Anfängerpraktikum 2015/2016

Das Kugelfall-Viskosimeter nach Höppler

Durchführung: 26.01.2016

Clara Rittmann[1]
Anja Beck[2]

Betreuerin:
Lena Linhoff

[1]clara.rittmann@gmail.com
[2]anja.beck@tu-dortmund.de

Inhaltsverzeichnis

1 Theorie

In diesem Versuch geht es darum die Temperaturabhängigkeit der Viskosität von destilliertem Wasser zu bestimmen.
Die **dynamische Viskosität** η ist ein Maß für die Zähigkeit eines Materials, die auf innere Reibungen zurückzuführen ist. Wenn eine Kugel unter Einwirkung der Gravitationskraft durch eine Flüssigkeit fällt, ist sie in einem zäheren Medium d.h. einem Medium mit einer höheren dynamischen Viskosität langsamer. Die Fallzeit t ist entsprechend größer. Die Viskosität ist des weiteren abhängig von der Geometrie des fallendem Körpers K und dessen effektive Dichte $(\rho_{\mathrm{K}} - \rho_{\mathrm{Fl}})$.

$$\eta = K \cdot (\rho_{\mathrm{K}} - \rho_{\mathrm{Fl}}) \cdot t \tag{1}$$

Als Innere Reibung wird die **Stokesche Reibung** abgenommen, die proportional zur Geschwindigkeit v und dem Radius r einer fallenden Kugel ist.

$$F_{\mathrm{R}} = 6\pi\eta v r \tag{2}$$

Eine solche Strömung um die Kugel ist laminar und im Gegensatz zu turbulenten Strömungen wirbelfrei. Eine laminare Strömung in einem Zylinder liegt vor, wenn die charakteristische **Reynoldsche Zahl**,

$$\mathrm{RE} = \frac{\rho_{\mathrm{F}} v r}{\eta} \ , \tag{3}$$

sehr klein ist.[1]
Da die Innere Reibung destillierten Wassers vor allem auf Wasserstoffbrückenbindungen zurückzuführen ist, die bei höheren Temperaturen aufbrechen, sinkt die dynamische Viskosität bei zunehmender Temperatur.[2] Dieses Verhalten beschreibt die **Andradesche Gleichung**

$$\eta(T) = A \exp\left(\frac{B}{T}\right) \quad . \tag{4}$$

[1] D. Getschke, Physikalisches Praktikum, Teubner Verlagsgesellschaft, 9.Auflage, 1992, S.86
[2] R.Winter, Basiswissen Physikalische Chemie, Vieweg + Teubner, 4. Auflage, 2010, S. 31

2 Aufbau und Ablauf des Experiments

In einem Höppler-Viskosimeter (siehe Abb. 1) sinkt eine Kugel durch einem mit einer Flüssigkeit befüllten Zylinder. Hier ist es destilliertes Wasser. Beim Befüllen des Zylinders mit der Flüssigkeit und der Kugel ist darauf zu achten, dass sich keine Luftblasen an der Kugel bilden. Die Kugel fällt nicht, sondern sie rutscht an der Innenwand des leicht schräg stehenden Zylinders herab. Das ist wichtig, um das Anschlagen der Kugel an den Innenwänden und dadurch entstehende Turbulenzen zu verhindern.
Die Zeit, die die Kugel braucht, um zwei Markierungen im Abstand von 10 cm zu passieren ist die Fallzeit. Diese wird für zwei verschieden große Kugeln zehn Mal bei Raumtemperatur gemessen. In einer zweiten Messreihe wird das destillierte Wasser erhitzt und die Fallzeit der größeren Kugel bei zehn verschiedenen Temperaturen je zwei Mal gemessen.
Beide Kugeln werden vor Versuchsbeginn vermessen und gewogen.

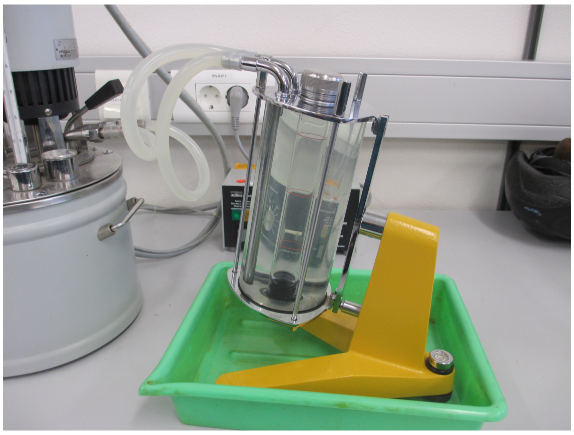

Abbildung 1: Höppler-Viskosimeter mit Heizung

3 Auswertung

3.1 Berechnung von Kugelvolumen und -dichte

	groß	klein
	15.802	15.651
	15.796	15.652
	15.804	15.650
Mittelwert	15.801 ± 0.002	15.651 ± 0.001

Tabelle 1: Durchmesser d der beiden Kugeln in $10^{-3}\,\mathrm{m}$

Aus den Durchmessern der zwei Glaskugeln (siehe Tabelle 1) ergeben sich die Volumina

$$V_{\mathrm{kl}} = (2.0074 \pm 0.0002) \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^3 \quad \text{und} \tag{5}$$

$$V_{\mathrm{gr}} = (2.0655 \pm 0.0008) \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^3 \;. \tag{6}$$

Die kleinere Kugel wiegt

$$m_{\mathrm{kl}} = 4.44 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}$$

und die größere

$$m_{\mathrm{gr}} = 4.63 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg} \;,$$

damit können auch die Dichten

$$\rho_{\mathrm{kl}} = (2211.9 \pm 0.2)\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \quad \text{und} \tag{7}$$

$$\rho_{\mathrm{gr}} = (2241.6 \pm 0.8)\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \tag{8}$$

berechnet werden. Die Fehler ergeben sich hierbei durch die Gaußsche Fehlerfortpflanzung

$$V(d) = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3 : \qquad \sigma_V = \left|\frac{\partial V}{\partial d}\sigma_d\right| = 2\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2 \sigma_d \tag{9}$$

$$\rho(d) = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3} : \qquad \sigma_\rho = \left|\frac{\partial \rho}{\partial d}\sigma_d\right| = \frac{9m}{2\pi\left(\frac{d}{2}\right)^4}\sigma_d \;. \tag{10}$$

3.2 Bestimmung der Apparatekonstanten

Die Messung der Fallzeit ergibt die Werte in Tabelle 2.

	klein	groß
	12.91	92.62
	12.87	92.35
	13.00	92.44
	12.78	92.07
	12.59	93.31
	12.73	92.72
	12.93	93.71
	12.76	91.91
	12.85	92.25
	12.70	91.95
Mittelwerte	12.81 ± 0.04	92.5 ± 0.2

Tabelle 2: Fallzeiten in s für ein 0.10 m langes Rohr

Mit der Viskosiät von Wasser bei 20 °C bzw. 293.15 K[3]

$$\eta_{20} = 1.002 \cdot 10^{-3}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m\,s}}$$

und der Dichte von Wasser bei derselben Temperatur[3]

$$\rho_{\mathrm{W}} = 992.8\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$$

können durch Umstellen und Einsetzen in Formel (1) die Apparatekonstanten für die kleine

$$K_{\mathrm{kl}} = \frac{\eta_{20}}{(\rho_{\mathrm{kl}} - \rho_{\mathrm{W}})t_{\mathrm{kl}}} = (6.41 \pm 0.02) \cdot 10^{-8}\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} \tag{11}$$

und die große Kugel

$$K_{\mathrm{gr}} = (8.67 \pm 0.02) \cdot 10^{-9}\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} \tag{12}$$

bestimmt werden. Auch bei diesen Werten ergibt sich der Fehler durch die Gaußsche Fehlerfortpflanzung

$$K = \frac{\eta}{(\rho - \rho_{\mathrm{W}})t}: \qquad \sigma_K = \sqrt{\left(\frac{\partial K}{\partial \rho}\sigma_\rho\right)^2 + \left(\frac{\partial K}{\partial t}\sigma_t\right)^2} \tag{13}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\eta\sigma_\rho}{(\rho - \rho_{\mathrm{W}})^2 t}\right)^2 + \left(\frac{\eta\sigma_t}{(\rho - \rho_{\mathrm{W}})t^2}\right)^2}\,. \tag{14}$$

[3] W. Walcher: Praktikum der Physik, Teubner Studienbücher, 1985, Tabellen-Anhang 1.7

3.3 Konstantenbestimmung der Andradeschen Gleichung

Bei der Fallzeit-Messung mit ansteigender Wasser-Temperatur werden die Werte in Tabelle 3 gemessen. Eingesetzt in Gleichung (1) kann so die Viskosität des Wassers in Abhängigkeit der Temperatur berechnet werden. Diese Werte finden sich in derselben Tabelle. Wieder berechnet sich der Fehler der Viskosität nach Gauß (K und ρ sind dabei die Werte der großen Kugel):

$$\eta = K(\rho - \rho_\mathrm{W})t: \qquad \sigma_\eta = \sqrt{\left(\frac{\partial\eta}{\partial K}\sigma_K\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial\rho}\sigma_\rho\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\sigma_t\right)^2} \tag{15}$$

$$= \sqrt{((\rho - \rho_\mathrm{W})t)^2 + (Kt\sigma_\rho)^2 + (K(\rho - \rho_\mathrm{W})t\sigma_t)^2}\,. \tag{16}$$

T in °C	Fallzeit in s		Mittelwert der Zeitmessungen	Viskosität $\eta(T)$ in $10^{-3}\,\mathrm{m^2/s^2}$
20	92.25	91.95	92 ± 1	0.997 ± 0.002
28	83.25	78.72	81 ± 2	0.88 ± 0.02
31	74.78	73.89	74.3 ± 0.4	0.805 ± 0.005
35	67.97	76.66	72 ± 4	0.78 ± 0.05
40	62.19	62.64	62.4 ± 0.2	0.676 ± 0.003
45	57.69	56.56	57.1 ± 0.6	0.619 ± 0.006
51	51.68	51.78	51.73 ± 0.05	0.560 ± 0.001
55	48.21	49.78	49.0 ± 0.8	0.531 ± 0.009
60	45.63	45.06	45.3 ± 0.3	0.491 ± 0.003
65	42.47	41.50	42.0 ± 0.5	0.455 ± 0.005

Tabelle 3: Fallzeiten der großen Kugel für ein 0.10 m langes Rohr bei verschiedenen Wassertemperaturen und daraus berechnete Viskositäten

Wird nun Gleichung (4) auf beiden Seiten logarithmiert, ergibt sich

$$\ln\eta = \ln A + \frac{B}{T}\,,$$

mit

$$X = \frac{1}{T} \quad \text{und} \quad Y = \ln\eta$$

kann so eine lineare Ausgleichsrechung mit den Werten in Tabelle 4 durchgeführt werden. Mit Hilfe von Python errechnen sich die Konstanten

$$B = (1775 \pm 42)\,\mathrm{K} \tag{17}$$

$$\ln A = (-13.0 \pm 0.1)\ln\mathrm{kg/m/s} \quad \Rightarrow \quad A = (2.4 \pm 0.3)\cdot 10^{-6}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m\,s}}\,. \tag{18}$$

Die Gerade ist mit den Regressionswerten in Abbildung 2 zu sehen. Die Andradesche Gleichung ist somit

$$\eta(T) = 2.4\cdot 10^{-6}\exp\left(\frac{1775}{T}\right)\,. \tag{19}$$

$X = \frac{1}{T}$ in 10^{-3}/K	$Y = \ln\eta$ in $\ln \mathrm{kg/m/s}$
3.41	-6.91
3.32	-7.04
3.29	-7.12
3.25	-7.15
3.19	-7.30
3.14	-7.39
3.08	-7.49
3.05	-7.54
3.00	-7.62
2.96	-7.70

Tabelle 4: Werte, mit denen die Regression durchgeführt wird

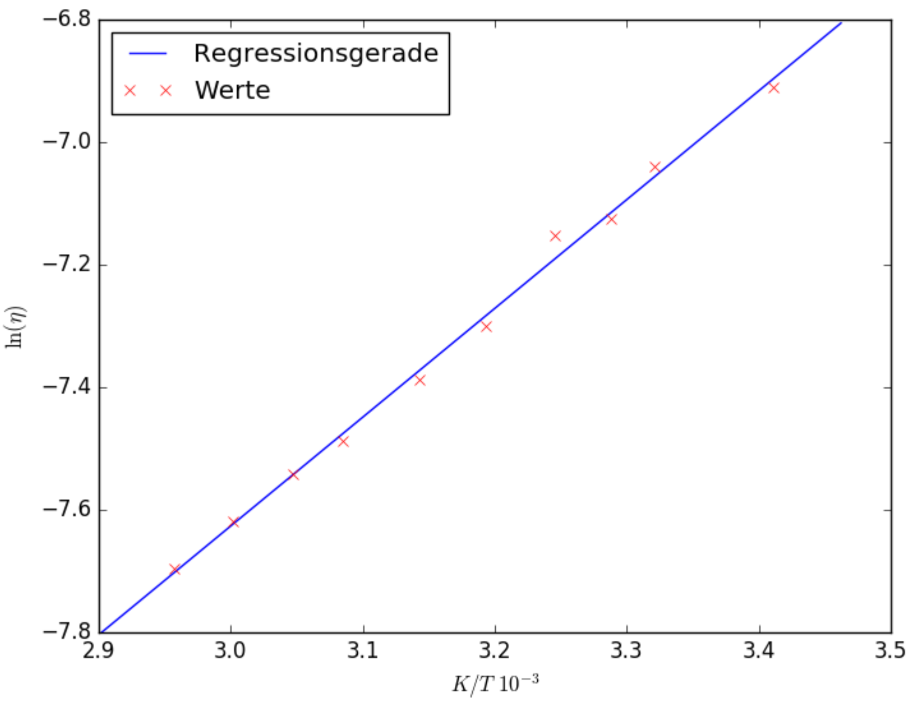

Abbildung 2: Regressiongerade mit Regressionswerten nach (4)

3.4 Die Reynoldsche Zahl

Zuletzt soll die Reynoldsche Zahl berechnet werden. Dafür wird benötigt

- die Dichte von Wasser, sie ist eigentlich von der Temperatur abhängig, schwankt aber kaum im betrachteten Temperaturbereich, sodass weiterhin
$$\rho_\mathrm{W} = 992.8\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$$
angenommen wird;
- die Fließgeschwindigkeit des Wassers, welche gleich der Fallgeschwindigkeit
$$v = \frac{s}{t}, \quad s = 0.10\,\mathrm{m}$$
der Kugel ist;
- einer „charakteristischen Länge“ der Kugel, das kann beispielsweise der Durchmesser sein, hier wird der Radius der Kugel
$$\frac{d}{2} = 7.900 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$$
verwendet; und
- die temperaturabhängige Viskosität η.

Eingesetzt in (3) ergeben sich so die Werte in Tabelle 5, die Fehler wiederum mit Gauß:

$$\mathrm{RE} = \frac{\rho_\mathrm{W} s d}{2\eta t}: \qquad \sigma_\mathrm{RE} = \sqrt{\left(\frac{\partial \mathrm{RE}}{\partial t}\sigma_t\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{RE}}{\partial d}\sigma_d\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{RE}}{\partial \eta}\sigma_\eta\right)^2} \tag{20}$$

$$= \sqrt{\left(-\frac{\rho_\mathrm{W} s d}{2\eta t^2}\sigma_t\right)^2 + \left(\frac{\rho_\mathrm{W} s}{2\eta t}\sigma_d\right)^2 + \left(-\frac{\rho_\mathrm{W} s d}{2\eta^2 t}\sigma_\eta\right)^2}\,. \tag{21}$$

Temperatur in °C	RE
20	8.54 ± 0.03
28	11.0 ± 0.6
31	13.1 ± 0.2
35	14 ± 2
40	18.6 ± 0.1
45	22.2 ± 0.4
51	27.07 ± 0.07
55	30 ± 1
60	35.2 ± 0.4
65	41 ± 1

Tabelle 5: Errechnete Reynolds-Zahlen bei verschiedenen Temperaturen

4 Diskussion

Die Messung der Fallzeiten ist die Grundlage aller Berechnungen. Durch systematische Fehler kann sie verfälscht werden. Das könnte einerseits durch beim Verschließen im Rohr verbliebene Luftblasen geschehen. Sie wirken durch ihren Auftrieb der Schwerkraft entgegen und verlängern somit die Fallzeiten. Denselben negativen Effekt hat auch der (in den Rechnungen vernachlässigte) Reibungseffekt zwischen Kugel und Wand.
Die Abweichung der Konstanten in der Andrade-Gleichung von Literaturwerten[4] ist in Tabelle 6 zu sehen. Die Abweichung, vor allem des Paramters A, ist sehr groß. Woher

	Literatur	Berechnet	Abweichung
A	$9.644 \cdot 10^{-4}$	$2.4 \cdot 10^{-6}$	-99.8%
B	2036.8	1775	-12.9%

Tabelle 6: Abweichung der Konstanten der Andrade-Gleichung

das kommt ist unklar, denn die berechneten Viskositäten aus Tabelle 3 liegen dicht an Literaturwerten und auch die Ausgleichsgerade weicht nur wenig von den Messwerten ab. Der Fehler wird in der Methode vermutet. Das Finden einer Ausgleichsfunktion wird mit der Methode der kleinsten Quadrate durchgeführt. Beim Linearisieren der Gleichung, wird dieser quadratische Abstand durch das Logarithmieren verfälscht, so gehen manche Abstände stärker ein als andere.

[4] `http://www.chemie.de/lexikon/Andrade-Gleichung.html`, abgerufen am 28.01.2016 um 14:00 Uhr