Anfängerpraktikum 2015/2016

Fourier-Analyse und -Synthese

Durchführung: 05.01.16

Clara Rittmann[1]
Anja Beck[2]

Betreuer:
Daniel Hanisch

[1]clara.rittmann@gmail.com
[2]anja.beck@tu-dortmund.de

Inhaltsverzeichnis

1 Theorie [1]

Im nachfolgend beschriebenen Versuch werden periodische Signale untersucht.
Eine Funktion wird periodisch genannt, wenn für alle t gilt, dass zeitlich periodisch

$$f(t) = f(t+T) \ ,$$

wobei T die Periode bezeichnet. Sie können meist durch Kombinationen von $\sin(\omega t)$ oder $\cos(\omega t)$ bzw. $e^{i\omega t}$ ausgedrückt werden. Für die Frequenz gilt hierbei $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Das Fouriersche Theorem besagt, dass eine Reihe der Form

$$C + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t) \tag{1}$$

wenn sie gleichmäßig konvergent ist immer eine periodische, abschnittsweise stetige Funktion darstellt. Eine solche Reiche wird auch Fourier-Reihe genannt. Die Koeffizienten A_n, B_n und C werden berechnet durch

$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) \ dt \tag{2}$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) \ dt \tag{3}$$

$$C = A_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \ dt \ . \tag{4}$$

In Tabelle 1 sind beispielhaft die Fourier-Reihen, der später betrachteten Signale dargestellt. Ist f an einer Stelle t_i unstetig, dann weicht die Fourier-Reihe an dieser Stelle von

Form	Funktion	Fourier-Reihe
Rechteck	$f_{\text{Rechteck}}(t) = \begin{cases} u, & 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ -u, & -\frac{T}{2} \leq t < 0 \end{cases}$	$f_{\text{R}}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4u}{(2n-1)\pi} \sin((2n-1)\omega t)$
Sägezahn	$f_{\text{Sägezahn}}(t) = \frac{2u}{T} t - u \quad 0 \leq t < T$	$f_{\text{S}}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{Tu}{n\pi} \sin(n\omega t)$
Dreieck	f_{Dreieck}	f_{D}

Tabelle 1: Fourier-Reihen verschiedener periodischer, nicht-differenzierbarer Funktionen

der Funktion ab. Diese Abweichung ist endlich und wird mit wachsendem n nicht kleiner. Dieses „Überschwingen“ wird Gibb'sches Phänomen genannt.

Manchmal ist es hilfreich oder interessant, das Frequenz-Spektrum einer Funktion zu betrachten. Der Übergang

$$f(t) \rightarrow g(\omega)$$

wird von der Fourier-Transformation

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} \ dt \tag{5}$$

[1] nach: Anleitung zu V351: Fourier-Analyse und -Synthese, Anfängerpraktikum TU Dortmund WS 2015/16

geleistet.
Ist f periodisch besteht g aus δ-Funktionen an den Stellen $k\omega$. Die Höhe der Pieks entspricht dann den Koeffizienten des Cosinus- bzw. Sinus-Terms mit der Frequenz $k\omega$ der Fourierreihe. Nicht-periodische Funktionen zeigen hier ein kontinuierliches Spektrum an Frequenzen.

2 Aufbau und Ablauf des Experiments

Der Versuch besteht aus zwei Teilen.
Zunächst wird für drei verschiedene Spannungsverläufe (Rechteck, Sägezahn und Dreieck) eine Fourier-Synthese durchgeführt. Dazu wird ein Schwingungsgenerator benutzt, der die ersten zehn Komponenten einer Fourier-Reihe generieren kann. Es müssen jeweils die passenden Koeffizienten eingestellt und überprüft werden, dass die Schwingungen alle in Phase sind.
Im zweiten Teil wird ein Funktionsgenerator an ein Oszilloskop angeschlossen. Mit Hilfe der MATH-Funktion des Oszilloskops wird dann eine Fourier-Transformation für verschiedene Spannungen (Rechteck, Sägezahn und Dreieck) durchgeführt. Nun können Ort und Amplitude der Pieks abgelesen werden.

Kurz aber super - zumindest fällt mir auch nicht mehr dazu ein. Wegen der Kürze würde ich es besser unter die Theorie setzen. Das ist abr bestimmt geschmacksfrage.

3 Auswertung

3.1 Fouriersynthese

Tabelle 2: Fourier-Koeffizienten

	Dreieck	Rechteck	Sägezahn
k=1	628.84	631.02	-627.10
k=2	0	0	-313.60
k= 3	69.87	210.34	-209.03
k= 4	0	0	-156.78
k=5	25.15	126.20	-125.42
k= 6	0	0	-104.52
k = 7	12.83	90.1454	-89.59
k = 8	0	0	-78.39
k = 9	7.76	70.11	-69.68

Die Fourierkoeffizienten a_k wurden für die Signale ausgerechnet.

$$\text{Dreieck:} \quad a_k = \frac{8u}{(\pi k)^2} \quad , k \in 2n+1, n \in Z \tag{6}$$

$$\text{Rechteck:} \quad a_k = \frac{4u}{k\pi} \quad , k \in 2n+1, n \in Z \tag{7}$$

$$\text{Sägezahn:} \quad a_k = -\frac{Tu}{kn\pi} \tag{8}$$

Wobei die Amplitude u und die Periode T der Funktionen konstant sind. Die ausgerechneten Koeffizienten stehen in Tabelle 2 und die Abbildungen der daraus generierten Signalverläufe 1, 2, 3 folgen darauf.

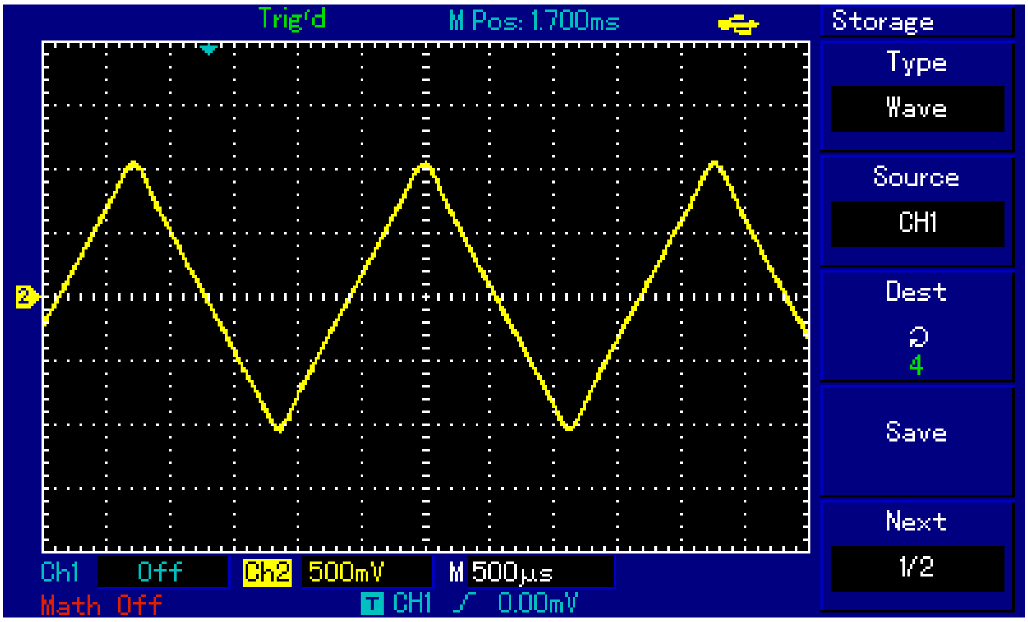

Abbildung 1: Annäherung an ein Dreiecksignal

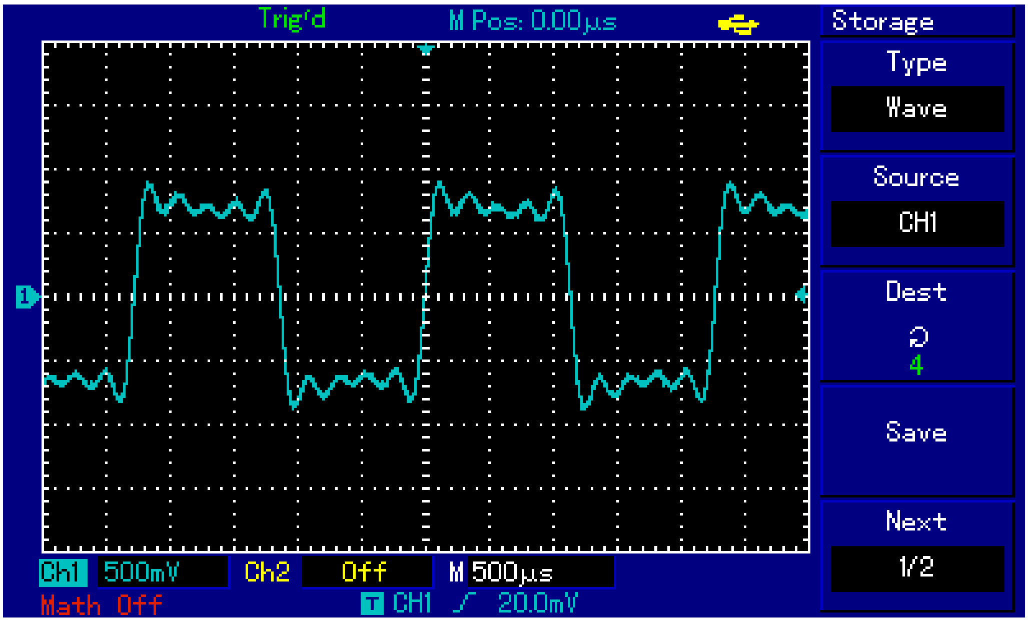

Abbildung 2: Annäherung an ein Rechtecksignal

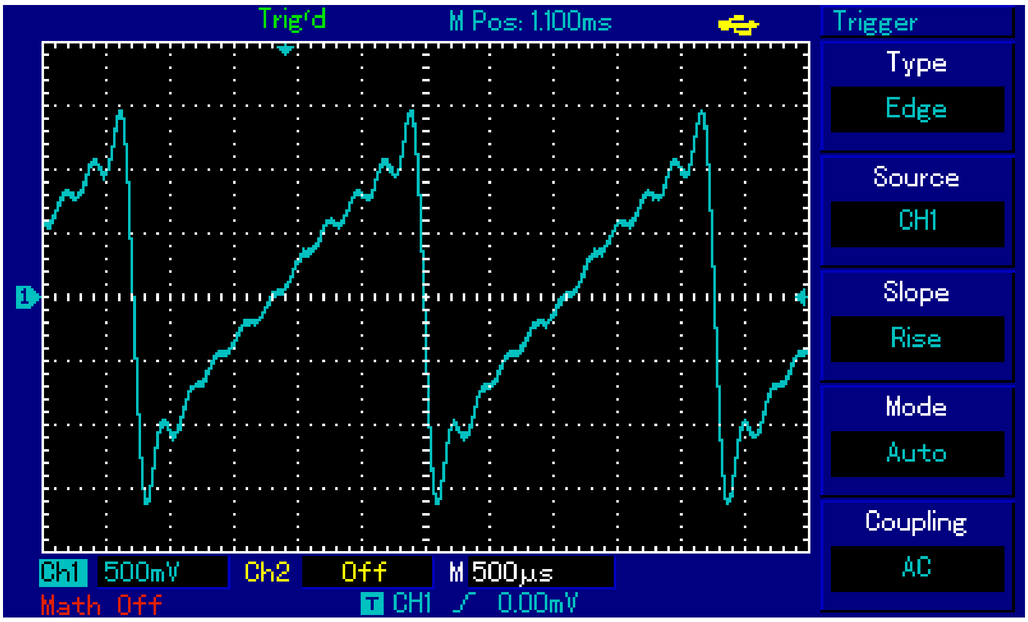

Abbildung 3: Annäherung an ein Sägezahnsignal

3.2 Fourieranalyse

Für die Auswertung Dreieck-, Rechteck-, und Sägezahnsignal werden die Fourierkoeffizienten eines eingespeisten Signals analysiert. In Unterkapiteln für jedes einzelne Signal befinden sich die Abbildungen, die am Oszilloskop zu sehen sind 4, (Abbildung 6, 8), Tabellen mit den abgelesenen und ausgerechneten Fourierkoeffizienten (Tabelle: 3, 4, 5) und eine Visualsierung selbiger (Abbildung: 5, 7, 9). Die Abweichung δa der einzelnen gemessenen Koeffizienten a_g von den errechneten a_b ergibt sich nach

$$\delta a = 1 - \frac{a_\mathrm{g}}{a_\mathrm{b}} \tag{9}$$

Die eingezeichneten Fehlerbalken beziehen sich auf die Gesamtabweichung von der erwarteten Funktion. Mehr dazu folgt in der Diskussion (Kapitel 4). Sie wurden hier wie folgt berechnet

$$\Delta a = \frac{1}{N-2}\sqrt{\sum_{i=2}^{N}(a_\mathrm{g} - a_\mathrm{b})^2} \ . \tag{10}$$

Es ist wichtig, bei dem zweiten Wert zu beginnen, da der erste keine Abweichung haben kann. Deswegen wir auch durch $N-2$ geteilt, statt durch $N-1$.

3.2.1 Dreiecksignal - Fourieranalyse

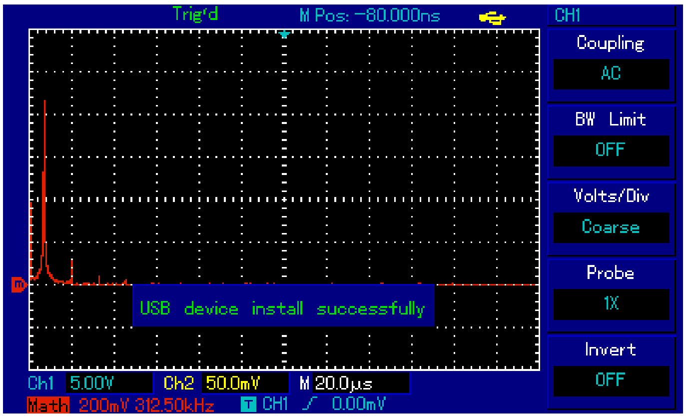

Abbildung 4: Frequenzspektrum Dreiecksignal

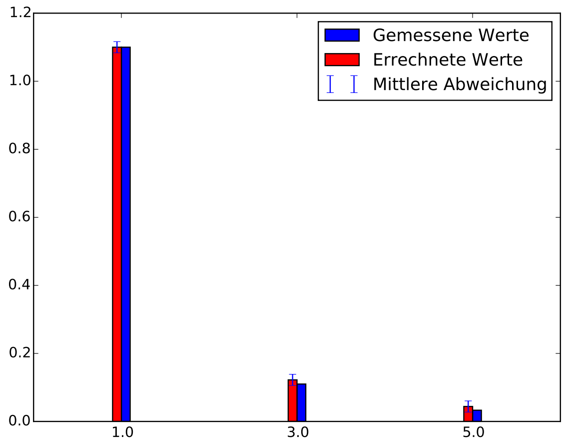

Abbildung 5: Frequenzspektrum Dreiecksignal

Tabelle 3: Fourier-Koeffizienten

	gemessen in V	berechnet in V	Abweichung
k = 1	1.100	1.100	0 %
k = 3	0.110	0.122	-0.11 %
k = 5	0.033	0.044	-0.33 %

3.2.2 Rechtecksignal - Fourieranalyse

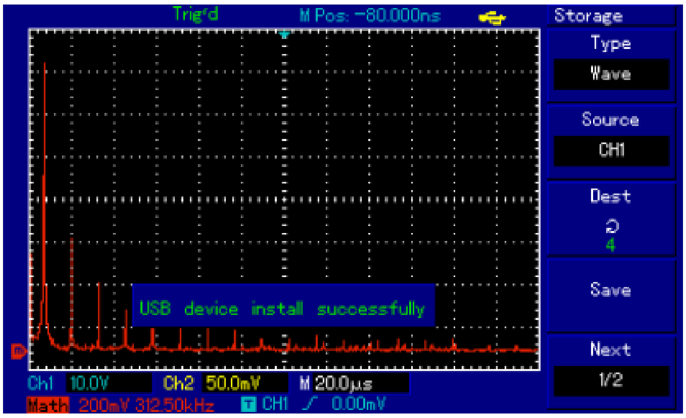

Abbildung 6: Frequenzspektrum Rechtecksignal

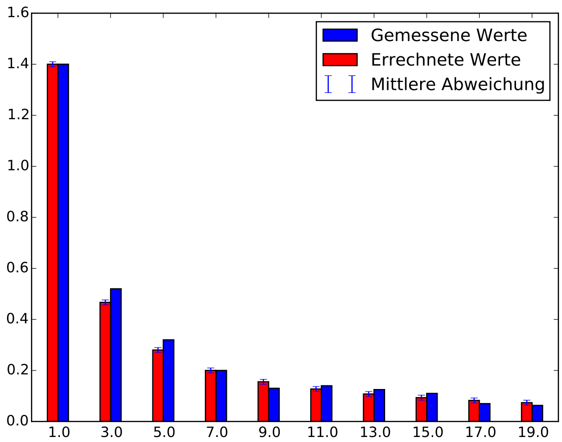

Abbildung 7: Frequenzspektrum Rechtecksignal

Tabelle 4: Fourier-Koeffizienten

	gemessen in V	berechnet in V	Abweichung
k = 1	1.400	1.400	0 %
k = 3	0.520	0.467	0.103 %
k = 5	0.320	0.280	0.125 %
k = 7	0.200	0.200	0 %
k = 9	0.130	0.156	-0.197 %
k = 11	0.140	0.127	0.091 %
k = 13	0.125	0.108	0.138 %
k = 15	0.110	0.093	0.152 %
k = 17	0.070	0.082	-0.176 %
k = 19	0.063	0.074	-0.170 %

3.2.3 Sägezahnsignal - Fourieranalyse

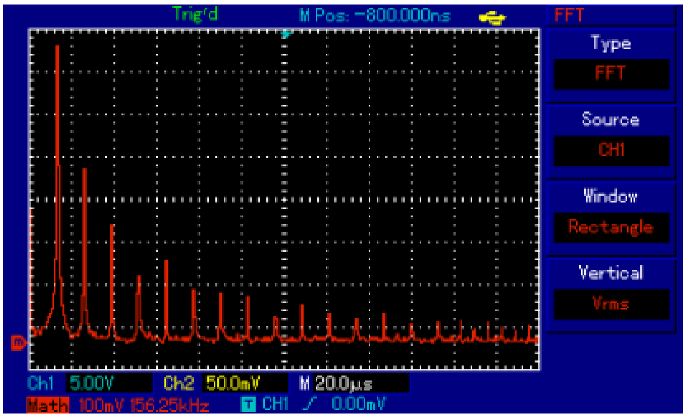

Abbildung 8: Frequenzspektrum Sägezahnsignal

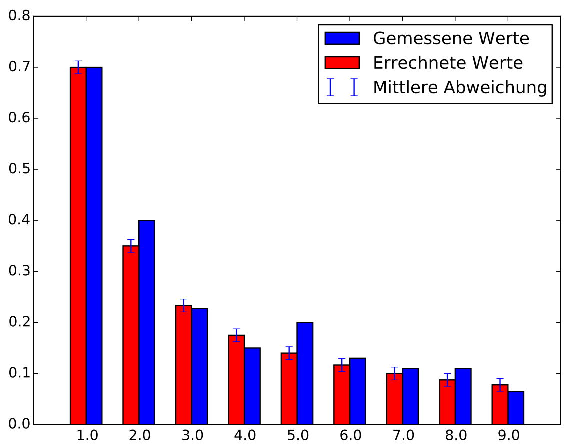

Abbildung 9: Frequenzspektrum Sägezahnsignal

Tabelle 5: Fourier-Koeffizienten

	gemessen in V	berechnet in V	Abweichung
k = 1	0.700	0.700	0 %
k = 2	0.400	0.350	0.125 %
k = 3	0.227	0.233	-0.028 %
k = 4	0.150	0.175	-0.167 %
k = 5	0.200	0.140	0.300 %
k = 6	0.130	0.117	0.103 %
k = 7	0.110	0.100	0.091 %
k = 8	0.110	0.086	0.205 %
k = 9	0.065	0.078	-0.197 %

4 Diskussion

Die Abweichung der gemessenen und abgelesenen Werte a_g von den berechneten Werten a_b wird hier wie folgt berechnet

$$\Delta a = \frac{1}{N-2}\sqrt{\sum_{i=2}^{N}(a_\mathrm{g} - a_\mathrm{b})^2}\ . \tag{11}$$

Es ist wichtig, bei dem zweiten Wert zu beginnen, da der erste keine Abweichung haben kann. Deswegen wir auch durch $N-2$ geteilt, statt durch $N-1$.

Todo list