Anfängerpraktikum 2015/2016

Der Lock-In-Verstärker

Durchführung: 15.12.2015

Clara Rittmann[1]
Anja Beck[2]

Betreuer:
Abdulkaerim frempong

[1]clara.rittmann@gmail.com
[2]anja.beck@tu-dortmund.de

Inhaltsverzeichnis

1 Theorie

Der Lock-In-Verstärker hilft beim Messen stark verrauschter Signale. Er besteht aus den Bauteilen: Bandpassfilter, Phasenverschieber, Signalmischer und ein Tiefpass, der als Integrierglied verwendet wird. Durch die richtige Anordnung der Bauteile kann eine Konfiguration erzielt werden, die eine viel höhere Güte hat als ein einfacher Bandpassfilter d.h. die Frequenzen werden genauer heraus gefiltert.
Das verrauschte Messsignal U_{sig} setzt sich aus vielen verschiedenen Schwingungen unterschiedlicher Frequenz zusammen. In einem Bandpassfilter werden die Anteile der Rauschfrequenz herausgenommen, die weit von der Frequenz des Signals abweichen.
Danach wird eine Rechteckspannung gleicher Frequenz als Referenzsignal U_{ref} erzeugt und mit dem Signal gemischt, genauer multipliziert. Das Rechtecksignal wird im Folgenden durch seine Fourierreihe dargestellt. Sind die beiden gemischten Signale

$$U_{sig} = U_0 \sin(\omega t) \quad \text{und} \tag{1}$$

$$U_{ref} = \frac{4}{\pi}\left(\sin(\omega t) + \frac{1}{3}\sin(3\omega t) + \frac{1}{5}\sin(5\omega t) + ...\right) \tag{2}$$

in Phase, so entsteht ein Signal:

$$U_{out} = \frac{2}{\pi}U_0\left(1 - \frac{2}{3}\cos(2\omega t) - \frac{2}{15}\cos(4\omega t) - \frac{2}{35}\cos(6\omega t)\right) \quad . \tag{3}$$

Über einen Tiefpass erhält man eine Gleichspannung mit der selben Spannung

$$U_{out} = \frac{2}{\pi} \quad . \tag{4}$$

Sind das Mess- und das Referenzsignal zueinander um den Winkel ϕ phasenverschoben, wird die Gleichspannung geringer und errechnet sich nach:

$$U_out = \frac{2}{\pi}U_0\cos(\phi) \quad . \tag{5}$$

2 Aufbau und Ablauf des Experiments

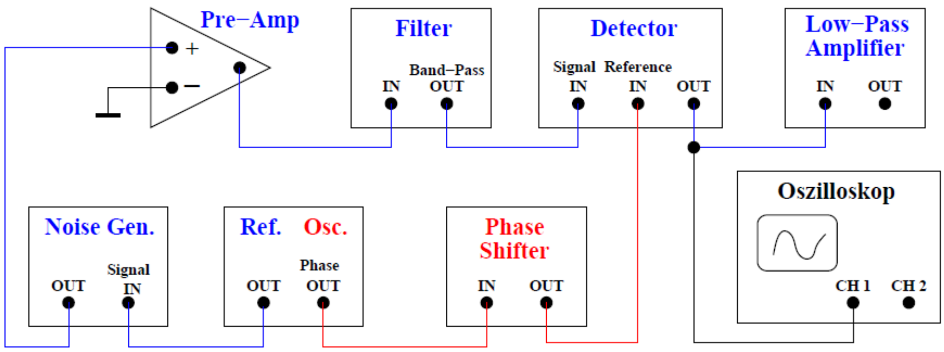


Abbildung 1: Aufbau des ersten und zweiten Versuchsteils [1]

In Abbildung 1 ist ein schematischer Aufbau des Lock-In-Verstärkerts dargestellt.
Bevor der eigentliche Versuch startet, ist die erste Aufgabe die Ausgangssignale (Reference/Oscilator) abzugreifen und mit einem Oszilloskop zu untersuchen. Beide Signale haben die gleiche Frequenz, die 1 kHz gewählt wird. Das Referenzsignal hat eine unveränderliche Amplitude von 30 V. Die Amplitude des Ausgangssignals soll klein, möglichst auf 10 mV eingestellt werden.
In ersten Versuchsteil wird das reine Ausgangssignal ohne ein Rauschsignal betrachtet. Das Signal gelangt durch einen Verstärker in den Bandpass, um dann mit dem Referenzsignal vermischt zu werden (Detector). Die Phase des Referenzsignals kann vorher verschoben werden (Phase Shifter). Das Produkt beider Signale ist auf einem digitalen Oszilloskop zu sehen. Dieses Signal wird im Tiefpass integriert (Low-Pass-Filter), um U_0 zu erhalten. Die Oszilloskopbilder und die Spannungswerte U_0 werden für verschiedene Phasendifferenzen bestimmt.
Im zweiten Versuchsteil wird das Ausgangssignal von einem Rauschen überlagert (Noise Generator). Der restliche Aufbau bleibt unverändert und es werden ebenfalls Werte und Bilder für verschiedene Phasendifferenzen genommen.

Zum Schluss soll die Lichtintensität einer blinkenden LED in Abhängigkeit des Abstandes zum Messgerät, einer Photodiode, gemessen werden. Je weiter die Photodiode von der LED entfernt ist, desto größer ist das Hintergrundrauschen durch einfallendes Licht aus der Umgebung. Es soll der Abstand $r_{\max}$ bestimmt werden, bei dem das Signal der LED nicht mehr erkennbar ist. Dazu wird der vorherige Aufbau leicht verändert, wie in Abbildung 2 gezeigt ist. Die LED wird an die Rechteckspannung angeschlossen. Das Referenzsignal

[1] entnommen aus der Versuchsanleitung V303
[2] entnommen aus der Versuchsanleitung V303

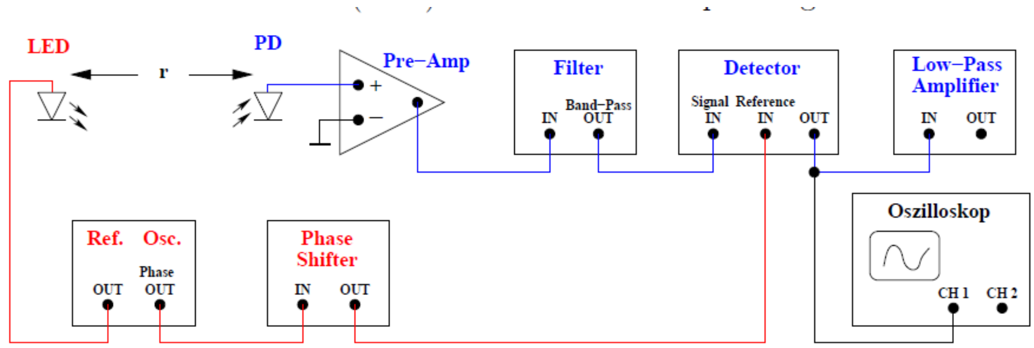


Abbildung 2: Messung der Lichtintensität einer LED[2]

wird mit dem Signal der LED mit Hilfe des Phasenverschiebers mit dem der LED in Phase gebracht. Das im Photodetektor registrierte Signal wird beliebig verstärkt (Pre-Amplifier).

3 Auswertung

3.1 Statistische Formeln

3.1.1 Fehlerrechnung

Im folgenden wurden Mittelwerte von N Messungen der Größe x berechnet

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum x_i \ , \tag{6}$$

sowie die Varianz

$$V(x) = \frac{1}{N} \sum (x_i - \bar{x})^2 \tag{7}$$

woraus die Standardabweichung folgt

$$\sigma_x = \sqrt{V(x)}. \tag{8}$$

Die Standardabweichung des Mittelwertes

$$\Delta_x = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} \ , \tag{9}$$

kürzer auch Fehler des Mittelwertes genannt, bezieht noch die Anzahl der Messungen mit ein.

3.1.2 Regression

Nachfolgend wird eine lineare Regression für Wertepaare (x_i, y_i) durchgeführt. Dafür müssen die Steigung

$$m = \frac{n \cdot \sum x_i y_i - \sum x_i \cdot \sum y_i}{n \cdot \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \tag{10}$$

und der y-Achsenabschnitt

$$b = \frac{\sum x_i^2 \cdot \sum y_i - \sum x_i \cdot \sum x_i y_i}{n \cdot \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \tag{11}$$

berechnet werden. Die jeweiligen Fehler sind

$$s_m^2 = s_y^2 \cdot \frac{n}{n \cdot \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \tag{12}$$

$$s_b^2 = s_y^2 \cdot \frac{\sum x_i^2}{n \cdot \sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2} \ . \tag{13}$$

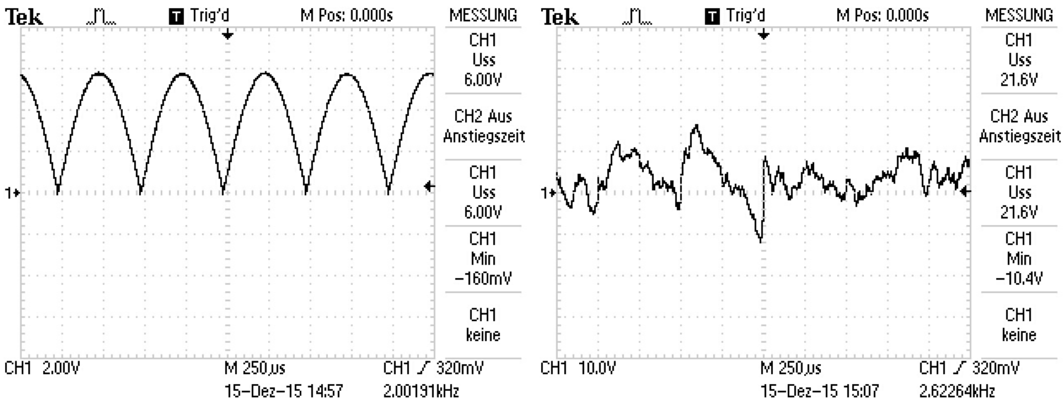
Die Abweichung der Regressionsgeraden in y-Richtung ist dabei

$$s_y^2 = \frac{\sum \left(\Delta y_i\right)^2}{n-2} = \frac{\sum \left(y_i - b - m x_i\right)^2}{n-2} \ . \tag{14}$$

3.2 Das Ausgangssignal

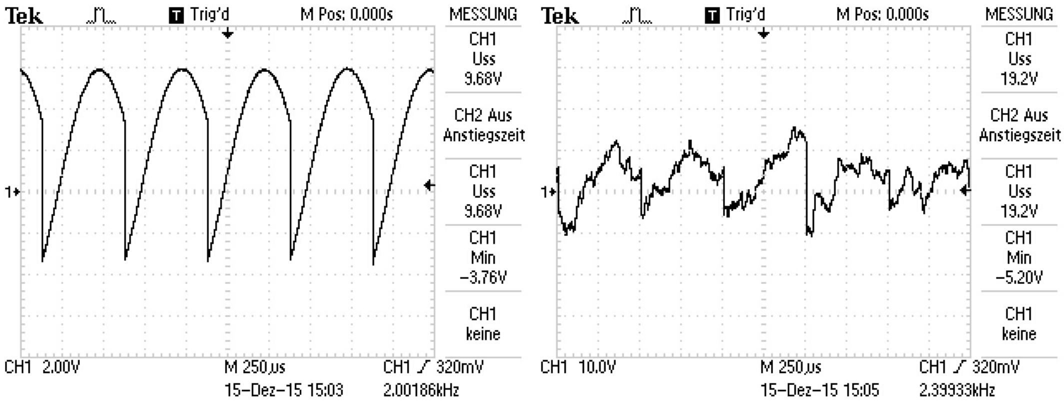
3.2.1 ... nach dem Mischen durch den Detector

Als erstes wird ein Signal mit einer Frequenz $f_{\mathrm{sig}} = 1\,\mathrm{kHz}$ und einer Amplitude $U_{0,\mathrm{sig}} = 10\,\mathrm{mV}$ mit einer Referenz-Spannung gleicher Frequenz und der Amplitude $U_{0,\mathrm{ref}} = 30\,\mathrm{V}$ am Detector (bzw. Mischer) überlagert. Die resultierende und am Oszilloskop zu beobachtende Spannung ist in den Abbildungen 3 bis 7 dargestellt.



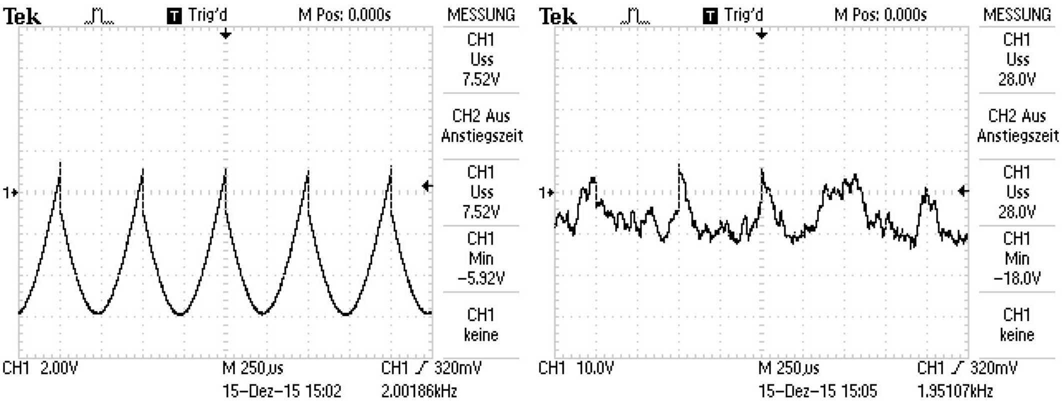
(a) ohne Rauschen (b) mit Rauschen

Abbildung 3: Spannungsmischung bei einer Phasendifferenz von $\Delta\phi = 0°$



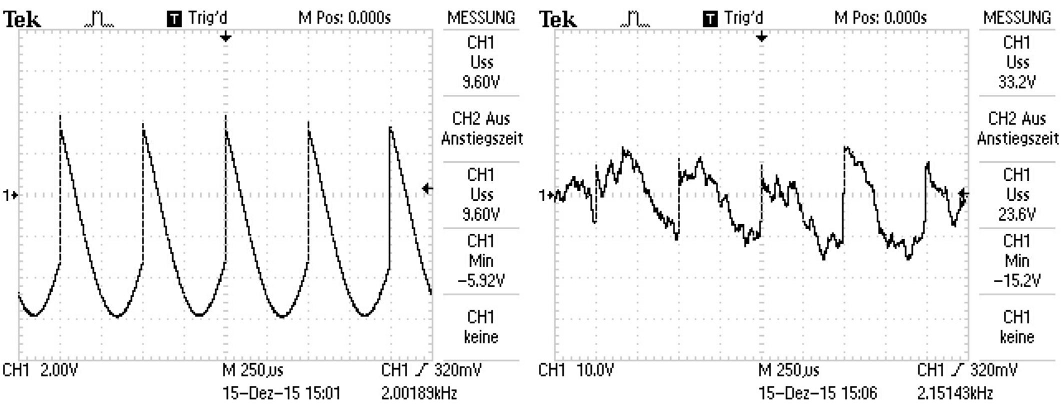
(a) ohne Rauschen (b) mit Rauschen

Abbildung 4: Spannungsmischung bei einer Phasendifferenz von $\Delta\phi = 45°$



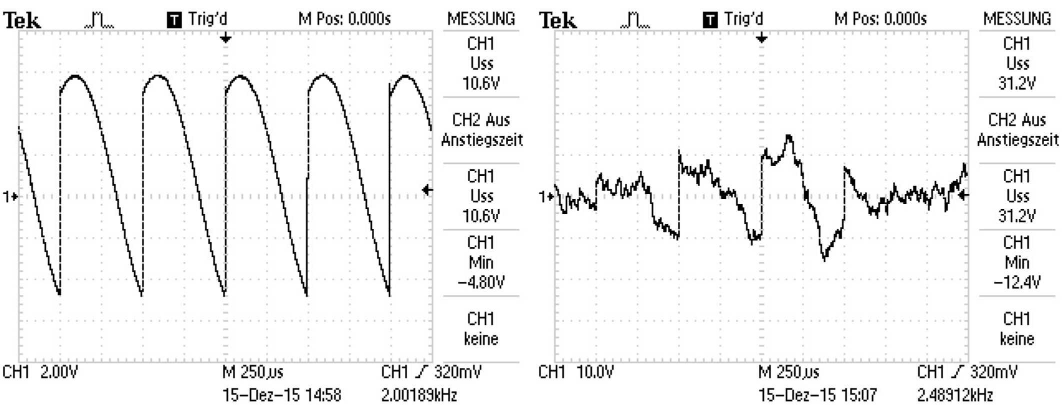
(a) ohne Rauschen (b) mit Rauschen

Abbildung 5: Spannungsmischung bei einer Phasendifferenz von $\Delta\phi = 165°$



(a) ohne Rauschen (b) mit Rauschen

Abbildung 6: Spannungsmischung bei einer Phasendifferenz von $\Delta\phi = 225°$



(a) ohne Rauschen (b) mit Rauschen

Abbildung 7: Spannungsmischung bei einer Phasendifferenz von $\Delta\phi = 315°$

3.2.2 ... nach dem Integrieren am Tiefpass

In einem Lock-In-Verstärker wird die im vorigen Abschnitt beschriebene „Misch-Spannung“ noch über einen Tiefpass integriert. Als Zeitperiode wird dafür $T = 1\,\mathrm{s}$ gewählt. Der Wert dieses Integrals wird für verschiedene Phasenverschiebungen abgelesen und ist in Tabelle 1 bzw. 2 eingetragen.

Das Signal ohne Rauschen

Es wird im Folgenden zunächst das Signal ohne Rauschen betrachtet. Der Off-Set wird abgezogen und die Winkel zum Bogenmaß überführt. Dann kann die Funktion

$$f(\phi) = A\cos(w\phi + \phi_0)$$

auf die Messwerte gefittet werden. Mit Hilfe von Python ergeben sich so die Parameter

$$A_{\mathrm{ohne}} = (2.04 \pm 0.11)\,\mathrm{mV} \tag{15}$$
$$w_{\mathrm{ohne}} = 1.00 \pm 0.04 \tag{16}$$
$$\phi_{0,\mathrm{ohne}} = (-0.008 \pm 0.053)\,\pi \tag{17}$$

Die dadurch beschriebene Kurve ist in Abbildung 8 zusammen mit den Messwerten und der theoretisch mit (5) zu erwartenden Kurve dargestellt.

Phasenverschiebung in °	Integral in V	Off-Set in °
0	-9.5	+165
15	6.2	-15
90	1.5	+165
150	-6.9	-15
180	9.1	+165
210	-5.7	-15
255	0	-15
270	-1.5	+165
315	-7.6	+165
345	7	-15

Tabelle 1: Integral (bzw. Gleichspannung) nach dem Tiefpass für verschiedene Phasenverschiebungen bei einem „reinen“ Signal

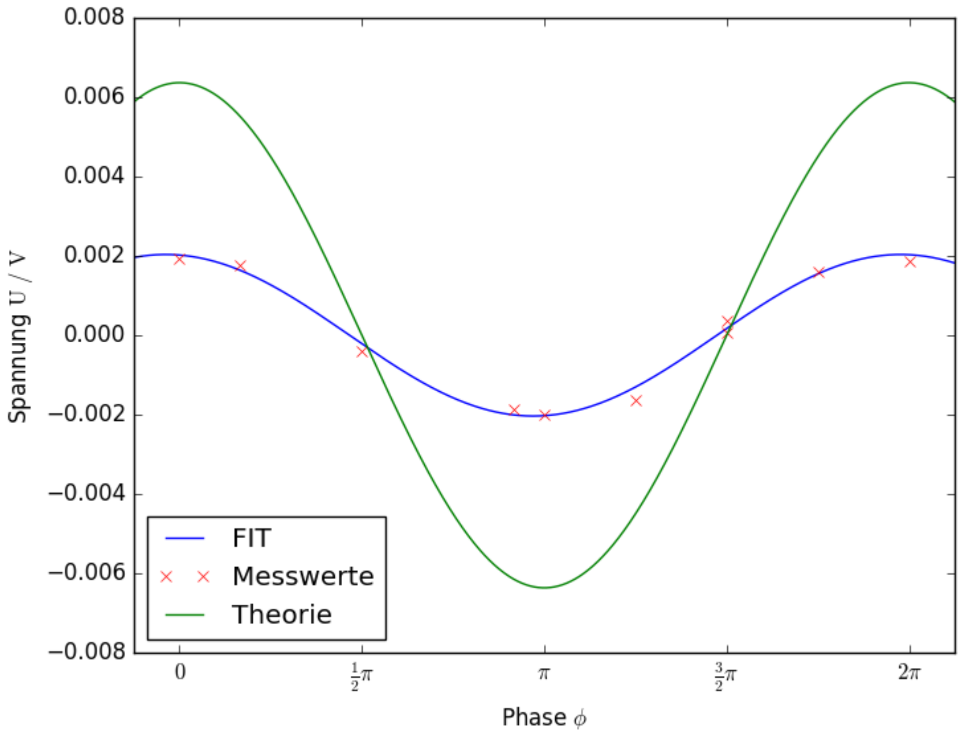


Abbildung 8: Messwerte, gefittete Kurve und theoretisch erwartete Kurve bei einer Spannung ohne Rauschen

Das Signal mit Rauschen

Dieser Fit wird nun auch mit den Werten des verrauschten Signals gemacht. Die Parameter hierbei sind

$$A_{\text{mit}} = (2.036 \pm 0.085)\,\text{mV} \tag{18}$$

$$w_{\text{mit}} = 0.993 \pm 0.029 \tag{19}$$

$$\phi_{0,\text{mit}} = (0.036 \pm 0.036)\,\pi \tag{20}$$

Auch dieser Fit wird zusammen mit der zu erwartenden Kurve und den Messwerten geplottet (Abbildung 9).

Phasenverschiebung in °	Integral in V	Off-Set in °
0	7.8	+0
15	7.1	-15
90	-1.6	+0
150	-7.5	-15
180	-8.0	+0
210	-6.5	-15
255	0.3	-15
270	1.5	+0
315	6.4	+0
345	7.5	-15

Tabelle 2: Integral (bzw. Gleichspannung) nach dem Tiefpass für verschiedene Phasenverschiebungen bei einem verrauschten Signal

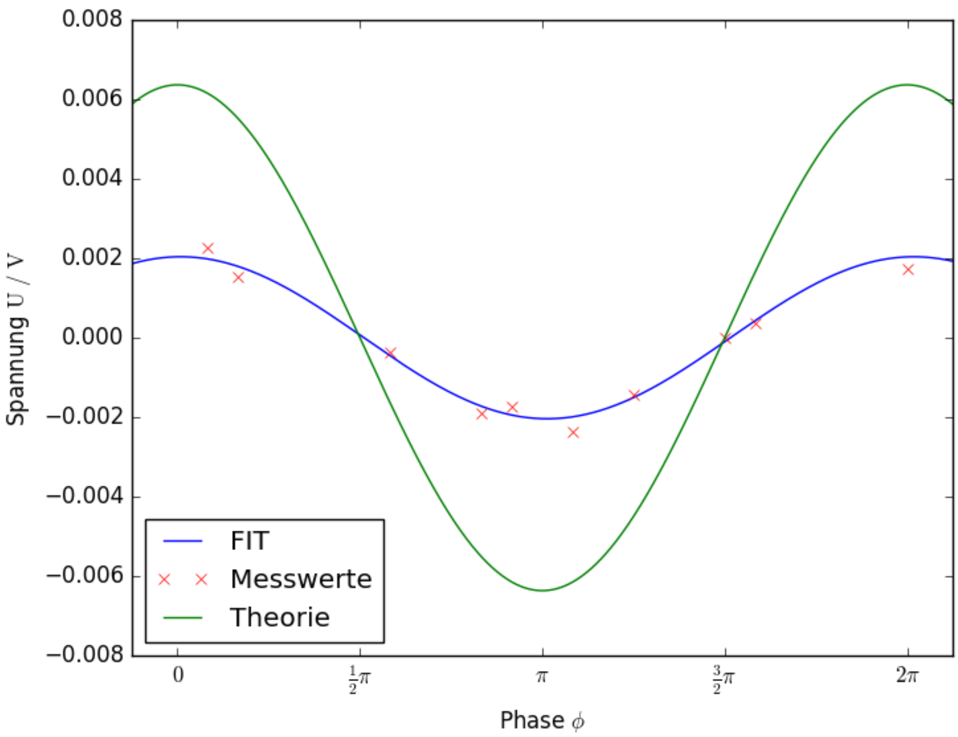


Abbildung 9: Messwerte, gefittete Kurve und theoretisch erwartete Kurve bei einer Spannung mit Rauschen

3.3 Die Rauschunterdrückung

Beim Versuchsaufbau mit der LED wird bei verschiedenen Abständen die Ausgangsspannung nach dem Tiefpass aufgenommen. Nach Abzug der Verstärkungs-Multiplikatoren (Gains) ergeben sich die Werte aus Tabelle 3. Durch eine Re-

Abstand r zur Lampe in m	Integral (bzw. Spannung) U in mV
0.17	17.25
0.27	3.500
0.37	1.250
0.47	0.600
0.57	0.350
0.67	0.250
0.77	0.180
0.87	0.130
0.97	0.103
1.07	0.080
1.17	0.063
1.27	0.055
1.37	0.047
1.47	0.042
1.57	0.038
1.67	0.032
1.77	0.028
1.87	0.025
1.97	0.022

Tabelle 3: Abstand zur LED und registrierte Spannung

gression der Form

$$\ln U = \alpha \ln r + \beta \tag{21}$$

lässt sich der lineare Zusammenhang zwischen $\ln r$ und $\ln U$ (siehe Abbildung 10) erkennen. Die mit Python errechneten Parameter sind

$$\alpha = (-2.598 \pm 0.065) \ln(\mathrm{V/m}) \tag{22}$$

$$\beta = (-9.155 \pm 0.045) \ln \mathrm{V} \ . \tag{23}$$

Durch Umstellen von Gleichung (21) ergibt sich die Funktion

$$U(r) = \exp(\beta) r^{\alpha} \ , \tag{24}$$

welche in Abbildung 11 zu sehen ist.

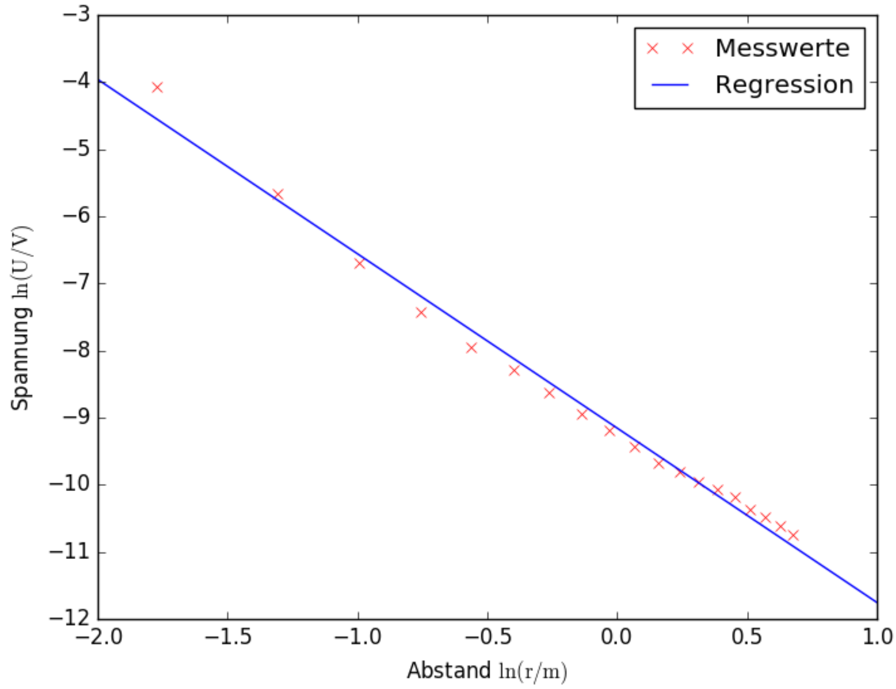


Abbildung 10: Regressionsgerade

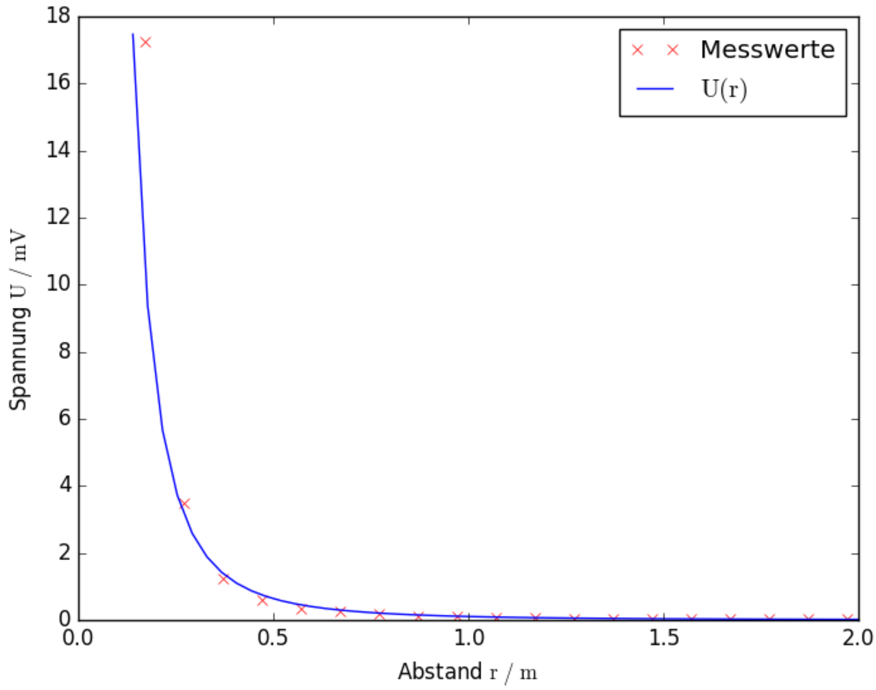


Abbildung 11: Zusammenhang zwischen U und r

4 Diskussion

$$U_{\text{out, theoretisch}} = \frac{2}{\pi} \cdot 10\,\mathrm{mV} \cdot \cos\phi$$

Rechnerisch kann man übrigens so zeigen, dass der Radius bei einem komplexen Kreisintegral keine Rolle spielt:
Sei die Parametrisiertung:

$$c(t) = z_0 + re^{it} \ .$$

Das Kreisintegral ist dann:

$$\int_{C_r} \frac{f(z)}{z - z_0} \ dt = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{z_0 + re^{it} - z_0} rie^{it} \ dt \tag{25}$$

$$= i \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) \ dt \tag{26}$$