

ANFÄNGERPRAKTIKUM 2015/2016

Biegung elastischer Stäbe

Durchführung: 03.11.15

Clara RITTMANN¹
Anja BECK²

Betreuer:
Max MUSTERMANN

¹clara.rittmann@tu-dortmund.de

²anja.beck@tu-dortmund.de

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	2
2	Aufbau und Ablauf des Experiments	3
3	Auswertung	4
3.1	Statistische Formeln	4
3.1.1	Fehlerrechnung	4
3.1.2	Regression	4
3.2	Bestimmung des Wärmestroms in Messing	6
3.3	Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit	7
3.4	Vergleich der Temperaturverläufe	9
4	Diskussion	10

1 Theorie¹

Wärmetransport ist eine Folge von Temperaturgefällen. Wärme strebt vom warmen Reservoir zum kalten. Das geschieht durch Konvektion, Wärmestrahlung oder Wärmeleitung. In diesem Versuch geht es um die Wärmeleitung in Metallen durch Phononen und frei bewegliche Elektronen – Beiträge durch die Konvektion und Wärmestrahlung werden vernachlässigt.

Für einen Stab der Querschnittsfläche A mit der Wärmeleitfähigkeit κ ist die Änderung der Wärme Q in einer Zeitspanne abhängig von der Temperaturänderung bezüglich des Abstandes der Orte, an denen die Temperatur gemessen wurde

$$dQ = -\kappa A \frac{\partial T}{\partial x} dt \quad . \quad (1)$$

Die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung beschreibt die räumliche und zeitliche Entwicklung der Temperatur

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{\rho \cdot c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad , \quad (2)$$

die von den Materialeigenschaften Wärmeleitfähigkeit κ , Dichte ρ und spezifische Wärme c abhängt. Der Faktor $\frac{\kappa}{\rho \cdot c}$ stellt dar, wie schnell die Temperaturausbreitung erfolgt und wird auch Temperaturleitfähigkeit genannt.

Die Lösung der eindimensionalen Wärmeleitungsgleichung ist abhängig von der Form des Stabes und den Anfangsbedingungen d.h. der Art der Wärmezufuhr. Wird der Stab an einem Ende periodisch erwärmt und abgekühlt, entsteht eine Temperaturwelle $T(x, t)$ entlang des Stabes

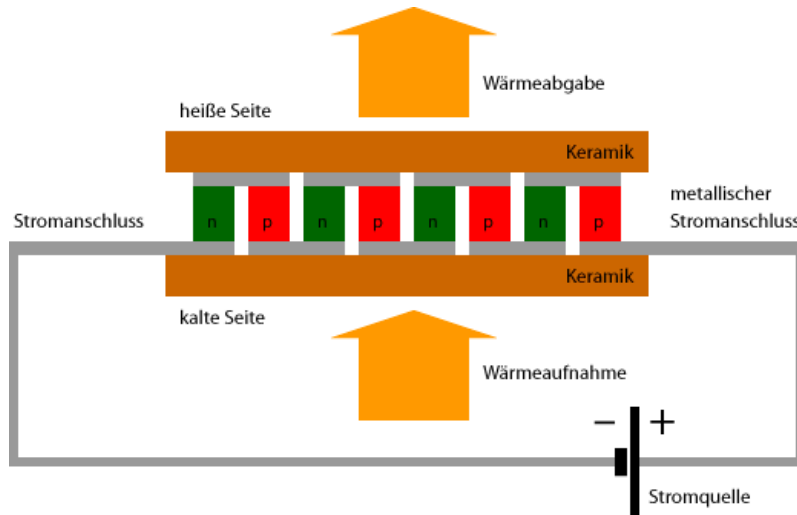
$$T(x, t) = T_{\max} \cdot \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega \rho c}{2\kappa}} x\right) \cdot \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega \rho c}{2\kappa}} x\right) \quad . \quad (3)$$

Die Wärmeleitfähigkeit kann aus dem Amplitudenverhältnis einer näher an der Wärmequelle gelegenen Messung A_{nah} und einer um Δx weiter entfernten Messung A_{fern} bestimmt werden

$$\kappa = \frac{\rho c (\Delta x)^2}{2 \Delta t \ln(A_{\text{nah}}/A_{\text{fern}})} \quad . \quad (4)$$

Die Zeitdifferenz der Amplituden ist Δt .

¹nach: Anleitung zu V204: Wärmeleitung, Anfängerpraktikum TU Dortmund WS 2015/16, <http://129.217.224.2/HOMEPAGE/PHYSIKER/BACHELOR/AP/SKRIPT/V204.pdf>

Abbildung 1: Peltier-Element²

Zum Erwärmen der Stäbe wurde ein **Peltier-Element** verwendet. Das Peltier-Element heizt nach dem Anlegen einer Spannung auf der einen Seite und kühlt auf der anderen, sodass es sowohl als Wärme- als auch als Kältequelle verwendet werden kann. In einem Peltier-Element sind abwechselnd n- und p-dotierte Halbleiter verbaut und an Lötstellen miteinander verbunden. Elektronen, die sich in den Halbleitern bewegen haben unterschiedliche Energieniveaus. Wenn das Elektron von dem n-dotierten auf den p-dotierten Halbleiter trifft, nimmt es ein höheres Energieniveau an und muss dazu Energie aus der Umgebung aufnehmen – die Lötstelle kühlt ab. Trifft das Elektron wieder auf den n-dotierten Halbleiter gibt es Energie ab und die Lötstelle wird heißer.

2 Aufbau und Ablauf des Experiments

In diesem Experiment wurde die Wärmeleitung von vier Metallstäben gemessen: Ein Stab war aus Aluminium, einer aus Edelstahl und zwei mit verschiedenen Querschnitten aus Kupfer. Die Stäbe wurden zeitgleich mit einem Peltier-Element erhitzt bzw. gekühlt. Die Temperatur der Stäbe wurde jeweils an zwei Stellen eines Stabes mit Thermoelementen gemessen und in einem Datenlogger gespeichert.

Als erstes wurden die Stäbe einfach nur erhitzt, um den Wärmestrom $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$ des Messingstabes zu bestimmen. Hierzu wurden die Temperaturkurven sowie die Temperaturdifferenzen der Thermoelemente mit Hilfe des Datenloggers erstellt und ausgedruckt.

In weiteren Messungen wurde periodisch geheizt und gekühlt. Für Messing und Aluminium wurde die Messung bei einer Periode von 80 s durchgeführt und für Edelstahl bei 200 s. Es wurde für jeden Stab eine Grafik mit den Temperaturkurven beider Thermoelemente erstellt.

²Quelle: <https://www.energie-lexikon.info/img/peltier-element.png>

3 Auswertung

3.1 Statistische Formeln

3.1.1 Fehlerrechnung

Im folgenden wurden Mittelwerte von N Messungen der Größe x berechnet

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (5)$$

sowie die Varianz

$$V(x) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \quad (6)$$

woraus die Standartabweichung folgt

$$\sigma_x = \sqrt{V(x)}. \quad (7)$$

Die Standartabweichung des Mittelwertes, kürzer auch Fehler des Mittelwertes genannt, bezieht noch die Anzahl der Messungen mit ein. Mehr Messungen führen zu einem kleineren Fehler

$$\Delta_x = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}. \quad (8)$$

3.1.2 Regression

Nachfolgend wird eine lineare Regression für Wertepaare (x_i, y_i) durchgeführt. Dafür müssen die Steigung

$$m = \frac{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \quad (9)$$

und der y-Achsenabschnitt

$$b = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i \cdot \sum_{i=1}^n x_i y_i}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \quad (10)$$

berechnet werden. Den jeweiligen Fehler erhält man mit

$$s_m^2 = s_y^2 \cdot \frac{n}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} \quad (11)$$

$$s_b^2 = s_y^2 \cdot \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2} . \quad (12)$$

s_y ist hierbei die Abweichung der Regressionsgeraden in y-Richtung.

$$s_y^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\Delta y_i)^2}{n - 2} = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - b - mx_i)^2}{n - 2} \quad (13)$$

3.2 Bestimmung des Wärmestroms in Messing

Diagramm 1 zeigt die Temperaturdifferenz zwischen den Temperaturen, die an den Thermoelementen T1 und T2 bei der statischen Messung gemessen wurden. Mit Hilfe eines Lineals wurde die Temperaturdifferenz im Diagramm (siehe Tabelle 1) gemessen. Eingesetzt in Gleichung (1) ist der gemittelte

Zeit in s	ΔT_{2-1} in °C
50	4.91
100	4.60
150	3.96
200	3.49
250	3.19
300	2.98

Tabelle 1: Temperaturdifferenz bei statischer Messung in Messing

Wärmestrom in Messing

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = (-1.89 \pm 0.27) \cdot 10^{-4} \frac{\text{J}}{\text{s}}, \quad (14)$$

mit dem Literaturwert der Wärmeleitfähigkeit (siehe Diskussion) und dem Querschnitt³

$$A = 48 \text{ mm}^2. \quad (15)$$

³aus der Versuchsanleitung zu V204: Wärmeleitung von Metallen, Anfängerpraktikum, TU Dortmund

3.3 Bestimmung der Wärmeleitfähigkeit

Nach den dynamischen Messungen wurden die Diagramme 2 (Temperaturen bei Messing), 3 (Temperaturen bei Aluminium) und 4 (Temperaturen bei Edelstahl) ausgedruckt. Mit einem Lineal wurden jeweils die Phasenverschiebung und die Amplituden im Diagramm gemessen. Die Amplitudenmessung erfolgte dabei wie folgt: Zunächst wurde ΔT an mehreren Stellen bei steigender Temperatur gemessen, also zwischen Tief- und Hochpunkt. Danach wurde ΔT beim jeweils nachfolgenden Temperaturabfall, also vom Hoch- zum Tiefpunkt, gemessen. Die jeweils zusammengehörenden Werte wurden addiert und durch vier geteilt.

Die benötigten Konstanten (Tabelle 3.3) stammen aus der Versuchsanleitung zu V204: Wärmeleitung von Metallen des Anfängerpraktikums der TU Dortmund.

Material	ρ in kg/m	c in J/(kg K)
Messing	8520	385
Aluminium	2800	830
Edelstahl	8000	400

Tabelle 2: Konstanten zur Berechnung der Wärmeleitfähigkeit

Mit den jeweiligen Werten aus den Tabellen, Formel (4) und einem Abstand der Thermoelemente $\Delta x = 3 \text{ cm}$ ergeben sich folgende Wärmeleitfähigkeiten:

$$\text{Messing:} \quad \kappa_M = (159.7 \pm 2.6) \frac{\text{W}}{\text{m K}} \quad (16)$$

$$\text{Aluminium:} \quad \kappa_A = (233.4 \pm 5.3) \frac{\text{W}}{\text{m K}} \quad (17)$$

$$\text{Edelstahl:} \quad \kappa_E = (17.7 \pm 0.2) \frac{\text{W}}{\text{m K}} \quad (18)$$

A_{nah} in °C	A_{fern} in °C	Δt in s
3.26	0.98	8.33
3.41	1.10	6.25
3.49	1.14	6.25
3.56	1.02	8.33
3.45	1.06	8.33
3.07	0.95	8.33
3.56	1.10	8.33
3.41	0.98	8.33
3.40 ± 0.02	1.04 ± 0.01	7.81 ± 0.11

Tabelle 3: Amplituden und Phasendifferenz bei der dynamischen Messung bei Messing inklusive Mittelwerte

A_{nah} in °C	A_{fern} in °C	Δt in s
2.93	1.59	6.25
3.17	1.71	6.25
3.23	1.83	6.25
3.17	1.71	6.25
3.26	1.72	8.33
2.99	1.59	8.33
3.38	1.86	8.33
3.23	1.71	8.33
3.17 ± 0.02	1.72 ± 0.01	7.29 ± 0.13

Tabelle 4: Amplituden und Phasendifferenz bei der dynamischen Messung bei Aluminium inklusive Mittelwerte

A_{nah} in °C	A_{fern} in °C	Δt in s
2.52	0.52	41.10
2.59	0.50	34.25
2.57	0.45	41.10
2.90	0.45	41.10
2.67	0.42	41.10
2.71	0.42	47.95
2.67	0.40	47.95
2.62	0.33	41.10
2.59	0.38	54.79
2.67	0.38	47.95
2.74	0.40	47.95
2.66 ± 0.01	0.42 ± 0.01	44.2 ± 0.5

Tabelle 5: Amplituden und Phasendifferenz bei der dynamischen Messung bei Edelstahl inklusive Mittelwerte

3.4 Vergleich der Temperaturverläufe

Diagramm VERWEIS und Diagramm VERWEIS zeigen die Temperaturverläufe der entfernteren Thermoelemente bei der statischen Messung. Wie erwartet nähern sich die Kurven mit kleiner werdender positiver Steigung einem Grenzwert. Die Verläufe von Messing und Aluminium sind vergleichbar, die Temperatur in Edelstahl steigt sehr viel langsamer an. Der Vergleich der beiden Messingstäbe zeigt, dass ein breiterer Stab mehr Wärme leitet.

In den Diagrammen VERWEIS und VERWEIS sind die Temperaturdifferenzen $T_{\text{fern}} - T_{\text{nah}}$ des breiten Messingstab und Edelstahl bei statischer Messung zu sehen. Bei beiden zeigt sich, dass die Temperaturen sich nach einiger Zeit annähern. Erwartungsgemäß geschieht dies bei Messing sehr viel schneller, da laut der Berechnung, Messing eine erheblich höhere Wärmeleitfähigkeit besitzt.

4 Diskussion

In diesem Experiment gab es zwei Hauptfehlerquellen. Direkt zu Beginn fiel auf, dass das Peltier-Element nicht zuverlässig heizte. Als es auf „Kühlen“ eingestellt war, heizte und kühlte es abwechselnd. Während der Messungen beobachteten wir stets eine Temperaturveränderung in die erwartete Richtung. Es ist jedoch fraglich, ob eine konstante Wärme- /Kältezufuhr gewährleistet war. Dieser Fehler fließt sowohl in die statische und wie auch in die dynamische Messmethode mit ein.

Der zweite gravierende Fehler betrifft nur die dynamische Messmethode. Die periodische Wärmezufuhr wurde per Hand generiert. Wenn einmal zu früh oder spät die Kühlung bzw. Heizung angestellt wurde, veränderte sich direkt die Periode und somit auch der Phasenunterschied der beiden gemessenen Amplituden. Besonders bei der Edelmessung mit großen Amplituden variiert Δt stark (siehe Tabelle 5).

Trotz dieser Fehler sind zufriedenstellende Ergebnisse erzielt worden. Für den Wärmestrom konnte leider kein Vergleichswert gefunden werden, da dieser neben dem Material auch von der Form des Stabes abhängt.

In Tabelle 6 wurden Literaturwerte und gemessene Werte der dynamischen Methode gegenübergestellt. Komisch ist, dass Aluminium und Messing in unterschiedliche Richtungen abweichen, obwohl beide Messreihen zeitgleich unter identischen Bedingungen abliefen.

Material	$\kappa_{\text{Literatur}}$ (bei Raumtemperatur)	κ_{gemessen}	Abweichung
Aluminium	237	233.4	-1.5%
Messing	120	159.7	+33.1%
Edelstahl	15	17.7	+18.0%

Tabelle 6: Vergleich zwischen Literatur-⁴ und gemessenem Wert der Wärmeleitfähigkeit

⁴<http://www.chemie.de/lexikon/Wärmeleitfähigkeit.html>