

ANFÄNGERPRAKTIKUM 2015/2016

Das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises

Durchführung: 19.01.16

Clara RITTMANN¹
Anja BECK²

Betreuer:
Raffael NIEMCZYK

¹clara.rittmann@tu-dortmund.de

²anja.beck@tu-dortmund.de

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	2
1.1	Relaxationsphänomene allgemein	2
1.2	RC-Kreis mit Gleichspannungsquelle	2
1.3	RC-Kreis mit Wechselspannungsquelle	3
2	Aufbau und Ablauf des Experiments	5
3	Auswertung	6
3.1	Berechnung der Zeitkonstanten	6
3.1.1	... durch die Aufladekurve des Kondensators	6
3.1.2	... durch die frequenzabhängige Amplitude bei periodischer Anregung	9
3.1.3	... durch die frequenzabhängige Phasenverschiebung	11
3.2	Polarplot der Amplitude über die Phasendifferenz	13
3.3	RC-Glied als Integrator	14
4	Diskussion	16

1 Theorie

Dieses Mal ist die Theorie verhältnismäßig lang geworden. Ich finde, dass inhaltlich aber nicht mehr viel reduzierbar ist. Findest Du die Theorie zu ausführlich?

Ich finde sie nicht zu lang. Es sind einfach viele Unterpunkte, die alle wichtig sind. Das einzige, was man meiner Meinung nach noch herauslassen könnte ist die Herleitung zum Phasenvershub (Formeln 11 bis 14). Aber spannend finde ich das schon.

1.1 Relaxationsphänomene allgemein

Hier bin ich noch überhaupt nicht zufrieden mit den Variablennamen.

Der Vorgang, dass ein System aus seinem Ausgangszustand A_0 ausgelenkt wird und dann ohne Oszillation zu eben diesem zurückkehrt, wird Relaxation genannt. Je weiter die veränderte Größe A dabei von ihrem Ausgangs- bzw. Endzustand $A_\infty \rightarrow A_0$ entfernt ist, desto schneller ändert sie sich. Häufig ist dieser Zusammenhang sogar direkt proportional

$$\frac{dA}{dt}(t) = b(A(t) - A_\infty) . \quad (1)$$

Die Lösung dieser Gleichung ist

$$A(t) = A_\infty + (A(0) - A_\infty)e^{bt} , \quad (2)$$

sie ist beschränkt, da sich aus dem Lösungsweg ergibt, dass $b < 0$.¹

Im Versuch wird ein RC-Kreis stellvertretend für einen beliebigen mechanischen Relaxationsvorgang betrachtet.

1.2 RC-Kreis mit Gleichspannungsquelle

Zunächst wird ein RC-Kreis mit einer Spannungsquelle $U_0 = \text{const}$ betrachtet. Mit der Maschenregel folgt

$$U_0 = U_C + U_R = \frac{Q}{C} + \dot{Q}R \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\dot{Q}(t)}_{\sim b} = -\underbrace{\frac{1}{RC}}_{\sim A_\infty} (Q(t) - CU_0) . \quad (4)$$

Die zweite Gleichung ist äquivalent zu (1). Die Lösung einer solchen Differenzialgleichung ist (siehe (2))

$$Q(t) = CU_0 + (Q(0) - CU_0)e^{-\frac{t}{RC}} . \quad (5)$$

Der als Zeitkonstante bezeichnete Term RC ist ein Maß dafür, wie stark das System danach strebt in seine Endposition zu gelangen. Je kleiner die Zeitkonstante ist, desto schneller

¹Nach: Versuchsanleitung zu V353: „Das Relaxationsverhalten eines RC-Kreises“, Anfängerpraktikum TU Dortmund, <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V353.pdf>, abgerufen am 20.01.2016 um 20:23 Uhr

Zum Lesen finde ich es angenehmer, wenn der Endzustand A_∞ heißt

Ja, ich auch, aber ich wollte betonen, dass es eben der eigentliche „Ruhezustand“ ist. Findest du das so OK?

konvergiert $Q(t)$ gegen seinen Endwert. „Konvergenz“ ist hier ein wichtiges Stichwort, denn theoretisch ist es unmöglich den Endwert zu erreichen.

Wird nun ein **Aufladevorgang** betrachtet, so ist $U_0 \neq 0$, da sonst keine Ladungen auf den Kondensator fließen könnten, und $Q(0) = 0$, der Kondensator soll also ungeladen sein. Daraus folgt, dass die Aufladung durch

$$Q(t) = CU_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) \quad (6)$$

beschrieben werden kann.

Bei einem **Entladevorgang** wird die Spannungsquelle vom Stromkreis getrennt, da der Kondensator sonst keine Ladung abgeben würde. Demnach ist $U_0 = 0$, der Anfangswert $Q(0)$ ist beliebig. Die Gleichung

$$Q(t) = Q(0)e^{-\frac{t}{RC}} \quad (7)$$

beschreibt die Entladung eines Kondensators.

1.3 RC-Kreis mit Wechselspannungsquelle

Nun wird ein RC-Kreis mit einer Wechselspannungsquelle $U(t) = U_0 \cos(\omega t)$ betrachtet. Ist

$$\omega \ll \frac{1}{RC} \quad (8)$$

gilt für die Spannung am Kondensator

$$U(t) \simeq U_C(t) . \quad (9)$$

Da die Auf- bzw. Entladung des Kondensators aber nicht beliebig schnell stattfindet, sondern durch die Zeitkonstante festgelegt ist, verursacht eine steigende Erregerfrequenz ω eine Phasenverschiebung zwischen $U(t)$ und $U_C(t)$. Außerdem sorgt sie dafür, dass der Kondensator sich nicht mehr vollständig aufladen kann, sodass auch die Amplitude U_{C0} abnimmt. Für die Kondensatorspannung gilt also

$$U_C = A(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega)) . \quad (10)$$

Wie in 1.2 kann auch hier die Maschenregel

$$U(t) = I(t)R + U_C(t) \quad (11)$$

angewandt werden und mit

$$I(t) = \dot{Q}(t) = C\dot{U}_C(t) \quad (12)$$

folgt

$$U(t) = C\dot{U}_C(t)R + U_C(t) \quad (13)$$

$$\Leftrightarrow U_0 \cos(\omega t) = -RC A \omega \sin(\omega t + \varphi) + A \cos(\omega t + \varphi) . \quad (14)$$

Können wir die Amplitude A nennen? Das hatte ich gestern in der Auswertung so gemacht und jetzt ist es in meinem Kopf drin...

OK. Erledigt.

Da diese Gleichung für alle t gelten muss, kann zur **Bestimmung von $\varphi(\omega)$** ein beliebiger Wert für ωt eingesetzt werden (z.B. $\frac{\pi}{2}$) und die Gleichung zu

$$\varphi(\omega) = \arctan(-\omega RC) \quad (15)$$

umgeformt werden. Bei der **Bestimmung der Amplitude A** wird genauso argumentiert. So folgt nach Umformen und unter Verwendung der Gleichung für $\varphi(\omega)$

$$A(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} . \quad (16)$$

Ist die anregende Frequenz sehr groß,

$$\omega \gg \frac{1}{RC} \quad \Leftrightarrow \quad \omega RC \gg 1 , \quad (17)$$

gilt

$$|U_C| \ll |U_R| \quad \text{und} \quad |U_C| \ll |U| . \quad (18)$$

Gleichung (11) bzw. (13) vereinfacht sich damit zu

$$U(t) = RC \dot{U}_C(t) \quad (19)$$

$$\Leftrightarrow U_C(t) = \frac{1}{RC} \int_0^t U(t') dt' . \quad (20)$$

Für hohe Frequenzen kann der RC-Kreis mit Wechselspannungsquelle demnach als Integrator genutzt werden.

2 Aufbau und Ablauf des Experiments

Zunächst soll die **Zeitkonstante** ermittelt werden. Dazu werden mit einer Schaltung nach Abbildung VERWEIS die Auf- und Entladungskurven auf dem Oszilloskop visualisiert. Mit Hilfe der CURSOR-Funktion des Oszilloskops wird dann bei einer Aufladekurve der Endwert bestimmt und für verschiedene Zeitpunkte t_i der Wert $U(t_i)$ abgelesen.

Danach wird mit Schaltung VERWEIS die **Amplitude A** bestimmt. Hierfür werden am Sinus-Generator nacheinander verschiedene Frequenzen eingestellt, die einen großen Frequenzbereich überstreichen. Über die MEASURE-Funktion des Oszilloskops kann dann die jeweilige Amplitude angezeigt werden.

Die **Phasenverschiebung φ** zwischen der Erreger- und der Kondensatorfrequenz wird mit Schaltung VERWEIS gemessen. So können beide Spannungen am Oszilloskop angezeigt werden. Am Sinus-Generator werden dieselben Frequenzen, die zur Messung der Amplituden verwendet werden, eingestellt und mit der CURSOR-Funktion wird direkt die Phasenverschiebung als Δt zwischen den Nulldurchgängen gemessen.

Im letzten Versuchsteil soll die **Integratorfunktion** des RC-Kreises verifiziert werden. Dafür wird wiederum Schaltung VERWEIS verwendet. Der Spannungsgenerator generiert eine Rechteck-, eine Sinus- und eine Dreiecksspannung. Am Oszilloskop können dann die Spannung aus dem Generator und die integrierte Spannung aus dem RC-Kreis angezeigt werden.

3 Auswertung

3.1 Berechnung der Zeitkonstanten

3.1.1 ... durch die Aufladekurve des Kondensators

Um die Gleichung für die lineare Regression zu erhalten, wird Formel (6) umgeformt zu

$$\ln(U_C - U_0) = -\frac{1}{RC}t + \ln(U_0) \quad . \quad (21)$$

Die angelegte Spannung U_0 entspricht der Peak to Peak Amplitude der Rechteckspannung.

$$U_0 = 19.4 \text{ V}$$

In Abbildung 2 ist die Differenz der angelegten Spannung und der Kondensatorspannung $U_0 - U_C$ halblogarithmisch über die Zeit aufgetragen. Eine lineare Ausgleichsrechnung der Form

$$\ln(U_C - U_0) = m \cdot t + b \quad (22)$$

an die in Tabelle 1 dargestellten Werte mittels Python liefert:

$$m = (-1290.4 \pm 15.0) \text{ s} \quad (23)$$

$$b = 3.011 \pm 0.025 \quad (24)$$

$$\text{Zeitkonstante: } RC = -\frac{1}{m} = (0.775 \pm 0.009) \cdot 10^{-3} \text{ s} \quad (25)$$

$$\text{Berechnete Ausgangsspannung: } U_{\text{reg}} = e^b \text{ V} = (20.3 \pm 0.5) \text{ V} \quad (26)$$

Das große Problem ist: Wir haben das U_0 nicht bestimmt. Ich habe es einfach auf 20 Volt geschätzt. Es scheint jedoch etwas kleiner gewesen zu sein.

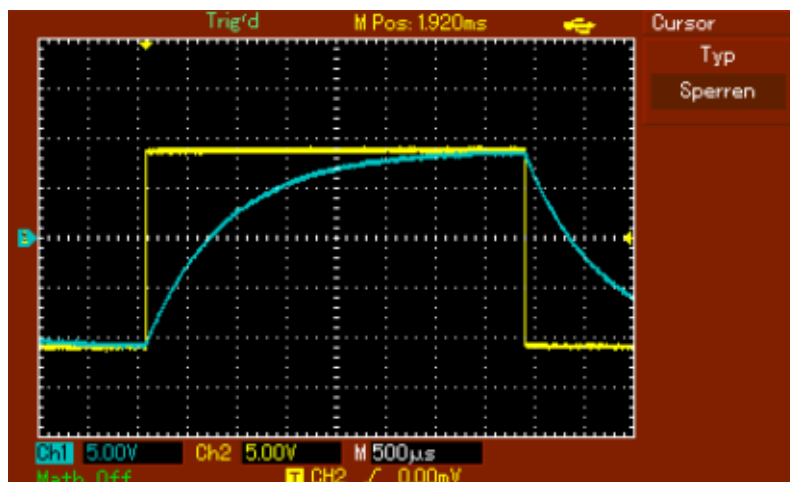


Abbildung 1: Aufladekurve des Kondensators bei angelegter Rechteckspannung

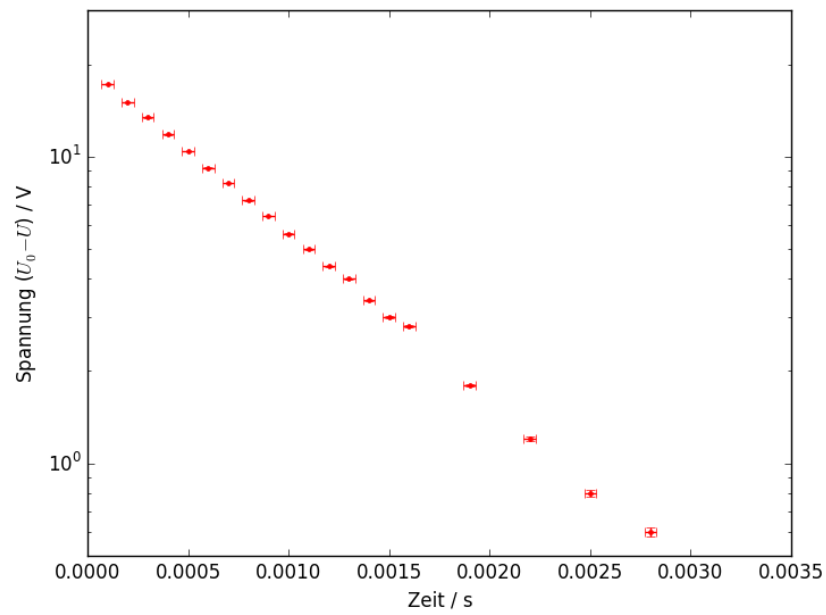


Abbildung 2: Spannungsdifferenzen mit Messunsicherheit halblogarithmisch aufgetragen

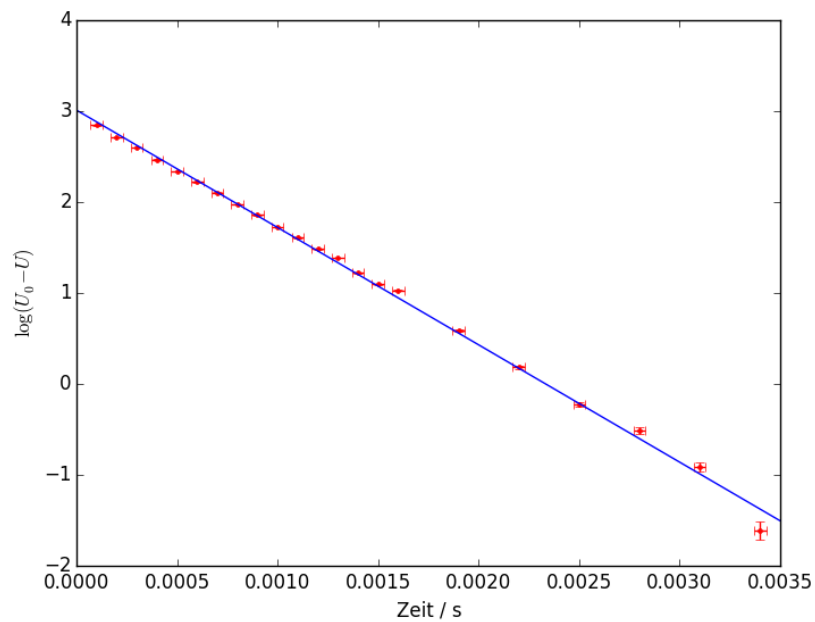


Abbildung 3: Ausgleichsgerade zur Bestimmung der Zeitkonstanten mit Messunsicherheiten

Tabelle 1: Werte der Aufladekurve

Zeit in ms	$\ln(U_0 - U)$	Fehler in $10^{-2} \ln(V)$
0.1	2.84	0.12
0.2	2.71	0.13
0.3	2.6	0.15
0.4	2.47	0.17
0.5	2.34	0.19
0.6	2.22	0.22
0.7	2.1	0.24
0.8	1.97	0.28
0.9	1.86	0.31
1.0	1.72	0.36
1.1	1.61	0.40
1.2	1.48	0.45
1.3	1.39	0.50
1.4	1.22	0.59
1.5	1.1	0.67
1.6	1.03	0.71
1.9	0.59	1.11
2.2	0.18	1.67
2.5	-0.22	2.50
2.8	-0.51	3.33
3.1	-0.92	5.00
3.4	-1.61	10.00

Messunsicherheit der Zeit: $3 \cdot 10^{-5} \text{ s}$

3.1.2 ... durch die frequenzabhängige Amplitude bei periodischer Anregung

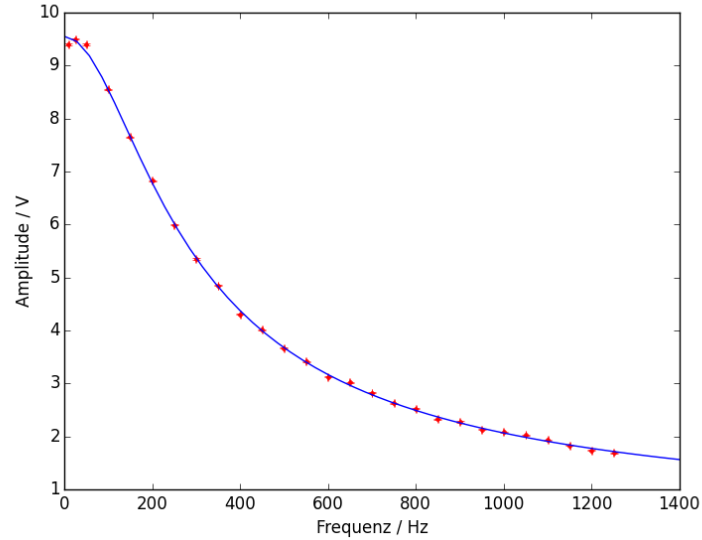


Abbildung 4: Amplitude in Abhängigkeit der Frequenz mit Messunsicherheiten

Noch Formel (16) ist ersichtlich, dass die Amplitude ungefähr mit $\frac{1}{\nu}$ abfällt. Hier wird mittels Python ein nichtlinearer Fit durchgeführt:

$$A(\nu) = \frac{b}{\sqrt{1 + (2\pi\nu)^2 e}} + d \quad (27)$$

Wobei b der Amplitude der angelegten Sinusfunktion sein sollte, e die Wurzel der Zeitkonstante und d einen Offsets des Gerätes angeben würde, falls es einen gibt. Die Werte aus Tabelle 2 liefern folgende Fit-Parameter:

$$b = (9.28 \pm 0.04) \text{ V} \quad (28)$$

$$e = (6.51 \pm 0.14) \cdot 10^{-7} \text{ s}^2 \quad (29)$$

$$d = (0.27 \pm 0.03) \text{ V} \quad (30)$$

$$RC = (0.807 \pm 0.009) \cdot 10^{-3} \text{ s} \quad (31)$$

Tabelle 2: Amplitude in Abhängigkeit von der Frequenz

Frequenz in Hz	Amplitude in V
10	9.40
25	9.50
50	9.40
100	8.55
150	7.65
200	6.83
250	5.99
300	5.35
350	4.85
400	4.30
450	4.01
500	3.66
550	3.42
600	3.12
650	3.02
700	2.82
750	2.62
800	2.52
850	2.33
900	2.28
950	2.13
1000	2.08
1050	2.03
1100	1.93
1150	1.83
1200	1.74
1250	1.68

Messunsicherheit der Frequenz 1 Hz
Messunsicherheit der Amplitude 0.01 V

3.1.3 ... durch die frequenzabhängige Phasenverschiebung

Auch in diesem Abschnitt wird durch eine nichtlineare Regression die Zeitkonstante bestimmt. Die Phasendifferenz zwischen Eingangs- und Ausgangssignal bei einer Sinusspannung sind nach Formel (15) Frequenzabhängig. Die Phasendifferenz wird mit Oszilloskop ermittelt, indem der Abstand a zweier Kurven bei bekannter Frequenz ν gemessen wird

$$\phi = 2\pi a \nu \quad . \quad (32)$$

Die Regression an den Amplitangens (Abb. 5) mit dem Parameter b erfolgt nach

$$\phi(\nu) = \arctan(-2\pi\nu b) \quad . \quad (33)$$

Und liefert mit den Werten aus Tabelle 3 die Zeitkonstante

$$RC = b = (-0.782 \pm 0.014) \cdot 10^{-3} \text{ s} \quad . \quad (34)$$

Wobei das negative Vorzeichen aus der Definition der Winkel entsteht und somit ignoriert werden kann.

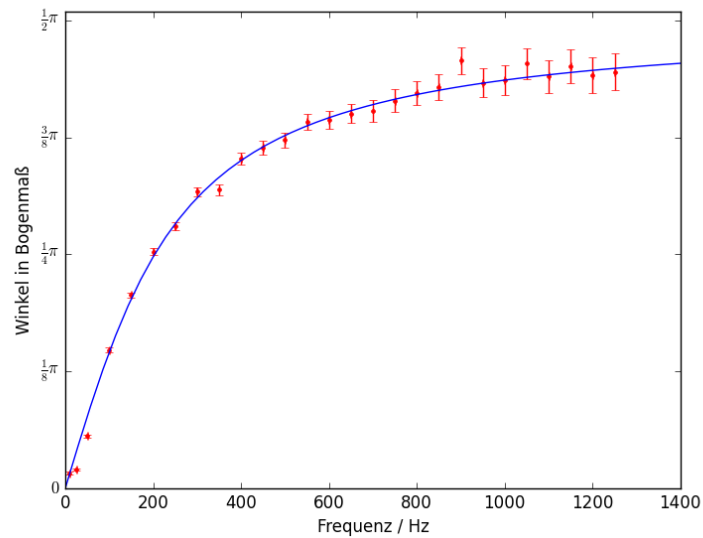


Abbildung 5: Amplitude in Abhängigkeit der Frequenz mit Messunsicherheiten

Tabelle 3: Frequenz und Phasendifferenz

Frequenz in Hz	a ms	Winkel in Bogenmaß	Fehler in 10^{-2} rad
10	0.80	0.05	0.51
25	0.40	0.06	0.28
50	0.56	0.18	0.43
100	0.74	0.46	0.68
150	0.69	0.65	0.87
200	0.63	0.79	1.08
250	0.56	0.88	1.3
300	0.53	1.00	1.54
350	0.46	1.00	1.78
400	0.44	1.11	2.03
450	0.40	1.14	2.28
500	0.37	1.17	2.52
550	0.36	1.23	2.77
600	0.33	1.24	3.02
650	0.31	1.26	3.27
700	0.29	1.27	3.52
750	0.28	1.30	3.77
800	0.26	1.33	4.02
850	0.25	1.35	4.28
900	0.25	1.44	4.53
950	0.23	1.36	4.78
1000	0.22	1.37	5.03
1050	0.22	1.43	5.28
1100	0.20	1.38	5.53
1150	0.20	1.42	5.78
1200	0.18	1.39	6.03
1250	0.18	1.40	6.28

Messunsicherheit Frequenz 1 Hz
 Messunsicherheit Zeitdifferenz a $8 \cdot 10^{-6}$ s

3.2 Polarplot der Amplitude über die Phasendifferenz

Unter Berücksichtigung der Beziehung $\tan^2(\phi) = \omega^2 R^2 C^2$ kann die Amplitude in Abhängigkeit von der Phasendifferenz ϕ ausgedrückt werden

$$A(\phi) = \frac{U_0}{\sqrt{1 + \tan^2(\phi)}} = U_0 \cos(\phi) \quad (35)$$

In Abbildung 6 ist die theoretische Kurve in einem Polarkoordinatensystem und zusätzlich jeder zweite gemessene Wert der Phasendifferenz (siehe Tabelle 3) gezeigt.

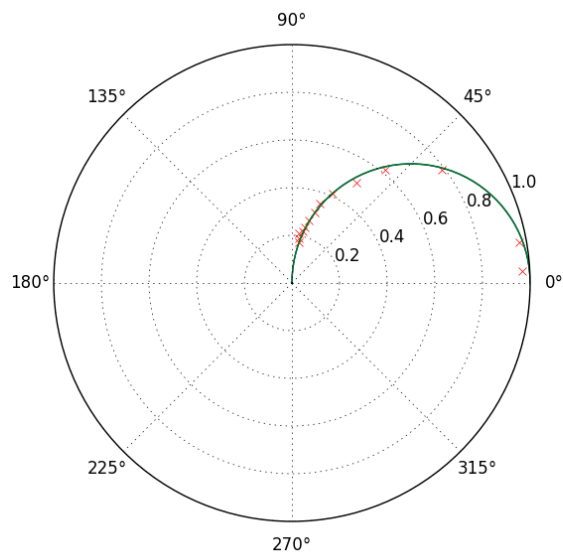


Abbildung 6: Amplitude über die Phasendifferenz

3.3 RC-Glied als Integrator

In diesem Abschnitt wird die Verwendung eines RC-Gliedes als Integrator überprüft. Integriert wird eine Rechteck, eine Cosinus- und eine Dreiecksspannung. Das jeweilige Eingangs- und Ausgangssignal (Integral zum Eingangssignal) ist in den Abbildungen 7, 8 und 9 zu sehen.

$$\text{Rechtecksspannung: } f_R(t) = \begin{cases} c, & 0 \leq t < a \\ -c, & -a < t < 0 \end{cases} \quad (36)$$

$$\text{Cosinusspannung: } f_C(t) = \cos t \quad (37)$$

$$\text{Dreiecksspannung: } f_D(t) = \begin{cases} \frac{2c}{a}t - c, & 0 \leq t < a \\ -\frac{2c}{a}t - c, & -a < t < 0 \end{cases} \quad (38)$$

$$(39)$$

Die zugehörigen Stammfunktionen sind:

$$F_R(t) = \begin{cases} \frac{2c}{a}t - c, & 0 \leq t < a \\ -\frac{2c}{a}t - c, & -a < t < 0 \end{cases} \quad (40)$$

$$F_C(t) = -\sin t \quad (41)$$

$$F_D(t) = \begin{cases} \frac{c}{a}t^2 - ct + c_2, & 0 \leq t < a \\ -\frac{c}{a}t^2 - ct - c_2, & -a < t < 0 \end{cases} \quad (42)$$

$$(43)$$

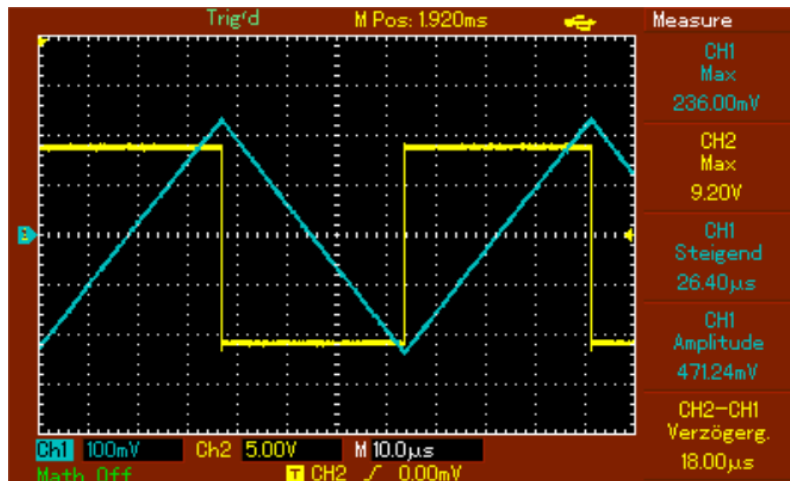


Abbildung 7: Integration einer Rechtecksspannung

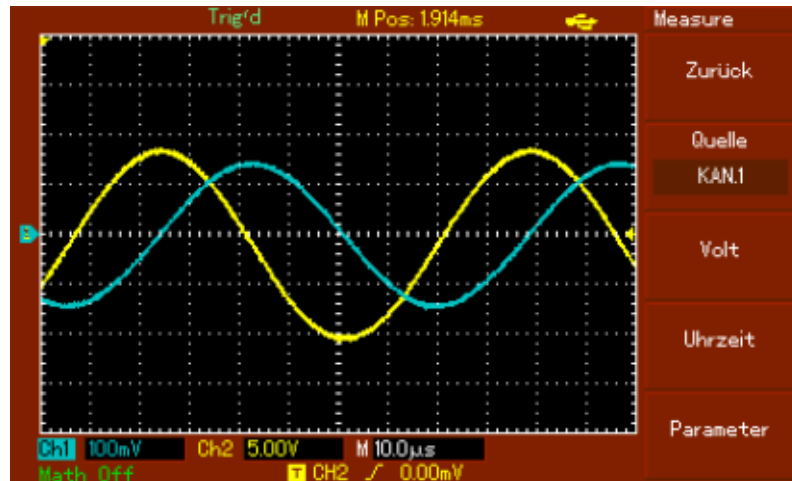


Abbildung 8: Integration einer negativen Cosinusspannung

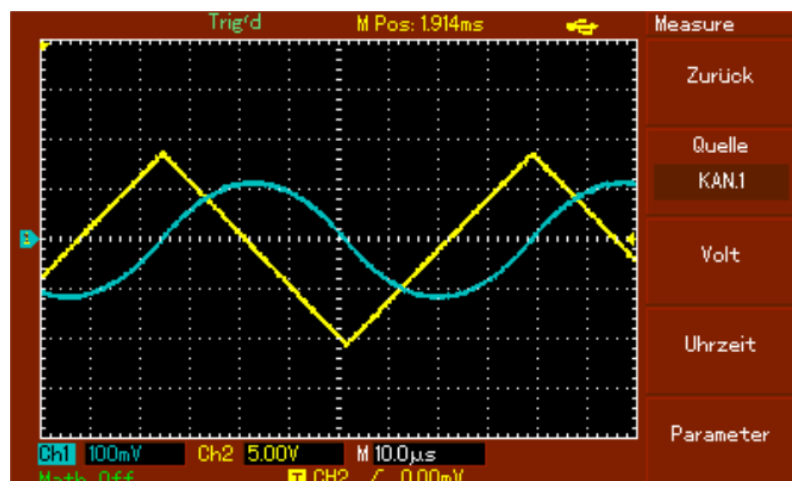


Abbildung 9: Integration einer Dreiecksspannung

4 Diskussion

In diesem Versuch wird auf drei verschiedene Arten die Zeitkonstanten bestimmt (siehe Tabelle 4) .

Insgesamt weicht nur ein einzelner gemessener Wert auffällig von den anderen ab. Der erste Wert in der Messreihe der Phasendifferenz ist zu hoch. Aufgrund der Anzahl der Messwerte ist das Endergebnis dadurch jedoch kaum verfälscht.

Systematische Fehler können sein, dass der Funktionsgenerator für sehr hohe und sehr niedrige Frequenzen keine Dreieck- oder Rechteckspannung erzeugen kann, was am Oszilloskop beobachtet werden kann. Auch der Innenwiderstand des Funktionsgenerators kann zu Problemen führen. Zudem treten Rückkopplungseffekte zwischen Stromkreis und Funktionsgenerator auf, die bewirken, dass die Amplitude des Signals, das der Funktionsgenerator zu Verfügung stellt, nicht – wir hier angenommen – konstant ist.

Trotz all dieser potentiellen Fehlerquellen, die sich von Methode zu Methode unterscheiden bzw. unterschiedlich stark ins Gewicht fallen, können offensichtlich sehr ähnliche Zeitkonstanten bestimmt werden.

Tabelle 4: Zeitkonstanten und Abweichung vom arithmetischen Mittel

Methode	Zeitkonstante RC	Abweichung
Aufladekurve des Kondensators	$(0.775 \pm 0.009) \cdot 10^{-3} \text{ s}$	-1.69 %
Frequenzabhängigkeit der Amplitude	$(0.807 \pm 0.009) \cdot 10^{-3} \text{ s}$	2.37 %
Frequenzabhängigkeit der Phasendifferenz	$(-0.782 \pm 0.014) \cdot 10^{-3} \text{ s}$	-0.68 %
Arithmetisches Mittel	$0.788 \cdot 10^{-3} \text{ s}$	

Innerhalb der einzelnen Regressionen kann an manchen Fitparametern (26), (28) und (30) und

Hier fehlt etwas

erkannt werden, ob ein Fehler vorliegt. Diese Parameter sind in Tabelle 5 im Vergleich zu den erwarteten Werten dargestellt.

Die Funktion des RC-Gliedes als Integrator wird durch den letzten Versuchsteil bestätigt.

Tabelle 5: Abweichung der Fitparametern von erwarteten Werten

Parameter	Verweis	erwartet	berechnet
U_{reg}	(26)	$U_0 = 19.4 \text{ V}$	$(20.3 \pm 0.5) \text{ V}$
b	(28)	$\frac{1}{2}U_0 = 9.7$	$(9.28 \pm 0.04) \text{ V}$
d	(30)	0 V (kein Offset)	$(0.27 \pm 0.03) \text{ V}$