Anfängerpraktikum 2015/2016

# Leerlaufspannung und Innenwiderstand von Spannungsquellen

## 1. Korrektur

Durchführung: 08.12.15

Clara Rittmann[1]
Anja Beck[2]

*Betreuer:*
Steffen Schröder

[1]clara.rittmann@gmail.com
[2]anja.beck@tu-dortmund.de

# Inhaltsverzeichnis



Bei der Korrektur war uns einiges unklar. Erklärungen, warum wir manches bewusst nicht korrigiert haben bzw. Fragen sind in solchen grauen Kästen im oder neben dem Text.

# 1 Theorie

[1] Wird in der Elektrotechnik ein Stromkreis betrachtet, so gilt das 2. Kirchhoffsche Gesetz

$$\sum_n U_i = \sum_n I_i R_i \quad . \tag{1}$$

Wobei die $U_i$ die angelegten Spannungen, $R_i$ die Widerstände und $I_i$ der Strom, der durch $Z_i$ fließt ist. Für einen Stromkreis mit einer Spannungsquelle $U$ und einem Lastwiderstand $R_a$ gilt dann

$$U = IR_a \quad .$$

Wird ein solcher Stromkreis, an dem die Spannung $U_0$ anliegt, im Experiment betrachtet gilt diese Gleichung nicht für $U = U_0$. Das liegt daran, dass eine reale Spannungsquelle immer einen Innenwiderstand $R_i$ hat, der den Stromfluss beeinflusst. Im Schaltbild und in der Rechnung kann eine solche reale Spannungsquelle wie eine ideale Spannungsquelle betrachtet werden, hinter der ein Widerstand der Größe $R_i$ geschaltet ist (siehe Abbildung 1). Dann gilt wie gewohnt (1):

$$U_0 = IR_i + IR_a \quad . \tag{2}$$

Die angelegte Spannung $U_0$ wird auch Leerlaufspannung genannt. Die im Schaltbild als $U_k$ bezeichnete Klemmspannung, ist hingegen die Spannung, die dann am eigentlichen Stromkreis anliegt. Sie kann mit (1)

$$U_k = IR_a = U_0 - IR_i \tag{3}$$

berechnet werden. Eine ideale Spannungsquelle müsste demnach einen Innen-

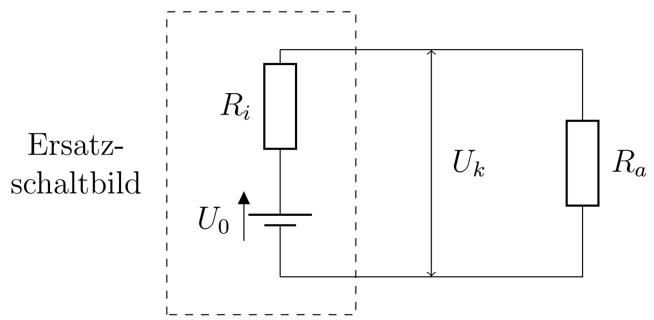



Abbildung 1: Reale Spannungsquelle in einem Stromkreis

widerstand von $R_i = 0$ haben, sodass $U_k = U_0$ gilt. Es ist zu beachten, dass es bei Generatoren zu Rückkopplungseffekten kommen kann, sodass für ihren Innenwiderstand ein differentieller Zusammenhang

$$R_i = \frac{\mathrm{d}U_k}{\mathrm{d}I} \tag{4}$$

[1]nach: Anleitung zu V301: Leerlaufspannung und Innenwiderstand von Spannungsquellen, Anfängerpraktikum TU Dortmund WS 2015/16, `http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V301.pdf`

gilt.

Die Leistung $N$, die an einen Widerstand $R$ abgegeben wird ist definiert als

$$N = IU_R = I^2 R \quad . \tag{5}$$

Wird weiterhin ein Stromkreis mit nur einem Lastwiderstand betrachtet, gilt für den Strom nach (2)

$$I = \frac{U_0}{R_i + R_a}, \tag{6}$$

sodass die Leistung am Lastwiderstand

$$N(R_a) = \left( \frac{U_0}{R_i + R_a} \right)^2 R_a \tag{7}$$

ist. Könnte der Innenwiderstand $R_i$ Null sein, wäre es mit $R_a \to 0$ möglich beliebig hohe Leistungen zu erreichen. Das Maximum der Leistung wird bei $R_a = R_i$ erreicht. Eine dementsprechende Wahl von $R_a$ wird Leistungsanpassung genannt.

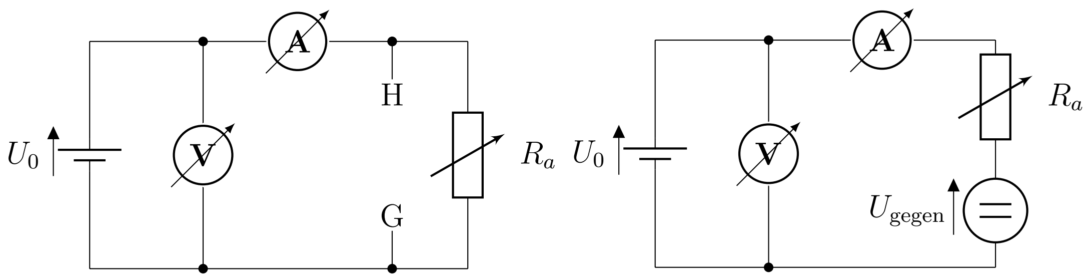
# 2 Aufbau und Ablauf des Experiments

1. **Leerlaufspannung** Im ersten Messschritt wird die Leerlaufspannung, der im weiteren Verlauf verwendeten Monozelle, mit einem Voltmeter gemessen.

2. **Klemmspannung einer Monozelle**

    a) Mit der in Abbildung 2a dargestellten Schaltung wird jeweils die Klemmspannung $U_k$ und der Strom $I$ bei verschiedenen Lastwiderständen im Bereich von $0 - 50\ \Omega$ gemessen. Hier ist zu beachten, dass das Voltmeter an der eingezeichneten Stelle angeschlossen wird, denn nur dort kann die Spannung gemessen werden, die in den Stromkreis eingespeist wird. Würde das Voltmeter beispielsweise nach dem Amperemeter (also zwischen den Punkten H und G) angeschlossen, würde es die Klemmspannung minus die Spannung, die am Amperemeter abfällt, messen.

    b) Die Klemmspannung kann auch mit Hilfe einer Gegenspannung bestimmt werden. Dazu wird eine Gegenspannung, die etwa 2 V größer ist, als die Leerlaufspannung hinter den Lastwiderstand (siehe Abbildung 2b) geschaltet. Auch hier findet die Messung der Klemmspannung $U_k$ und des Stroms $I$ bei verschiedenen Lastwiderständen im Bereich von $0 - 50\ \Omega$ statt.




(a) direkt (b) mittels Gegenspannung

Abbildung 2: Messung der Klemmspannung

3. **Klemmspannung eines RC-Generators** Der Stromkreis 2a eignet sich auch zur Bestimmung der Klemmspannung einer Wechselspannungsquelle. Zunächst wird der 1 V-Rechteckausgang eines RC-Generators als Spannungsquelle verwendet. Wie bei den vorherigen Messungen werden wieder die Spannung $U_k$ und der Strom $I$ bei variablem Lastwiderstand, dieses Mal zwischen 20 und 250 $\Omega$, gemessen. Die Messung wird für den 1 V-Sinusausgang des RC-Generators und einem Lastwiderstand von $0.1 - 5\ \mathrm{k}\Omega$ wiederholt.

# 3 Auswertung

## 3.1 Bestimmung der Leerlaufspannung und Berechnung des Innenwiderstands für drei Spannungsquellen

Die Ableseungenauigkeit der Stommessung beträgt 2% und die der Spannungsmessung 3%. In den folgenden Diagrammen sind diese Fehler durch Fehlerbalken gekennzeichnet.
Mit einer linearen Regression mittels Python nach Formel (3), folgen für die Monozelle die Leerlaufspannung

$$U_0 = (1.47 \pm 0.01)\,\mathrm{V}$$

und der Innenwiderstand

$$R_i = (5.5 \pm 0.1)\,\Omega\ .$$

Abbildung 3 zeigt die Regressionsgerade mit den Datenpunkten.

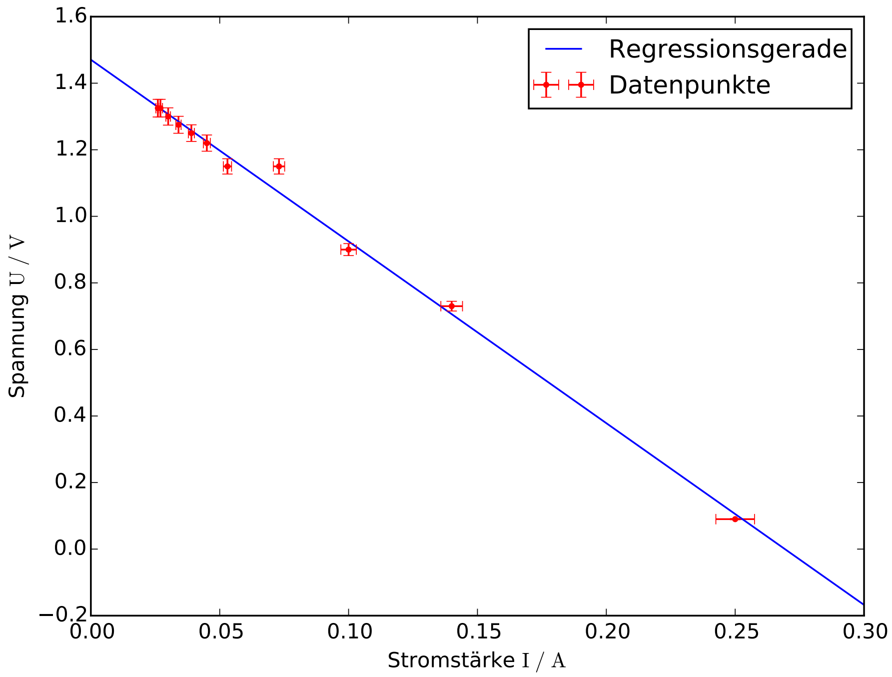



Abbildung 3: Lineare Regression zur Monozelle

Beim Anlegen der Gegenspannung (Abbildung 2b) fließt der Strom in die entgegengesetzte Richtung, wodurch Formel (3) zu

$$U_k = IR_a = U_0 + IR_i \tag{8}$$

wird. Die lineare Regression (Graph siehe Abbildung 4) liefert in diesem Fall :

$$U_0 = (1.38 \pm 0.03)\,\mathrm{V}\ , \tag{9}$$
$$R_i = (5.9 \pm 0.2)\,\Omega\ . \tag{10}$$

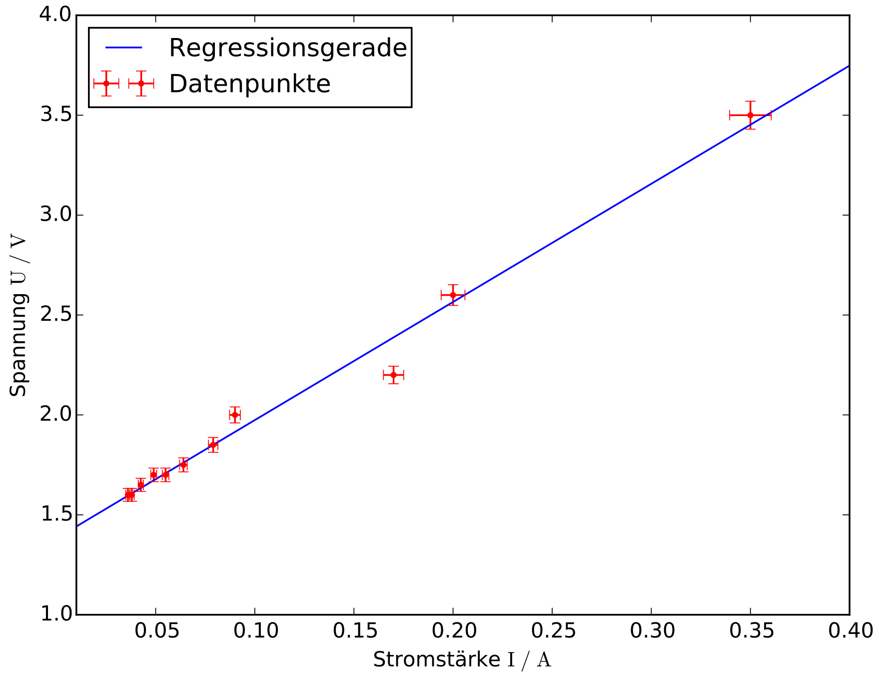



Abbildung 4: Lineare Regression zur Gegenspannung

Für den RC-Generator wird der gleiche Aufbau (siehe Abbildung 2a) wie bei der Monozelle verwendet. Die Regression ergibt für die Rechteckspannung (Abbildung 5)

$$U_0 = (0.555 \pm 0.006)\,\mathrm{V}\ , \tag{11}$$
$$R_i = (61 \pm 2)\,\Omega \tag{12}$$

und für die Sinusspannung (Abbildung 6)

$$U_0 = (0.233 \pm 0.002)\,\mathrm{V}\ , \tag{13}$$
$$R_i = (0.68 \pm 0.01)\,\mathrm{k}\Omega\ . \tag{14}$$

Wird $(675.6 \pm 12.5)\,\mathrm{V}$ wirklich zu $(0.68 \pm 0.01)\,\mathrm{kV}$? Das ist ja schon ein großer Unterschied.

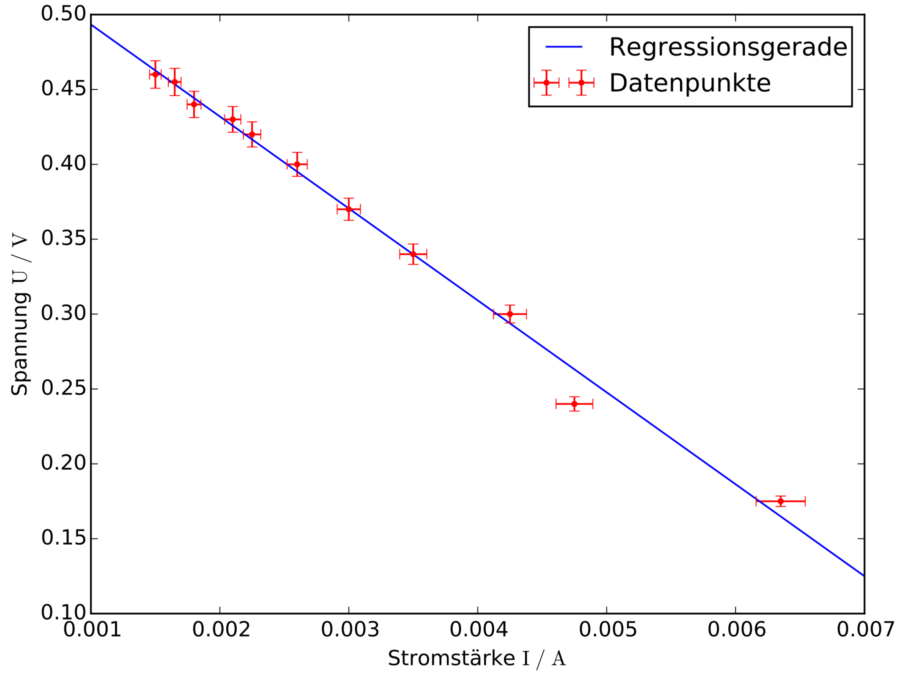



Abbildung 5: Lineare Regression zum RC-Generator (Rechteckspannung)

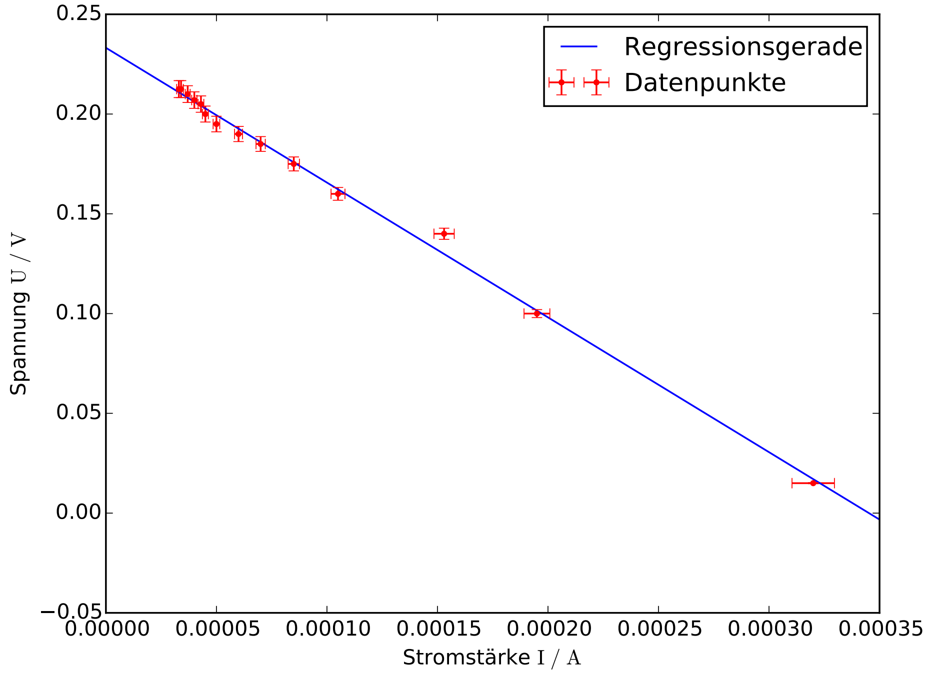



Abbildung 6: Lineare Regression zum RC-Generator (Sinusspannung)

## 3.2 Systematischer Fehler – endlicher Widerstand des Voltmeters

Der endliche Widerstand des Voltmeters ($R_v = 10\,\mathrm{M\Omega}$) führt zu einem systematischen Fehler. Der Widerstand des Messgerätes müsste unendlich groß sein, um den Stromkreis und -fluss nicht zu beeinflussen. Um den dadurch verursachten Fehler auszurechnen wird die Leerlaufspannung der Monozelle

$$U_k = 1.5\,\mathrm{V} \tag{15}$$

direkt gemessen. Der Innenwiderstand der Monozelle (siehe (3.1)) wird aus einer anderen Messreihe übernommen. Durch Umstellen der Formel (3) nach $U_0$ vereinfacht sich der absolute Fehler zu

Wir haben das hier jetzt einfach auch mal gerundet? Ist das falsch? Wieso hast Du das hier nicht angestrichen?

$$\Delta U = U_0 - U_k = I \cdot R_i = U_k \cdot \frac{R_i}{R_v} = 8 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{V} \tag{16}$$

und der relative Fehler wird

$$\frac{\Delta U}{U_k} = \frac{R_i}{R_v} = 5 \cdot 10^{-7}\ . \tag{17}$$

Dieser Fehler ist vernachlässigbar klein.

## 3.3 Das Maximum der umgesetzten Leistung

Wie bereits in der Theorie erklärt, ist die umgesetzte Leistung abhängig vom Lastwiderstand $R_a$ und nimmt sogar ein lokales Maximum ein. Hier werden die Messreihen der Monozelle betrachtet. Die Leistung $N_{\text{Mess}} = U_k \cdot I$ wird über den Belastungswiderstand $R_a = U_k/I$ aufgetragen. Ein Fehler entsteht durch die Ableseungenauigkeit der Messgeräte.

Bei der Tabelle wolltest Du die Formeln für die Fehlerfortpflanzung wissen. Aber das sind die Gerätefehler (siehe erster Satz in Abschnitt 3). Was soll sich da fortpflanzen?
Im gesamten Protokoll gibt es nur diese Fehler und Fehler, die aus der Regression kommen und die Fehler werden anders berechnet (bzw. leiten sich doch nicht mal aus berechneten Größen ab). Daher keine Fehlerfortpflanzung.

Tabelle 1: Belastungswiderstand und Leistung mit Fehlern

| Widerstand in Ω | Fehler in Ω | Leistung in W | Fehler in W |
|---|---|---|---|
| 0.36 | 0.01 | 0.0225 | 0.0008 |
| 5.2 | 0.2 | 0.102 | 0.004 |
| 9.0 | 0.3 | 0.090 | 0.003 |
| 15.8 | 0.6 | 0.084 | 0.003 |
| 21.7 | 0.8 | 0.061 | 0.002 |
| 27 | 1 | 0.055 | 0.002 |
| 32 | 1 | 0.049 | 0.002 |
| 38 | 1 | 0.043 | 0.002 |
| 43 | 2 | 0.039 | 0.001 |
| 49 | 2 | 0.036 | 0.001 |
| 51 | 2 | 0.035 | 0.001 |

Wenn man „industriell“ runden will, was passiert dann mit 0.978? Wird das zu 1? oder zu 1.0?

Was passiert mit dem ehemals ersten Wert 0.36 ± 0.013, wenn man „industriell“ runden will? Schummelt man dann eine Null hinten hin, damit man auch wieder drei Nachkomma-Stellen hat?

Abbildung 7 zeigt die theoretische Abhängigkeit der Leistung vom Widerstand (siehe (7)) und die Werte aus Tabelle 1.

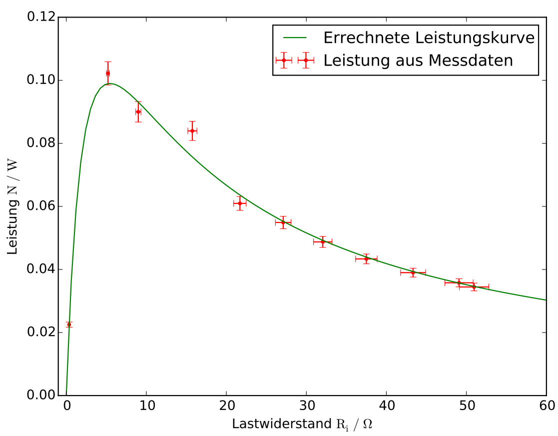



Abbildung 7: Leistung $N(R_a)$ am Lastwiderstand

# 4 Diskussion

In diesem Versuch gibt es drei Hauptfehlerquellen: Die Messgeräte werden als ideale Messgeräte angenommen. Das bedeutet, dass das Voltmeter einen unendlich hohen und das Ampèremeter einen unendlich kleinen Widerstand hat, um den Stromfluss nicht zu verändern.
Des weiteren gibt es eine Ableseungenauigkeit der Messgeräte. Diese wurden in den Rechnungen größtenteils berücksichtigt.
Auch vernachlässigt werden sogenannte Rückkopplungseffekte. Ändert sich der Belastungsstrom, so beeinflusst das eigentlich den Innenwiderstand und die Leerlaufspannung der Quelle.

Tabelle 2: Messergebnisse Leerlaufspannung Monozelle und Gegenspannung

| | Gemessener Wert | Erwarteter Wert | Abweichung |
|---|---|---|---|
| Monozelle | 1.471 V | 1.5 V | - 2.0 % |
| Gegenspannung | 1.383 V | 1.5 V | - 7.8 % |

Wie in Kapitel 3.2 gezeigt ist, kann die Abweichung nicht am Voltmeter liegen. Wahrscheinlich sind die Rückkopplungseffekte der entscheidende Faktor.
Die Messung mit dem RC-Generator als Stromquelle liefert niedrigere Leerlaufspannungen und höhere Innenwiderstände. Der errechnete Innenwiederstand für die Rechteckspannung

$$R_{i,\mathrm{Rechteck}} = 61\,\Omega \tag{18}$$

stimmt mit dem Literaturwert[2] von circa $50\,\Omega$ überein, zumal dieser Wert noch vom Gerät abhängig ist. Wieso der Innenwiderstand des Generators beim Erzeugen einer Sinusspannung so viel höher ist

$$R_{i,\mathrm{Sinus}} = 0.68\,\mathrm{k\Omega} \tag{19}$$

können wir nur vermuten. Das Rechtecksignal wird in ein Dreiecksignal umgewandelt und diese beiden zusammen ergeben die Sinusspannung. Vielleicht werden hierzu große Widerstände benötigt. Oder der Innenwiderstand hängt von der Steigung des abgegebenen Signals ab, die bei der Rechteckspannung null ist und bei der Sinusspannung zwischen null und eins liegt.
Die Werte, die für die Leitung berechnet wurden sind sehr gut. Lediglich ein Wertepaar liegt mit seinen Fehlerbalken nicht auf der erwarteten Funktion.
Ein Leistungsmaximum wird für $R_a = R_i$ erreicht, da gilt:

$$\frac{\mathrm{d}N(R_a)}{\mathrm{d}R_a} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}R_a}\left(\left(\frac{U_0}{R_i + R_a}\right)^2 R_a\right) = \frac{U_0^2(R_i - R_a)}{(R_i + R_a)^3} \stackrel{!}{=} 0$$
$$\Rightarrow R_a = R_i \ .$$

[2]Elektronikpraktikum, H. Pfeiffer, S. 55