Das Trägheitsmoment

Clara Rittmann
Anja Beck

Durchführung: 20.10.15

Inhaltsverzeichnis

1 Theorie

Man stelle sich eine Eiskunstläuferin vor, die eine Pirouette mit angezogenen Armen und Beinen macht. Wenn sie die Gliedmaßen nun schnell von sich streckt, ist intuitiv klar, dass sie sich plötzlich langsamer dreht. Der Grund dafür ist die Änderung des Trägheitsmoments I. Dreht sich ein Körper um seine Symmetrieachse lautet das Trägheitsmoment

$$I = \int_V r^2 \rho(r)\ dV \tag{1}$$

r ist hierbei der Abstand zur Rotationsachse. Das Trägheitsmoment ist also abhängig davon wie die Masse in Bezug auf die Symmetrieachse verteilt ist.

Dreht sich ein Körper allerdings nicht um seine Symmetrieachse, muss das Trägheitsmoment mit dem Satz von Steiner

$$I = I_{sym} + m \cdot a^2 \tag{2}$$

berechnet werden. I_{sym} ist hier das Trägheitsmoment für eine Drehung um die Symmetrieachse des Körpers, m seine Masse und a ist der Abstand zwischen Symmetrie- und Rotationsachse.
Außerdem gilt

$$I = \sum_i I_i = \sum_i m_i \cdot r_i^2 \tag{3}$$

sodass komplizierte Formen zur Berechnung des Trägheitsmoments in einfachere Teilstücke zerlegt werden können.

Das Trägheitsmoment spielt eine wichtige Rolle bei der Berechnung von Rotationsbewegungen, weil es das Analogon zur (trägen) Masse bei beispielsweise geradlinigen Bewegungen ist. Ähnlich verhält es sich mit dem Drehmoment $\vec{M}$. Es wird berechnet durch

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \tag{4}$$

Das Drehmoment repräsentiert die „Kraft“ bei Rotationsbewegungen. Das heißt

$$F = m \cdot \ddot{x} \tag{5}$$

wird zu

$$M = I \cdot \ddot{\varphi} \tag{6}$$

und bei Bewegungen, die durch die rücktreibende Kraft einer Feder (Federkonstante k) verursacht werden, wird

$$F = k \cdot x \tag{7}$$

zu

$$M = D \cdot \varphi \tag{8}$$

D heißt hier Winkelrichtgröße. Betrachtet man ein System, das eine rotierende Bewegung ausführt und bei dem die rücktreibende Kraft aus einer Feder kommt, kann man zudem folgenden Zusammenhang zwischen der Schwingungsdauer T, dem Trägheitsmoment I und der Winkelrichtgröße D herstellen

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}} \tag{9}$$

2 Aufbau und Ablauf des Experiments

Im Mittelpunkt des Versuchs stand eine Drillachse, bei der wir zunächst mit Hilfe eines Federkraftmessers die rücktreibende Kraft für zehn verschiedene Auslenkwinkel bestimmt haben (Tabelle 1).
Danach wurde eine Metallstange auf der Drillachse befestigt. Auf beiden Seiten der Drehachse und mit gleichem Abstand zu ihr war je ein Gewicht angebracht. Die Stange mit den Gewichten wurde ausgelenkt und die Schwingungsdauer gemessen. Wie Tabelle 2 zu entnehmen ist, haben wir die Messung für verschiedene Abstände der Gewichte zur Mitte wiederholt.
Im letzten Teil des Versuchs befestigten wir verschiedene Körper auf der Drillachse und stoppten die Schwingungsdauern. In den Tabellen 3 und 4 finden sich die Werte zweier Zylinder, die wir vermessen und quer auf der Apparatur befestigt haben.
Tabelle 5 zeigt die Daten einer Modellpuppe aus Holz. Sie wurde zunächst an allen Körperteilen mehrfach vermessen, damit man sie später gut als einen aus Zylindern zusammengesetzten Körper nähern kann. Dann haben wir die Puppe auf der Drillachse die Schwingungsdauer gemessen.

3 Auswertung

3.1 Fehlerrechnung

Im folgenend wurden Mittelwerte von N Messungen der Größe x berechnet

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{\mathrm{N}} x_i \tag{10}$$

sowie die Varianz

$$V(x) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{\mathrm{N}} (x_i - \bar{x})^2 \tag{11}$$

woraus die Standartabweichung folgt

$$\sigma_x = \sqrt{V(x)}. \tag{12}$$

Die Standartabweichung des Mittelwertes, kürzer auch Fehler des Mittelwertes genannt, bezieht noch die Anzahl der Messungen mit ein. Mehr Messungen führen zu einem kleineren Fehler

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}. \tag{13}$$

3.2 Bestimmung der Winkelrichtgröße

Zur Bestimmung der Winkelrichtgröße D stellt man Formel (8) um und setzt für das Drehmoment den Ausdruck aus (4) ein

$$D = \frac{r \cdot F}{\varphi} \tag{14}$$

(es genügen die Absolutwerte von $\vec{F}$ und $\vec{r}$, da gilt $\vec{r} \times \vec{F} = r \cdot F \cdot \sin(\theta) = r \cdot F$ für $\theta = \frac{\pi}{2}$).

Auslenkwinkel in Grad	Kraft in N
20	0.06
40	0.08
60	0.10
80	0.13
100	0.17
120	0.14
140	0.20
160	0.24
180	0.28
200	0.33

Tabelle 1: Rückstellende Kraft bei verschiedenen Auslenkwinkeln

Berechnet man die Winkelrichtgröße für die Datenpaare aus Tabelle 1 erhält man den gemittelten Wert $D = 0.0285742392151$ Nm.

3.3 Das Eigenträgheitsmoment der Drillachse

Wir nehmen nun den Zusammenhang (9) und wenden ihn auf einen experimentellen Aufbau an, der den Satz von Steiner erfordert. Das Trägheitsmoment setzt sich daher aus dem Eigenträgheitsmoment I_D der Apparatur und dem um a verschobenen Trägheitsmoment I_{sym} des Körpers zusammen. Dann erhalten wir

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_D + I_{sym} + ma^2}{D}} \tag{15}$$

Wenn man diese Gleichung quadriert wird der lineare Zusammenhang zwischen T^2 und a^2 deutlich

$$T^2 = (2\pi)^2\frac{I_D + I_{sym} + ma^2}{D} \tag{16}$$

Der y-Achsenabschnitt b dieser Geraden wird durch

$$b = \frac{(2\pi)^2}{D}(I_D + I_{sym}) \tag{17}$$

und die Steigung m durch

$$m = \frac{(2\pi)^2 m}{D} \tag{18}$$

beschrieben.

Um diesen Zusammenhang auch aus den Messdaten herauslesen zu können, führen wir eine lineare Ausgleichsrechnung durch. Die nachfolgend verwendeten Formeln kommen aus Kapitel 1.2.10 „Ausgleichende Auswertung. Ausgleichsgerade. Lineare Regression. Methode der kleinsten (Abweichungs-) Quadrate“ in „Praktikum der Physik“ von W. Walcher.

Abstand zur Mitte in mm	Schwingungsdauer in s	Zylinderhöhe in in mm	Zylinderdurchmesser in mm	Gewicht in g
270	7.27	29.90	35.00	221.7
250	6.88	29.90	35.00	
230	6.31	30.00	35.70	
210	5.95	30.00	34.90	
190	5.42	30.00	35.00	
170	4.98			
150	4.51			
130	4.09			
110	3.62			
90	3.10			

Tabelle 2: Schwingungsdauern bei verschiedenen Abständen zur Drehachse und Vermessung der Zylinder

Um die bestmögliche Ausgleichsgerade zu finden verwenden wir die Methode der kleinsten Quadrate. Bei unseren Messdaten erhalten wir damit einen minimalen quadratischen Fehler der Regressionsgeraden von

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum_i (y_i - b - mx_i)^2}{n-2} = 0.419358266383 \text{ m}^2 \tag{19}$$

wenn wir als y-Achsenabschnitt

$$b = \frac{\sum_i x_i^2 \cdot \sum_i y_i - \sum_i x_i \cdot \sum_i x_i y_i}{n \sum_i x_i^2 - \left(\sum_i x_i\right)^2} = 5.17731001549 \text{ s}^2 \tag{20}$$

und als Steigung

$$m = \frac{n \sum_i x_i y_i - \sum_i x_i \sum_i y_i}{n \sum_i x_i^2 - \left(\sum_i x_i\right)^2} = 665.524369256 \ \frac{\text{s}^2}{\text{m}^2} \tag{21}$$

wählen. Zu Beachten sind allerdings, dass b und m fehlerbehaftete Größen sind, sodass die (quadrierten) Standardabweichungen

$$\sigma_b^2 = \sigma_y^2 \frac{\sum_i x_i^2}{n \sum_i x_i^2 - \left(\sum_i x_i\right)^2} = \tag{22}$$

und

$$\sigma_m^2 = \sigma_y^2 \frac{n}{n \sum_i x_i^2 - \left(\sum_i x_i\right)^2} = 0.16448423374 \ \left(\frac{\text{s}^2}{\text{m}^2}\right)^2 \tag{23}$$

zu berücksichtigen sind.
Abbildung 1 zeigt die Messwerte mit Ausgleichsgerade.
Schlussendlich können wir nun das Eigendrehmoment der Drillachse bestimmen, indem wir b in Ausdruck (13) einsetzen und nach I_D auflösen

$$I_D = \frac{b \cdot D}{(2\pi)^2} - 2 \cdot I_{sym} = (0.00367996 \pm 0.00000012) \text{ kg m}^2 \tag{24}$$

Wir brauchen das doppelte Trägheitsmoment, da zwei Zylinder (je links und rechts) an der Stange hingen.
Den angegebenen Fehler erhält man mit der Gaußsche Fehlerfortpflanzung

$$\sigma_{I_D} = \sqrt{\left(\frac{\partial I_D}{\partial b} s_b\right)^2 + \left(\frac{\partial I_D}{\partial I_{sym}} s_{I_{sym}}\right)^2} \tag{25}$$

wobei

$$\sigma_{I_{sym}}^2 = \cdot 0.00000006 \ (\text{kg m}^2)^2 \tag{26}$$

3.4 Trägheitsmomente verschiedener Körper

Zylinder

Die experimmentelle Bestimmung des Trägheitsmomentes für verschiedene Körper ist duch die Messung der Schwingungsdauer möglich. Es gilt der Zusammenhang aus Formel (9). Nach Umformung erhält man

$$I = \frac{T^2}{(2 \cdot \pi)^2} \cdot D \tag{27}$$

mit einem Fehler nach der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung

$$\sigma_{\mathrm{I}} = \sqrt{\left(\frac{2}{(2\pi)^2} \cdot T \cdot D\right)^2 \cdot (\sigma_{\mathrm{T}})^2} \ . \qquad (28)$$

Wir haben für zwei liegende Zylinder die Periodendauer gemessen und sie für eine spätere Bestimmung des theoretischen Trägheitsmomentes Längen und Breiten notiert.

Schwingungsdauer in s	Zylinder-durchmesser in mm	Zylinderhöhe in mm	Gewicht in g
1.12	85.00	30.00	1439.9
1.12	84.90	30.00	
1.12	84.80	30.00	
1.04	84.90	30.00	
0.87	85.00	30.00	
1.23			
1.12			
1.18			
1.12			
1.16			

Tabelle 3: Schwingungsdauer und Größenvermessung des kleinen Zylinders

Schwingungsdauer in s	Zylinder-durchmesser in mm	Zylinderhöhe in mm	Gewicht in g
2.01	80.00	139.50	1525.4
2.12	80.00	139.10	
2.36	80.10	138.95	
2.04	80.10	139.00	
1.95	80.00	139.10	
2.20			
2.10			
2.29			
2.03			
2.23			

Tabelle 4: Schwingungsdauer und Größenvermessung des großen Zylinders

Eine Berechnung des Mittelwertes und dessen Fehler ergibt eine Periodendauer von $(1{,}108 \pm 0{,}029)\,\mathrm{s}^{-1}$ für den kleinen Zylinder und $(2{,}13 \pm 0{,}04)\,\mathrm{s}^{-1}$ für den Großen. Daraus folgen die experimentellen Trägheitsmomente $(0{,}000\,89 \pm 0{,}000\,05)\,\mathrm{kg\,m^2}$ (kleiner Zylinder) und $(0{,}003\,29 \pm 0{,}000\,12)\,\mathrm{kg\,m^2}$ (großer Zylinder) nach Formel (27) und (28).
Die Trägheitsmomente dieser Zylinder lassen sich mittels

$$I_{ZH} = m\left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12}\right) \qquad (29)$$

mit einem Fehler nach der Gauß'schen Fehlerfortpflanzung

$$\sigma_{\mathrm{I_{ZH}}} = \sqrt{\left(\frac{m \cdot R}{2}\right)^2 \cdot (\sigma_{\mathrm{R}})^2 + \left(\frac{m \cdot h}{6}\right)^2 \cdot (\sigma_{\mathrm{h}})^2} \tag{30}$$

berechnen. Der kleine Zylinder kommt bei einer mittleren Höhe von (0,042 00 ± 0,000 17) m und einem mittleren Radius von (0,03 ± 0,00) m auf ein Trägheitsmoment von (0,000 130 ± 0,000 047) kg m^2. Der große Zylinder misst eine mittlere Höhe von (0,139 13 ± 0,000 09) m und einen mittleren Radius von (0,040 020 ± 0,000 011) m und hat somit ein Trägheitsmoment von (0,003 071 000 ± 0,000 003 086) kg m^2.

Puppe

Für die Puppe mit rechtwinklig abgespreizten Armen und Beinen sind neben der Schwingungsdauer zur experimentellen Bestimmung des Trägheitsmomentes alle Körpermaße entscheidend, um das theoretische Trägheitsmoment zu bestimmen. Folgende Werte haben wir gemessen:

Periode in s	Arm in mm	Bein in mm	Rumpf in mm	Kopf in mm	Arm in mm	Bein in mm	Rumpf in mm	Kopf in mm	Gewicht in g
1.53	20.00	19.45	61.00	23.30	182.00	237.00	120.75	74.90	345.30
1.12	20.00	25.95	54.90	24.10	180.90	232.70	124.90	71.00	
1.80	20.50	22.85	34.00	33.70	182.00	235.70	127.50	74.40	
1.70	18.00	19.80	48.65	34.80	180.75	235.80	127.10	77.70	
1.55	15.60	14.50	48.00	33.80	181.10	237.60	120.50	75.10	
1.60	15.00	22.00	40.00						
1.70	19.10	22.70	48.20						
1.67	18.20	18.20	35.00						
1.73	16.00	18.65	43.70						
1.56	11.00	22.45	36.60						

Tabelle 5: Periodenlänge und Größenvermessung der Puppe (links die Breiten und rechts die Längen)

Das Trägheitsmoment berechnen wir ebenso wie bei den Zylindern in Formel (27) mit dem Fehler in Formel (28) aus der Schwingungsdauer. Das Ergebniss für die mittlere Schwingungsdauer (1,60 ± 0,18) s^{-1} ist (0,0018 ± 0,0040) kg m^2.

Um das gesamte (theoretische) Trägheitsmoment auszurechnen, teilen wir die Puppe in kleine Körper ein. Die Summe der einzelnen Trägheitsmomente liefert das Ergebnis. In grober Näherung nehmen wir Kopf und Rumpf als Zylinder an, die sich um ihre Symmetrieachse drehen. Arme und Beine sind liegende Zylinder, deren Schwerpunkt nicht auf der Rotationsachse liegt d.h. mit Hife der Satzes von Steiner (siehe Formel (2)) berechnet werden. Die Beine sind jeweils um ihre halbe eigene Länge ($= d$) verschoben. Bei den Armen kommt noch die Hälfte des Rumpfduchmessers (gesamt $= e$) hinzu.

Zunächst bestimmen wir die Volumina der einzelnen Zylinder und errechnen daraus die einzelnen Massen:

$$\text{Volumen}_{\text{Körper}} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \text{Breite}_{\text{Körper}} \cdot \text{Länge}_{\text{Körper}} \tag{31}$$

$$\text{Masse}_{\text{Körper}} = \text{Masse}_{\text{gesamt}} \cdot \frac{\text{Volumen}_{\text{Körper}}}{\text{Volumen}_{\text{gesamt}}} \tag{32}$$

h	Arm	Bein	Rumpf	Kopf
Breite in m	0,0173400	0,0207	0,045	0,030
Fehler der Breite in m	0,0028090	0,0030	0,008	0,005
Länge in m	0,1813	0,2358	0,1241	0,746
Fehler der Länge in m	0,0005	0,0017	0,0030	0,0021
Volumen in m^3	0,0099	0,0153	0,0176	0,0070
Fehler Volumen in m^3	0,0013	0,0023	0,0033	0,0012
Masse in kg	0,04552	0,07050	0,08089	0,03234
Fehler der Masse in kg	0,00644	0,00759	0,01315	0,00578

Tabelle 6: Maße der Puppe mit Fehler

Daraus folgen die Trägheitsmomente nach (27) mit Fehlern nach (28).

h	Arm	Bein	Rumpf	Kopf
Trägheitsmoment in $\text{mg}\,\text{m}^2$	2742,000	4633,000	20, 481	3,624
Fehler in $\text{mg}\,\text{m}^2$	16,392	66,444	10,686	1,829

Tabelle 7: Trägheitsmomente der Körperteile mit Fehler

Das Gesamtträgheitsmoment setzt sich aus diesen Werten zusammen. Bei den zwei Armen und Beinen ist der Faktor zwei und die Verschiebung nach dem Statz von Steiner wichtig.

$$\begin{aligned} I_{\text{theoritsch}} &= I_{\text{Kopf}} + I_{\text{Rumpf}} + 2 \cdot (I_{\text{Arm}} + m_{\text{Arm}} \cdot e^2) + 2 \cdot (I_{\text{Bein}} + m_{\text{Bein}} \cdot e^2) \\ &= (11\,250 \pm 2700)\,\text{mg}\,\text{m}^2 = (0{,}011\,25 \pm 0{,}002\,70)\,\text{kg}\,\text{m}^2 \end{aligned} \tag{33}$$

4 Diskussion

Die Feder, der uns zur Verfügung gestellte Drillachse, war nicht mehr sehr elastisch, sodass die Bewegung, selbst bei hohen Trägheitsmomenten, keine zwei Perioden lang andauerte. Wir haben daher immer mehrfach eine Periodendauer gestoppt, anstatt beispielsweise fünf oder zehn Perioden zu messen und dann durch die Anzahl zu teilen. Das führt zu einem, bis hier vernachlässgten, sehr großem systematischen Fehler. Bei der Wahl der Körper, deren Trägheitsmomente wir bestimmen wollten, mussten wir uns auf Grund der kaputten Feder für die schwersten entscheiden. Daher verwendeten wir zwei Zylinder, die um die gleiche Achse gedreht wurden und sich lediglich in der Größe unterschieden.

Bei der Auswertung ist aufgefallen, dass sich der gemessener Wert vom theoretisch berechneten Wert unterscheidet. Tabelle 7 zeigt die jeweiligen Werte und die Differenzen.
Trägheitsmomente in $\mathrm{g\,m^2}$:

	Experiment	Theorie	Differenz
kleiner Zylinder	$0{,}890 \pm 0{,}050$	$0{,}757\,00 \pm 0{,}000\,51$	$0{,}1310 \pm 0{,}0469$
großer Zylinder	$3{,}2900 \pm 1{,}2000$	$3{,}0700 \pm 0{,}0031$	$0{,}2210 \pm 0{,}1230$
Puppe	$1{,}8000 \pm 0{,}4000$	$11{,}2500 \pm 2{,}7000$	$-9{,}4100 \pm 0{,}4930$

Tabelle 8: Gemessene und berechnete Werte für das Trägheitsmoment

Die Vermutung liegt nahe, dass in der Differenz das Eigenträgheitsmoment und Reibungsverluste stecken, da wir das in der theoretischen Rechnung vernachlässigt hatten. Hier gibt es scheinbar einen Fehler, denn das Eigenträgheitsmoment, das durch die Regressionsgerade berechnet wurde, ist fast 17-mal so groß wie die Differenz beim großen Zylinder und 28-mal so groß wie beim kleinen Zylinder. Dieser Widerspruch löst sich auf, wenn man bedenkt, dass wir bei der Berechnung mit der Regressiongeraden die Stange, an der die Zylinder hingen, vernachlässigt haben. Nehmen wir an, dass das echte Eigenträgheitsmoment (inklusive kleiner Reibungsverluste) $I_{\text{D, echt}} = 0,1310 \cdot 10^{-3}$ kg m^2 ist. Dann erhalten wir das Trägheitsmoment der Stange I_S indem wir vom anfangs berechneten Eigenträgheitsmoment das echte Trägheitsmoment abziehen

$$I_\text{S} = I_{\text{D, berechnet}} - I_{\text{D, echt}} \tag{34}$$

Setzen wir das nun in die Formel für das Trägheitsmoment eines langen dünnen Stabes (aus der Praktikumsanleitung zu V101)

$$I_\text{S} = \frac{m \cdot l^2}{12} \tag{35}$$

ein, nehmen für die Länge $l = 0,6$ m an (der größte Abstand von der Drehachse zu einem Zylinder war 0.27 m) und lösen nach der Masse auf, erhalten wir einen Wert von

$$m = \frac{12 \cdot (I_{\text{D, berechnet}} - I_{\text{D, echt}})}{l^2} = 0,118 \text{ kg} \tag{36}$$

Das erscheint uns durchaus realistisch und bekräftigt unsere Interpretation.

Bei der Puppe ist der theoretische Wert mehr als 500% größer, als der experimentell gemessene. Wir sehen dafür zwei Ursachen. Erstens hingen die Arme der Puppe etwas unter der senkrechten, sodass der Abstand der Masse zur Drehachse kleiner ist, als in der theoretischen Berechnung angenommen. Zweitens haben wir die Gliedmaße als Zylinder genähert. Auch hier ist die Folge, dass bei der Rechnung mehr Masse weiter weg von der Drehachse ist.