

Biegung elastischer Stäbe

Clara Rittmann

Anja Beck

Durchführung: 03.11.15

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	3
2	Aufbau und Ablauf des Experiments	4
3	Auswertung	5
3.1	Statistische Formeln	5
3.1.1	Fehlerrechnung	5
3.1.2	Regression	5
3.2	Bestimmung der Flächenträgheitsmomente	6
3.3	Bestimmung des Elastizitätsmoduls durch lineare Regression . .	7
3.3.1	Runder Stab – einseitige Einspannung	7
3.3.2	Eckiger Stab – einseitige Einspannung	8
3.3.3	Eckiger Stab – beidseitige Einspannung	8
3.4	Bestimmung der Dichte	10
4	Diskussion	11

1 Theorie

¹ Eine Reckstange verbiegt sich, wenn ein Turner daran hängt. Wird an den Enden eines länglichen Stücks Gummi gezogen, wird dieses länger und dünner. Derartige Verformungen werden durch Kräfte verursacht, die an der Körperoberfläche angreifen. Die Spannung

$$\sigma = \frac{dF}{dA} \quad (1)$$

beschreibt hierbei die angreifende Kraft pro Fläche. Für hinreichend kleine relative Änderungen einer Größe $\frac{\Delta x}{x}$ kann die Spannung auch mit dem Hooke'schen Gesetz

$$\sigma = E \frac{\Delta x}{x} \quad (2)$$

beschrieben werden. Der Elastizitätsmodul E ist dabei eine Materialkonstante. Soll allerdings der Elastizitätsmodul einer Metallstange, wie der des Turners, bestimmt werden, kann die Änderung der Länge oder des Durchmessers nur sehr mühsam bestimmt werden. In diesem Fall bietet sich die Verwendung des Zusammenhangs

$$D(x) = \frac{F}{48 \cdot EI} (3L^2x - 4x^3) \quad (3)$$

an. F ist die wirkende Kraft, also die Gewichtskraft des Turners. Sie übt ein Drehmoment auf die Stange aus. Das Flächenträgheitsmoment

$$I = \int_Q y^2 dq \quad , \quad (4)$$

mit der Querschnittsfläche Q und dem dazugehörigen Flächenelement dq , verursacht im Inneren des Körpers ein entgegengesetzt gerichtetes, gleich großes Drehmoment, sodass sich ein Gleichgewicht einstellt. Bei diesem Gleichgewicht kann dann an einer beliebigen Stelle mit Abstand x zur nähergelegenen Aufhängung, die Auslenkung D vom entspannten Zustand gemessen werden. L ist der Abstand zwischen den beiden Aufhängungen.

Bei Betrachtung eines Systems, das nur an einer Seite befestigt ist, wie einen Ast, an dem eine Schaukel hängt, verändert sich Gleichung 3 zu

$$D(x) = \frac{F}{2 \cdot EI} \left(Lx^2 - \frac{x^3}{3} \right) \quad . \quad (5)$$

L ist jetzt der Abstand von der Einspannung bis zum Ende des Stabes und x der Abstand zwischen Einspannung und Messpunkt.

¹nach: Anleitung zu V103: Biegung elastischer Stäbe, Anfängerpraktikum TU Dortmund WS 2015/16, <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V103.pdf>

²D. Meschede: „Gerthsen Physik“, Kapitel 3.1.4

2 Aufbau und Ablauf des Experiments

Wie Abbildung 1 zeigt, bestand der Versuchsaufbau im Wesentlichen aus einem Gestell, in das Metallstäbe verschiedener Querschnittsflächen sowohl einseitig, als auch zweiseitig eingespannt werden konnten.

Zunächst wurden die verwendeten Stäbe, ein runder und ein eckiger, in Länge und Durchmesser vermessen und gewogen.

Danach wurden die Stäbe einzeln und einseitig in die Vorrichtung eingespannt und bei verschiedenen Abständen x zur Einspannung wurde die Auslenkung $D(x)$ je einmal mit einem Gewicht am Ende der Stange und einmal ohne gemessen.

Zuletzt wurde der eckige Stab beidseitig eingespannt und ein Gewicht in der Mitte eingehängt. Hier wurde die Auslenkung D bei verschiedenen Abständen zum (näherliegenden) Rand je links und rechts des Gewichts gemessen.

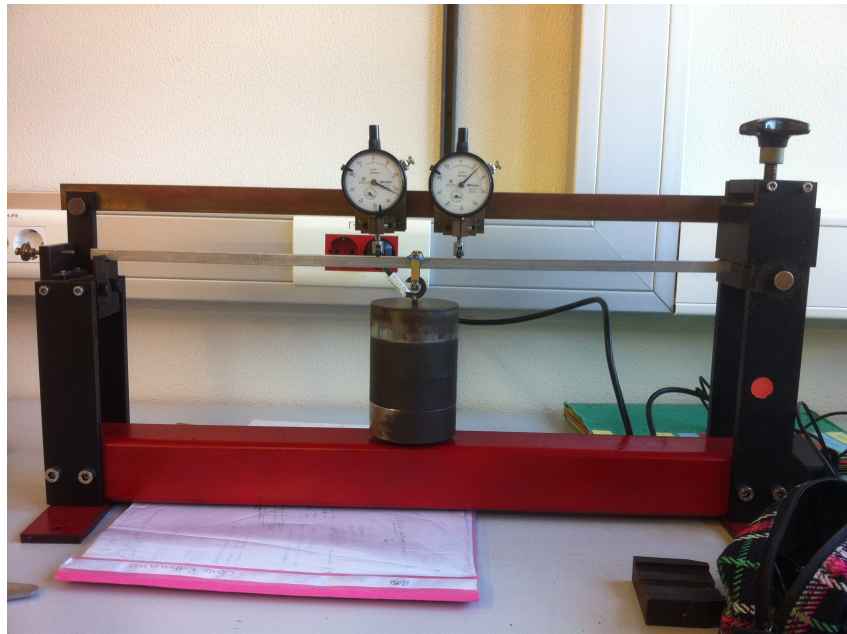


Abbildung 1: Versuchsaufbau mit beidseitig eingespanntem Stab

3 Auswertung

3.1 Statistische Formeln

3.1.1 Fehlerrechnung

Im folgenden wurden Mittelwerte von N Messungen der Größe x berechnet

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (6)$$

sowie die Varianz

$$V(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \quad (7)$$

woraus die Standardabweichung folgt

$$\sigma_x = \sqrt{V(x)}. \quad (8)$$

Die Standardabweichung des Mittelwertes, kürzer auch Fehler des Mittelwertes genannt, bezieht noch die Anzahl der Messungen mit ein. Mehr Messungen führen zu einem kleineren Fehler

$$\Delta_x = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}. \quad (9)$$

3.1.2 Regression

Nachfolgend wird eine lineare Regression für Wertepaare (x_i, y_i) durchgeführt. Dafür müssen die Steigung

$$m = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \quad (10)$$

und der y-Achsenabschnitt

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n x_i y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \quad (11)$$

berechnet werden. Den jeweiligen Fehler erhält man mit

$$s_m^2 = s_y^2 \cdot \frac{n}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \quad (12)$$

$$s_b^2 = s_y^2 \cdot \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2} . \quad (13)$$

s_y ist hierbei die Abweichung der Regressionsgeraden in y-Richtung.

$$s_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\Delta y_i)^2}{n-2} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - b - mx_i)^2}{n-2} \quad (14)$$

3.2 Bestimmung der Flächenträgheitsmomente

Das Flächenträgheitsmoment ist eine Größe, die im weiteren Verlauf wichtig ist, um den Elastizitätsmodul der Stäbe zu ermitteln. Er hängt vom Querschnitt des Stabes, genauer vom Abstand y der Flächenelemente dq zur neutralen Faser, ab

$$I = \int_Q y^2 dq \quad . \quad (15)$$

Für den eckigen Stab benötigt man eine Formel für quadratische Querschnitte. Die Kantenlänge sei h . Für I_E gilt:

$$I_E = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dx dy = \frac{1}{12} \cdot h^4 \quad . \quad (16)$$

Um das Flächenträgheitsmoment für runde Querschnitte mit Radius r zu berechnen, bietet sich die Verwendung von Polarkoordinaten an. Der Abstand zur y -Achse ist dann $r^2 \cdot \sin^2(x)$. Mit der Jakobideterminante r ist I_R

$$I_R = \int_0^r \int_0^{2\pi} r^2 \cdot \sin^2(x) \cdot r d\phi dr = \frac{1}{12} \cdot \pi \cdot r^4 \quad . \quad (17)$$

Sowohl h als auch der Durchmesser $2 \cdot r$ wurden sehr genau mit einer Schieblehre gemessen. Zum Fehler des Mittelwertes kommt ein Ablesefehler von 0,05 mm dazu.

Tabelle 1: Breite h des eckigen Stabes und Durchmesser $2 \cdot r$ des Runden

Breite h in mm	Durchmesser $2 \cdot r$ in mm
10.00	10.00
10.00	10.00
10.00	10.00
10.00	9.90
10.00	9.90
10.00	9.95
10.00	10.00
10.00	9.90
10.00	9.90
10.00	9.95

Für den eckigen Stab folgt mit der Breite

$$h = (0,010\,00 \pm 0,000\,05) \text{ m} \quad (18)$$

ein Flächenträgheitsmoment von

$$I_E = (3,88 \pm 0,17) \cdot 10^{-10} \text{ m}^4 \quad (19)$$

Für den runden Stab folgt mit einem Radius von

$$r = (0,004\,975 \pm 0,000\,032) \text{ m} \quad (20)$$

das Flächenträgheitsmoment

$$I_R = (4,81 \pm 0,12) \cdot 10^{-10} \text{ m}^4 \quad (21)$$

3.3 Bestimmung des Elastizitätsmoduls durch lineare Regression

3.3.1 Runder Stab – einseitige Einspannung

Die gemessene Durchbiegung $D(x)$ des Stabes wird durch Gleichung (5) beschrieben. Alle in ihr vorkommende Größen, bis auf den Elastizitätsmodul sind bekannt. Das Flächenträgheitsmoment wurde im vorherigen Abschnitt in (21) bestimmt und die herabziehende Kraft F ist aus der Masse des Probekörpers zu berechnen

$$F = m \cdot g = 0,7476 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 7,3339 \text{ N} \quad (22)$$

Nun lässt sich der Elastizitätsmodul E durch eine lineare Regression der Form

$$D(x) = \frac{F}{2 \cdot EI} \left(Lx^2 - \frac{x^3}{3} \right) = \frac{1}{E} \cdot A(x) + b \quad (23)$$

bestimmen, indem $D(x)$ über $A(x)$ aufgetragen wird (siehe Abbildung 2). E entspricht dann dem Kehrwert der Steigung der Regressionsgeraden. Unter Verwendung der Formeln aus Kapitel 3.1.2 ergeben sich die Steigung

$$\frac{1}{E} = (188,9 \pm 1,5) \cdot 10^{-13} \frac{\text{m}^2}{\text{N}} \quad (24)$$

und der y -Achsenabschnitt

$$b = (14,33 \pm 0,36) \cdot 10^{-5} \text{ m} \quad (25)$$

Der gemessene Elastizitätsmodul für den runden Stab ist folglich

$$E = (5,29 \pm 0,04) \cdot 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \quad (26)$$

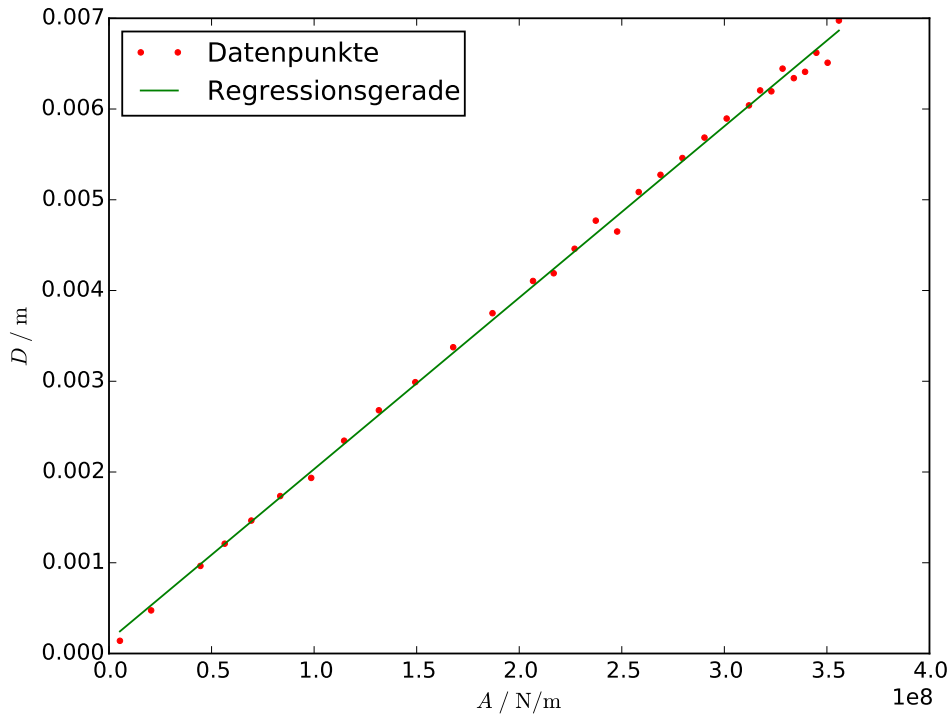


Abbildung 2: Regressionsgerade des runden Stabes bei einseitiger Einspannung

3.3.2 Eckiger Stab – einseitige Einspannung

Hier ist der Vorgehensweise dieselbe, wie beim runden Stab. Es muss lediglich das Flächenträgheitsmoment aus (19) verwendet und die nach unten wirkende Kraft

$$F = m \cdot g = 0,7676 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 7,5302 \text{ N} \quad (27)$$

angepasst werden. Dies führt zu einer Steigung von

$$\frac{1}{E} = (135,6 \pm 0,9) \cdot 10^{-13} \frac{\text{m}^2}{\text{N}} \quad (28)$$

und einem y -Achsenabschnitt

$$b = (6,28 \pm 2,17) \cdot 10^{-5} \text{ m} \quad (29)$$

Das hier bestimmte Elastizitätsmodul für den eckigen Stab ist demnach

$$E = (7,37 \pm 0,05) \cdot 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \quad (30)$$

Die Werte wurden in Abbildung 3 aufgetragen.

3.3.3 Eckiger Stab – beidseitige Einspannung

Die Bestimmung des Elastizitätsmoduls bei beidseitiger Einspannung funktioniert analog. Es werden Formel (3)

$$D(x) = \frac{F}{48 \cdot EI} (3L^2x - 4x^3) = \frac{1}{E}C(x) + b$$

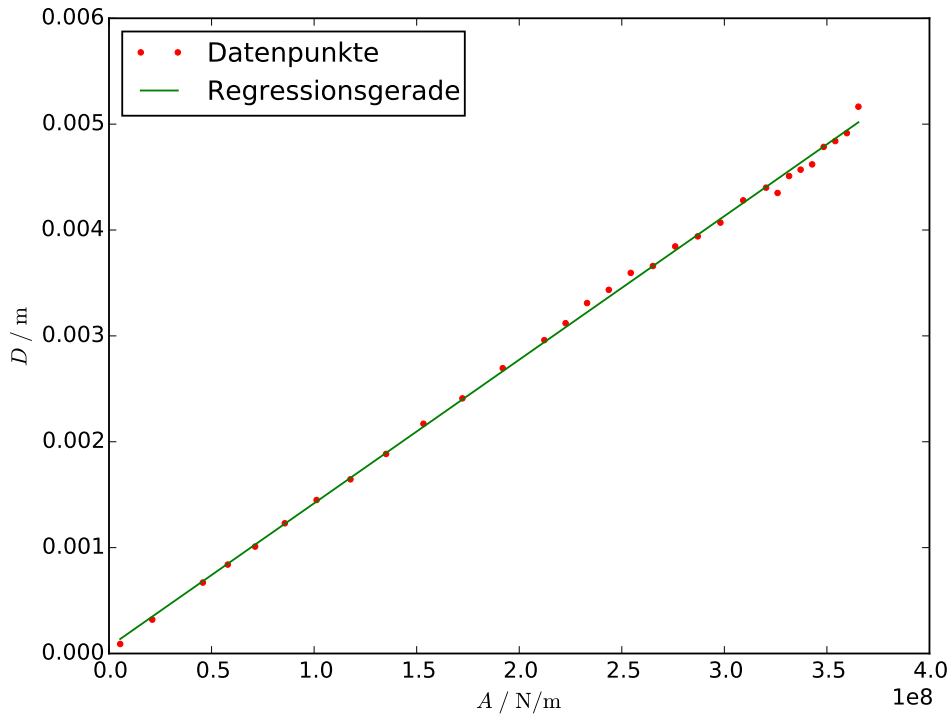


Abbildung 3: Regressionsgerade des eckigen Stabes bei einseitiger Einspannung

und die eine herunterziehende Kraft von

$$F = m \cdot g = 4,7004 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 46,1109 \text{ N} \quad (31)$$

verwendet.

Da die Verbiegung des Stabes links und rechts der Mitte gemessen wurde, gibt es zwei Regressionsgeraden.

Zunächst soll die Regressionsgerade für die Werte der linken Seite betrachtet werden. Sie hat eine Steigung von

$$\frac{1}{E} = (55,45 \pm 1,88) \cdot 10^{-13} \frac{\text{m}^2}{\text{N}} \quad (32)$$

und einen y -Achsenabschnitt von

$$b = (44,5 \pm 2,3) \cdot 10^{-5} \text{ m} \quad (33)$$

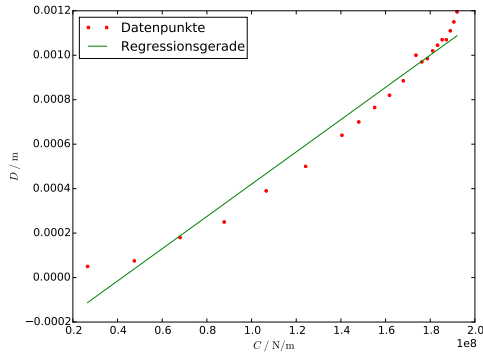
Daraus folgt der Elastizitätsmodul

$$E = (18,0 \pm 0,6) \cdot 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \quad (34)$$

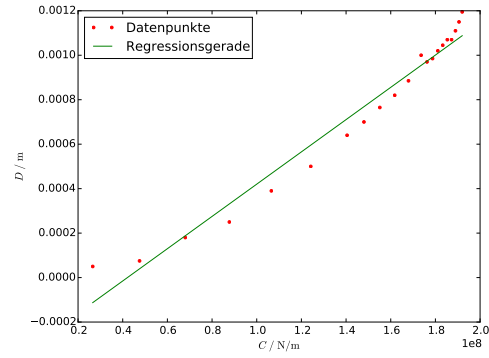
Für die rechte Seite ergeben sich Werte von

$$\frac{1}{E} = (72,25 \pm 3,03) \cdot 10^{-13} \frac{\text{m}^2}{\text{N}} \quad (35)$$

$$b = (30,6 \pm 4,7) \cdot 10^{-5} \text{ m} \quad (36)$$



(a) Linke Seite



(b) Rechte Seite

Abbildung 4: Regressionsgerade des eckigen Stabes bei beidseitiger Einspannung

und

$$E = (13,8 \pm 0,6) \cdot 10^{10} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \quad . \quad (37)$$

3.4 Bestimmung der Dichte

Mit der Dichte kann bestimmt werden, aus welchen Metallen die Stäbe bestehen. Um sie bestimmen zu können, wurden beide Stäbe vermessen und gewogen. Das Gewicht und die Länge sind keine fehlerbehafteten Größen. Der Durchmesser hingegen wurde mit einer Schieblehre mehrfach gemessen. Ein Ablesefehler von 0,05 mm kommt zum Fehler des Mittelwertes hinzu. Der Querschnitt bzw. Radius der Stäbe wurde (Werte in Tabelle 1) bereits als fehlerbehaftete Größe bestimmt.

Die Dichte ist jeweils

$$\rho = \frac{\text{Gewicht}}{\text{Querschnittsfläche} \cdot \text{Länge}} \quad . \quad (38)$$

Der runde Stab der Länge 0,6 m ist 0,3945 kg schwer und hat die Dichte

$$\rho_{\text{Rund}} = (8455,90 \pm 109,02) \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad . \quad (39)$$

Und der eckige Stab der Länge 0,6 m ist 0,1671 kg schwer und hat die Dichte

$$\rho_{\text{Eckig}} = (2785,00 \pm 27,85) \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad . \quad (40)$$

4 Diskussion

Art	Literatur	Berechnet	Abweichung
Rund	$10 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$	$(5,29 \pm 0,04) \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$	-52.9%
Eckig	$7 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$	$(7,37 \pm 0,05) \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$	+5.3%
Beidseitig links	$7 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$	$(18,0 \pm 0,6) \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$	+157.1%
Beidseitig rechts	$7 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$	$(13,8 \pm 0,6) \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$	+97.1%

Für Messing stand auf Wikipedia $(78 - 123) \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$.

Für Aluminium $70 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$.

Abstand von der Mitte in cm	links mit in mm	rechts mit in mm	links ohne in mm	rechts ohne in mm
3.75	6.320	7.125	7.620	8.320
4.25	6.325	7.160	7.625	8.310
4.75	6.320	7.200	7.635	8.310
5.25	6.325	7.230	7.610	8.300
5.75	6.330	7.250	7.600	8.320
6.25	6.330	7.295	7.595	8.340
6.75	6.340	7.345	7.600	8.365
7.25	6.340	7.395	7.610	8.380
7.75	6.360	7.420	7.585	8.390
8.25	6.350	7.450	7.580	8.450
9.25	6.400	7.510	7.570	8.395
10.25	6.420	7.610	7.560	8.430
11.25	6.455	7.700	7.560	8.465
12.25	6.480	7.760	7.560	8.460
13.25	6.570	7.830	7.600	8.470
15.25	6.750	7.950	7.650	8.450
17.25	6.920	8.060	7.700	8.450
19.25	7.135	8.155	7.790	8.405
21.25	7.370	8.250	7.880	8.430
23.25	7.595	8.285	7.960	8.360
25.25	8.010	8.230	8.150	8.280

Die mittlere Biegung des Stabes ohne Gewicht

$$D_{\text{links}} = (7,669 \pm 0,033) \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

$$D_{\text{rechts}} = (8,385 \pm 0,013) \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

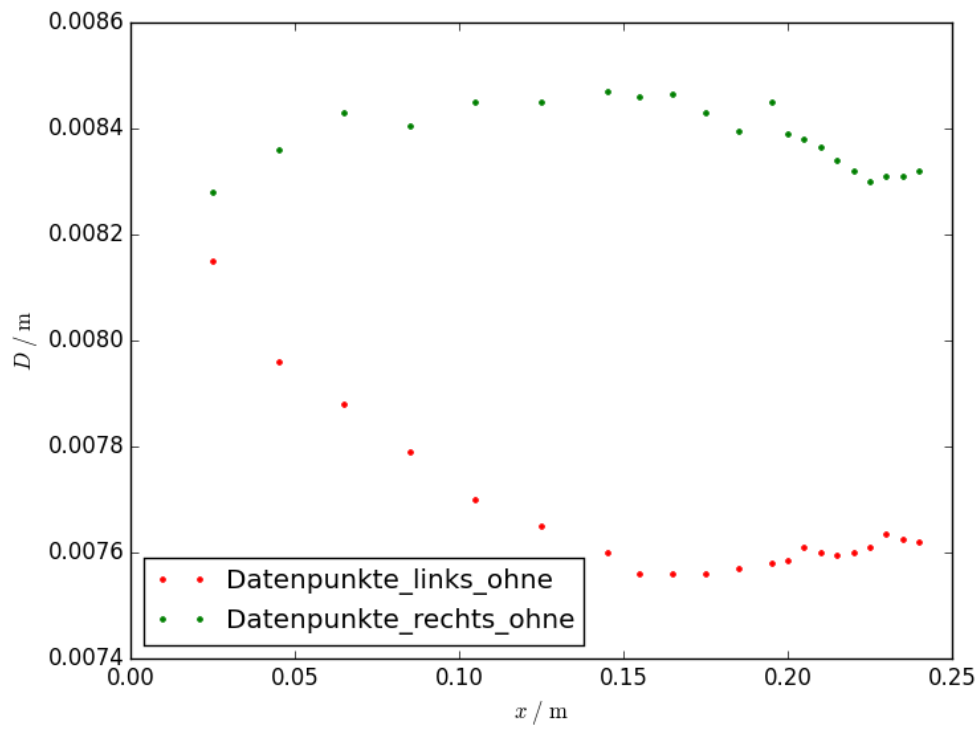


Abbildung 5: Messwerte für D und x ohne Gewicht

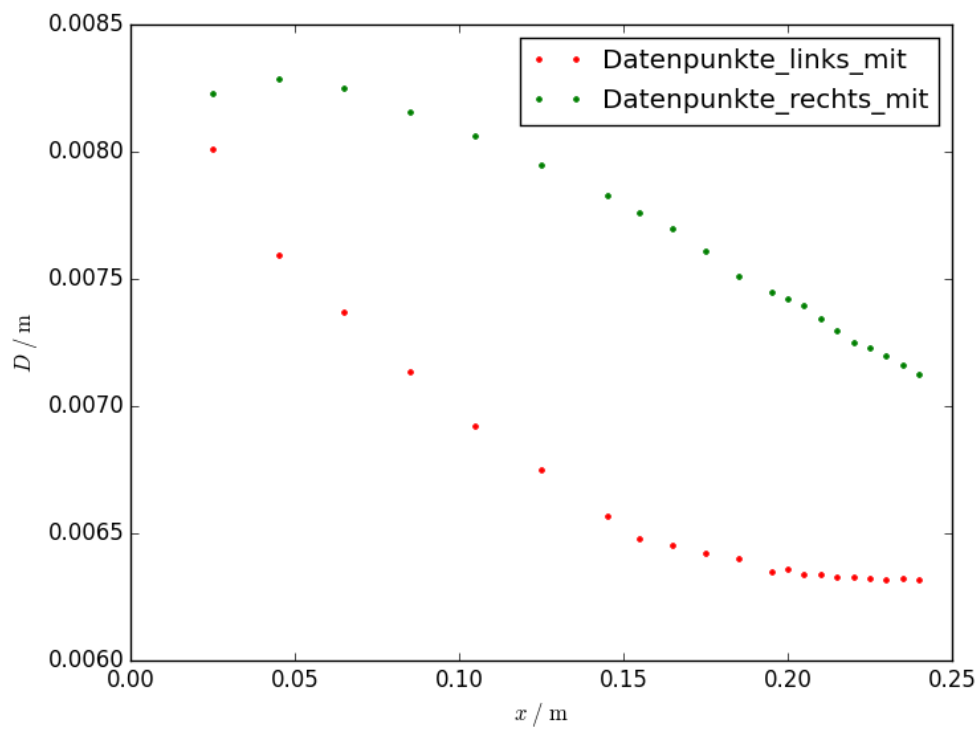


Abbildung 6: Messwerte für D und x mit Gewicht

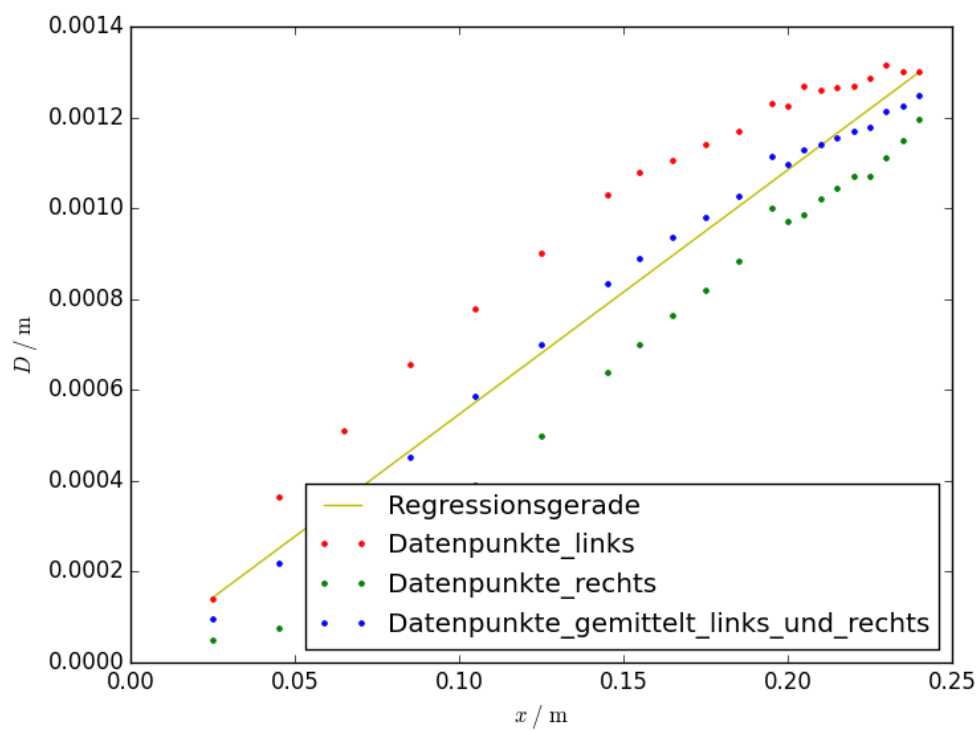


Abbildung 7: Wirkliches D und x