Anfängerpraktikum 2015/2016

Fourier-Analyse und -Synthese

1. Korrektur

Clara Rittmann[1]
Anja Beck[2]

Betreuer:
Daniel Hanisch

[1]clara.rittmann@gmail.com
[2]anja.beck@tu-dortmund.de

Inhaltsverzeichnis

1 Theoretischer Hintergrund

Im nachfolgend beschriebenen Versuch werden periodische Signale untersucht.
Eine Funktion wird (zeitlich) periodisch genannt, wenn für alle t gilt, dass

$$f(t) = f(t+T) \ ,$$

wobei T die Periode bezeichnet. Sie können meist durch Kombinationen von $\sin(\omega t)$ oder $\cos(\omega t)$ bzw. $\mathrm{e}^{i\omega t}$ ausgedrückt werden. Für die Frequenz gilt hierbei $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Das Fouriersche Theorem besagt, dass eine Reihe der Form

$$f(t) \sim \tilde{f}(t) = C + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t) \tag{1}$$

wenn sie gleichmäßig konvergent ist, immer eine periodische, abschnittsweise stetige Funktion $\tilde{f}$ darstellt. Eine solche Reihe wird auch Fourier-Reihe genannt. Die Koeffizienten A_n, B_n und C werden berechnet durch

$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) \ dt \tag{2}$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) \ dt \tag{3}$$

$$C = A_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \ dt \ . \tag{4}$$

In Tabelle 1 sind beispielhaft die Fourier-Reihen, der später betrachteten Signale dargestellt. Ist f an einer Stelle t_i unstetig, dann weicht die Fourier-Reihe $\tilde{f}$ an dieser Stelle von

Form	Funktion	Fourier-Reihe
Rechteck	$f_{\text{Rechteck}}(t) = \begin{cases} u, & 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ -u, & -\frac{T}{2} \leq t < 0 \end{cases}$	$f_{\mathrm{R}}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4u}{(2n-1)\pi} \sin((2n-1)\omega t)$
Sägezahn	$f_{\text{Sägezahn}}(t) = \frac{2u}{T} t - u \quad 0 \leq t < T$	$f_{\mathrm{S}}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{Tu}{n\pi} \sin(n\omega t)$
Dreieck	$f_{\text{Dreieck}}(t) = \begin{cases} u - \frac{-4u}{T} t, & 0 \leq t < \frac{T}{2} \\ u + \frac{-4u}{T} t, & -\frac{T}{2} \leq t < 0 \end{cases}$	$f_{\mathrm{D}}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8u}{((2n-1)\pi)^2} \cos((2n-1)\omega t)$

Tabelle 1: Fourier-Reihen verschiedener periodischer, nicht-differenzierbarer Funktionen

der Funktion ab. Diese Abweichung ist endlich und wird mit wachsendem n nicht kleiner. Dieses „Überschwingen“ wird Gibb'sches Phänomen genannt.

Manchmal ist es hilfreich oder interessant, das Frequenz-Spektrum einer Funktion zu betrachten. Der Übergang

$$f(t) \to g(\omega)$$

wird von der Fourier-Transformation

$$g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{i\omega t} \, dt \tag{5}$$

geleistet.
Ist f periodisch besteht g aus δ-Distributionen an den Stellen $k\omega$. Die Höhe der Pieks entspricht dann den Koeffizienten des Cosinus- bzw. Sinus-Terms mit der Frequenz $k\omega$ der Fourierreihe. Nicht-periodische Funktionen zeigen hier ein kontinuierliches Spektrum an Frequenzen.

2 Experimenteller Aufbau

Der Versuch besteht aus zwei Teilen.
Zunächst wird für drei verschiedene Spannungsverläufe (Rechteck, Sägezahn und Dreieck) eine **Fourier-Synthese** durchgeführt. Dazu wird ein Schwingungsgenerator benutzt, der die ersten zehn Komponenten einer Fourier-Reihe generieren kann. Es müssen jeweils die passenden Koeffizienten eingestellt und überprüft werden, dass die Schwingungen alle in Phase sind. Letzteres ist am einfachsten über Lissajous-Figuren zu bewerkstelligen.
Im zweiten Teil wird ein Funktionsgenerator an ein Oszilloskop angeschlossen. Mit Hilfe der MATH-Funktion des Oszilloskops wird dann eine **Fourier-Transformation** für verschiedene Spannungen (Rechteck, Sägezahn und Dreieck) durchgeführt. Nun können Ort und Amplitude der Pieks abgelesen werden. Hierbei gilt es allerdings zu beachten, dass die Frequenz, mit der die Funktion am Oszilloskop detektiert bzw. „abgetastet“ wird, mindestens doppelt so groß ist, wie die größte Eingangs-Frequenz. Dieser Zusammenhang wird Abtasttheorem genannt.

3 Auswertung

3.1 Fouriersynthese

Tabelle 2: Fourier-Koeffizienten

	Dreieck	Rechteck	Sägezahn
k=1	628.84	631.02	-627.10
k=2	0	0	-313.60
k= 3	69.87	210.34	-209.03
k= 4	0	0	-156.78
k=5	25.15	126.20	-125.42
k= 6	0	0	-104.52
k = 7	12.83	90.1454	-89.59
k = 8	0	0	-78.39
k = 9	7.76	70.11	-69.68

Die Fourierkoeffizienten a_k werden für die Signale ausgerechnet.

$$\text{Dreieck:} \quad a_k = \frac{8u}{(\pi k)^2} \quad , k \in 2n+1, n \in Z \tag{6}$$

$$\text{Rechteck:} \quad a_k = \frac{4u}{k\pi} \quad , k \in 2n+1, n \in Z \tag{7}$$

$$\text{Sägezahn:} \quad a_k = -\frac{Tu}{kn\pi} \tag{8}$$

Wobei die Amplitude u und die Periode T der Funktionen konstant sind. Die ausgerechneten Koeffizienten stehen in Tabelle 2 und die Abbildungen der daraus generierten Signalverläufe 1, 2, 3 folgen darauf.

Abbildung 1: Annäherung an ein Dreiecksignal

Abbildung 2: Annäherung an ein Rechtecksignal

Abbildung 3: Annäherung an ein Sägezahnsignal

3.2 Fourieranalyse

Für die Auswertung des Dreieck-, Rechteck-, und Sägezahnsignals werden die Fourierkoeffizienten eines eingespeisten Signals analysiert. In Unterkapiteln für jedes einzelne Signal befinden sich die Abbildungen, die am Oszilloskop zu sehen sind (Abbildung 4, 6, 8), Tabellen mit den abgelesenen und ausgerechneten Fourierkoeffizienten (Tabelle: 3, 4, 5) und eine Visualisierung selbiger (Abbildung: 5, 7, 9). Die prozentuale Abweichung δa der einzelnen gemessenen Koeffizienten $a_{\text{gem.}}$ von den errechneten $a_{\text{ber.}}$ ergibt sich nach

$$\delta a = \left(1 - \frac{a_{\text{gem.}}}{a_{\text{ber.}}}\right) \cdot 100\% \tag{9}$$

Die eingezeichneten Fehlerbalken beziehen sich auf die Gesamtabweichung von der erwarteten Funktion. Mehr dazu folgt in der Diskussion (Kapitel 4). Sie wurden hier wie folgt berechnet

$$\Delta a = \sqrt{\frac{1}{N-2}\sum_{i=2}^{N}(a_{\text{gem.}} - a_{\text{ber.}})^2}\ . \tag{10}$$

Es ist wichtig, bei dem zweiten Wert zu beginnen, da der erste keine Abweichung haben kann. Deswegen wir auch durch $N-2$ geteilt, statt durch $N-1$.

3.2.1 Dreiecksignal

Abbildung 4: Frequenzspektrum Dreiecksignal

Abbildung 5: Frequenzspektrum Dreiecksignal

Tabelle 3: Fourier-Koeffizienten

	gemessen in V	berechnet in V	Abweichung
k = 1	1.100	1.100	0 %
k = 3	0.110	0.122	-11 %
k = 5	0.033	0.044	-33 %

3.2.2 Rechtecksignal

Abbildung 6: Frequenzspektrum Rechtecksignal

Abbildung 7: Frequenzspektrum Rechtecksignal

Tabelle 4: Fourier-Koeffizienten

	gemessen in V	berechnet in V	Abweichung
k = 1	1.400	1.400	0 %
k = 3	0.520	0.467	10.3 %
k = 5	0.320	0.280	12.5 %
k = 7	0.200	0.200	0 %
k = 9	0.130	0.156	-19.7 %
k = 11	0.140	0.127	9.10 %
k = 13	0.125	0.108	13.8 %
k = 15	0.110	0.093	15.2 %
k = 17	0.070	0.082	-17.6 %
k = 19	0.063	0.074	-17.0 %

3.2.3 Sägezahnsignal

Abbildung 8: Frequenzspektrum Sägezahnsignal

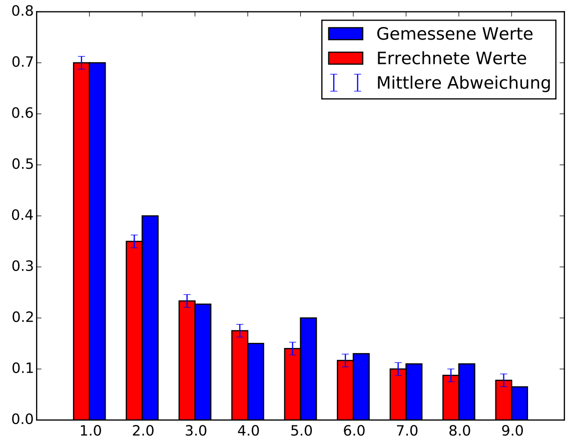

Abbildung 9: Frequenzspektrum Sägezahnsignal

Tabelle 5: Fourier-Koeffizienten

	gemessen in V	berechnet in V	Abweichung
k = 1	0.700	0.700	0 %
k = 2	0.400	0.350	12.5 %
k = 3	0.227	0.233	-02.8 %
k = 4	0.150	0.175	-16.7 %
k = 5	0.200	0.140	30.0 %
k = 6	0.130	0.117	10.3 %
k = 7	0.110	0.100	9.10 %
k = 8	0.110	0.086	20.5 %
k = 9	0.065	0.078	-19.7 %

4 Diskussion

Eine Fehleranalyse ist bei diesem Protokoll wenig zielführend. Es wird kein Maß dafür eingeführt, wie weit die durch die **Fouriersynthese** modellierte Funktion von der Zielfunktion abweicht. Allgemein zeigt sich, dass die hier modellierten Signale (Abbildung 1, 2, 3) schon mit wenigen Oberschwingungen nahe am gewünschten Ergebnis liegen. Besonders fällt dies bei der Dreieckspannung auf, wo die Amplituden der k-ten Oberschwingung mit $\sim \frac{1}{k^2}$ abfällt, was an der Stetigkeit der Funktion liegt.
Auch das in der Theorie beschriebene Phänomen der Gibb'schen Überschwinger sind in Abbildung 2 und 3 gut erkennbar.
Bei der **Fourieranalyse** kann mit Hilfe der Formel (10) eine Ungenauigkeit in der Messung der Koeffizienten bestimmt werden. Die Streuung ergibt sich aus der Abweichung dividiert durch den Mittelwert der Messung

$$M = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} a_{\mathrm{gem},i} \quad . \tag{11}$$

Bei diesen geringen Fehlern (siehe Tabelle 6) handelt es sich wahrscheinlich um Ableseungenauigkeiten, wenngleich ein unvermeidbarer systematischer Fehler noch erwähnt werden sollte: Bei der Fourier-Transformation wird über einen unendlich langen Zeitraum integriert. Im Experiment ist das nicht durchführbar, aber durch genügend große Zeitintervalle vernachlässigbar.

Tabelle 6: Abweichung der Fourierkoeffizienten

	Mittlerer Fehler	Streuung
Dreieckspannung	16.44 mV	0.040
Rechteckspannung	97.66 mV	0.032
Sägezahnspannung	12.55 mV	0.054