

ANFÄNGERPRAKTIKUM 2015/2016

Die Spektren der Alkali-Atome

Durchführung: 24.05.16

1. Korrektur

Clara RITTMANN¹
Anja BECK²

Betreuer:
Steffen SCHRÖDER

¹clara.rittmann@tu-dortmund.de

²anja.beck@tu-dortmund.de

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	2
2	Aufbau und Ablauf des Experiments	4
3	Auswertung	6
3.1	Umrechnung der gemessenen Winkel	6
3.2	Energiedifferenz ΔE	6
3.2.1	Wellenlängendifferenz $\Delta\lambda$	7
3.2.2	Mittlere Wellenlänge λ	7
3.3	Quantenzahlen	8
3.4	Das Ergebnis	9
4	Diskussion	10

1 Theorie

In diesem Versuch wird die innere Abschirmzahl von Alkali-Atomen anhand ihrer Spektren bestimmt.

Das Coulomb-Feld der positiv geladenen Atomkerns wird nach außen von den negativ geladenen Elektronen abgeschirmt. Die resultierende Ladung z_{eff} , die ein Elektron in der äußersten Schicht erfährt, wird durch die Abschirmzahl σ bestimmt

$$z_{\text{eff}} = z - \sigma . \quad (1)$$

Alkali-Atome bieten den Vorteil, dass sie in der äußersten Schicht nur ein Elektron haben, was Leuchtelektron genannt wird, während die übrigen Elektronen der gefüllten Schalen Rumpfelektronen heißen. Dadurch kann eine Ein-Atom Näherung zur Bestimmung der Energien E unterschiedlicher Elektronenkonfigurationen durchgeführt werden. Hierzu werden Lösungen der Schrödingergleichung

$$\left(\sum_i \frac{\hat{p}_i^2}{2m_i} + U \right) \psi = E\psi \quad (2)$$

mit den Teilchenmassen m_i , den dazugehörigen Impulsoperatoren \hat{p}_i und dem Potential des Wasserstoff-Atoms

$$U = -\frac{e_0^2}{4\pi\epsilon_0 r} . \quad (3)$$

Nun gilt zu berücksichtigen, dass Alkaliatome statt einem einzelnen, z Protonen im Kern haben, die mit (1) korrigiert werden können. Werden dann noch relativistische Effekte beachtet, gilt für die Energie

$$E = -R_\infty \left(\frac{(z - \sigma)^2}{n^2} + \alpha^2 \frac{(z - \sigma)^4}{n^3} \left(\frac{2}{2l + 1} - \frac{3}{4n} - \frac{j(j + 1) - l(l + 1) - \frac{3}{4}}{l(l + 1)(2l + 1)} \right) \right) , \quad (4)$$

mit der Ryberg-Energie R_∞ der Quantenzahl n , der Bahndrehimpulszahl l und dem Gesamtdrehimpuls j . Der Gesamtdrehimpuls setzt sich zusammen aus dem Bahndrehimpuls und dem dazu parallelen oder antiparallelen Spin, der für Elektronen $\pm \frac{1}{2}$ beträgt d.h. $j = l \pm \frac{1}{2}$. Laut der Auswahlregeln folgt eine zusätzliche Bedingung für l : $\Delta l = \pm 1$. Es folgt:

$$E = -R_\infty \left(\frac{(z - \sigma_1)^2}{n^2} + \alpha^2 \frac{(z - \sigma_2)^4}{n^3} \left(\frac{1}{j + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4n} \right) \right) . \quad (5)$$

Die Abschirmzahl wird hier aufgeteilt in die Konstante der vollständigen Abschirmung σ_1 zu der sämtliche Rumpfelektronen beitragen und der inneren Abschirmung σ_2 zu der nur das Leuchtelektron beiträgt. Die Abschirmzahl wird bestimmt, indem Energiedifferenzen aus ein und der selben Schale betrachtet werden, die sich nur durch den Spin unterscheiden

$$\Delta E_D = \frac{R_\infty \alpha^2}{n^3} (z - \sigma_2)^4 \frac{1}{l(l + 1)} . \quad (6)$$

Die zugehörigen emittierten Spektrallinien liegen im sichtbaren Bereich und unterscheiden sich nur so gering, dass sie als Dublett bezeichnet werden. Die Energiedifferenz wird über die Wellenlängen bestimmt

$$\Delta E_D = hc \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'} \right) \approx hc \frac{\Delta \lambda}{\lambda^2} . \quad (7)$$

An einem Beugungsgitter (k = Ordnung der Hauptmaximums, p = Spaltenanzahl des Gitters) werden die Strahlen gemäß

$$\sin(\varphi) = k \frac{\lambda}{g} \quad (8)$$

gebrochen. Die Wellenlängendifferenz $\Delta \lambda$ ist genau

$$\Delta \lambda = \chi \cos(\varphi) \Delta s , \quad (9)$$

mit

$$\chi = \frac{\Delta \lambda}{\Delta t \cdot \cos \bar{\varphi}} , \quad \bar{\varphi} = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) , \quad (10)$$

wobei Δs und Δt , wie in Kapitel 2 näher beschrieben ist,

$$\Delta s = r \Delta \phi, \quad \Delta t = r(\phi_1 - \phi_2) \quad (11)$$

betragen.

2 Aufbau und Ablauf des Experiments

Die Wellenlängen der Dublettlinien werden mit Hilfe eines Gitterspektralapparates bestimmt (siehe Abbildung 1). Der Strahl der Lichtquelle – hier Natrium, Kalium und Rubidium – wird gebündelt und auf ein optisches Gitter fokussiert. Mit dem Fernrohr kann der gebrochene Strahl in Abhängigkeit des Brechungswinkels untersucht werden.

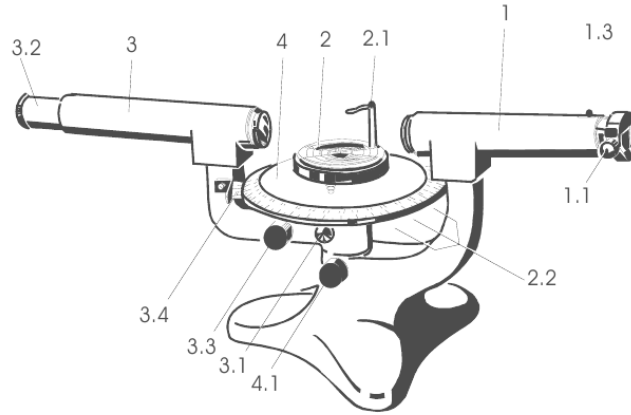


Abbildung 1: Aufbau eines Gitterspektrometers [2]

Zunächst werden die bekannten Spektrallinien der Helium-Quelle ausgemessen, um die Gitterkonstante der Apparatur zu bestimmen. Bei dem Transmissionsgitter muss zunächst die Achse des transmittierten Strahls d.h. des nullten Hauptmaximums notiert werden, um die Differenzen zum jeweils nächsten Maximum ermitteln zu können. Mit Abbildung 2 gilt für den abgelesenen Winkel δ des nullten Maximums

$$\beta = 90 - 0.5(400 - \delta) . \quad (12)$$

Die gemessenen Winkel können dann wie folgt

$$\varphi_{\text{echt}} = \delta - \beta - \varphi_{\text{gem.}} \quad (13)$$

umgerechnet werden. Für die Vermessung der Dublettlinien wird eine höhere Genauigkeit benötigt, die durch ein Okularmikrometer erreicht wird – eine Mikrometerskala, die ins Blickfeld des Fernrohrs eingebaut ist.

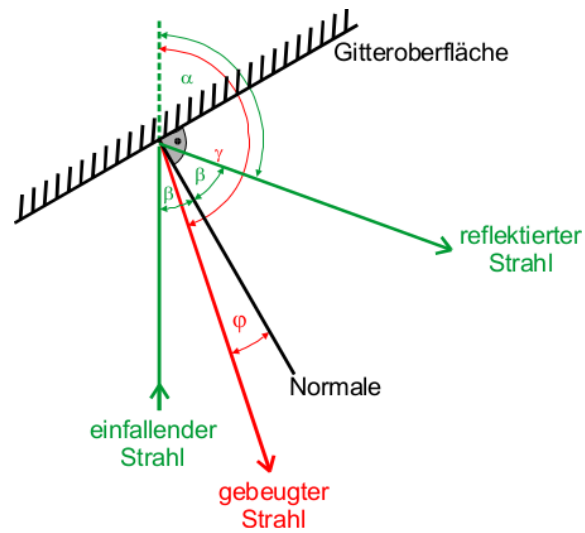


Abbildung 2: Beziehungen zur Berechnung der echten Winkel [2]

3 Auswertung

Die Abschirmungszahl kann durch Umstellen von Formel (6) zu

$$\sigma_2 = z - \sqrt[4]{\frac{\Delta E_D}{R_\infty \alpha^2} l(l+1)n^3}, \quad (14)$$

direkt berechnet werden. Nachfolgend werden die dafür nötigen Größen aus den Messwerten bestimmt. Sie sind zusammen mit dem Ergebnis in den Tabellen 3, 4 und 5 zu sehen.

3.1 Umrechnung der gemessenen Winkel

Als Winkel der Totalreflexion wird

$$\delta = 338.4^\circ \quad (15)$$

gemessen. Mit der Winkelbeziehung (12) kann der Winkel

$$\beta = 59.2^\circ \quad (16)$$

bestimmt werden. Die mit Beziehung (13) umgerechneten Beugungswinkel finden sich in Tabelle 1.

Tabelle 1: Gemessene mittlere Beugungswinkel φ in $^\circ$ der Dubletts von Natrium, Kalium und Rubidium

φ_{He}	φ_{Na}	φ_{K}	φ_{Ru}
-20.3	-7.9	-10.2	-7.2
-20.0	-9.7	-10.3	
-18.3	-11.2	-13.6	
-16.8		-13.7	
-16.2			
-15.9			
-10.1			
-4.6			
-2.2			

3.2 Energiedifferenz ΔE

Zur Berechnung von ΔE_D wird (7) herangezogen. Dafür werden die Wellenlängendifferenz $\Delta\lambda$ der beiden Linien eines Dubletts, sowie die gemittelte Wellenlänge λ ebendieser Linien benötigt.

3.2.1 Wellenlängendifferenz $\Delta\lambda$

Für $\Delta\lambda$ gilt (9):

$$\Delta\lambda = \chi \cos \varphi \Delta s . \quad (17)$$

Der Abstand Δs zwischen den Linien wird in Einheiten des Okulars (Skt) abgelesen. Die Umrechnung in SI-Einheiten erfolgt über die Eichgröße χ . Um sie zu bestimmen werden zwei Spektrallinien von Helium verwendet, wobei

$$\lambda_1 = 492.2 \text{ nm} \quad \varphi_1 = -16.8^\circ \quad (18)$$

$$\lambda_2 = 501.6 \text{ nm} \quad \varphi_2 = -16.2^\circ . \quad (19)$$

Der Abstand zwischen den beiden beträgt

$$\Delta t = 690 \text{ Skt} . \quad (20)$$

Eingesetzt in (10) ergibt sich die Eichgröße

$$\chi = (1.421 \pm 0.002) \cdot 10^{-11} . \quad (21)$$

Mit Hilfe der Winkel in Tabelle 1 werden so die Wellenlängendifferenzen $\Delta\lambda$ bestimmt.

3.2.2 Mittlere Wellenlänge λ

Formel (8) beschreibt den Zusammenhang zwischen dem Beugungswinkel φ und der Wellenlänge λ eines gebeugten Lichtstrahls. Die Wellenlängen der Spektrallinien von Helium sind bekannt, die dazugehörigen Beugungswinkel können nach Kapitel 3.1 berechnet werden. So kann mit Hilfe einer linearen Regression mit den Wertepaaren $\{\sin \varphi_{\text{He}}, \lambda_{\text{He}}\}$ (siehe Tabelle 2) die Geradengleichung bestimmt werden, die Wellenlänge und Beugungswinkel beim verwendeten Gitter in Zusammenhang bringt.

Tabelle 2: Gemessene Beugungswinkel je Wellenlänge und Werte $\sin(\varphi)$ für die Regression

λ_{He} in nm	φ_{He} in $^\circ$	$\sin(\varphi_{\text{He}})$
438.8	-20.3	-0.347
447.1	-20.0	-0.342
471.3	-18.3	-0.314
492.2	-16.8	-0.289
501.6	-16.2	-0.279
504.8	-15.9	-0.274
587.6	-10.1	-0.175
667.8	-4.6	-0.080
706.5	-2.2	-0.038

Die Regression mit Python liefert

$$\lambda = (853 \pm 5) \text{ nm} \cdot \sin \varphi + (738 \pm 1) \text{ nm} , \quad (22)$$

die Regressionsgerade ist in Abbildung 3 zu sehen.

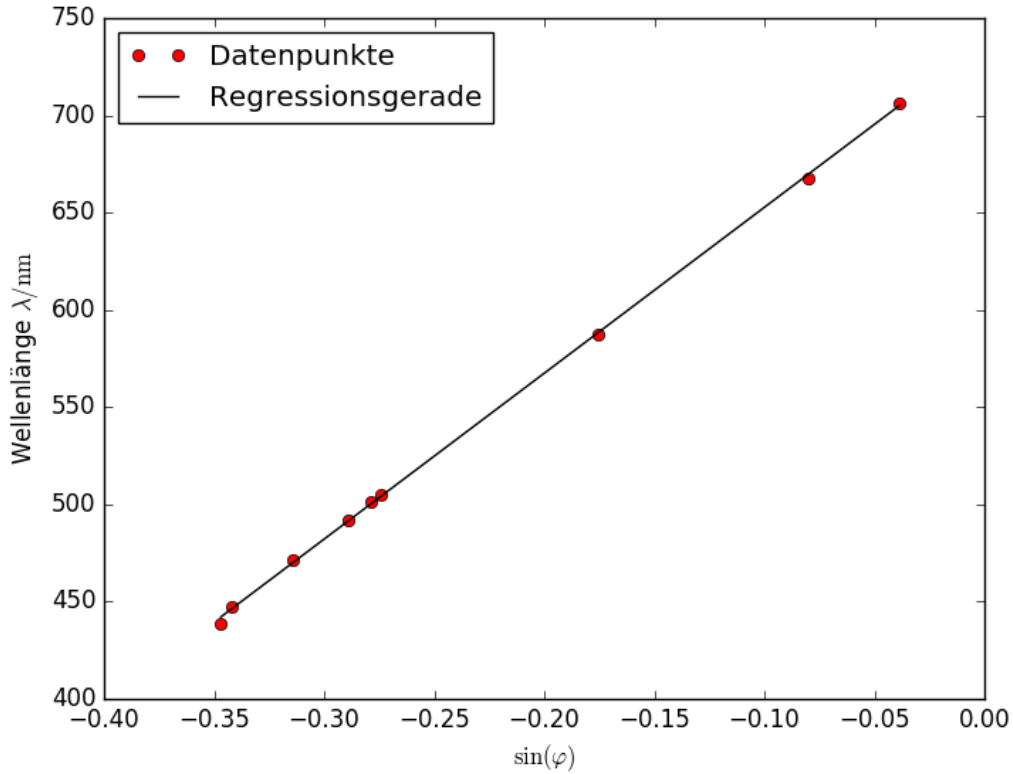


Abbildung 3: Messwerte und Regressionsgerade zur Bestimmung der Gitterkonstante

Die gemessenen Beugungswinkel aus Tabelle 1 sind die optisch gemittelten Winkel zwischen den beiden Dublett-Linien, sodass die Funktion $\lambda(\varphi)$ die mittlere Wellenlänge der zugehörigen Strahlen liefert.

3.3 Quantenzahlen

Die Hauptquantenzahl n und die echte Kernzahl z werden einem Periodensystem entnommen. Die Bahndrehimpulszahl ist in allen Fällen $l = 1$.

3.4 Das Ergebnis

Nun sind alle benötigten Größen bekannt und die Abschirmungszahl kann berechnet werden. Alle in vorigen Kapiteln besprochenen Größen, sowie die daraus resultierenden Abschirmzahlen für jedes Dublett sind je für die Elemente Natrium, Kalium und Rubidium in den Tabellen 3, 4 und 5 dargestellt.

Tabelle 3: Natrium ($n = 3, z = 11$) – Abschirmungszahl für jedes betrachtete Dublett, sowie bei der Berechnung verwendete Größen

λ in nm	$\Delta\lambda$ in nm	Δs in Skt	ΔE_D in meV	σ_2
621 ± 2	0.732 ± 0.001	52	2.35 ± 0.01	7.360 ± 0.005
594 ± 2	0.840 ± 0.001	60	2.95 ± 0.02	7.149 ± 0.006
572 ± 2	0.5436 ± 0.0008	39	2.06 ± 0.01	7.481 ± 0.006

Tabelle 4: Kalium ($n = 4, z = 19$) – Abschirmungszahl für jedes betrachtete Dublett, sowie bei der Berechnung verwendete Größen

λ in nm	$\Delta\lambda$ in nm	Δs in Skt	ΔE_D in meV	σ_2
587 ± 2	1.818 ± 0.003	130	6.54 ± 0.04	13.169 ± 0.009
585 ± 2	1.817 ± 0.003	130	6.57 ± 0.04	13.162 ± 0.009
537 ± 2	1.643 ± 0.003	119	7.05 ± 0.05	13.06 ± 0.01
536 ± 2	1.587 ± 0.002	115	6.85 ± 0.05	13.10 ± 0.01

Tabelle 5: Rubidium ($n = 5, z = 37$) – Abschirmungszahl für das betrachtete Dublett, sowie bei der Berechnung verwendete Größen

λ in nm	$\Delta\lambda$ in nm	Δs in Skt	ΔE_D in meV	σ_2
631 ± 2	9.08 ± 0.01	644	28.3 ± 0.1	27.06 ± 0.01

Die Abschirmungszahl ist für ein Atom immer dieselbe, egal, welches Dublett betrachtet wird. Daher können die erhaltenen Werte für σ_2 gemittelt werden und es ergeben sich die Abschirmungszahlen

$$\sigma_{2,\text{Na}} = 7.330 \pm 0.005 \quad (23)$$

$$\sigma_{2,\text{Ka}} = 13.12 \pm 0.01 \quad (24)$$

$$\sigma_{2,\text{Ru}} = 27.06 \pm 0.01 \quad (25)$$

4 Diskussion

Selbstverständlich kam es zu systematischen Fehlern bei der Messung, beim Drehen des Gitters und dem Ablesen der Werte. Jedoch weichen die bestimmten Werte für die Abschirmungszahl kaum von den Literaturwerten [1] ab, sodass bei der verwendeten Methode diese Fehler wohl sehr gering bleiben.

Tabelle 6: Vergleich der berechneten Abschirmzahlen σ_2 mit Literaturwerten

Element	σ_2	Literaturwert	Abweichung
Natrium	7.330	7.46	-1.8 %
Kalium	13.12	13.06	-3.7 %
Rubidium	27.06	26.95	0.4 %

Abbildungsverzeichnis

1	Aufbau eines Gitterspektrometers [2]	4
2	Beziehungen zur Berechnung der echten Winkel [2]	5
3	Messwerte und Regressionsgerade zur Bestimmung der Gitterkonstante . . .	8

Tabellenverzeichnis

1	Gemessene mittlere Beugungswinkel φ in $^\circ$ der Dubletts von Natrium, Kalium und Rubidium	6
2	Gemessene Beugungswinkel je Wellenlänge und Werte $\sin(\varphi)$ für die Regression	7
3	Natrium ($n = 3, z = 11$) – Abschirmungszahl für jedes betrachtete Dublett, sowie bei der Berechnung verwendete Größen	9
4	Kalium ($n = 4, z = 19$) – Abschirmungszahl für jedes betrachtete Dublett, sowie bei der Berechnung verwendete Größen	9
5	Rubidium ($n = 5, z = 37$) – Abschirmungszahl für das betrachtete Dublett, sowie bei der Berechnung verwendete Größen	9
6	Vergleich der berechneten Abschirmzahlen σ_2 mit Literaturwerten	10

Literaturverzeichnis

- [1] Ludwig Bergmann et al. *Lehrbuch der Experimentalphysik, Bd. 4*. Wilhelm Raith, 1992.
- [2] *Versuchsanleitung V605: Die Spektren der Alkali-Atome*. Anfängerpraktikum, TU Dortmund.