Anfängerpraktikum 2015/2016

Biegung elastischer Stäbe

Durchführung: 03.11.15

Clara Rittmann[1]
Anja Beck[2]

Betreuer:
Alexander Faulstich

[1] clara.rittmann@tu-dortmund.de
[2] anja.beck@tu-dortmund.de

Inhaltsverzeichnis

1 Theorie[1]

Eine Reckstange verbiegt sich, wenn ein Turner daran hängt. Wird an den Enden eines länglichen Stücks Gummi gezogen, wird dieses länger und dünner. Derartige Verformungen werden durch Kräfte verursacht, die an der Körperoberfläche angreifen. Die Spannung

$$\sigma = \frac{dF}{dA} \;^{2} \tag{1}$$

beschreibt hierbei die angreifende Kraft pro Fläche. Für hinreichend kleine relative Änderungen einer Größe $\frac{\Delta x}{x}$ kann die Spannung auch mit dem Hookeschen Gesetz

$$\sigma = E\frac{\Delta x}{x} \tag{2}$$

beschrieben werden. Der Elastizitätsmodul E ist dabei eine Materialkonstante. Soll allerdings der Elastizitätsmodul einer Metallstange, wie der des Turners, bestimmt werden, kann die Änderung der Länge oder des Durchmessers nur sehr mühsam bestimmt werden. In diesem Fall bietet sich die Verwendung des Zusammenhangs

$$D(x) = \frac{F}{48 \cdot EI}\left(3L^2x - 4x^3\right) \tag{3}$$

an. F ist die wirkende Kraft, also die Gewichtskraft des Turners. Sie übt ein Drehmoment auf die Stange aus. Das Flächenträgheitsmoment

$$I = \int_Q y^2 \; dq \quad , \tag{4}$$

mit der Querschnittsfläche Q und dem dazugehörigen Flächenelement dq, verursacht im Inneren des Körpers ein entgegengesetzt gerichtetes, gleich großes Drehmoment, sodass sich ein Gleichgewicht einstellt. Bei diesem Gleichgewicht kann dann an einer beliebigen Stelle mit Abstand x zur nähergelegenen Aufhängung, die Auslenkung D vom entspannten Zustand gemessen werden. L ist der Abstand zwischen den beiden Aufhängungen.
Bei Betrachtung eines Systems, das nur an einer Seite befestigt ist, wie einen Ast, an dem eine Schaukel hängt, verändert sich Gleichung 3 zu

$$D(x) = \frac{F}{2 \cdot EI}\left(Lx^2 - \frac{x^3}{3}\right) \quad . \tag{5}$$

L ist jetzt der Abstand von der Einspannung bis zum Ende des Stabes und x der Abstand zwischen Einspannung und Messpunkt.

[1]nach: Anleitung zu V103: Biegung elastischer Stäbe, Anfängerpraktikum TU Dortmund WS 2015/16, http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V103.pdf

[2]D. Meschede: „Gerthsen Physik“, Kapitel 3.1.4

2 Aufbau und Ablauf des Experiments

Wie Abbildung 1 zeigt, bestand der Versuchsaufbau im Wesentlichen aus einem Gestell, in das Metallstäbe verschiedener Querschnittsflächen sowohl einseitig, als auch zweiseitig eingespannt werden konnten.
Zunächst wurden die verwendeten Stäbe, ein runder und ein eckiger, in Länge und Durchmesser vermessen und gewogen.
Danach wurden die Stäbe einzeln und einseitige in die Vorrichtung eingespannt und bei verschiedenen Abständen x zur Einspannung wurde die Auslenkung $D(x)$ je einmal mit einem Gewicht am Ende der Stange und einmal ohne gemessen.
Zuletzt wurde der eckige Stab beidseitig eingespannt und ein Gewicht in der Mitte eingehängt. Hier wurde die Auslenkung D bei verschiedenen Abständen zum (näherliegenden) Rand je links und rechts des Gewichts gemessen.

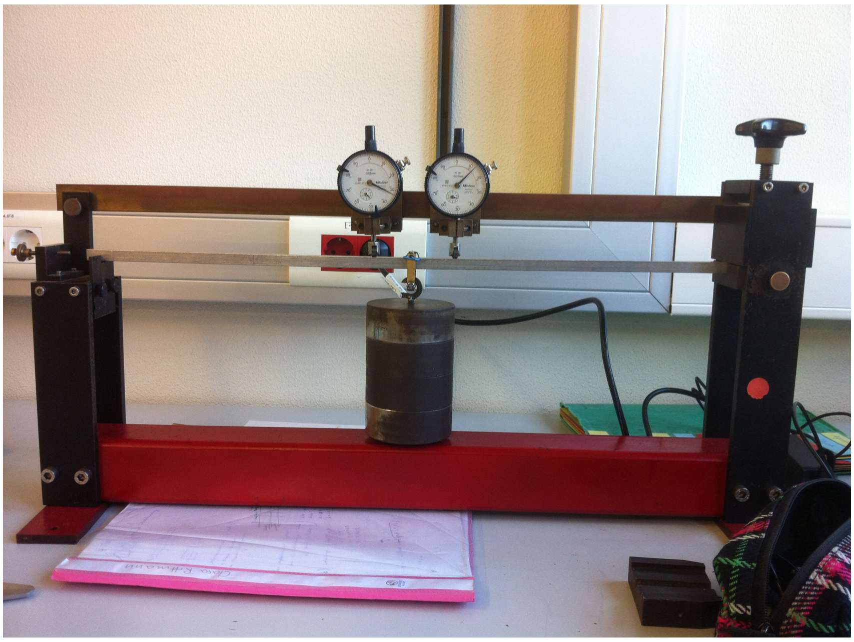

Abbildung 1: Versuchsaufbau mit beidseitig eingespanntem Stab

3 Auswertung

3.1 Statistische Formeln

3.1.1 Fehlerrechnung

Im folgenden wurden Mittelwerte von N Messungen der Größe x berechnet

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} x_i \tag{6}$$

sowie die Varianz

$$V(x) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} (x_i - \bar{x})^2 \tag{7}$$

woraus die Standartabweichung folgt

$$\sigma_x = \sqrt{V(x)}. \tag{8}$$

Die Standartabweichung des Mittelwertes, kürzer auch Fehler des Mittelwertes genannt, bezieht noch die Anzahl der Messungen mit ein. Mehr Messungen führen zu einem kleineren Fehler

$$\Delta_x = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}. \tag{9}$$

3.1.2 Regression

Nachfolgend wird eine lineare Regression für Wertepaare (x_i, y_i) durchgeführt. Dafür müssen die Steigung

$$m = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \tag{10}$$

und der y-Achsenabschnitt

$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \tag{11}$$

berechnet werden. Den jeweiligen Fehler erhält man mit

$$s_m^2 = s_y^2 \cdot \frac{n}{n \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \tag{12}$$

$$s_b^2 = s_y^2 \cdot \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}{n \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \quad . \tag{13}$$

s_y ist hierbei die Abweichung der Regressionsgeraden in y-Richtung.

$$s_y^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (\Delta y_i)^2}{n-2} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - b - mx_i)^2}{n-2} \tag{14}$$

3.2 Bestimmung der Flächenträgheitsmomente

Das Flächenträgheitsmoment ist eine Größe, die im weiteren Verlauf wichtig ist, um den Elastizitätsmodul der Stäbe zu ermitteln. Er hängt vom Querschnitt des Stabes, genauer vom Abstand y der Flächenelemente $\mathrm{d}q$ zur neutralen Faser, ab

$$I = \int_Q y^2 \, \mathrm{d}q \quad . \tag{15}$$

Für den eckigen Stab benötigt man eine Formel für quadratische Querschnitte. Nach den Werten aus Talbelle 1 ist mittlere Kantenlänge mit einem Ablesefehler von 0.05 mm

$$h = (0.010\,00 \pm 0.000\,05)\,\mathrm{m} \tag{16}$$

ist das Flächenträgheitsmoment I_E

$$I_\mathrm{E} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{12} \cdot h^4 = (3.88 \pm 0.17) \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}^4 \quad . \tag{17}$$

Um das Flächenträgheitsmoment für runde Querschnitte mit Radius r zu berechnen, bietet sich die Verwendung von Polarkoordinaten an. Der Abstand zur y-Achse ist dann $r^2 \cdot \sin^2(x)$. Mit der Jakobideterminante r. Der verwendete Radius aus Tablle 1 mit einem Ablesefehler von 0.05 mm ist

$$r = (0.004\,975 \pm 0.000\,032)\,\mathrm{m} \tag{18}$$

und führ auf das Flächenträgheitsmoment

$$I_\mathrm{R} = \int_0^r \int_0^{2\pi} r^2 \cdot \sin^2(x) \cdot r \, \mathrm{d}\phi\mathrm{d}r = \frac{1}{12} \cdot \pi \cdot r^4 = (4.81 \pm 0.12) \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}^4 \quad . \tag{19}$$

Tabelle 1: Breite h des eckigen Stabes und Durchmesser $2 \cdot r$ des Runden

Breite h in mm	Durchmesser $2 \cdot r$ in mm
10.00	10.00
10.00	10.00
10.00	10.00
10.00	9.90
10.00	9.90
10.00	9.95
10.00	10.00
10.00	9.90
10.00	9.90
10.00	9.95

3.3 Bestimmung der Dichte

Mit der Dichte kann bestimmt werden, aus welchen Metallen die Stäbe bestehen. Um sie bestimmen zu können, wurden beide Stäbe vermessen und gewogen. Das Gewicht und die Länge sind keine fehlerbehafteten Größen. Der Durchmesser hingegen wurde mit einer Schieblehre mehrfach gemessen. Ein Ablesefehler von 0.05 mm kommt zum Fehler des Mittelwertes hinzu. Der Querschnitt bzw. Radius der Stäbe wurde (Werte in Tabelle 1) bereits als fehlerbehaftete Größe bestimmt.
Die Dichte ist jeweils

$$\rho = \frac{\text{Gewicht}}{\text{Querschnittsfläche} \cdot \text{Länge}} \quad . \tag{20}$$

Der runde Stab der Länge 0.6 m ist 0.3945 kg schwer und hat die Dichte

$$\rho_{\text{Rund}} = (8455.90 \pm 109.02)\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad . \tag{21}$$

Und der eckige Stab der Länge 0.6 m ist 0.1671 kg schwer und hat die Dichte

$$\rho_{\text{Eckig}} = (2785.00 \pm 27.85)\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad . \tag{22}$$

3.4 Bestimmung des Elastizitätsmoduls durch lineare Regression

3.4.1 Runder Stab – einseitige Einspannung

Die gemessene Durchbiegung $D(x)$ des Stabes wird durch Gleichung (5) beschrieben. Alle in ihr vorkommende Größen, bis auf den Elastizitätsmodul sind bekannt. Das Flächenträgheitsmoment wurde im vorherigen Abschnitt in (19) bestimmt und die herabziehende Kraft F ist aus der Masse des Probekörpers zu berechnen

$$F = m \cdot g = 0.7476\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 7.3339\,\mathrm{N} \quad . \tag{23}$$

Nun lässt sich der Elastizitätsmodul E durch eine lineare Regression der Form

$$D(x) = \frac{F}{2 \cdot EI}\left(Lx^2 - \frac{x^3}{3}\right) = \frac{1}{E} \cdot A(x) + b \tag{24}$$

bestimmen, indem $D(x)$ über $A(x)$ aufgetragen wird (siehe Abbildung 2). E entspricht dann dem Kehrwert der Steigung der Regressionsgeraden. Unter Verwendung der Formeln aus Kapitel 3.1.2 mit Hilfe von Python ergeben sich die Steigung

$$\frac{1}{E} = (188.9 \pm 1.5) \cdot 10^{-13}\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{N}} \tag{25}$$

und der y-Achsenabschnitt

$$b = (14.33 \pm 0.36) \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m} \quad . \tag{26}$$

Der gemessene Elastizitätsmodul für den runden Stab ist folglich

$$E = (5.29 \pm 0.04) \cdot 10^{10}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} \quad . \tag{27}$$

3.4.2 Eckiger Stab – einseitige Einspannung

Hier ist der Vorgehensweise dieselbe, wie beim runden Stab. Es muss lediglich das Flächenträgheitsmoment aus (17) verwendet und die nach unten wirkende Kraft

$$F = m \cdot g = 0.7676\,\mathrm{kg} \cdot 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 7.5302\,\mathrm{N} \tag{28}$$

angepasst werden. Dies führt zu einer Steigung von

$$\frac{1}{E} = (135.6 \pm 0.9) \cdot 10^{-13}\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{N}} \tag{29}$$

und einem y-Achsenabschnitt

$$b = (6.28 \pm 2.17) \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m} \quad . \tag{30}$$

Der hier bestimmte Elastizitästmodul für den eckigen Stab ist demnach

$$E = (7.37 \pm 0.05) \cdot 10^{10}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} \quad . \tag{31}$$

Die Werte wurden in Abbildung 3 aufgetragen.

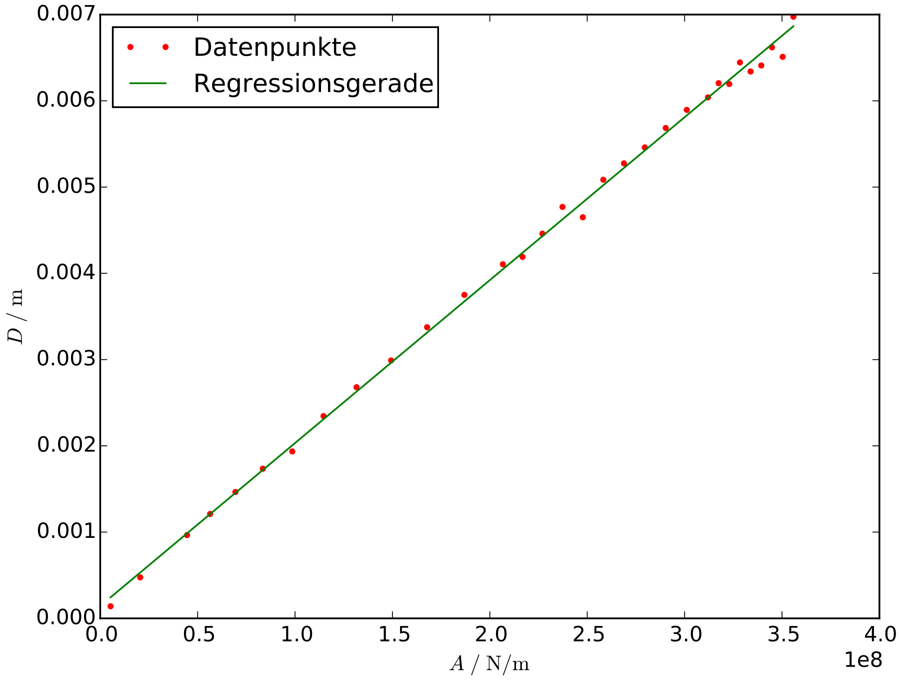

Abbildung 2: Regressionsgerade des runden Stabes bei einseitiger Einspannung

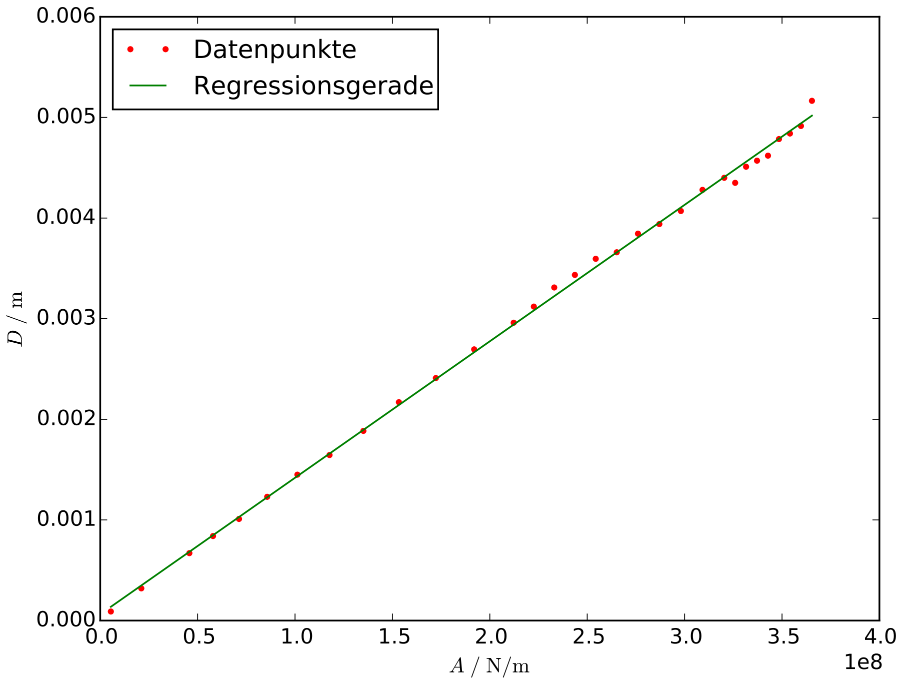

Abbildung 3: Regressionsgerade des eckigen Stabes bei einseitiger Einspannung

3.4.3 Eckiger Stab – beidseitige Einspannung

Die Bestimmung des Elastizitätsmoduls bei beidseitiger Einspannung funktioniert analog. Es werden Formel (3)

$$D(x) = \frac{F}{48 \cdot EI}\left(3L^2x - 4x^3\right) = \frac{1}{E}C(x) + b$$

und die eine herunterziehende Kraft von

$$F = m \cdot g = 4.7004\,\text{kg} \cdot 9.81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 46.1109\,\text{N} \tag{32}$$

verwendet.
Da die Verbiegung des Stabes links und rechts der Mitte gemessen wurde, gibt es zwei Regressionsgeraden.
Zunächst soll die Regressionsgerade für die Werte der linken Seite (siehe Abbildung 4) betrachtet werden. Sie hat eine Steigung von

$$\frac{1}{E} = (55.45 \pm 1.88) \cdot 10^{-13}\,\frac{\text{m}^2}{\text{N}} \tag{33}$$

und einen y-Achsenabschnitt von

$$b = (44.5 \pm 2.3) \cdot 10^{-5}\,\text{m} \quad . \tag{34}$$

Daraus folgt der Elastizitätsmodul

$$E = (18.0 \pm 0.6) \cdot 10^{10}\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \quad . \tag{35}$$

Für die rechte Seite (siehe Abbildung 5) ergeben sich Werte von

$$\frac{1}{E} = (72.25 \pm 3.03) \cdot 10^{-13}\,\frac{\text{m}^2}{\text{N}} \quad , \tag{36}$$

$$b = (30.6 \pm 4.7) \cdot 10^{-5}\,\text{m} \tag{37}$$

und

$$E = (13.8 \pm 0.6) \cdot 10^{10}\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \quad . \tag{38}$$

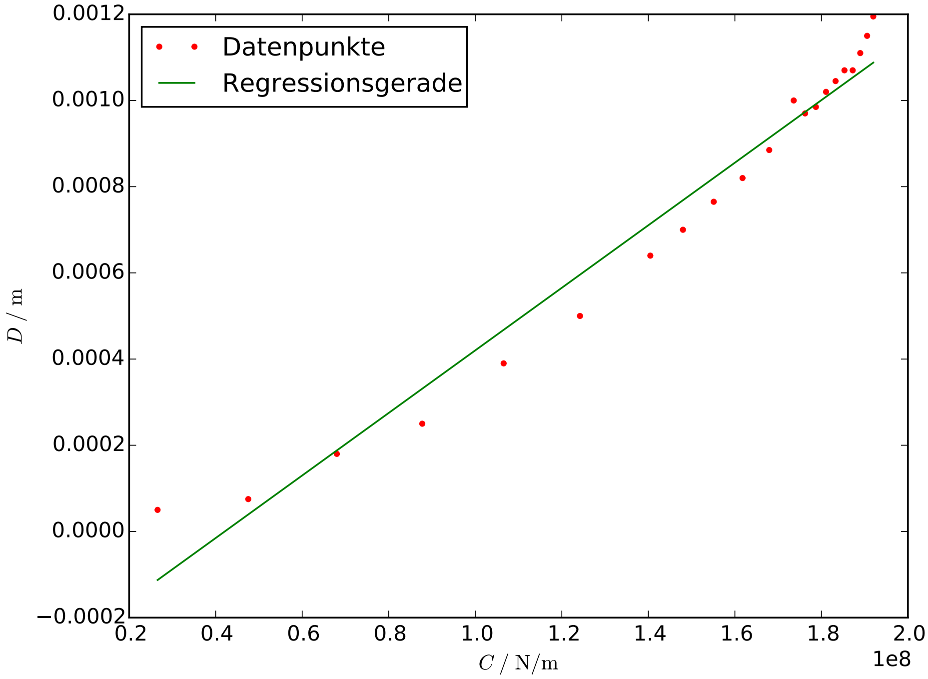

Abbildung 4: Regressionsgerade des eckigen Stabes bei beidseitiger Einspannung – linke Seite

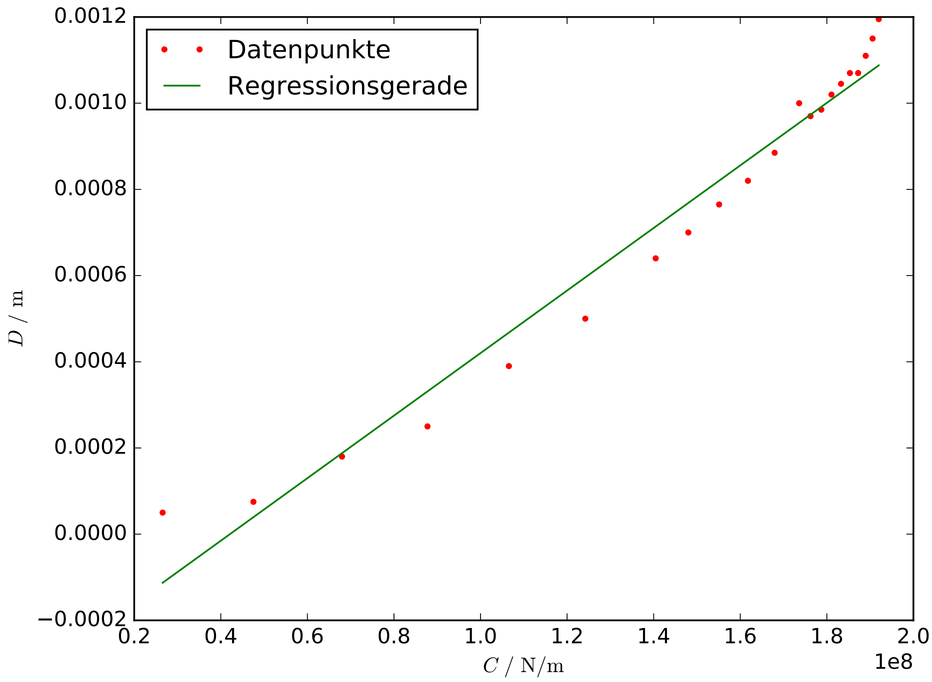

Abbildung 5: Regressionsgerade des eckigen Stabes bei beidseitiger Einspannung – rechte Seite

4 Diskussion

Die Kenntnis der Dichte lässt zu, die Materialien der Stäbe zu bestimmen. Bei dem runden, golden glänzenden Stab, handelt es sich wahrscheinlich um einen Messingstab. Der eckige Stab, der matt silbern wirkt, scheint aus Aluminium zu sein. Die Dichten wurden mit großer Genauigkeit berechnet und stimmen mit den Literaturwerten überein (siehe Tabelle 2).

Tabelle 2: Vergleich mit Literaturwert der Dichten

Art	Literatur[3]	Berechnet	Abweichung
Rund – Messing	$8500\,\mathrm{kg/m^3}$	$(8455.90 \pm 109.02)\,\mathrm{kg/m^3}$	0%
Eckig – Aluminium	$2700\,\mathrm{kg/m^3}$	$(2785.00 \pm 27.85)\,\mathrm{kg/m^3}$	+3%

Auch die Literaturwerte für die Elastizitätsmoduln von Messing und Aluminium können nun mit den berechneten Werten verglichen werden (siehe Tabelle 4). Die Abweichungen von den Literaturwerten sind bei einseitiger Einspannung relativ gering. Die Werte bei des beidseitig eingespannten Stabes dagegen sind ziemlich genau doppelt so groß, wie in der Literatur angegeben. Auch nach ausführlicher Fehlersuche in den Berechnungen konnte der fehlende Faktor $\frac{1}{2}$ nicht gefunden werden.
Ein systematischer Fehler könnte zu kurze Wartezeiten vor den Messungen sein. Sowohl Durchbiegung als auch Entspannung der Stäbe erfolgen zeitverzögert. Wobei das nicht die Abweichung um ca. 100% beim beidseitig aufliegenden Stab erklärt. Weitere systematische Fehler konnten nicht gefunden werden.

Tabelle 4: Vergleich mit Literaturwertwert der Elastizitätsmoduln

Art	Literatur[4]	Berechnet	Abweichung
Rund	$10 \cdot 10^{10}\,\mathrm{N/m^2}$	$(5.29 \pm 0.04) \cdot 10^{10}\,\mathrm{N/m^2}$	-47.1%
Eckig	$7.2 \cdot 10^{10}\,\mathrm{N/m^2}$	$(7.37 \pm 0.05) \cdot 10^{10}\,\mathrm{N/m^2}$	+2.4%
Beidseitig links	$7.2 \cdot 10^{10}\,\mathrm{N/m^2}$	$(14.7 \pm 0.3) \cdot 10^{10}\,\mathrm{N/m^2}$	+104.1%
Beidseitig rechts	$7.2 \cdot 10^{10}\,\mathrm{N/m^2}$	$(13.8 \pm 0.6) \cdot 10^{10}\,\mathrm{N/m^2}$	+91.1%

[3] W. Walcher: "Praktikum der Physik", Tabellen-Anhang
[4] W. Walcher: "Praktikum der Physik", Tabellen-Anhang

5 Anhang (Korrekturen)

In der Versuchsanleitung stehen zwei verschiedene Formeln für die Berechnung der Durchbiegung $D(x)$ bei zweiseitiger Auflage:

$$\begin{aligned} D_1(x) &= \frac{F}{48 \cdot EI}\left(3L^2x - 4x^3\right) && \text{für} \quad 0 \le x \le \frac{L}{2} \quad \text{und} \\ D_2(x) &= \frac{F}{48 \cdot EI}\left(4x^3 - 12x^2 + 9L^2x - L^3\right) && \text{für} \quad \frac{L}{2} \le x \le L. \end{aligned}$$

Zur Auswertung wurde ein

$$x' = L - x \qquad \text{für } \frac{L}{2} \le x \le L$$

definiert. Das heißt

$$\begin{aligned} D_1(x') &= D_1(L - x) \\ &= \frac{F}{48 \cdot EI}\left(3L^2(L - x) - 4(L - x)^3\right) \\ &= \frac{F}{48 \cdot EI}\left(3L^3 - 3L^2x - 4(-x^3 + 3x^2L - 3xL^3 + L^3)\right) \\ &= \frac{F}{48 \cdot EI}\left(3L^3 - 3L^2x + 4x^3 - 12x^2L + 12xL^3 - 4L^3\right) \\ &= \frac{F}{48 \cdot EI}\left(4x^3 - 12x^2L + 9xL^2 - L^3\right) \\ &= D_2(x). \end{aligned}$$

Anstatt also die Werte in $x \le \frac{L}{2}$ und $x \ge \frac{L}{2}$ aufzuteilen und jeweils $D_1(x)$ und $D_2(x)$ zu verwenden, ist es genauso richtig Die Abstände zum nähergelegenen Rand x und x' zu benutzen und immer in die erste Formel einzusetzen.
Die bei der Regression verwendeten Werte siehe Tabelle 6. Dabei ist x der Abstand zum nähergelegenen Rand, $C(x) = \frac{F}{48 \cdot I}\left(3L^2x - 4x^3\right)$ der Wert, der bei der Regression gegen die jeweilige Durchbiegung aufgetragen wurden und D_{links} bzw. D_{rechts} die gemessene Durchbiegung.

x in m	$C(x)$ in 10^8 N/m	D_{links} in mm	D_{rechts} in mm
0.240	1.920	1.300	1.195
0.235	1.906	1.300	1.150
0.230	1.890	1.315	1.110
0.225	1.872	1.285	1.070
0.220	1.853	1.270	1.070
0.215	1.833	1.265	1.045
0.210	1.811	1.260	1.020
0.205	1.787	1.270	0.985
0.200	1.762	1.225	0.970
0.195	1.736	1.230	1.000
0.185	1.679	1.170	0.885
0.175	1.618	1.140	0.820
0.165	1.551	1.105	0.765
0.155	1.480	1.080	0.700
0.145	1.405	1.030	0.640
0.125	1.242	0.900	0.500
0.105	1.066	0.780	0.390
0.085	0.877	0.655	0.250
0.065	0.680	0.510	0.180
0.045	0.475	0.365	0.075
0.025	0.266	0.140	0.050

Tabelle 6: In der Regression verwendete Werte