

# ANFÄNGERPRAKTIKUM 2015/2016

## Versuch

Durchführung: TT.MM.JJ

Clara RITTMANN<sup>1</sup>  
Anja BECK<sup>2</sup>

*Betreuer:*  
Max MUSTERMANN

---

<sup>1</sup>clara.rittmann@gmail.com

<sup>2</sup>anja.beck@tu-dortmund.de

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Theorie</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Aufbau und Ablauf des Experiments</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Auswertung</b>	<b>5</b>
3.1	Auswertung der Messdaten . . . . .	5
<b>4</b>	<b>Diskussion</b>	<b>8</b>

# 1 Theorie

Ein LC-Schwingkreis besteht aus einer Spule mit der Induktivität  $L$  und einem Kondensator mit der Kapazität  $C$ . Die Spule speichert ein magnetisches Feld und der Kondensator ein elektrisches. In dem Schwingkreis wechseln sich beide Felder periodisch ab mit der Folge, dass sich der Stromfluss mit gleicher Periode umkehrt. Zwei LC-Schwingkreise können durch einen weiteren Kondensator  $C_K$  gekoppelt werden (siehe Abbildung (Anleitung 2)).

Der Stromfluss in beiden einzelnen gekoppelten Kreisen wird durch die Kirchhoffschen Regeln bestimmt.

$$I_K = I_1 - I_2 \quad (1)$$

$$U_{1C} + U_{1L} + U_K = 0 \quad (2)$$

$$U_{2C} + U_{2L} + U_K = 0 \quad (3)$$

Die gekoppelten Differentialgleichungen für beide Schwingkreise folgen mit

$$U_C = \frac{1}{C} \int I dt \quad \text{und} \quad U_L = L \frac{dI}{dx} \quad (4)$$

$$1. \text{ DGL: } L \frac{d^2 I_1}{dx^2} + \frac{1}{C} I_1 + \frac{1}{C_K} (I_1 + I_2) = 0 \quad (5)$$

$$2. \text{ DGL: } L \frac{d^2 I_2}{dx^2} + \frac{1}{C} I_2 - \frac{1}{C_K} (I_1 + I_2) = 0 \quad (6)$$

Die Lösungen sind abhängig von den Anfangsamplituden  $I_{10}$  des ersten Schwingkreises und  $I_{20}$  des zweiten Schwingkreises, sowie den Frequenzen  $\nu^+$  und  $\nu^-$ .

$$I_1(t) = \frac{1}{2} (I_{10} + I_{20}) \cos(2\pi\nu^+ t) + \frac{1}{2} (I_{10} - I_{20}) \cos(2\pi\nu^- t) \quad (7)$$

$$I_2(t) = \frac{1}{2} (I_{10} + I_{20}) \cos(2\pi\nu^+ t) - \frac{1}{2} (I_{10} - I_{20}) \cos(2\pi\nu^- t) \quad (8)$$

Die Frequenzen sind

$$\nu^+ = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad \text{und} \quad (9)$$

$$\nu^- = \frac{1}{2\pi\sqrt{L\left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_K}\right)^{-1}}} \quad (10)$$

Nun werden wichtige Spezialfälle dieses komplexen Verhaltens beschrieben. Die zwei **Fundamentalschwingungen** zeichnen sich dadurch aus, dass die Anfangsamplituden  $I_{10}$  und  $I_{20}$  gleich groß sind ( $|I_{10}| = |I_{20}|$ ). Sind beide Schwingkreise in Phase ( $I_{10} = I_{20}$ ) schwingen sie mit der Frequenz  $\nu^+$ . Sind die Schwingkreise um eine halbe Periode phasenverschoben ( $I_{10} = -I_{20}$ ) schwingen sie mit der etwas höheren Frequenz  $\nu^-$ .

Das Phänomen der **Schwebung** tritt auf, wenn einer der Kreise stimuliert wird bzw. eine Anfangsamplitude hat und der andere Kreis keine Anfangsamplitude aufweist

und die Frequenzen  $\nu^+$  und  $\nu^-$  nahezu übereinstimmen.

$$I_1 = I_{10} \cos(\pi(\nu^+ + \nu^-)t) \cdot \cos(\pi(\nu^+ - \nu^-)t) \quad (11)$$

$$I_2(t) = I_{10} \sin(\pi(\nu^+ + \nu^-)t) \cdot \sin(\pi(\nu^+ - \nu^-)t) \quad (12)$$

Es entsteht eine Schwingung (siehe Abbildung (Abb.3)) mit den Frequenzen der einzelnen Schwingkreise

$$\nu = \pi(\nu^+ + \nu^-) \quad (13)$$

und einer Schwebungsfrequenz von

Ich glaube hier müsste ein Minus sein und die 2 weg.

$$f = 2\pi(\nu^+ + \nu^-) \quad (14)$$

Es handelt sich um einen periodischen Energieaustausch zwischen den beiden Schwingkreisen mit der Schwebungsfrequenz.

Ich finde du wiederholst dich hier, wenn du sagst, dass die Frequenzen nahezu übereinstimmen.

Wieso hast du bei einem Strom (t) dahinter geschrieben und beim anderen nicht?

## 2 Aufbau und Ablauf des Experiments

Ein Schaltkreis wie in Abbildung (VERWEIS) dargestellt ist die Grundlage für alle Messungen. Als erstes müssen die Frequenzen der beiden Schwingkreise aufeinander abgestimmt werden, da eine der Kapazitäten variabel ist.

Die Frequenzen der Fundamentalschwingungen werden auf zwei Methoden bestimmt. Zuerst wird der Erreger durch eine Sinusspannung ersetzt und mit Hilfe von Lissajous-Figuren festgestellt, für welche Frequenzen bei Variation der Erregerfrequenz beide Schwingkreise um die Phasen 0 und  $\pi$  verschoben sind. Bei der zweiten Methode erzeugt man ein kontinuierliches Frequenzspektrum und zeichnet den Stromverlauf des rechten Schwingkreises über die Zeit auf. Wenn der Strom ein Maximum einnimmt, ist die Frequenz gerade  $\nu+$  oder  $\nu-$ .

Des Weiteren wird die Schwebung untersucht, indem einer der beiden Schwingkreise mit einem einzelnen Impuls (bzw. Rechteckimpuls mit einer viel kleineren Frequenz als der Schwing- und Schwebungsfrequenz) angeregt wird. Es sollen die Maxima der Schwingung innerhalb einer Schwebungsperiode für verschiedene Kapazitäten des Kondensators  $C_K$  auf einem Oszilloskop beobachtet werden.

Hier habe ich die Reihenfolge geändert, weil ich das dann in der Auswertung besser beschreiben konnte.

Die Induktivität der verwendeten Spulen ist

$$L = 23.954 \text{ mH} .$$

Die Kondensatoren in den Schwingkreisen haben eine Kapazität von

$$C^* = 0.7932 \text{ nF} .$$

Es gilt zu beachten, dass auch die Spulen eine Kapazität von

$$C_{\text{Sp}} = 0.028 \text{ nF}$$

haben. Das erschwert die Rechnung kaum, da mit

$$C = C^* + C_{\text{Sp}}$$

gerechnet werden kann.

### 3 Auswertung

Im folgenden wurden Mittelwerte von  $N$  Messungen der Größe  $x$  berechnet

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad (15)$$

sowie die Varianz

$$V(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \quad (16)$$

woraus die Standardabweichung folgt

$$\sigma_x = \sqrt{V(x)}. \quad (17)$$

Die Standardabweichung des Mittelwertes

$$\Delta_x = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}, \quad (18)$$

kürzer auch Fehler des Mittelwertes genannt, bezieht noch die Anzahl der Messungen mit ein.

#### 3.1 Auswertung der Messdaten

Die Bestimmung der Fundamentalfrequenzen über die Phasenbeziehung ergibt die in Tabelle 1 aufgelisteten Messdaten.

$C_K$ in nF	$\nu_{\varphi=0}^+$ in kHz	$\nu_{\varphi=\pi}^-$ in kHz
1.0	33.11	79.62
2.2	32.47	60.39
2.7	32.47	56.56
4.7	32.68	48.08
6.8	32.47	44.01
8.2	32.89	41.67
10.0	33.11	40.65
12.0	32.89	40.00

Tabelle 1: Fundamentalfrequenzen bei der Bestimmung über die Phasenbeziehung für verschiedene Koppelkondensatoren  $C_K$

Bei der „dynamischen“ Messung der Fundamentalfrequenzen wird die am Schwingkreis angelegte Frequenz kontinuierlich erhöht. Die Zeitdifferenz zwischen dem Beginn der Frequenzsteigerung und dem Erreichen der beiden Fundamentalfrequenzen wird am Oszilloskop bestimmt werden. Diese Zeiten sind in Tabelle 2 dargestellt. Über die Startfrequenz  $\nu_{start} = 11.16$  kHz, die Endfrequenz  $\nu_{end} = 112.6$  kHz und das eingestellte Intervall  $T = 1$  s kann eine Funktion

$$\nu(t) = \frac{\nu_{end} - \nu_{start}}{T} t + \nu_{start}$$

Kapazität $C_k$ in nF	$t_1$ in s	$t_2$ in s
1.0	0.2280	0.6761
2.2	0.2200	0.4880
2.7	0.2160	0.4480
4.7	0.2120	0.3560
6.8	0.2160	0.3240
8.2	0.2160	0.3040
10.0	0.2160	0.2920
12.0	0.2120	0.2760

Tabelle 2: Zeiten  $t_1$  und  $t_2$  nach denen die Fundamentalfrequenzen erreicht wurden aufgestellt werden. Damit können nun die Fundamentalfrequenzen (siehe Tabelle 3) berechnet werden.

$C_K$ in nF	$\nu_{t_1}^+$ in kHz	$\nu_{t_2}^-$ in kHz
1.0	34.29	79.75
2.2	33.48	60.67
2.7	33.07	56.61
4.7	32.67	47.27
6.8	33.07	44.03
8.2	33.07	42.00
10.0	33.06	40.78
12.0	32.67	39.16

Tabelle 3: Fundamentalfrequenzen, die sich bei der „dynamischen“ Messung für verschiedene Koppelkondensatoren  $C_K$  ergeben

Das Zählen der Schwingungen innerhalb einer Schwebungsperiode, also einem Schwebungsbauch hat nur teilweise funktioniert. Bei den kleineren Kapazitäten war dies (siehe Tabelle 4) nicht möglich.

Mit (11) kann die Anzahl an Schwingungen pro Schwebungsbauch in Zusammenhang mit den Fundamentalfrequenzen gebracht werden. So schwingt das System  $n$ -mal

$$\pi(\nu^+ + \nu^-)T \stackrel{!}{=} 2\pi n$$

während einer Schwebungsperiode (also einem Schwebungsbauch)

$$\pi(\nu^- - \nu^+)T \stackrel{!}{=} \pi .$$

Zusammen ergibt sich

$$n = \frac{(\nu^+ + \nu^-)}{2(\nu^- - \nu^+)} . \quad (19)$$

Die Resonanzfrequenz des Schwingkreises bei einer Phasenverschiebung von  $\varphi = 0$  ist  $\nu^+ = 33.33$  kHz. Damit kann nun  $\nu^-$  berechnet werden. Die so erhaltenen Werte ergänzen Tabelle 4.

Kapazität $C_K$ in nF	Bäuche	$\nu^-$ in kHz
4.7	2	41.66
6.8	3	38.89
8.2	4	37.50
10.0	4	37.50
12.0	5	36.66

Tabelle 4: Anzahl der Schwingungen pro Schwingungsbauch und die daraus berechneten Frequenzen  $\nu^-$

Über Beziehung (19) kann auch die Anzahl an Schwingungen pro Schwebungsperiode bei bekannten Frequenzen berechnet werden. Ein Vergleich zwischen der gezählten, der für die Frequenzen aus dem ersten Versuchsteil berechneten und der theoretisch zu erwartenden Anzahl an Bäuchen pro Schwebung befindet sich in Tabelle 7.



## 4 Diskussion

Die Tabellen 7, 5 und 6 stellen die Ergebnisse der drei Messreihen noch einmal gegenüber.

Die verschiedenen Messungen der Fundamentalfrequenz  $\nu^+$  ergeben sehr ähnliche Werte. Da sie nicht vom Koppelkondensator abhängt, werden hier die Mittelwerte

$$\bar{x} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N x_i$$

mit ihren Fehlern

$$\Delta_x = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}}{\sqrt{N}}$$

miteinander verglichen. Die Werte erhalten so mehr Aussagekraft, da nicht nur einzelne, sondern mehrere Messwerte mit eingehen.

	Messung über Phasenbeziehung	dynamische Messung	Messung beim Kalibrieren	Theorie
Wert	$(33.17 \pm 0.17)$	$(32.76 \pm 0.09)$	33.33	36.66
Abweichung	-9.5%	-10.6%	-9.1%	

Tabelle 5: Mittelwerte der Messungen von  $\nu^+$  in kHz und Abweichungen vom theoretisch erwarteten Wert

Auch bei der Messung der Frequenz  $\nu^-$  liegen die Messwerte sehr dicht beieinander. Die Abweichung vom Theorie-Wert jedoch steigert sich von 5% bei großen Koppelkapazitäten  $C_K$  bis zu 65% bei kleinen  $C_K$ . Die über die Anzahl der Schwingungen pro Schwebungsbauch berechneten Frequenzen  $\nu^-$  dagegen weichen nur wenig von den erwarteten Werten ab. Hier gilt allerdings zu beachten, dass der systematische Fehler der Zählung der Schwingungen sehr groß ist, da nur die Schwingungen pro einem Bauch gezählt wurden. Diese Werte sind also nicht sehr aussagekräftig.

$C_K$ in nF	Messung über Phasenbeziehung	dynamische Messung	berechnet über Anzahl der Schwingungen pro Schwebung	Theorie
1.0	79.62	79.75	-	48.43
2.2	60.39	60.67	-	42.05
2.7	56.56	56.61	-	40.98
4.7	48.08	47.27	41.67	38.89
6.8	44.01	44.03	38.89	37.99
8.2	41.67	42.00	37.50	37.64
10.0	40.65	40.78	37.50	37.33
12.0	40.00	39.16	36.66	37.09

Tabelle 6: Werte der Messungen von  $\nu^-$  in kHz

Bei der Anzahl der Schwingungen pro Schwebungsbauch liegt ein ähnliches Bild vor: Die errechneten Werte unterscheiden sich nur wenig. Sie weichen aber allesamt vom erwarteten Wert ab, bei großen Koppelkapazitäten  $C_K$  sogar um über 80%.

$C_K$ in nF	gezählt	berechnet, dynamisch	berechnet, Phase	erwartet, Theorie
1.0	-	1.3	1.2	3.4
2.2	-	1.7	1.7	6.3
2.7	-	1.9	1.8	7.5
4.7	2	2.7	2.6	12.4
6.8	3	3.5	3.3	17.5
8.2	4	4.2	4.2	21.0
10.0	4	4.8	4.9	25.3
12.0	5	5.5	5.1	30.2

Tabelle 7: Gezählte, berechnete und erwartete Anzahl an Schwingungen pro Schwebungsbauch für verschiedene Koppelkondensatoren  $C_K$

Hier müsste jetzt noch etwas dazu stehen, warum die Werte so stark von der Theorie abweichen. Aber um ehrlich zu sein: Ich habe keine Ahnung.