

ANFÄNGERPRAKTIKUM 2015/2016

Biegung elastischer Stäbe

Durchführung: 03.11.15

Clara RITTMANN¹
Anja BECK²

Betreuer:
Max MUSTERMANN

¹clara.rittmann@tu-dortmund.de

²anja.beck@tu-dortmund.de

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	2
2	Aufbau und Ablauf des Experiments	3
3	Auswertung	4
3.1	Statistische Formeln	4
3.1.1	Fehlerrechnung	4
3.1.2	Regression	4
3.2	Bestimmung der Verdampfungswärme bei kleinem Druck	5
3.3	Unterscheidung zwischen äußerer und innerer Verdampfungswärme	6
3.4	Temperaturabhängigkeit der Verdampfungswärme bei hohem Druck	7
4	Diskussion	9

1 Theorie

2 Aufbau und Ablauf des Experiments

3 Auswertung

3.1 Statistische Formeln

3.1.1 Fehlerrechnung

Im folgenden wurden Mittelwerte von N Messungen der Größe x berechnet

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (1)$$

sowie die Varianz

$$V(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \quad (2)$$

woraus die Standartabweichung folgt

$$\sigma_x = \sqrt{V(x)}. \quad (3)$$

Die Standartabweichung des Mittelwertes, kürzer auch Fehler des Mittelwertes genannt, bezieht noch die Anzahl der Messungen mit ein. Mehr Messungen führen zu einem kleineren Fehler

$$\Delta_x = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}. \quad (4)$$

3.1.2 Regression

Nachfolgend wird eine lineare Regression für Wertepaare (x_i, y_i) durchgeführt. Dafür müssen die Steigung

$$m = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \quad (5)$$

und der y-Achsenabschnitt

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n x_i y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \quad (6)$$

berechnet werden. Den jeweiligen Fehler erhält man mit

$$s_m^2 = s_y^2 \cdot \frac{n}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \quad (7)$$

Tabelle 1: Wertepaare für die lineare Regression

Reziproke absolute Temperatur	Logarithmus des Druckes
0.00309454	9.53242
0.00304739	9.68657
0.00300165	9.90349
0.00295727	10.1425
0.00291418	10.3417
0.00287233	10.5506
0.00283166	10.7727
0.00279213	10.9785
0.00275368	11.1548
0.00271628	11.3266
0.00267989	11.5229

$$s_b^2 = s_y^2 \cdot \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2} . \quad (8)$$

s_y ist hierbei die Abweichung der Regressionsgeraden in y-Richtung.

$$s_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\Delta y_i)^2}{n-2} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - b - mx_i)^2}{n-2} \quad (9)$$

3.2 Bestimmung der Verdampfungswärme bei kleinem Druck

Die Verdampfungswärme kann als Proportionalitätsfaktor zwischen dem natürlichen Logarithmus des Druckes P und der reziproken absoluten Temperatur T aufgefasst werden. Die Wertepaare sind in Tabelle 1 dargestellt.

$$\ln(P) = -\frac{L}{R} \frac{1}{T} + \text{const.} = a \cdot \frac{1}{T} + b \quad (10)$$

Lineare Regression nach Formeln aus Kapitel (VERWEIS) mittels Python liefert

$$a = -4910 \pm 60 \text{ Hässliche Einheit hinschreiben?} \quad (11)$$

und damit eine Verdampfungswärme des Wassers von

$$L = -a \cdot R = (40\,800 \pm 500) \frac{\text{J}}{\text{mol}} \quad (12)$$

wobei R die Gaskonstante mit $8.314 \text{ J}/(\text{K mol})$ ist.

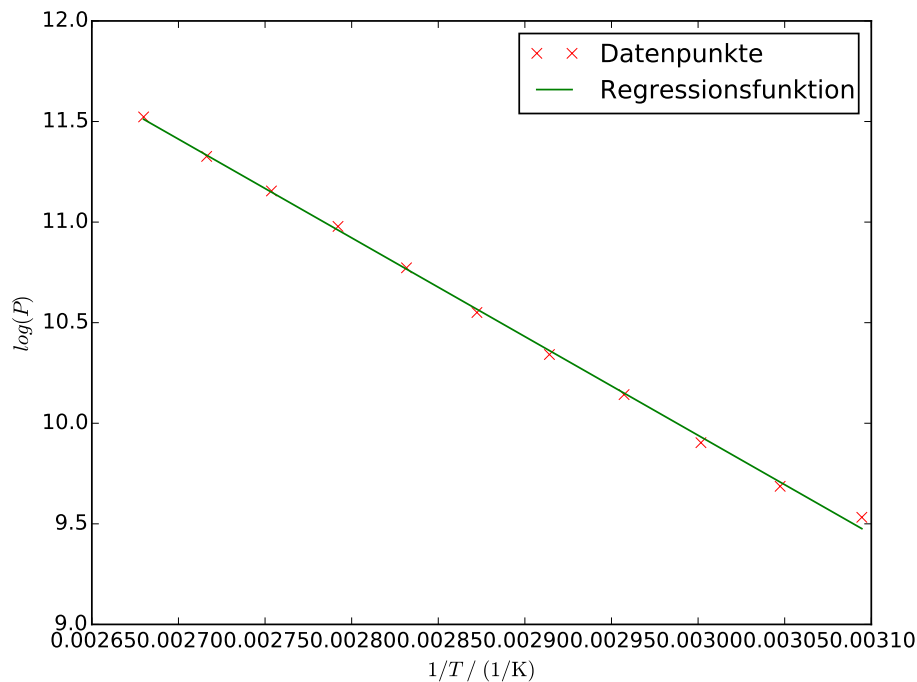


Abbildung 1: Logarithmus des Dampfdruckes gegen die reziproke absolute Temperatur

3.3 Unterscheidung zwischen äußerer und innerer Verdampfungswärme

Die äußere Verdampfungswärme entspricht der Energie, die von System aufgewendet wird um zu expandieren. Diese Volumenarbeit ist bei einer Temperatur von 373 K

$$L_a = p \cdot V_m = R \cdot T = 8.314 \frac{\text{J}}{\text{K mol}} \cdot 373 \text{ K} \approx 3101 \frac{\text{J}}{\text{mol}} \quad . \quad (13)$$

Die innere Verdampfungswärme wird aufgebracht, um die wechselwirkenden Moleküle voneinander zu trennen. Da in Abschnitt 3.2 die gesamte Verdampfungswärme bestimmt wurde, entspricht die innere Verdampfungswärme gerade

$$L_i = L - L_a = 40\,800 \frac{\text{J}}{\text{mol}} - 3101 \frac{\text{J}}{\text{mol}} = 37\,699 \frac{\text{J}}{\text{mol}} \quad . \quad (14)$$

Die innere Verdampfungswärme ist dominierend. Bei Wasser beträgt der Wert der äußeren Verdampfungswärme unter Normaldruck nur etwa 10 % des Wertes der Inneren.¹

¹siehe http://portal.tugraz.at/portal/page/portal/Files/i5110/files/Lehre/Praktika/GP1/Vorbereitung/Verdampf_Gesamt.pdf

3.4 Temperaturabhängigkeit der Verdampfungswärme bei hohem Druck

Die Druckabhängigkeit der Verdampfungswärme ist nach Formel (VERWEIS) gegeben.

Zunächst wird der Druck als Funktion der Zeit dargestellt. Das Polynom dritten Grades wurde mit Hilfe von Python berechnet. Die hier angegebenen Werte für die Koeffizienten des Polynoms sind gerundet, obwohl mit exakten weiter gerechnet wurde.

$$P(T) = a \cdot T^3 + b \cdot T^2 + c \cdot T + d \quad (15)$$

$$a = 0.626 \quad (16)$$

$$b = 642 \quad (17)$$

$$c = 221564 \quad (18)$$

$$d = 25769772 \quad (19)$$

Die Ableitung des Druckes nach der Zeit ist

$$\frac{dP}{dT} = 3 \cdot a \cdot T^2 + 2 \cdot b \cdot T + c \quad (20)$$

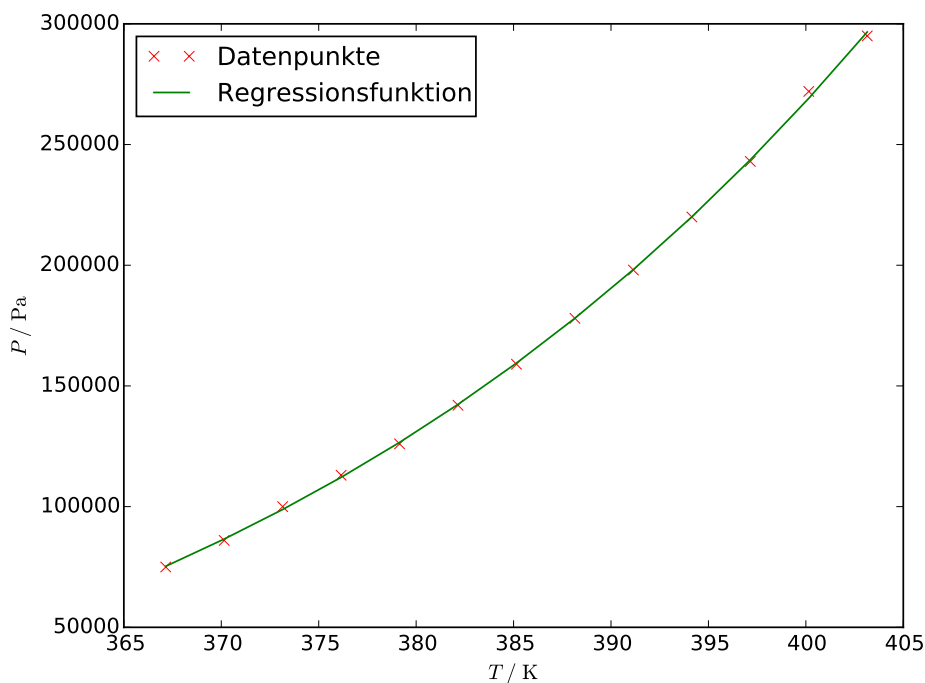


Abbildung 2: Regressionspolynom dritten Grades des Druckes über die Temperatur

Die Volumenabhängigkeit von Temperatur und Druck kann hier nicht mehr vernachlässigt werden. Es gilt für das Volumen V

$$\left(P(T) + \frac{a_W}{V^2}\right) = R \cdot T \Leftrightarrow V_{+,-} = \frac{R \cdot T \pm \sqrt{R^2 \cdot T^2 - 4 \cdot a_W \cdot P(T)}}{2 \cdot P(T)} \quad (21)$$

Durch einsetzen der Ergebnisse ist ersichtlich, dass die Lösung V_+ unser Volumen wiedergibt. Bilder?!

Nach dieser Vorarbeit ist

$$L(T) = V_+(P(T)) \cdot T \cdot \frac{dP}{dT} \quad (22)$$

und wurde in Abbildung 3 über die Temperatur aufgetragen. Zusätzlich wurden Datenpunkte eingetragen, bei denen das Volumen durch die gemessenen Drücke, nicht das Regressionspolynom, berechnet wurde.

Wertetabelle?!

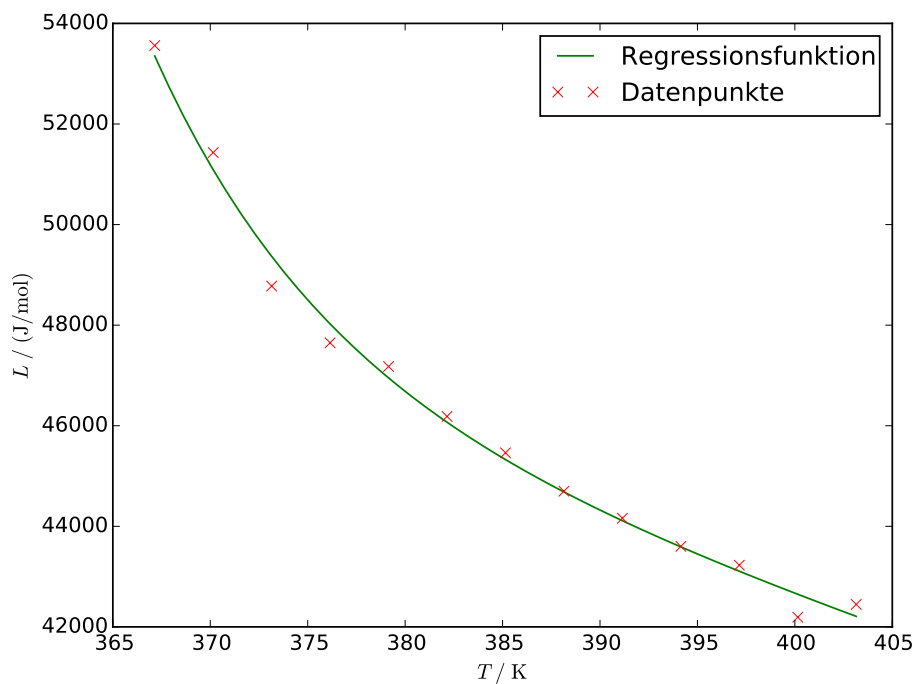


Abbildung 3: Verdampfungswärme in Abhängigkeit der Temperatur

4 Diskussion