

ANFÄNGERPRAKTIKUM 2015/2016

Biegung elastischer Stäbe

Durchführung: 03.11.15

Clara RITTMANN¹
Anja BECK²

Betreuer:
Max MUSTERMANN

¹clara.rittmann@tu-dortmund.de

²anja.beck@tu-dortmund.de

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Theorie | 2 |
| 2 | Aufbau und Ablauf des Experiments | 4 |
| 3 | Auswertung | 5 |
| 3.1 | Statistische Formeln | 5 |
| 3.1.1 | Fehlerrechnung | 5 |
| 3.2 | Bestimmung des Wärmestroms in Messing | 6 |
| 3.3 | Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit | 7 |
| 3.4 | Vergleich der Temperaturverläufe | 9 |
| 4 | Diskussion | 10 |

1 Theorie¹

Das Ziel dieses Versuches ist es Abhängigkeit der Wärmeleitung vom Material und dessen Form zu zeigen.

Wärmetransport ist eine Folge von Temperaturgefällen. Wärme strebt vom warmen Reservoir zum kalten. Das geschieht durch Konvektion, Wärmestrahlung oder Wärmeleitung. In diesem Versuch geht es um die Wärmeleitung in Metallen durch Phononen und frei bewegliche Elektronen – Beiträge durch die Konvektion und Wärmestrahlung werden vernachlässigt.

Für einen Stab der Querschnittsfläche A mit der Wärmeleitfähigkeit κ ist die Änderung der Wärme Q in einer Zeitspanne abhängig von der Temperaturänderung bezüglich des Abstandes der Orte, an denen die Temperatur gemessen wurde

$$dQ = -\kappa A \frac{\partial T}{\partial x} dt \quad . \quad (1)$$

Die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung beschreibt die räumliche und zeitliche Entwicklung der Temperatur

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{\rho \cdot c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad , \quad (2)$$

die von den Materialeigenschaften Wärmeleitfähigkeit κ , Dichte ρ und spezifische Wärme c abhängt. Der Faktor $\frac{\kappa}{\rho \cdot c}$ stellt dar, wie schnell die Temperaturausbreitung erfolgt und wird auch Temperaturleitfähigkeit genannt.

Die Lösung der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung ist abhängig von der Form des Stabes und den Anfangsbedingungen d.h. der Art der Wärmezufuhr. Wird der Stab an einem Ende periodisch erwärmt und abgekühlt, entsteht eine Temperaturwelle $T(x, t)$ entlang des Stabes

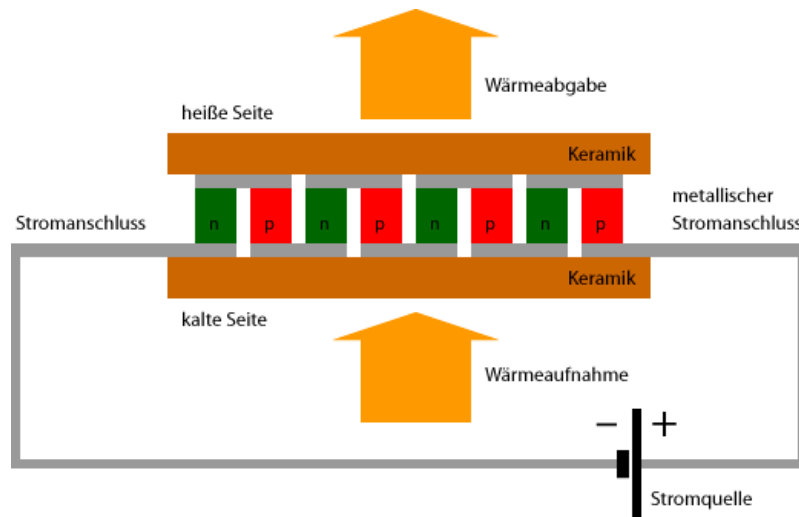
$$T(x, t) = T_{\max} \cdot \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega \rho c}{2\kappa}} x\right) \cdot \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega \rho c}{2\kappa}} x\right) \quad . \quad (3)$$

Die Wärmeleitfähigkeit kann aus dem Amplitudenverhältnis einer näher an der Wärmequelle gelegenen Messung A_{nah} und einer um Δx weiter entfernten Messung A_{fern} bestimmt werden

$$\kappa = \frac{\rho c (\Delta x)^2}{2 \Delta t \ln(A_{\text{nah}}/A_{\text{fern}})} \quad . \quad (4)$$

Die Zeitdifferenz der Amplituden ist Δt .

¹nach: Anleitung zu V204: Wärmeleitung, Anfängerpraktikum TU Dortmund WS 2015/16, <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V204.pdf>

Abbildung 1: Peltier-Element²

Zum Erwärmen der Stäbe wird ein **Peltier-Element** verwendet. Das Peltier-Element heizt nach dem Anlegen einer Spannung auf der einen Seite und kühlt auf der anderen, sodass es sowohl als Wärme- als auch als Kältequelle verwendet werden kann. In einem Peltier-Element sind abwechselnd n- und p-dotierte Halbleiter verbaut und an Lötstellen miteinander verbunden. Elektronen, die sich in den Halbleitern bewegen haben unterschiedliche Energieniveaus. Wenn das Elektron von dem n-dotierten auf den p-dotierten Halbleiter trifft, nimmt es ein höheres Energieniveau an und muss dazu Energie aus der Umgebung aufnehmen – die Lötstelle kühlt ab. Trifft das Elektron wieder auf den n-dotierten Halbleiter gibt es Energie ab und die Lötstelle wird heißer.

²Quelle: <https://www.energie-lexikon.info/img/peltier-element.png>

2 Aufbau und Ablauf des Experiments

In diesem Experiment wird die Wärmeleitung von vier Metallstäben gemessen: Ein Stab ist aus Aluminium, einer aus Edelstahl und zwei mit verschiedenen Querschnitten aus Kupfer. Die Stäbe werden zeitgleich mit einem Peltier-Element erhitzt bzw. gekühlt. Die Temperatur der Stäbe wird jeweils an zwei Stellen eines Stabes mit Thermoelementen gemessen und in einem Datenlogger gespeichert.

Als erstes werden die Stäbe einfach nur erhitzt, um den Wärmestrom $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$ des Messingstabes zu bestimmen. Hierzu werden die Temperaturkurven sowie die Temperaturdifferenzen der Thermoelemente mit Hilfe des Datenloggers erstellt und ausgedruckt.

In weiteren Messungen wird periodisch geheizt und gekühlt. Für Messing und Aluminium werden die Messung bei einer Periode von 80s durchgeführt und für Edelstahl bei 200s. Es wird für jeden Stab eine Grafik mit den Temperaturkurven beider Thermoelemente erstellt.

3 Auswertung

3.1 Statistische Formeln

3.1.1 Fehlerrechnung

Im folgenden wurden Mittelwerte von N Messungen der Größe x berechnet

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (5)$$

sowie die Varianz

$$V(x) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \quad (6)$$

woraus die Standardabweichung folgt

$$\sigma_x = \sqrt{V(x)}. \quad (7)$$

Die Standardabweichung des Mittelwertes, kürzer auch Fehler des Mittelwertes genannt, bezieht noch die Anzahl der Messungen mit ein. Mehr Messungen führen zu einem kleineren Fehler

$$\Delta_x = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}. \quad (8)$$

3.2 Bestimmung des Wärmestroms in Messing

Diagramm 1 zeigt die Temperaturdifferenz zwischen den Temperaturen, die an den Thermoelementen T1 und T2 bei der statischen Messung gemessen werden. Mit Hilfe eines Lineals wird die Temperaturdifferenz im Diagramm (siehe Tabelle 1) gemessen. Eingesetzt in Gleichung (1) ist der gemittelte Wärmestrom

| Zeit in s | ΔT_{2-1} in °C |
|-----------|------------------------|
| 50 | 4.91 |
| 100 | 4.60 |
| 150 | 3.96 |
| 200 | 3.49 |
| 250 | 3.19 |
| 300 | 2.98 |

Tabelle 1: Temperaturdifferenz bei statischer Messung in Messing

in Messing

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = (-1.89 \pm 0.27) \cdot 10^{-4} \frac{\text{J}}{\text{s}}, \quad (9)$$

mit dem Literaturwert der Wärmeleitfähigkeit (siehe Diskussion) und dem Querschnitt³

$$A = 48 \text{ mm}^2. \quad (10)$$

³aus der Versuchsanleitung zu V204: Wärmeleitung von Metallen, Anfängerpraktikum, TU Dortmund

3.3 Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit

Nach den dynamischen Messungen werden die Diagramme 2 (Temperaturen bei Messing), 3 (Temperaturen bei Aluminium) und 4 (Temperaturen bei Edelstahl) ausgedruckt. Mit einem Lineal wurden jeweils die Phasenverschiebung und die Amplituden im Diagramm gemessen. Die Amplitudenmessung erfolgt dabei wie folgt: Zunächst wird ΔT an mehreren Stellen bei steigender Temperatur gemessen, also zwischen Tief- und Hochpunkt. Danach wird ΔT beim jeweils nachfolgenden Temperaturabfall, also vom Hoch- zum Tiefpunkt, gemessen. Die jeweils zusammengehörenden Werte werden addiert und durch vier geteilt.

Die benötigten Konstanten (Tabelle 2) stammen aus der Versuchsanleitung zu V204: Wärmeleitung von Metallen des Anfängerpraktikums der TU Dortmund.

| Material | ρ in kg/m | c in J/(kg K) |
|-----------|----------------|-----------------|
| Messing | 8520 | 385 |
| Aluminium | 2800 | 830 |
| Edelstahl | 8000 | 400 |

Tabelle 2: Konstanten zur Berechnung der Wärmeleitfähigkeit, Δx war jeweils 3 cm

Mit den jeweiligen Werten aus den Tabellen und Formel (4) ergeben sich folgende Wärmeleitfähigkeiten:

$$\text{Messing:} \quad \kappa_{\text{M}} = (159.7 \pm 2.6) \frac{\text{W}}{\text{m K}} \quad (11)$$

$$\text{Aluminium:} \quad \kappa_{\text{A}} = (233.4 \pm 5.3) \frac{\text{W}}{\text{m K}} \quad (12)$$

$$\text{Edelstahl:} \quad \kappa_{\text{E}} = (17.7 \pm 0.2) \frac{\text{W}}{\text{m K}} \quad (13)$$

| A_{nah} in °C | A_{fern} in °C | Δt in s |
|------------------------|-------------------------|-----------------|
| 3.26 | 0.98 | 8.33 |
| 3.41 | 1.10 | 6.25 |
| 3.49 | 1.14 | 6.25 |
| 3.56 | 1.02 | 8.33 |
| 3.45 | 1.06 | 8.33 |
| 3.07 | 0.95 | 8.33 |
| 3.56 | 1.10 | 8.33 |
| 3.41 | 0.98 | 8.33 |
| 3.40 ± 0.02 | 1.04 ± 0.01 | 7.81 ± 0.11 |

Tabelle 3: Amplituden und Phasendifferenz bei der dynamischen Messung bei Messing inklusive Mittelwerte

| A_{nah} in °C | A_{fern} in °C | Δt in s |
|------------------------|-------------------------|-----------------|
| 2.93 | 1.59 | 6.25 |
| 3.17 | 1.71 | 6.25 |
| 3.23 | 1.83 | 6.25 |
| 3.17 | 1.71 | 6.25 |
| 3.26 | 1.72 | 8.33 |
| 2.99 | 1.59 | 8.33 |
| 3.38 | 1.86 | 8.33 |
| 3.23 | 1.71 | 8.33 |
| 3.17 ± 0.02 | 1.72 ± 0.01 | 7.29 ± 0.13 |

Tabelle 4: Amplituden und Phasendifferenz bei der dynamischen Messung bei Aluminium inklusive Mittelwerte

| A_{nah} in °C | A_{fern} in °C | Δt in s |
|------------------------|-------------------------|-----------------|
| 2.52 | 0.52 | 41.10 |
| 2.59 | 0.50 | 34.25 |
| 2.57 | 0.45 | 41.10 |
| 2.90 | 0.45 | 41.10 |
| 2.67 | 0.42 | 41.10 |
| 2.71 | 0.42 | 47.95 |
| 2.67 | 0.40 | 47.95 |
| 2.62 | 0.33 | 41.10 |
| 2.59 | 0.38 | 54.79 |
| 2.67 | 0.38 | 47.95 |
| 2.74 | 0.40 | 47.95 |
| 2.66 ± 0.01 | 0.42 ± 0.01 | 44.2 ± 0.5 |

Tabelle 5: Amplituden und Phasendifferenz bei der dynamischen Messung bei Edelstahl inklusive Mittelwerte

3.4 Vergleich der Temperaturverläufe

Diagramm VERWEIS und Diagramm VERWEIS zeigen die Temperaturverläufe der entfernteren Thermoelemente bei der statischen Messung. Wie erwartet nähern sich die Kurven mit kleiner werdender positiver Steigung einem Grenzwert. Die Verläufe von Messing und Aluminium sind vergleichbar, die Temperatur in Edelstahl steigt sehr viel langsamer an. Der Vergleich der beiden Messingstäbe zeigt, dass ein breiterer Stab mehr Wärme leitet.

In den Diagrammen VERWEIS und VERWEIS sind die Temperaturdifferenzen $T_{\text{fern}} - T_{\text{nah}}$ des breiten Messingstab und Edelstahl bei statischer Messung zu sehen. Bei beiden zeigt sich, dass die Temperaturen sich nach einiger Zeit annähern. Erwartungsgemäß geschieht dies bei Messing sehr viel schneller, da laut der Berechnung, Messing eine erheblich höhere Wärmeleitfähigkeit besitzt.

4 Diskussion

In diesem Experiment gibt es zwei Hauptfehlerquellen. Direkt zu Beginn fällt auf, dass das Peltier-Element nicht zuverlässig heizt. Auf „Kühlen“ eingestellt war, heizt und kühlt es manchmal abwechselnd. Während der Messungen beobachteten wir stets eine Temperaturveränderung in die erwartete Richtung. Es ist jedoch fraglich, ob eine konstante Wärme- /Kältezufuhr gewährleistet ist. Dieser Fehler fließt sowohl in die statische und wie auch in die dynamische Messmethode mit ein.

Der zweite gravierende Fehler betrifft nur die dynamische Messmethode. Die periodische Wärmezufuhr wird per Hand generiert. Wenn einmal zu früh oder spät die Kühlung bzw. Heizung angestellt wird, veränderte sich direkt die Periode und somit auch der Phasenunterschied der beiden gemessenen Amplituden. Besonders bei der Edelmessung mit großen Amplituden variiert Δt stark (siehe Tabelle 5).

Trotz dieser Fehler sind die Ergebnisse zufriedenstellend. Für den Wärmestrom kann leider kein Vergleichswert gefunden werden, da dieser neben dem Material auch von der Form des Stabes abhängt.

In Tabelle ?? werden Literaturwerte und gemessene Werte der dynamischen Methode gegenübergestellt. Komisch ist, dass Aluminium und Messing in unterschiedliche Richtungen abweichen, obwohl beide Messreihen zeitgleich unter identischen Bedingungen ablaufen.

| Material | κ Literatur bei Raumtemperatur | κ gemessen | Abweichung |
|-----------|---------------------------------------|-------------------|------------|
| Aluminium | 237 | 233.4 | -1.5% |
| Messing | 120 | 159.7 | +33.1% |
| Edelstahl | 15 | 17.7 | +18.0% |

Tabelle 6: Vergleich zwischen Literatur-⁴ und gemessenem Wert der Wärmeleitfähigkeit

⁴<http://www.chemie.de/lexikon/Wrmeleitfhigkeit.html>