technische universität dortmund

fakultät physik

Anfängerpraktikum 2015/2016

Versuch

Durchführung: TT.MM.JJ

Clara Rittmann[1]
Anja Beck[2]

Betreuer:
Max Mustermann

[1]clara.rittmann@gmail.com
[2]anja.beck@tu-dortmund.de

Inhaltsverzeichnis

1 Theorie

In diesem Versuch geht es darum die Temperaturabhängigkeit der Viskosität von destilliertem Wasser zu bestimmen.
Die **dynamische Viskosität** η ist ein Maß für die Zähigkeit eines Materials, die auf innere Reibungen zurückzuführen ist. Wenn eine Kugel unter Einwirkung der Gravitationskraft durch eine Flüssigkeit fällt, ist sie in einem zäheren Medium d.h. einem Medium mit einer höheren dynamischen Viskosität langsamer. Die Fallzeit t ist entsprechend größer. Die Viskosität ist des weiteren abhängig von der Geometrie des fallendem Körpers K und dessen effektive Dichte $(\rho_{\mathrm{K}} - \rho_{\mathrm{Fl}})$.

$$\eta = K \cdot (\rho_{\mathrm{K}} - \rho_{\mathrm{Fl}}) \cdot t \tag{1}$$

Als Innere Reibung wird die **Stokesche Reibung** abgenommen, die proportional zur Geschwindigkeit v und dem Radius r einer fallenden Kugel ist.

$$F_{\mathrm{R}} = 6\pi\eta v r \tag{2}$$

Eine solche Strömung um die Kugel ist laminar und im Gegensatz zu turbulenten Strömungen wirbelfrei. Eine laminare Strömung in einem Zylinder liegt vor, wenn die charakteristische **Reynoldsche Zahl** sehr klein ist.[1]

Hier hattest du r statt d stehen. Das habe ich geändert.

$$\mathrm{RE} = \frac{\rho_{\mathrm{F}} v d}{\eta} \ , \tag{3}$$

d ist der Durchmesser des Zylinders.
Da die Innere Reibung destillierten Wassers vor allem auf Wasserstoffbrückenbindungen zurückzuführen ist, die bei höheren Temperaturen aufbrechen, sinkt die dynamische Viskosität bei zunehmender Temperatur.[2] Dieses Verhalten beschreibt die **Andrasche Gleichung**

$$\eta(T) = A \exp\left(\frac{B}{T}\right) \quad . \tag{4}$$

[1] D. Getschke, Physikalisches Praktikum, Teubner Verlagsgesellschaft, 9.Auflage, 1992, S.86
[2] R.Winter, Basiswissen Physikalische Chemie, Studium, 4. Auflage, 2010, S. 31

2 Aufbau und Ablauf des Experiments

In einem Höppler-Viskosimeter (siehe Abb. 1) sinkt eine Kugel durch einem mit einer Flüssigkeit befüllten Zylinder. Hier ist es destilliertes Wasser. Beim Befüllen des Zylinders mit der Flüssigkeit und der Kugel ist darauf zu achten, dass sich keine Luftblasen an der Kugel bilden. Die Kugel fällt nicht, sondern sie rutscht an der Innenwand des leicht schräg stehenden Zylinders herab. Das ist wichtig, um das Anschlagen der Kugel an den Innenwänden und dadurch entstehende Turbulenzen zu verhindern.
Die Zeit, die die Kugel braucht, um zwei Markierungen im Abstand von 10 cm zu passieren ist die Fallzeit. Diese wird für zwei verschieden große Kugeln zehn Mal bei Raumtemperatur gemessen. In einer zweiten Messreihe wird das destillierte Wasser erhitzt und die Fallzeit der größeren Kugel bei zehn verschiedenen Temperaturen je zwei Mal gemessen. Beide Kugeln werden vor Versuchsbeginn vermessen und gewogen.

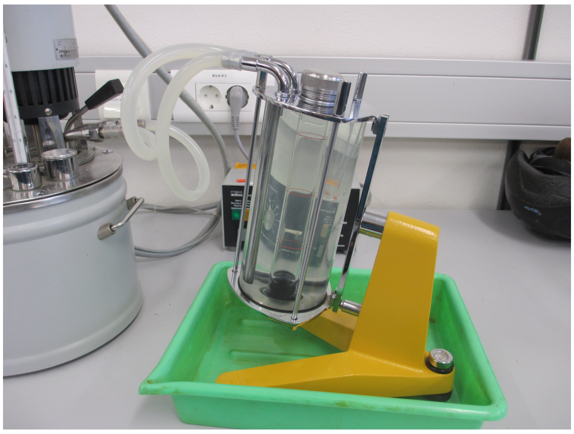

Abbildung 1: Höppler-Viskosimeter mit Heizung

Das ist alles super kurz, aber was haben wir denn sonst noch gemacht?!

Ich finds spitze :)

3 Auswertung

3.1 Berechnung von Kugelvolumen und -dichte

	groß	klein
	15.802	15.651
	15.796	15.652
	15.804	15.650
Mittelwert	15.801 ± 0.002	15.651 ± 0.001

Tabelle 1: Durchmesser d der beiden Kugeln in 10^{-3} m

Aus den Durchmessern der zwei Glaskugeln (siehe Tabelle 1) ergeben sich die Volumina

$$V_{\text{kl}} = (2.0074 \pm 0.0002) \cdot 10^{-6}\,\text{m}^3 \quad \text{und} \tag{5}$$

$$V_{\text{gr}} = (2.0655 \pm 0.0008) \cdot 10^{-6}\,\text{m}^3 \ . \tag{6}$$

Die kleinere Kugel wiegt

$$m_{\text{kl}} = 4.44 \cdot 10^{-3}\,\text{kg}$$

und die größere

$$m_{\text{gr}} = 4.63 \cdot 10^{-3}\,\text{kg} \ ,$$

damit können auch die Dichten

$$\rho_{\text{kl}} = (2211.9 \pm 0.2)\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \quad \text{und} \tag{7}$$

$$\rho_{\text{gr}} = (2241.6 \pm 0.8)\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \tag{8}$$

berechnet werden. Die Fehler ergeben sich hierbei durch die Gaußsche Fehlerfortpflanzung

$$V(d) = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3 : \qquad \sigma_V = \left|\frac{\partial V}{\partial d}\sigma_d\right| = 2\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2\sigma_d \tag{9}$$

$$\rho(d) = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3} : \qquad \sigma_\rho = \left|\frac{\partial \rho}{\partial d}\sigma_d\right| = \frac{9m}{2\pi\left(\frac{d}{2}\right)^4}\sigma_d \ . \tag{10}$$

3.2 Bestimmung der Apparatekonstante für die große Kugel

Die Messung der Fallzeit ergibt die Werte in Tabelle 2. Da die Apparatekonstante für die

	klein	groß
	12.91	92.62
	12.87	92.35
	13.00	92.44
	12.78	92.07
	12.59	93.31
	12.73	92.72
	12.93	93.71
	12.76	91.91
	12.85	92.25
	12.70	91.95
Mittelwerte	12.81 ± 0.04	92.5 ± 0.2

Tabelle 2: Fallzeiten für ein 0.10 m langes Rohr

kleinere Kugel

$$K_{\mathrm{kl}} = 0.076\,40 \cdot 10^{-6}\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}$$

bekannt ist, kann die Viskosität für 20 °C bzw. 293.15 K warmes Wasser ($\rho_{\mathrm{W}} = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$) mit Formel (1) berechnet werden:

$$\eta_{20} = (1.186 \pm 0.003)\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m\,s}}\ . \tag{11}$$

Durch Umstellen ebendieser Formel ergibt sich mit der Dichte und den Fallzeiten für die große Kugel die Apparatekonstante

$$K_{\mathrm{gr}} = \frac{\eta_{20}}{(\rho_{\mathrm{gr}} - \rho_{\mathrm{W}}) \cdot t_{\mathrm{gr}}} = (1.032 \pm 0.004) \cdot 10^{-5}\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}\ . \tag{12}$$

Auch bei diesen beiden Werten ergibt sich der jeweilige Fehler durch die Gaußsche Fehlerfortpflanzung (aus Gründen der Übersichtlichkeit wird auf die Indizes verzichtet, $\rho_{\mathrm{W}} = \rho_{\mathrm{W}}$)

$$\eta = K(\rho - \rho_{\mathrm{W}})t: \quad \sigma_\eta = \sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial \rho}\sigma_\rho\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\sigma_t\right)^2} \tag{13}$$

$$= \sqrt{(Kt\sigma_\rho)^2 + (K(\rho - \rho_{\mathrm{W}})t\sigma_t)^2} \tag{14}$$

$$K = \frac{\eta}{(\rho - \rho_{\mathrm{W}})t}: \quad \sigma_K = \sqrt{\left(\frac{\partial K}{\partial \eta}\sigma_\eta\right)^2 + \left(\frac{\partial K}{\partial \rho}\sigma_\rho\right)^2 + \left(\frac{\partial K}{\partial t}\sigma_t\right)^2} \tag{15}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\sigma_\eta}{(\rho - \rho_{\mathrm{W}})t}\right)^2 + \left(\frac{\eta\sigma_\rho}{(\rho - \rho_{\mathrm{W}})^2 t}\right)^2 + \left(\frac{\eta\sigma_t}{(\rho - \rho_{\mathrm{W}})t^2}\right)^2}\ . \tag{16}$$

3.3 Konstantenbestimmung der Andraschen Gleichung

Bei der Fallzeit-Messung mit ansteigender Wasser-Temperatur werden die Werte in Tabelle 3 gemessen. Eingesetzt in Gleichung (1) kann so die Viskosität des Wassers in Abhängigkeit der Temperatur berechnet werden. Diese Werte finden sich in derselben Tabelle. Wieder berechnet sich der Fehler der Viskosität nach Gauß (K und ρ sind dabei die Werte der großen Kugel):

$$\eta = K(\rho - \rho_\mathrm{W})t: \qquad \sigma_\eta = \sqrt{\left(\frac{\partial\eta}{\partial K}\sigma_K\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial\rho}\sigma_\rho\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\sigma_t\right)^2} \tag{17}$$

$$= \sqrt{((\rho - \rho_\mathrm{W})t)^2 + (Kt\sigma_\rho)^2 + (K(\rho - \rho_\mathrm{W})t\sigma_t)^2}\ . \tag{18}$$

T in °C	Fallzeit in s		Mittelwert der Zeitmessungen	Viskosität $\eta(T)$ in $\mathrm{m^2/s^2}$
28	83.25	78.72	81 ± 2	1.04 ± 0.03
31	74.78	73.89	74.3 ± 0.4	0.953 ± 0.007
35	67.97	76.66	72 ± 4	0.93 ± 0.06
40	62.19	62.64	62.4 ± 0.2	0.800 ± 0.004
45	57.69	56.56	57.1 ± 0.6	0.732 ± 0.008
51	51.68	51.78	51.73 ± 0.05	0.663 ± 0.002
55	48.21	49.78	49.0 ± 0.8	0.63 ± 0.01
60	45.63	45.06	45.3 ± 0.3	0.581 ± 0.004
65	42.47	41.50	42.0 ± 0.5	0.538 ± 0.006

Tabelle 3: Fallzeiten der großen Kugel für ein 0.10 m langes Rohr bei verschiedenen Wassertemperaturen und daraus berechnete Viskositäten

Wird nun Gleichung (4) auf beiden Seiten logarithmiert, ergibt sich

$$\ln\eta = \ln A + \frac{B}{T}\ ,$$

mit

$$X = \frac{1}{T} \quad \text{und} \quad Y = \ln\eta$$

kann so eine lineare Ausgleichsrechung mit den Werten in Tabelle 4 durchgeführt werden. Mit Hilfe von Python errechnen sich die Konstanten

$$B = (1804 \pm 52)\ln\mathrm{s^2/m^2} \tag{19}$$

$$\ln A = (-5.965 \pm 0.164)\ln\mathrm{m^2/s^2} \quad \Rightarrow \quad A = (0.003 \pm 1.178)\,\frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{s^2}}\ . \tag{20}$$

Die Gerade ist mit den Regressionswerten in Abbildung 2 zu sehen. Die Andradsche Gleichung ist somit

$$\eta(T) = 0.003\exp\left(\frac{1804}{T}\right)\ . \tag{21}$$

$X = \frac{1}{T}$ in $10^{-3}/\mathrm{K}$	$Y = \ln\eta$ in $\ln \mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2$
3.32	0.037
3.29	-0.048
3.25	-0.076
3.19	-0.223
3.14	-0.312
3.08	-0.411
3.05	-0.465
3.00	-0.542
2.96	-0.619

Tabelle 4: Werte, mit denen die Regression durchgeführt wird

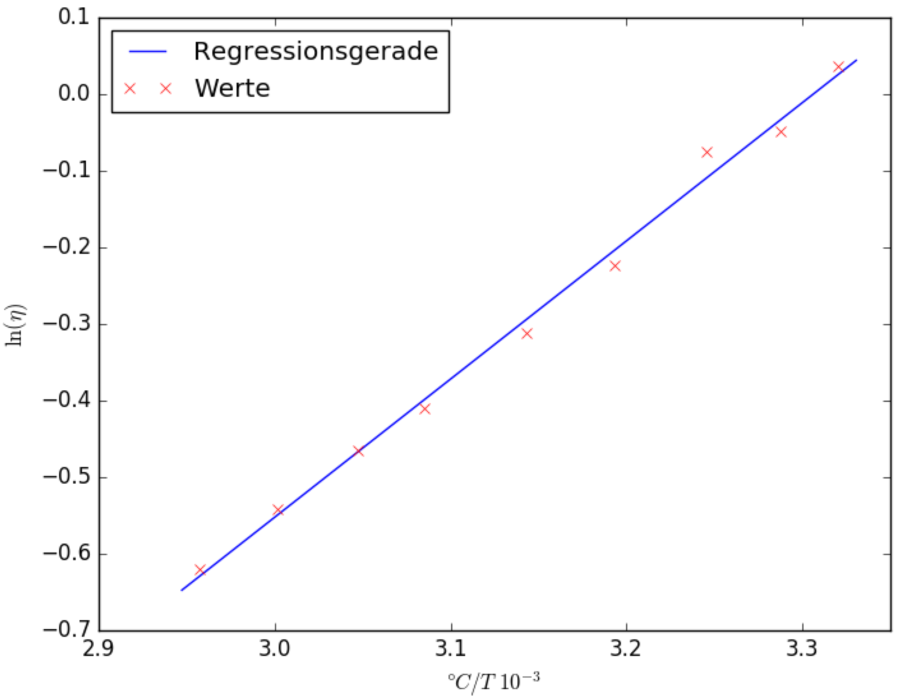

Abbildung 2: Regressiongerade mit Regressionswerten nach (4)

3.4 Die Reynoldsche Zahl

Zuletzt soll die Reynoldsche Zahl berechnet werden. Dafür wird benötigt

- die Dichte von Wasser, sie ist eigentlich von der Temperatur abhängig, schwankt aber kaum im betrachteten Temperaturbereich, sodass weiterhin
$$\rho_\mathrm{W} = 1000\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$$
angenommen wird;
- die Fließgeschwindigkeit des Wassers, welche gleich der Fallgeschwindigkeit
$$v = \frac{s}{t}, \quad s = 0.10\,\mathrm{m}$$
der Kugel ist;
- der Durchmesser des Zylinders, welcher gleich dem Durchmesser der Kugel
$$d = 15.801 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$$
angenommen werden kann; und
- die temperaturabhängige Viskosität η.

Eingesetzt in (3) ergeben sich so Werte zwischen

$$\mathrm{RE}_\mathrm{min} = \mathrm{RE}_{\eta(28\,^\circ\mathrm{C})} = 0.019 \pm 0.001 \quad \text{und} \tag{22}$$
$$\mathrm{RE}_\mathrm{max} = \mathrm{RE}_{\eta(65\,^\circ\mathrm{C})} = 0.070 \pm 0.002\ . \tag{23}$$

Und auch hier ergibt sich der Fehler wiederum mit Gauß:

$$\mathrm{RE} = \frac{\rho_\mathrm{W} s d}{\eta t}: \qquad \sigma_\mathrm{RE} = \sqrt{\left(\frac{\partial \mathrm{RE}}{\partial t}\sigma_t\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{RE}}{\partial d}\sigma_d\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathrm{RE}}{\partial \eta}\sigma_\eta\right)^2} \tag{24}$$
$$= \sqrt{\left(-\frac{\rho_\mathrm{W} s d}{\eta t^2}\sigma_t\right)^2 + \left(\frac{\rho_\mathrm{W} s}{\eta t}\sigma_d\right)^2 + \left(-\frac{\rho_\mathrm{W} s d}{\eta^2 t}\sigma_\eta\right)^2}\ . \tag{25}$$

4 Diskussion