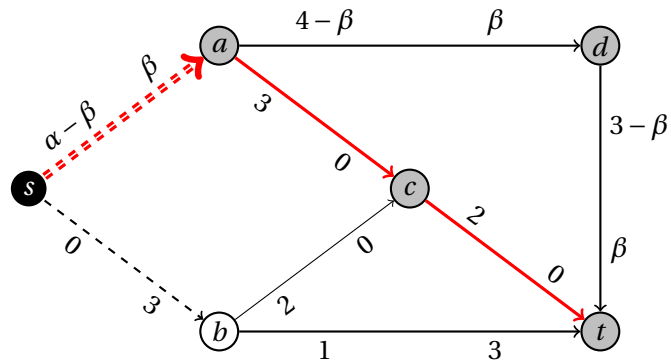
Slika 122: Maksimalni pretok in minimalni prerez za nalogo 8.16.



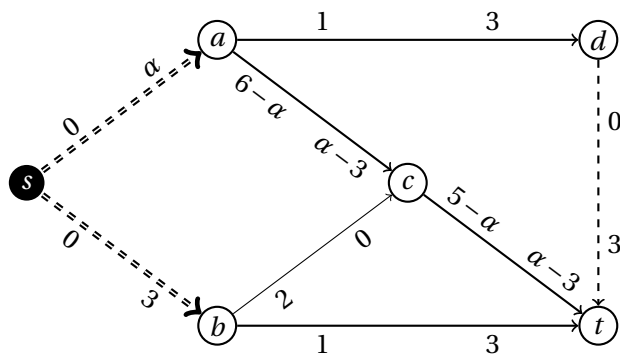
Slika 123: Prvi korak za nalogo 8.17.



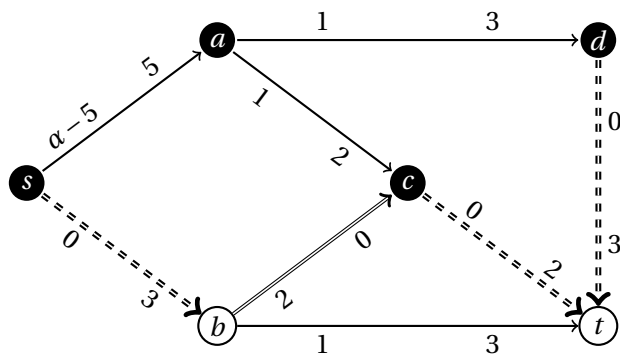
Slika 124: Maksimalni pretok pri  $\alpha = 0$  in drugi korak pri  $\alpha > 0$  za nalogo 8.17.



Slika 125: Maksimalni pretok pri  $0 < \alpha = \beta \leq 3$  in tretji korak pri  $\alpha > \beta = 3$  za nalogo 8.17.



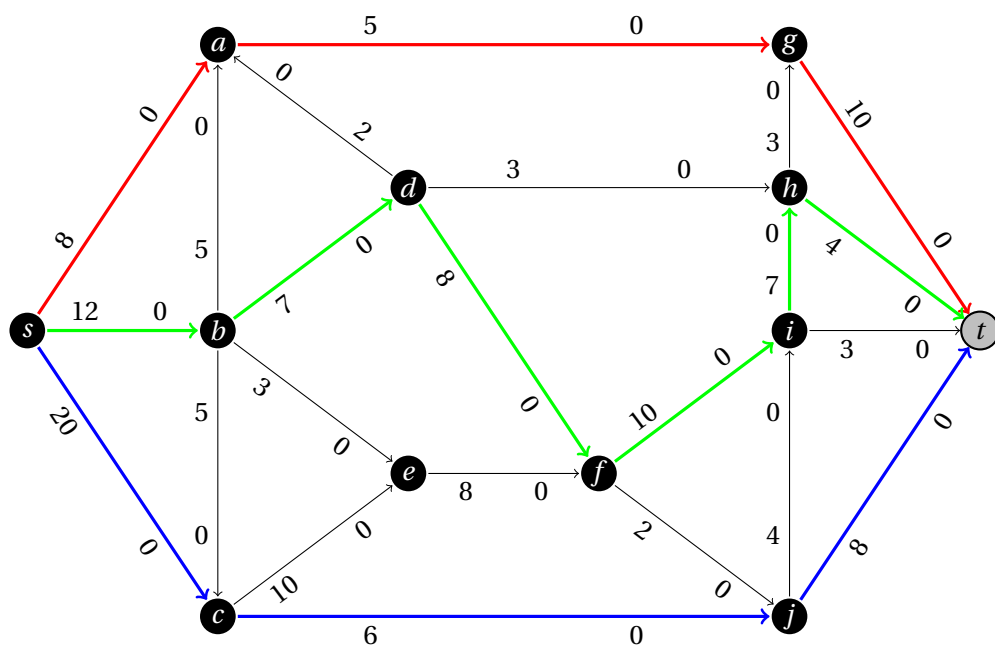
Slika 126: Maksimalni pretok pri  $3 < \alpha \leq 5$  za nalogo 8.17.



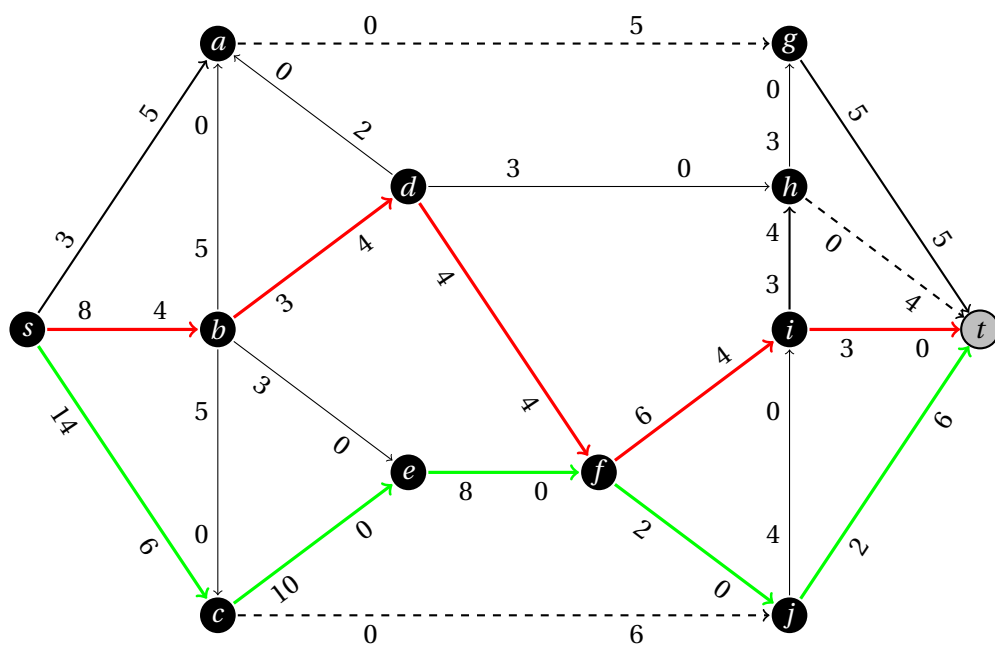
Slika 127: Maksimalni pretok pri  $\alpha > 5$  za nalogo 8.17.

### Naloga 8.19.

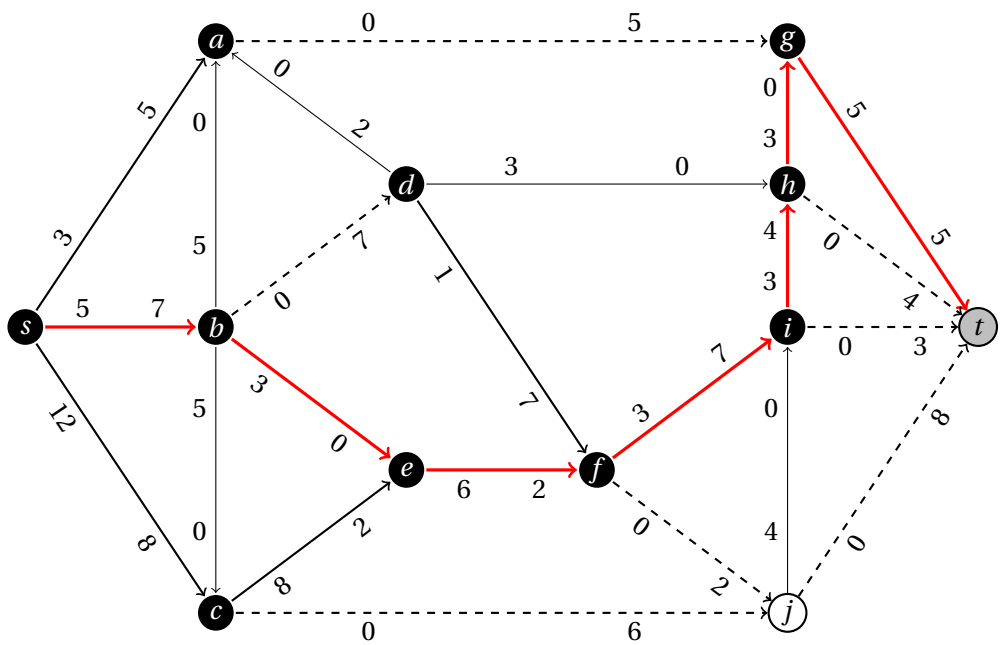
Če najdemo povečujočo pot z najmanjšo kapaciteto  $\infty$ , je problem neomejen. Postopek reševanja je prikazan na slikah 132, 133 in 134. Povečujoče poti s kapaciteto  $\infty$  ne najdemo, dobimo pa maksimalen pretok  $3 + 44 + 13 = 44 + 16 = 60$ .



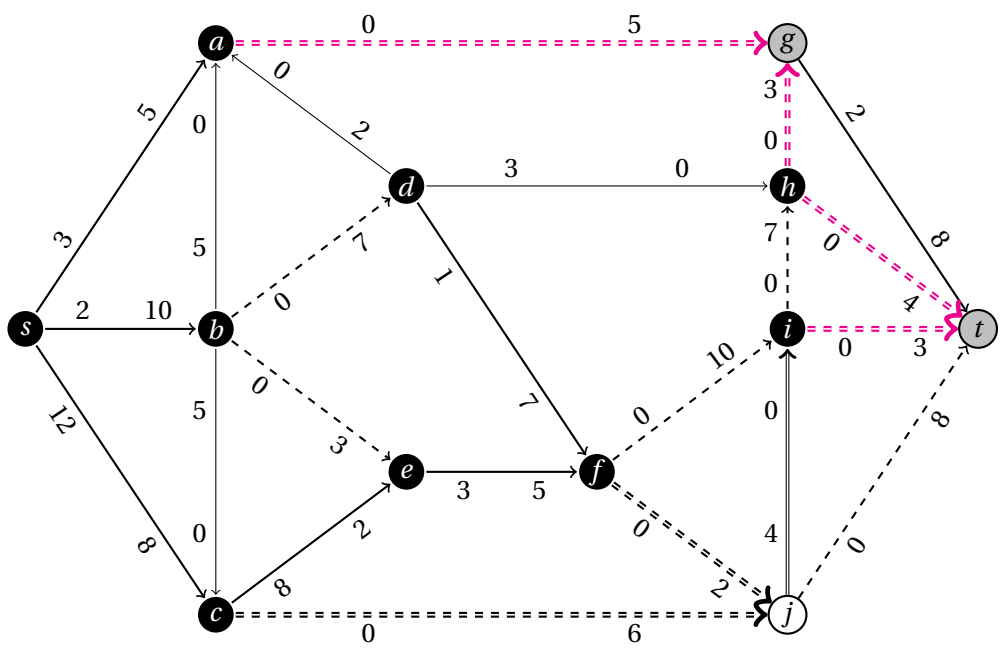
Slika 128: Prvi korak za nalogo 8.18.



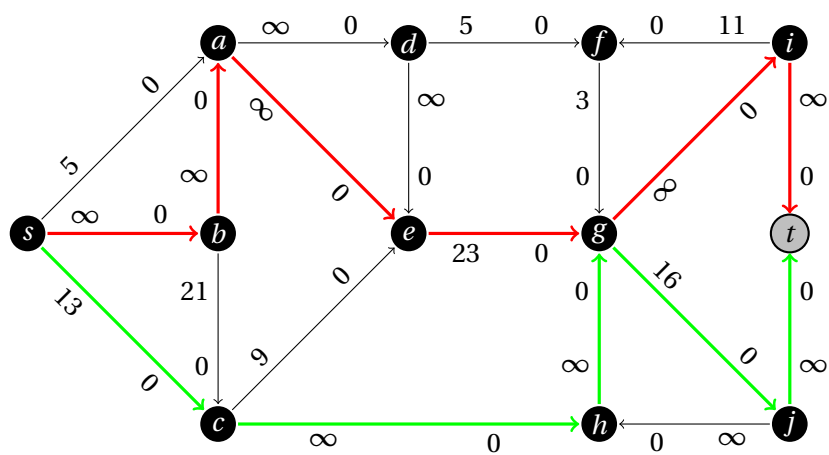
Slika 129: Drugi korak za nalogo 8.18.



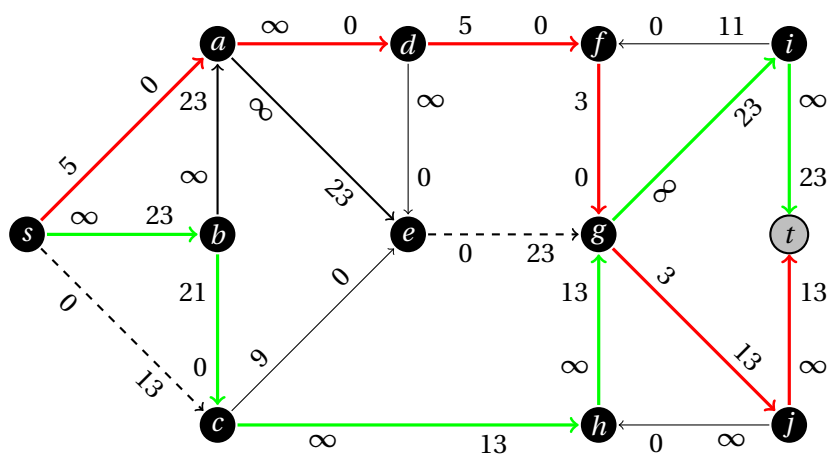
Slika 130: Tretji korak za nalogo 8.18.



Slika 131: Maksimalni pretok in minimalni prerez za nalogo 8.18.

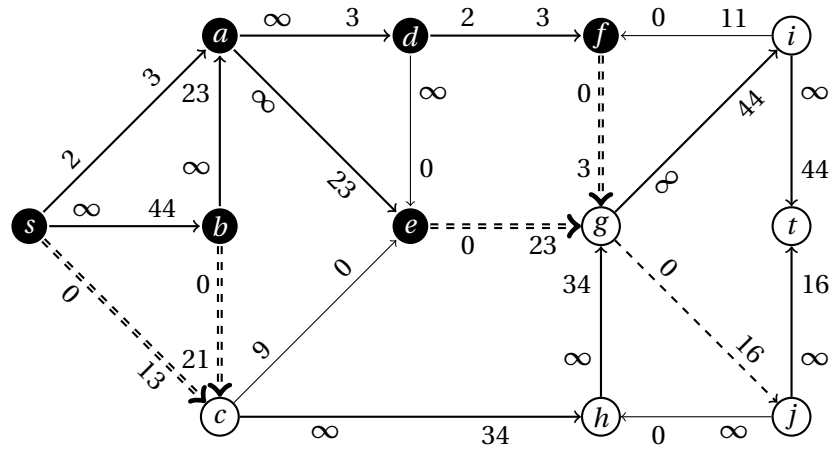


Slika 132: Prvi korak za nalogo 8.19.



Slika 133: Drugi korak za nalogo 8.19.





Slika 134: Maksimalni pretok in minimalni prerez za nalogo 8.19.

## 2.9 Razdelitve

### Naloga 9.1.

Celoto predstavimo z intervalom  $[0, 1]$ . Prvi igralec izbere vrednosti  $a_1, a_2, a_3$  ( $0 =: a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4 := 1$ ) tako, da intervali  $[0, a_1)$ ,  $[a_1, a_2)$ ,  $[a_2, a_3)$  in  $[a_3, 1]$  po njegovi ceni predstavljajo četrtno celote. Drugi igralec izbere indeks  $i \in \{1, 2, 3\}$ , tako da po njegovi ceni eden od intervalov  $[a_{i-1}, a_i]$  in  $[a_i, a_{i+1})$  predstavlja vsaj četrtno celote, drugi pa največ četrtno celote. Prvi igralec sedaj določi nepadajoči zvezni funkciji  $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , za kateri velja  $f(0) = a_{i-1}$ ,  $f(1) = g(0) = a_i$  in  $g(1) = a_{i+1}$ , ter interval  $[f(x), g(x)]$  za vsak  $x \in [0, 1]$  predstavlja četrtno celote po ceni prvega igralca. Drugi igralec nato izbere tak  $x \in [0, 1]$ , da interval  $[f(x), g(x)]$  predstavlja četrtno celote tudi po njegovi ceni (tak  $x$  obstaja po izreku o vmesnih vrednostih). Prvi igralec tako dobi  $[f(x), g(x)]$ , drugi igralec pa  $[0, f(x)) \cup [g(x), 1]$ .

### Naloga 9.2.

Najprej z madžarsko metodo z utežmi poiščemo tako razdelitev predmetov, da bo skupna cena čim večja.

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} 11 & 9 & 19 & 14 & 11 \\ 4 & 10 & 15 & 20 & 12 \\ 6 & 5 & 5 & 17 & 9 \\ 20 & 23 & 6 & 3 & 18 \\ 10 & 18 & 23 & 9 & 10 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 8 & 10 & 0 & 5 & 8 \\ 16 & 10 & 5 & 0 & 8 \\ 11 & 12 & 12 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 17 & 20 & 5 \\ 13 & 5 & 0 & 14 & 13 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 10 & \underline{0} & \underline{5} & 3 \\ 13 & 10 & \underline{5} & \underline{0} & 3 \\ 8 & 12 & \underline{12} & \underline{0} & 3 \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{17} & \underline{20} & \underline{0} \\ 10 & 5 & \underline{0} & \underline{14} & 8 \end{bmatrix} \rightarrow \\
 & \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 7 & \underline{0} & \underline{5} & \underline{0} \\ 10 & 7 & \underline{5} & \underline{0} & \underline{0} \\ 5 & 9 & \underline{12} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{20} & \underline{23} & \underline{0} \\ 7 & 2 & \underline{0} & \underline{14} & \underline{5} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \underline{0} & 5 & 0 & 5 & 0 \\ 8 & 5 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 22 & 25 & 2 \\ 5 & 0 & 0 & 14 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \underline{11} & 9 & 19 & 14 & 11 \\ 4 & 10 & 15 & \underline{20} & 12 \\ 6 & 5 & 5 & 17 & \underline{9} \\ 20 & \underline{23} & 6 & 3 & 18 \\ 10 & 18 & \underline{23} & 9 & 10 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Dobimo razdelitev predmetov s skupno ceno 86.

Da bomo predmete razdelili brez zavisti, bomo osebi  $j$  ( $1 \leq j \leq 5$ ) dodelili popust  $d_j$ . Smatramo, da oseba  $i$  zavida osebi  $j$  ( $1 \leq i, j \leq 5$ ), če je razlika med vrednostjo dodeljenega predmeta po ceni osebe  $i$  in plačano vrednostjo večja pri osebi  $j$  kot pri osebi  $i$ . Definirajmo torej

$$a_{ij} = b_{ij} - b_{jj} + d_j \quad (1 \leq i, j \leq 5),$$

kjer je  $b_{ij}$  cenev predmeta, dodeljenega osebi  $j$ , s strani osebe  $i$ . Opazimo, da velja  $a_{jj} = d_j$  ( $1 \leq j \leq 5$ ). Iščemo matriko  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^5$  z minimalno vsoto diagonalnih elementov, za katero velja  $a_{ij} \leq a_{ii}$  ( $1 \leq i, j \leq 5$ ).

Postopali bomo tako, da bomo na začetku popuste nastavili na 0, nato pa za osebi  $i, j$  z  $a_{ij} > a_{ii}$  povečali popust osebe  $i$  za  $a_{ij} - a_{ii}$  in postopek ponavljali,

dokler zavisti več ne bo.

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -6 & \underline{2} & -14 & -4 \\ -7 & \mathbf{0} & \underline{3} & -13 & -8 \\ -5 & -3 & \mathbf{0} & -18 & -18 \\ \underline{9} & -17 & \underline{9} & \mathbf{0} & -17 \\ -1 & -11 & \underline{1} & -5 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{2} & -3 & 2 & -5 & -3 \\ -5 & \mathbf{3} & 3 & -4 & -7 \\ -3 & 0 & \mathbf{0} & -9 & -17 \\ \underline{11} & -14 & 9 & \mathbf{9} & -16 \\ 1 & -8 & 1 & \underline{4} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \rightarrow \\
 & \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{2} & -3 & 2 & -3 & 0 \\ -5 & \mathbf{3} & 3 & -2 & -4 \\ -3 & 0 & \mathbf{0} & -7 & -14 \\ 11 & -14 & 9 & \mathbf{11} & -13 \\ 1 & -8 & 1 & \underline{6} & \mathbf{4} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{2} & -3 & 2 & -3 & 2 \\ -5 & \mathbf{3} & 3 & -2 & -2 \\ -3 & 0 & \mathbf{0} & -7 & -12 \\ 11 & -14 & 9 & \mathbf{11} & -11 \\ 1 & -8 & 1 & 6 & \mathbf{6} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Prvi osebi bomo torej dali prvi predmet po ceni  $11 - 2 = 9$ , drugi osebi četrti predmet po ceni  $20 - 3 = 17$ , tretji osebi peti predmet po ceni  $9 - 0 = 9$ , četrti osebi drugi predmet po ceni  $23 - 11 = 12$ , peti osebi pa tretji predmet po ceni  $23 - 6 = 17$ . Skupni zaslužek iz nadomestil je tako 64.

### Naloga 9.3.

- (a) Naj bo  $v[i][j]$  ( $1 \leq i \leq 2n$ ,  $1 \leq j \leq n$ )  $j$ -ta preferenca  $i$ -tega vodiča,  $d[j][i]$  ( $1 \leq i \leq 2n$ ,  $1 \leq j \leq n$ ) rang  $i$ -tega vodiča pri preferencah agencije za  $j$ -to destinacijo. Uporabili bomo varianto Gale-Shapleyevega algoritma, ki bo vsaki destinaciji dodelila dva vodiča.

**function** STABILNADODELITEV( $v[1 \dots 2n][1 \dots n], d[1 \dots n][1 \dots 2n]$ )

$Q \leftarrow [1, 2, \dots, 2n]$

$k \leftarrow$  seznam dolžine  $2n$  z vrednostmi 1

$M \leftarrow$  matrika velikosti  $n \times 2$  z vrednostmi NULL

**while**  $\neg Q.\text{isEmpty}()$  **do**

$i \leftarrow Q.\text{pop}()$

$j \leftarrow v[k[i]]$

$k[i] \leftarrow k[i] + 1$

$i' \leftarrow M[j][2]$

**if**  $i' = \text{NULL} \vee d[i] < d[i']$  **then**

**if**  $d[i] < d[M[j][1]]$  **then**

$M[j][2] \leftarrow M[j][1]$

$M[j][1] \leftarrow i$

**else**

$M[j][2] \leftarrow i$

**end if**

**if**  $i' \neq \text{NULL}$  **then**

$Q.\text{append}(i')$

**end if**

**else**

$Q.\text{append}(i)$

**end if**

**end while**

**return**  $M$

Q	k						M		
	A	B	C	Č	D	E	Budimpešta	Győr	Szeged
[A, B, C, Č, D, E]	1	1	1	1	1	1	[NULL, NULL]	[NULL, NULL]	[NULL, NULL]
[B, C, Č, D, E]	2	1	1	1	1	1	[NULL, NULL]	[NULL, NULL]	[A, NULL]
[C, Č, D, E]	2	2	1	1	1	1	[B, NULL]	[NULL, NULL]	[A, NULL]
[Č, D, E]	2	2	2	1	1	1	[B, NULL]	[C, NULL]	[A, NULL]
[D, E]	2	2	2	2	1	1	[B, Č]	[C, NULL]	[A, NULL]
[E, D]	2	2	2	2	2	1	[B, Č]	[C, NULL]	[A, NULL]
[D]	2	2	2	2	2	2	[B, Č]	[C, E]	[A, NULL]
[]	2	2	2	2	3	2	[B, Č]	[C, E]	[A, D]

Tabela 34: Potek izvajanja algoritma za nalogo 9.3(b).

#### end function

Ker se vsak od  $2n$  vodičev v vrsto Q doda največ  $n$ -krat, algoritem teče v času  $O(n^2)$ .

- (b) Izvedba algoritma STABILNADODELITEV pri danih podatkih je prikazana v tabeli 34. Budimpešto torej dodelimo Beli in Črtu, Győr Corini in Emi, Szeged pa Anisi in Dani.

#### Naloga 9.4.

Stabilno prirejanje, v katerem Mujo ni šef območja Hrvaške in BiH, ne obstaja. To lahko dokažemo tako, da predpostavimo, da imamo tako prirejanje, ter analiziramo možne primere in izpeljemo protislovje.

Denimo, da je Mujo šef območja Slovenije in Madžarske. Ker bi pri agenciji na tem mestu raje imeli Črta, bo ta moral biti šef območja z večjo preferenco, torej Srbije in Črne gore. V agenciji bi na tem mestu raje videli Žana, ki sta mu pa ostali le območji z nižjo preferenco. Prišli smo do protislovja.

Mujo torej ni šef območja Slovenije in Madžarske, pač pa območja z nižjo preferenco. Šef območja Slovenije in Madžarske je tako nekdo, ki ima pri agenciji višjo preferenco kot Mujo – tak je edino Črt. Za šefa območja Makedonije in Kosova bi na agenciji raje kot Muja imeli Šimeta – če je Mujo šef tega območja, je Šime šef območja z nižjo preferenco, protislovje. Mujo je torej šef območja Srbije in Črne gore, a bi v agenciji na tem mestu raje videli Žana, ki pa je potem šef območja z nižjo preferenco. Tako spet pridemo do protislovja, iz česar sklepamo, da stabilno prirejanje, v katerem Mujo ni šef območja Hrvaške in BiH, ne obstaja.

## Literatura

- [1] V. Batagelj in M. Kaufman, *Zbirka (deloma) rešenih nalog iz operacijskih raziskav. Druga poskusna izdaja*, 1997. <http://vlado.fmf.uni-lj.si/vlado/or/ORvaje.pdf>.
- [2] S. Dasgupta, C.H. Papadimitriou in U.V. Vazirani, *Algorithms*. McGraw-Hill Education, 2006.
- [3] F.S. Hillier in G.J. Lieberman, *Introduction to Operations Research. Seventh Edition*. McGraw-Hill Higher Education, 2001.
- [4] J. Povh in S. Pustavrh, *Zbirka rešenih nalog iz operacijskih raziskav*. Visoka šola za upravljanje in poslovanje, Novo mesto, 2001.
- [5] W.L. Winston, *Operations Research: Applications and Algorithms. Fourth Edition*. Thomson Learning, 2004.