

ANFÄNGERPRAKTIKUM 2015/2016

Gekoppelte Schwingkreise

Durchführung: 12.01.16

Clara RITTMANN¹
Anja BECK²

Betreuer:
Christian EBBERG

¹clara.rittmann@gmail.com

²anja.beck@tu-dortmund.de

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	2
2	Aufbau und Ablauf des Experiments	4
3	Auswertung	6
4	Diskussion	8

1 Theorie

Ein LC-Schwingkreis besteht aus einer Spule mit der Induktivität L und einem Kondensator mit der Kapazität C . Die Spule speichert ein magnetisches Feld und der Kondensator ein elektrisches. In dem Schwingkreis wechseln sich beide Felder periodisch ab mit der Folge, dass sich der Stromfluss mit gleicher Periode umkehrt. Zwei LC-Schwingkreise können durch einen weiteren Kondensator C_K gekoppelt werden (siehe Abbildung 1).

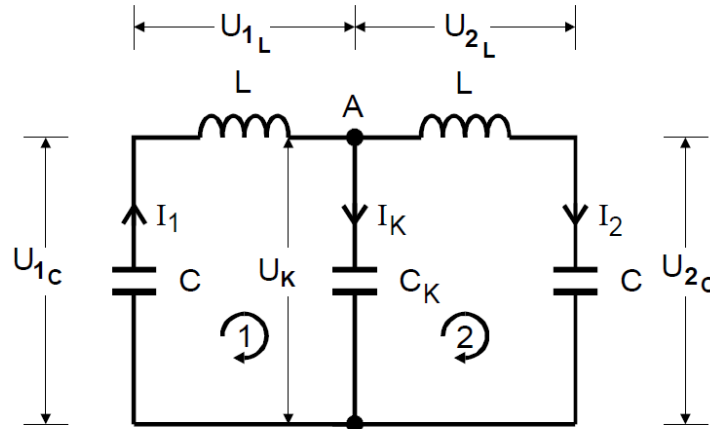


Abbildung 1: Gekoppelter LC-Schwingkreis

Der Stromfluss in den einzelnen Kreisen wird durch die Kirchhoffschen Regeln bestimmt.

$$I_K = I_1 - I_2 \quad (1)$$

$$U_{1C} + U_{1L} + U_K = 0 \quad (2)$$

$$U_{2C} + U_{2L} + U_K = 0 \quad (3)$$

Die gekoppelten Differentialgleichungen für beide Schwingkreise folgen mit

$$U_C = \frac{1}{C} \int I dt \quad \text{und} \quad U_L = L \frac{dI}{dt} \quad : \quad (4)$$

$$1. \text{ DGL: } L \frac{d^2 I_1}{dt^2} + \frac{1}{C} I_1 + \frac{1}{C_K} (I_1 + I_2) = 0 \quad (5)$$

$$2. \text{ DGL: } L \frac{d^2 I_2}{dt^2} + \frac{1}{C} I_2 - \frac{1}{C_K} (I_1 + I_2) = 0 \quad (6)$$

Durch entkoppeln der Differentialgleichungen folgen Lösungen für die einzelnen Ströme I_1 und I_2 mit den Frequenzen ν^+ und ν^- . Die Lösungen sind zudem abhängig von den Anfangsamplituden I_{10} des ersten Schwingkreises und I_{20} des zweiten Schwingkreises.

$$I_1(t) = \frac{1}{2} (I_{10} + I_{20}) \cos(2\pi\nu^+ t) + \frac{1}{2} (I_{10} - I_{20}) \cos(2\pi\nu^- t) \quad (7)$$

$$I_2(t) = \frac{1}{2} (I_{10} + I_{20}) \cos(2\pi\nu^+ t) - \frac{1}{2} (I_{10} - I_{20}) \cos(2\pi\nu^- t) \quad (8)$$

Die Frequenzen sind dabei

$$\nu^+ = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad \text{und} \quad (9)$$

$$\nu^- = \frac{1}{2\pi\sqrt{L\left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_K}\right)^{-1}}} \quad . \quad (10)$$

Nun werden wichtige Spezialfälle dieses komplexen Verhaltens beschrieben. Die zwei **Fundamentalschwingungen** zeichnen sich dadurch aus, dass die Anfangsamplituden I_{10} und I_{20} gleich groß sind ($|I_{10}| = |I_{20}|$). Sind beide Schwingkreise in Phase ($I_{10} = I_{20}$) schwingen sie mit der Frequenz ν^+ . Der Koppelkondensator hat hier keine Funktion. Er ist zu keinem Zeitpunkt geladen. Der Schwingkreis verhält sich wie ein einfacher LC-Kreis. Sind die Schwingkreise um eine halbe Periode phasenverschoben ($I_{10} = -I_{20}$) schwingen sie mit der etwas höheren Frequenz ν^- . Die höhere Frequenz entsteht dadurch, dass der Koppelkondensator einem periodisch wechselnden Stromfluss ausgesetzt ist und die anderen beiden Kondensatoren unterstützt.

Das Phänomen der **Schwebung** tritt auf, wenn einer der Kreise stimuliert wird bzw. eine Anfangsamplitude hat und der andere Kreis keine Anfangsamplitude aufweist.

$$I_1(t) = I_{10} \cos(\pi(\nu^+ + \nu^-)t) \cdot \cos(\pi(\nu^+ - \nu^-)t) \quad (11)$$

$$I_2(t) = I_{10} \sin(\pi(\nu^+ + \nu^-)t) \cdot \sin(\pi(\nu^+ - \nu^-)t) \quad (12)$$

Es entsteht eine Schwingung (siehe Abbildung 2) mit den Frequenzen der einzelnen Schwingkreise

$$\nu = \frac{1}{2}(\nu^+ + \nu^-) \quad (13)$$

und einer Schwebungsfrequenz von

$$f = (\nu^+ - \nu^-) \quad . \quad (14)$$

Es handelt sich um einen periodischen Energieaustausch zwischen den beiden Schwingkreisen mit der Schwebungsfrequenz.

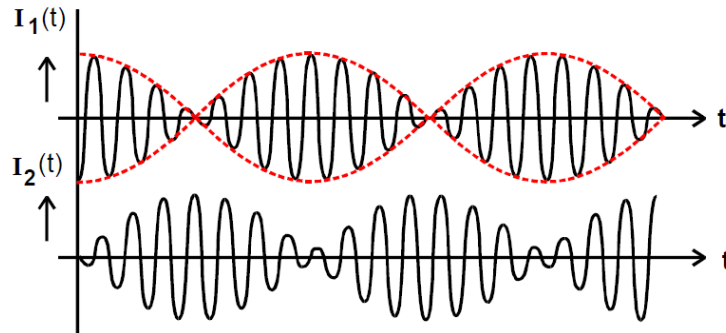


Abbildung 2: Stromverläufe beider Schwingkreise im Fall der Schwebung

2 Aufbau und Ablauf des Experiments

Ein Schaltkreis wie in Abbildung 3 dargestellt ist die Grundlage für alle Messungen. Die Als erstes müssen die Frequenzen der beiden Schwingkreise aufeinander abgestimmt werden, da eine der Kapazitäten variabel ist.

Die Frequenzen der Fundamentalschwingungen werden auf zwei Methoden bestimmt.

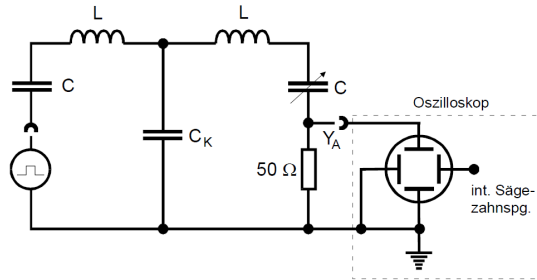


Abbildung 3: Schaltkreis für alle Messungen

Zuerst wird der Erreger durch eine Sinusspannung ersetzt und mit Hilfe von Lissajous-Figuren für jeden Koppelkondensator festgestellt, für welche Frequenzen bei Variation der Erregerfrequenz beide Schwingkreise um die Phasen 0 und π verschoben sind. Bei der zweiten Methode erzeugt man ein kontinuierliches Frequenzspektrum und zeichnet den Stromverlauf des rechten Schwingkreises über die Zeit auf. Wenn der Strom ein Maximum einnimmt, ist die Frequenz gerade ν^+ oder ν^- . Es werden für jede Koppel-Kapazität die Zeiten am Oszilloskop abgelesen, zu denen der Strom maximal wird.

Des Weiteren wird die Schwebung untersucht, indem einer der beiden Schwingkreise mit einem einzelnen Impuls (bzw. Rechteckimpuls mit einer viel kleineren Frequenz als der Schwing- und Schwebungsfrequenz) angeregt wird. Es sollen die Maxima der Schwingung innerhalb einer Schwebungsperiode für verschiedene Kapazitäten des Kondensators C_K auf einem Oszilloskop beobachtet werden. Es werden also die Schwingungsmaxima (bzw. -minima) pro Schwebungsbauch gezählt.

Kenndaten der Bauteile

Die Elemente der Schwingkreise haben die Kenngrößen

$$L = 23.954 \text{ mH} \quad \text{und} \\ C = 0.7932 \text{ nF} .$$

Es gilt zu beachten, dass auch die Spulen eine Kapazität von

$$C_{Sp} = 0.028 \text{ nF}$$

haben. Bei der späteren Berechnung der theoretischen Werte gilt daher für ν^+

$$\nu^+ = \frac{1}{2\pi\sqrt{L(C + C_{Sp})}}$$

und für ν^-

$$\nu^- = \frac{1}{2\pi\sqrt{L\left[\left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_K}\right)^{-1} + C_{Sp}\right]}} .$$

3 Auswertung

Die Bestimmung der Fundamentalfrequenzen über die Phasenbeziehung ergibt die in Tabelle 1 aufgelisteten Messdaten.

C_K in nF	$\nu_{\varphi=0}^+$ in kHz	$\nu_{\varphi=\pi}^-$ in kHz
1.0	33.11	79.62
2.2	32.47	60.39
2.7	32.47	56.56
4.7	32.68	48.08
6.8	32.47	44.01
8.2	32.89	41.67
10.0	33.11	40.65
12.0	32.89	40.00

Tabelle 1: Fundamentalfrequenzen bei der Bestimmung über die Phasenbeziehung für verschiedene Koppelkondensatoren C_K

Bei der „dynamischen“ Messung der Fundamentalfrequenzen wird die am Schwingkreis angelegte Frequenz kontinuierlich erhöht. Die Zeitdifferenz zwischen dem Beginn der Frequenzsteigerung und dem Erreichen der beiden Fundamentalfrequenzen wird am Oszilloskop bestimmt werden. Diese Zeiten sind in Tabelle 2 dargestellt. Über die Startfrequenz

Kapazität C_k in nF	t_1 in s	t_2 in s
1.0	0.2280	0.6761
2.2	0.2200	0.4880
2.7	0.2160	0.4480
4.7	0.2120	0.3560
6.8	0.2160	0.3240
8.2	0.2160	0.3040
10.0	0.2160	0.2920
12.0	0.2120	0.2760

Tabelle 2: Zeiten t_1 und t_2 nach denen die Fundamentalfrequenzen erreicht wurden

$\nu_{\text{start}} = 11.16$ kHz, die Endfrequenz $\nu_{\text{end}} = 112.6$ kHz und das eingestellte Intervall $T = 1$ s kann eine Funktion

$$\nu(t) = \frac{\nu_{\text{end}} - \nu_{\text{start}}}{T} t + \nu_{\text{start}}$$

aufgestellt werden. Damit können nun die Fundamentalfrequenzen (siehe Tabelle 3) berechnet werden.

Das Zählen der Schwingungen innerhalb einer Schwebungsperiode, also einem Schwingungsbauch hat nur teilweise funktioniert. Bei den kleineren Kapazitäten war dies (siehe

C_K in nF	$\nu_{t_1}^+$ in kHz	$\nu_{t_2}^-$ in kHz
1.0	34.29	79.75
2.2	33.48	60.67
2.7	33.07	56.61
4.7	32.67	47.27
6.8	33.07	44.03
8.2	33.07	42.00
10.0	33.06	40.78
12.0	32.67	39.16

Tabelle 3: Fundamentalfrequenzen, die sich bei der „dynamischen“ Messung für verschiedene Koppelkondensatoren C_K ergeben

Tabelle 4) nicht möglich.

Mit (11) kann die Anzahl an Schwingungen pro Schwebungsbauch in Zusammenhang mit den Fundamentalfrequenzen gebracht werden. So schwingt das System n -mal

$$\pi(\nu^+ + \nu^-)T \stackrel{!}{=} 2\pi n$$

während einer Schwebungsperiode (also einem Schwebungsbauch)

$$\pi(\nu^- - \nu^+)T \stackrel{!}{=} \pi .$$

Zusammen ergibt sich

$$n = \frac{(\nu^+ + \nu^-)}{2(\nu^- - \nu^+)} . \quad (15)$$

Die Resonanzfrequenz des Schwingkreises bei einer Phasenverschiebung von $\varphi = 0$ ist $\nu^+ = 33.33$ kHz. Damit kann nun ν^- berechnet werden. Die so erhaltenen Werte ergänzen Tabelle 4.

Kapazität C_K in nF	Bäuche	ν^- in kHz
4.7	2	41.66
6.8	3	38.89
8.2	4	37.50
10.0	4	37.50
12.0	5	36.66

Tabelle 4: Anzahl der Schwingungen pro Schwingungsbauch und die daraus berechneten Frequenzen ν^-

Über Beziehung (15) kann auch die Anzahl an Schwingungen pro Schwebungsperiode bei bekannten Frequenzen berechnet werden. Ein Vergleich zwischen der gezählten, der für die Frequenzen aus dem ersten Versuchsteil berechneten und der theoretisch zu erwartenden Anzahl an Bäuchen pro Schwebung befindet sich in Tabelle 7 in Kapitel 4.

4 Diskussion

Die Tabellen 7, 5 und 6 stellen die Ergebnisse der drei Messreihen noch einmal gegenüber. Die angegebenen Theorie-Werte werden durch Einsetzen der Kenndaten der Bauteile (siehe Kapitel 2) in (9), (10) bzw. (15) berechnet.

Die verschiedenen Messungen der Fundamentalfrequenz ν^+ ergeben sehr ähnliche Werte. Da sie nicht vom Koppelkondensator abhängt, werden hier die Mittelwerte

$$\bar{x} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N x_i$$

mit ihren Fehlern

$$\Delta_x = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}}{\sqrt{N}}$$

miteinander verglichen. Die Werte erhalten so mehr Aussagekraft, da nicht nur einzelne, sondern mehrere Messwerte mit eingehen. Zu den Werten ist zu sagen, dass eine Abweichung von 7-8% vertretbar wäre, jedoch sind die Fehler der Mittelwerte sehr klein, sodass hier doch ein größerer systematischer Fehler vorliegen muss. Dieser wird bei der Apparatur vermutet, denn schon während der Versuchsdurchführung wurden Wackelkontakte am LC-Kreis entdeckt.

	Messung über Phasenbeziehung	dynamische Messung	Messung beim Kalibrieren	Theorie
Wert	(33.17 ± 0.17)	(32.76 ± 0.09)	33.33	35.88
Abweichung	-7.6%	-8.7%	-7.1%	

Tabelle 5: Mittelwerte der Messungen von ν^+ in kHz und Abweichungen vom theoretisch erwarteten Wert

Auch bei der Messung der Frequenz ν^- liegen die Messwerte sehr dicht beieinander. Die Abweichung vom Theorie-Wert jedoch steigert sich von wenigen % bei großen Koppelkapazitäten C_K bis etwa 42% bei kleinen C_K . Die über die Anzahl der Schwingungen pro Schwebungsbauch berechneten Frequenzen ν^- dagegen weichen nur wenig von den erwarteten Werten ab. Hier gilt allerdings zu beachten, dass bei der Messung schon die Anzahl des zweiten Schwebungsbauches deutlich geringer, als der des ersten war, sodass nur die Schwingungen pro einem Bauch gezählt wurden. Der systematische Fehler der Zählung der Schwingungen ist demnach sehr groß und die gezählten Werte nicht sehr aussagekräftig.

Bei der Anzahl der Schwingungen pro Schwebungsbauch liegt ein ähnliches Bild vor: Die errechneten Werte unterscheiden sich nur wenig. Sie weichen aber allesamt stark vom erwarteten Wert ab, bei großen Koppelkapazitäten C_K sogar um über 60%.

C_K in nF	Messung über Phasenbeziehung	dynamische Messung	berechnet über Anzahl der Schwingungen pro Schwebung	Theorie
1.0	79.62	79.75	-	56.21
2.2	60.39	60.67	-	46.51
2.7	56.56	56.61	-	44.77
4.7	48.08	47.27	41.67	41.26
6.8	44.01	44.03	38.89	39.69
8.2	41.67	42.00	37.50	39.07
10.0	40.65	40.78	37.50	38.52
12.0	40.00	39.16	36.66	38.10

Tabelle 6: Werte der Messungen von ν^- in kHz

C_K in nF	gezählt	berechnet, dynamisch	berechnet, Phase	erwartet, Theorie
1.0	-	1.3	1.2	2.3
2.2	-	1.7	1.7	3.9
2.7	-	1.9	1.8	4.5
4.7	2	2.7	2.6	7.2
6.8	3	3.5	3.3	9.9
8.2	4	4.2	4.2	11.8
10.0	4	4.8	4.9	14.1
12.0	5	5.5	5.1	16.7

Tabelle 7: Gezählte, berechnete und erwartete Anzahl an Schwingungen pro Schwebungs-
bauch für verschiedene Koppelkondensatoren C_K