

Das Trägheitsmoment

Clara Rittmann

Anja Beck

Durchführung: 27.10.15

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|--|----------|
| 1 | Theorie | 1 |
| 2 | Aufbau und Ablauf des Experiments | 1 |
| 3 | Auswertung | 1 |
| 3.1 | Statistische Formeln | 1 |
| 3.1.1 | Fehlerrechnung | 1 |
| 3.1.2 | Regression | 2 |
| 3.2 | Auswertung der Messdaten | 2 |
| 3.3 | Bestimmung der Dichte | 4 |
| 4 | Diskussion | 4 |

1 Theorie

2 Aufbau und Ablauf des Experiments

3 Auswertung

3.1 Statistische Formeln

3.1.1 Fehlerrechnung

Im folgenden wurden Mittelwerte von N Messungen der Größe x berechnet

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (1)$$

sowie die Varianz

$$V(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \quad (2)$$

woraus die Standardabweichung folgt

$$\sigma_x = \sqrt{V(x)}. \quad (3)$$

Die Standardabweichung des Mittelwertes, kürzer auch Fehler des Mittelwertes genannt, bezieht noch die Anzahl der Messungen mit ein. Mehr Messungen führen zu einem kleineren Fehler

$$\Delta_x = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}. \quad (4)$$

3.1.2 Regression

Nachfolgend wird eine lineare Regression für Wertepaare (x_i, y_i) durchgeführt. Dafür müssen die Steigung

$$m = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \quad (5)$$

und der y-Achsenabschnitt

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n x_i y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \quad (6)$$

berechnet werden. Den jeweiligen Fehler erhält man mit

$$s_m^2 = s_y^2 \cdot \frac{n}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \quad (7)$$

$$s_b^2 = s_y^2 \cdot \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}. \quad (8)$$

s_y ist hierbei die Abweichung der Regressionsgeraden in y-Richtung.

$$s_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\Delta y_i)^2}{n - 2} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - b - m x_i)^2}{n - 2} \quad (9)$$

3.2 Auswertung der Messdaten

subsectionBestimmung der Flächenträgheitsmomente Das Flächenträgheitsmoment ist eine Größe, die im weiteren Verlauf wichtig ist, um das Elastizitätsmodul

der Stäbe zu ermitteln. Es hängt von dem Querschnitt des Stabes, genauer der Abstände y der Flächenelemente dq zur neutralen Faser ab

$$I = \int_Q y^2 dq \quad . \quad (10)$$

Für den eckigen Stab benötigt man eine Formel für quadratische Querschnitte. Die Kantenlänge sei h . Für I_E gilt:

$$I_E = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dx dy = \frac{1}{12} \cdot h^4 \quad . \quad (11)$$

Um das Flächenträgheitsmoment für runde Querschnitte mit Radius r zu berechnen, bietet sich die Verwendung von Polarkoordinaten an. Der Abstand zur y -Achse ist dann $r^2 \cdot \sin^2(x)$. Mit der Jakobideterminante r ist I_R

$$I_R = \int_0^r \int_0^{2\pi} r^2 \cdot \sin^2(x) \cdot r d\phi dr = \frac{1}{12} \cdot \pi \cdot r^4 \quad . \quad (12)$$

Sowohl h in wie auch der Durchmesser $2 \cdot r$ wurden sehr genau mit einer Schieblehre gemessen. Zu dem Fehler des Mittelwertes kommt allerdings eine Ablesungenauigkeit von 0,05 mm hinzu.

Tabelle 1: Breite h des eckigen Stabes und Durchmesser $2 \cdot r$ des Runden

| Breite h in 0,05 mm | Durchmesser $2 \cdot r$ in 0,05 mm |
|-----------------------|------------------------------------|
| 10.00 | 10.00 |
| 10.00 | 10.00 |
| 10.00 | 10.00 |
| 10.00 | 9.90 |
| 10.00 | 9.90 |
| 10.00 | 9.95 |
| 10.00 | 10.00 |
| 10.00 | 9.90 |
| 10.00 | 9.90 |
| 10.00 | 9.95 |

Für den eckigen Stab folgt aus dem Mittelwert der Breite

$$h = (0,010\,00 \pm 0,000\,05) \text{ m} \quad (13)$$

ein Flächenträgheitsmoment von

$$I_E = (3,88 \pm 0,17) \cdot 10^{-10} \text{ m}^4 \quad . \quad (14)$$

Für den runden Stab folgt aus einem Radius von durchschnittlich

$$r = (0,004\,975 \pm 0,000\,032) \text{ m} \quad (15)$$

das Flächenträgheitsmoment

$$I_R = (4,81 \pm 0,12) \cdot 10^{-10} \text{ m}^4 \quad . \quad (16)$$

3.3 Bestimmung der Dichte

Zur Bestimmung der Dichte wurden beide Stäbe , der runde und der eckige, vermessen und gewogen. Das Gewicht und die Länge sind keine fehlerbehafteten Größen. Der Durchmesser hingegen wurde mit einer Schieblehre mehrfach gemessen. Ein Ablesefehler von 0,05 mm kommt zu dem Fehler des Mittelwertes hinzu.

4 Diskussion