

Versuch Nr.104

Der Doppler-Effekt¹

1. Beschreibung des Effekts und Ableitung der maßgebenden Gleichungen

Der Doppler-Effekt kann bei der Ausbreitung beliebiger Wellen beobachtet werden. Er tritt immer dann auf, sobald sich Sender und Empfänger relativ zueinander bewegen. Er äußert sich in einer Frequenzänderung am Orte des Empfängers gegenüber der Frequenz der vom Sender abgestrahlten Welle. Es besteht ein Zusammenhang zwischen der Relativgeschwindigkeit v von Sender und Empfänger und der Frequenzänderung $\Delta\nu$, welcher im Folgenden abgeleitet werden soll.

Wenn die Wellenausbreitung an ein Medium gebunden ist (wie zum Beispiel im Bereich der Akustik), dann muss man unterscheiden zwischen einer Bewegung des Senders oder des Empfängers relativ zum Medium. Es soll zunächst der zweite Fall betrachtet werden. Eine **ruhende Quelle** sende eine Welle mit der Frequenz ν_0 aus. Der ruhende Empfänger nimmt dann ebenfalls eine Welle mit der Frequenz ν_0 wahr. Bewegt er sich aber mit der Geschwindigkeit v in Richtung auf den Sender, dann legt er in der Zeit Δt den Weg $\Delta t \cdot v$ zurück und überstreicht dabei

$$\Delta z = \frac{\Delta t v}{\lambda_0}$$

Wellenzüge (λ_0 = Wellenlänge). In der Zeit Δt nimmt er also Δz Schwingungen mehr wahr als ein ruhender Empfänger, an dem während dieses Zeitraumes genau

$$\Delta n = \Delta t \nu_0$$

Schwingungen vorbeilaufen. Der bewegte Beobachter registriert also während der Zeit Δt insgesamt

$$\Delta n + \Delta z = \Delta t \left(\nu_0 + \frac{v}{\lambda_0} \right)$$

Schwingungen. Da die Frequenz eines Wellenvorganges allgemein als Zahl der Schwingungen pro Zeiteinheit definiert ist, beträgt die Frequenz am Orte des bewegten Empfängers

$$\nu_E = \nu_0 + \frac{v}{\lambda_0}$$

oder, wenn man die Ausbreitungsgeschwindigkeit

$$(1) \quad c = \nu_0 \lambda_0$$

der Welle einführt

¹ benannt nach dem österreichischen Mathematiker und Physiker Christian Doppler (1803 - 1853)

$$(2) \quad v_E = v_0 \left(1 + \frac{v}{c} \right) .$$

Die gesuchte Frequenzänderung beträgt also

$$(3) \quad \Delta v = v_0 \frac{v}{c} .$$

Bewegt sich der Empfänger von der Quelle fort, ist also $v < 0$, dann wird gemäß (3) Δv ebenfalls kleiner als null. Damit sinkt die Frequenz v_E am Orte des bewegten Empfängers um den Betrag (3) unter den Ruhewert v_0 ab.

Im anderen Falle, wenn sich die **Quelle** mit der Geschwindigkeit v relativ zum Ausbreitungsmedium **bewegt** und der Empfänger ruht, legt sie während einer Schwingungsperiode $1/v_0$ den Weg

$$s = v/v_0$$

zurück. Nach der Definition der Wellenlänge - als Abstand zweier Punkte mit gleicher Phase - erscheint dem Beobachter die Wellenlänge um das Stück

$$(4) \quad \Delta \lambda = \frac{v}{v_0}$$

verkürzt. Er nimmt also einen Wellenvorgang mit der geänderten Frequenz

$$v_Q = \frac{c}{\lambda_0 - \Delta \lambda} = \frac{c}{\lambda_0 - v/v_0}$$

wahr. Unter Benutzung von (1) ergibt sich schließlich

$$(5) \quad v_Q = \frac{\frac{c}{\frac{c}{v_0} - \frac{v}{v_0}}}{\frac{c}{v_0} - \frac{v}{v_0}} = v_0 \frac{1}{1 - v/c} .$$

Entwickelt man (5) in eine Reihe nach Potenzen von v/c :

$$v_Q = v_0 \left(1 + \frac{v}{c} + \left(\frac{v}{c} \right)^2 + \left(\frac{v}{c} \right)^3 + \dots \right) = v_E + v_0 \left(\left(\frac{v}{c} \right)^2 + \dots \right),$$

dann erkennt man, dass je nach den Bewegungsverhältnissen unterschiedliche Frequenzen am Ort des Empfängers auftreten, und zwar gilt für $v > 0$ immer

$$v_Q > v_E > v_0 .$$

Für $|v| \ll c$ wird der Unterschied zwischen (2) und (5) jedoch beliebig klein.

2. Der Doppler-Effekt bei elektromagnetischen Wellen

Bekannt ist der Doppler-Effekt auch im Bereich der Optik. Insbesondere wurde aus der Wellenlängenverschiebung der von Fixsternen und Galaxien emittierten Spektrallinien auf die Relativbewegung von Erde und Lichtquelle geschlossen. Eine weitere Rolle spielt der Doppler-Effekt bei der Lichtemission von angeregten Gasatomen. Da diese

infolge ihrer endlichen Temperatur eine ungeordnete Bewegung mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten ausführen, besitzen die von ihnen emittierten Spektrallinien eine Wellenlängenverteilung. Man spricht in diesem Zusammenhang von der Doppler-Verbreiterung der Spektrallinien – ein Effekt der die Untersuchung feinerer Spektrallinien oft sehr erschwert. Da in der Optik auch Relativgeschwindigkeiten möglich sind, die in die Größenordnung der Lichtgeschwindigkeit c_0 kommen, muss hier die Frequenzverschiebung auf der Grundlage der speziellen Relativitätstheorie abgeleitet werden. Das Ergebnis soll hier nur angegeben werden², es lautet

$$(6) \quad \nu' = \nu_0 \frac{\sqrt{1 - v^2/c_0^2}}{1 - v/c_0},$$

für den Fall, dass sich Quelle und Empfänger einander nähern ($v > 0$) und in Richtung der Lichtquelle beobachtet wird (sogenannter longitudinaler Doppler-Effekt). Eine Unterscheidung zwischen bewegter Quelle und bewegtem Empfänger existiert nicht mehr. Man zeigt leicht durch eine Taylor-Entwicklung von (6), dass sich die relativistische Gleichung von der nicht-relativistischen (5) um das Glied

$$+ \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}$$

unterscheidet. Der relativistische wird daher auch häufig als quadratischer Doppler-Effekt bezeichnet

3. Beschreibung einer Apparatur zur Untersuchung des Doppler-Effektes im Bereich der Akustik

Im Experiment soll insbesondere die Gleichung (5) überprüft werden. Dazu sind Messungen der Relativgeschwindigkeit v zwischen Sender und Empfänger, der Schallgeschwindigkeit c sowie der Frequenzen ν_0 und ν_Q bei $v = 0$ bzw. $v \neq 0$ erforderlich.

a) Messung der Relativgeschwindigkeit zwischen Sender und Empfänger

Die Schallquelle (Lautsprecher) ist auf einem kleinen Wagen montiert, der über einen Seilzug von einem Synchronmotor angetrieben wird. Mittels einer Zehngangschaltung lassen sich verschiedene Geschwindigkeiten einstellen. Die Wagengeschwindigkeit kann aus einer Weg- und einer Laufzeitmessung bestimmt werden. Zur Ermittlung der Laufzeit montiert man zwei Lichtschranken am Anfang und am Ende der Wegstrecke s. Sie bestehen jeweils aus einem Phototransistor und einer Infrarot-Lichtquelle, die diesen ständig beleuchtet. Wird der Lichtstrahl durch den Wagen unterbrochen, dann sinkt der Kollektorstrom im Transistor schlagartig ab. Mit diesem (negativen) Stromimpuls kann man eine Torstufe schalten, die zwischen einem Zeitbasisgenerator und einem elektronischen Zählwerk liegt.

² Die Ableitung findet man z.B. in Bergmann Schäfer, Lehrbuch der Experimentalphysik, Bd. III, W. de Gruyther

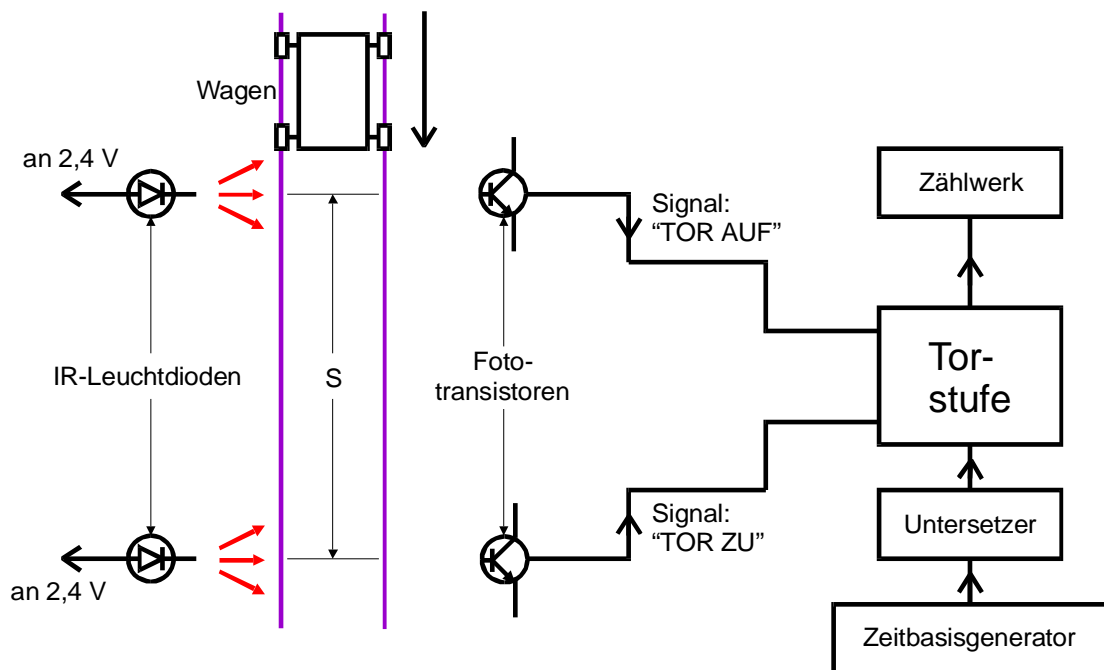


Abb.1: Versuchsaufbau zur Messung der Wagensgeschwindigkeit

Der quarzgesteuerte Zeitbasisgenerator liefert mit hoher Präzision (10^{-5}) elektrische Impulse im Abstand von $1 \mu\text{sec}$. Er hat somit die Funktion einer Uhr. Die Versuchsanordnung muss nun so aufgebaut werden, dass der Stromimpuls, der beim Einfahren des Wagens in die Messstrecke entsteht, die Torstufe öffnet. Der zweite Impuls, der beim Durchlaufen der Lichtschranken am Ende der Messstrecke erzeugt wird, muss die Torstufe wieder schließen, sodass nur während der Laufzeit des Wagens durch die Messstrecke s Zeitmarkenimpulse in das Zählwerk gelangen können. Die Distanz zwischen beiden Lichtschranken wird mit einem Maßband gemessen. Ein Schema des Versuchsaufbaus ist in Abb.1 wiedergegeben.

b) Messung der Schallgeschwindigkeit c über die Wellenlänge λ

Ein Lautsprecher, der auf einem Präzisionsschlitten montiert ist (siehe Abb.2), wird von einem frequenzstabilen Generator angesteuert. Der erzeugte Schall fällt auf ein gegenüberstehendes Mikrophon. Die von ihm erzeugte Signalspannung wird verstärkt und auf die Y-Ablenkung eines Oszilloskopes gegeben. Zur Bestimmung von λ verschiebt man nun den Lautsprecher solange, bis jedesmal die vom Mikrophon erzeugte Spannung in Phase mit der Generatorspannung ist, was sich gut mit Hilfe von Lissajous-Figuren (siehe V351) feststellen lässt. Diese kann man erzeugen, wenn man zusätzlich, wie in Abb.2 angedeutet, die Generatorspannung an die X-Ablenkung des Oszilloskopes legt. Auf einer am Schlitten angebrachten Skala kann man mit einer Auflösung von $10 \mu\text{m}$ den Verschiebeweg ablesen. Er entspricht genau der Wellenlänge. Aus der Ruhfrequenz ν_0 und λ lässt sich dann c errechnen.

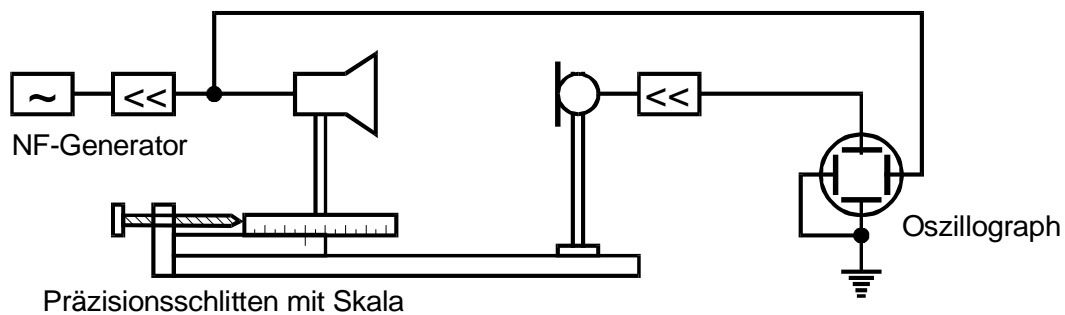


Abb.2: Versuchsanordnung zur Messung der Schallgeschwindigkeit

c) Frequenzmessung

Da die durch den Doppler-Effekt hervorgerufenen Frequenzänderungen bei den erreichbaren Translationsgeschwindigkeiten nur gering sind, muss die Frequenz mit hoher Präzision gemessen werden. Es kann daher in diesem Falle nur ein digitales Messgerät in Frage kommen. Seine Messgenauigkeit ist festgelegt durch die Konstanz des Zeitbasisgenerators aus 3a, die besser als 10^{-5} ist. Der prinzipielle Versuchsaufbau zur Frequenzmessung ist in Abb.3 skizziert:

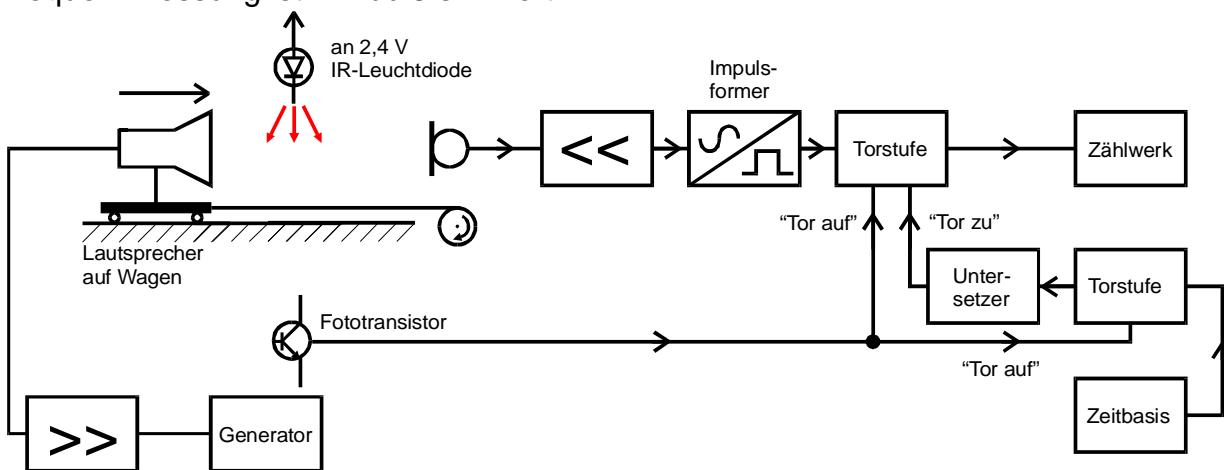


Abb.3: Prinzipieller Versuchsaufbau zur Messung der Frequenz

Das Mikrophon wandelt die empfangenen Schallschwingungen in elektrische Schwingungen um. Diese werden verstärkt, in Rechteckimpulse umgewandelt und dann über eine Torstufe auf ein elektronisches Zählwerk gegeben. Dieses rückt jeweils um eine Ziffer weiter, wenn vom Mikrophon eine Schwingung registriert wird. Da die Frequenz als Zahl der Schwingungen pro Zeiteinheit definiert ist, müssen die Schwingungen in einer genau vorgegebenen Zeit gezählt werden. Die Vorgabe der Messzeit geschieht auf folgende Weise: Der Wagen durchläuft eine Lichtschranke. Der dabei entstehende Stromimpuls öffnet zwei Torstufen und legt damit den Anfang des Messintervalls fest. Die vom Mikrophon kommenden Schwingungen gelangen nun in das Zählwerk; außerdem gehen jetzt die vom Zeitbasisgenerator erzeugten Zeitmarkenimpulse in einen Unter-setzer. Dieses Gerät kann als Rückwärtszähler betrachtet werden. Es zählt eine vorgewählte Zahl von Impulsen und gibt am Schluss der Zählung einen Impuls ab, der das Tor zwischen Mikrophon und Zählwerk wieder schließt. Die Länge der Messzeit ist

somit gleich dem Produkt aus dem Pulsabstand der Zeitbasisimpulse (1 μsec) und der am Untersetzer vorgewählten Zahl.

Die Frequenzänderung

$$\Delta v = v_Q - v_0 \quad ,$$

die infolge des Doppler-Effekts auftritt, kann auch mittels einer **Schwebungsmethode** gemessen werden. Bei diesem Messverfahren gelangen Schwingungen sowohl einer ruhenden als auch einer bewegten Schallquelle zusammen in das Mikrophon. Dieses registriert also ein Schallfeld der Gestalt

$$A(t) = A_{ru} \cos 2\pi v_0 t + A_{be} \cos(2\pi \{v_0 + \Delta v\} t) \quad .$$

In grober Näherung kann man annehmen, dass die beiden Schallamplituden A_{ru} und A_{be} gleich sind. In diesem Falle lässt sich die Gleichung umformen in

$$(7) \quad A(t) = 2 A_0 \cos 2\pi \frac{(2 v_0 + \Delta v) t}{2} \cos 2\pi \frac{\Delta v t}{2} \quad .$$

Gleichung (7) beschreibt einen Schwingungsvorgang, der mit der Frequenz

$$\frac{1}{2}(2 v_0 + \Delta v) \approx v_0 \quad (\text{da } \Delta v \ll v_0)$$

abläuft. Doch die Amplitude dieser Schwingungen ändert sich periodisch mit der Frequenz $\Delta v \ll v_0$ zwischen den Extremwerten 0 und $2A_0$. Einen solchen Schwingungsvorgang bezeichnet man als **Schwebung**.

Zur Messung der Doppler-Frequenzverschiebung nach dieser Methode kann man den in Abb.4 skizzierten Versuchsaufbau benutzen: Ein ruhender Lautsprecher emittiert eine sinusförmige Schallschwingung mit der Frequenz v_0 . Die Schallwelle trifft auf einen Reflektor, der sich mit der Geschwindigkeit v in Ausbreitungsrichtung der Welle bewegt.

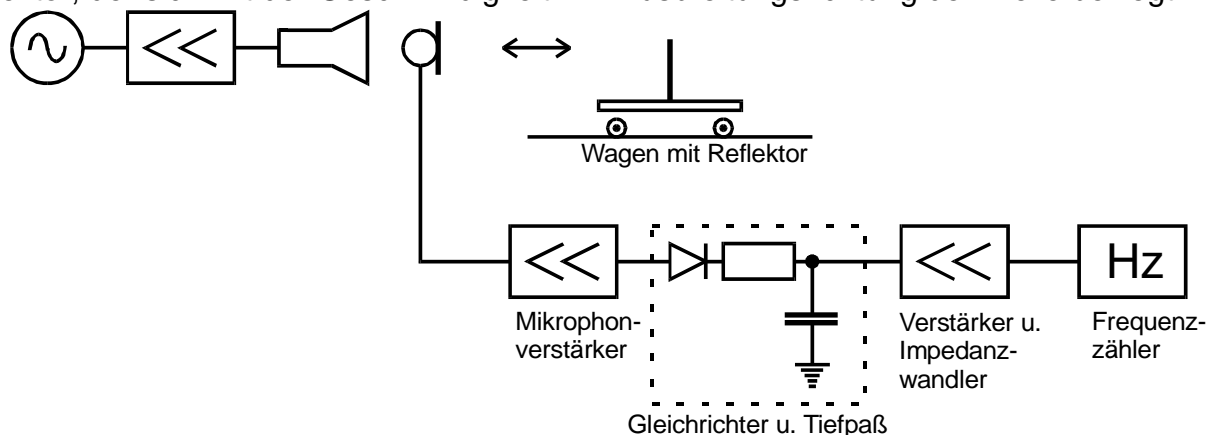


Abb. 4: Versuchsanordnung zur Messung der Doppler-Verschiebung mittels einer Schwebungsmethode

Der Reflektor stellt somit die bewegte Schallquelle dar, die sich in bezug auf den ruhenden Empfänger mit der Geschwindigkeit $2v$ bewegt. Die reflektierte Welle trifft auf das Mikrophon, welches in der Nähe des Lautsprechers angebracht ist, sodass es gleichzeitig die Schallschwingungen der ruhenden Quelle aufnimmt. Die so entstehende Schwebung kann auf einem an das Mikrophon angeschlossenen Oszillographen beobachtet werden. Zur Messung von Δv verstärkt man die vom Mikrophon abgegebene Spannung in ausreichendem Maße, richtet sie mittels einer Diode gleich und schickt sie

durch einen Tiefpass. Dieses aus einer RC-Kombination aufgebaute Schaltglied gibt eine Ausgangsspannung ab, deren Frequenzabhängigkeit durch

$$U_a = U_0 \frac{1}{\sqrt{1 + 4 \pi^2 v^2 R^2 C^2}}$$

gegeben ist (Näheres siehe V353). Man wählt nun RC so, dass

$$2 \pi v_0 R C \gg 1$$

und

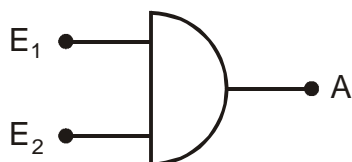
$$2 \pi \Delta v R C \ll 1$$

ist. Unter diesen Bedingungen erhält man am Ausgang des Tiefpasses eine Wechselspannung mit der Frequenz Δv , welche nach abermaliger Verstärkung in bekannter Weise mit dem Frequenzzähler gemessen werden kann.

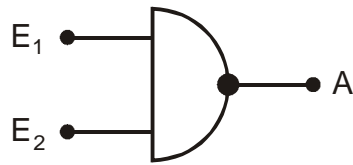
4. Praktische Hinweise

Der elektronische Teil unter 3a und 3c beschriebenen Versuchsaapparaturen soll mit digitalen Bausteinen aufgebaut werden. Zum Entwurf einer geeigneten Schaltung braucht ihr innerer Aufbau nicht bekannt zu sein; es genügt, ihre logischen Funktionen zu kennen. Folgende Bausteine können benutzt werden: Und-Gatter, Nicht-Und-Gatter, Flip-Flops mit Stell-, Rückstell- und Takteingang (und eventuell monostabile Kippstufen). Allen Bausteinen ist gemeinsam, dass an ihren Ausgängen nur zwei Potentiale auftreten können, die üblicherweise mit "L" und "H" bezeichnet werden. L kann man etwa mit "keine Spannung" und H mit "volle Spannung" interpretieren. Zur Beschreibung der Funktion der einzelnen Bausteine stellt man zweckmäßigerweise Funktionstabellen auf, aus denen der Zusammenhang zwischen Eingangs- und Ausgangssignal hervorgeht:

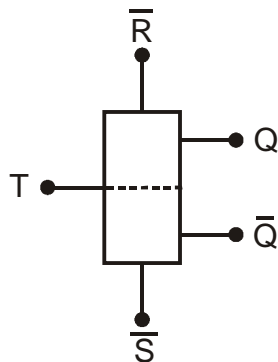
a) Und-Gatter (AND)



E ₁	E ₂	A
L	L	L
H	L	L
L	H	L
H	H	H

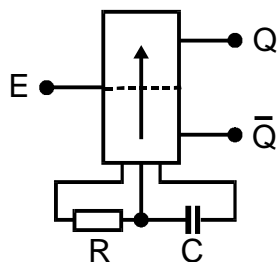
b) Nicht-Und-Gatter (NAND)

E_1	E_2	A
L	L	H
H	L	H
L	H	H
H	H	L

c) bistabile Kippstufe (Flip - Flop)

\bar{R}	\bar{S}		Q	\bar{Q}
L	H		L	H
H	L		H	L
H	H		Keine Änderung des Potentials	
L	L		undefiniert	

Dieser Baustein wird überall dort eingesetzt, wo durch einen kurzen Impuls eine dauernde Änderung des Ausgangszustandes hervorgerufen werden soll (Speicherfunktion). So setzt ein L-Impuls am Eingang \bar{R} den Ausgang Q auf das Potential L, wobei der Eingang \bar{S} auf H liegen muss. Q verharrt in diesem Zustand, auch wenn der L-Impuls bei \bar{R} wieder verschwunden ist. Dagegen kippt ein L-Impuls am Eingang \bar{S} den Ausgang Q in den Zustand H. Dabei muss \bar{R} auf H liegen. Ein Impuls am Takteingang T ändert in jedem Falle der Zustand von Q und zwar in dem Augenblick, wo das Potential an T von H auf L kippt. Der Ausgang \bar{Q} verhält sich invers zu Q

d) monostabile Kippstufe (Univibrator)

	während t:			nach t:	
E	Q	\bar{Q}		Q	\bar{Q}
L	L	H		L	H
H	H	L		L	H

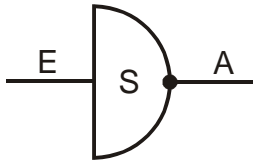
Liegt am Eingang E des Univibrators L-Potential, dann hat der Ausgang Q den Zustand L. Geht nun das Eingangspotential für eine beliebige Zeit auf den Wert H, dann

springt Q für den Zeitraum

$$t = \ln 2 RC$$

in den Zustand H, um nach Ablauf dieses Zeitintervalls wieder auf L zurückzugehen. Man kann also mit einem Univibrator Impulse von einstellbarer Länge erzeugen. Die Reproduzierbarkeit von t beträgt jedoch nur einige Prozent.

e) Schmitt-Trigger (Schwellwertschalter)



Der Ausgang des Schmitt-Triggers geht auf H-Potential, wenn die Eingangsspannung den Schwellwert von +1,6 V überschreitet. Beim invertierenden S.T. (siehe Abb.) springt er unter denselben Bedingungen auf L-Potential. Unter-

schreitet die Spannung an E den Wert 0,8 Volt, dann gehen die Ausgänge der Schmitt-Trigger auf ihre Ruhepotentiale zurück.

f) Untersetzer und Zählwerk

Der für die Messungen benötigte dekadische Untersetzer und auch das Zählwerk rücken jeweils um eine Ziffer vor, wenn das Potential an ihren Eingängen von H auf L fällt. Dabei muss der **Rückstelleingang** in jedem Fall **auf L-Potential** liegen. Zur Rückstellung genügt ein H-Impuls. Das Potential am Ausgang des Untersetzers hat im Ausgangszustand den Wert L. Es geht beim $8 \cdot 10^{n-1}$ -ten Impuls auf H über und springt beim Eintreffen des letzten (das heißt, des 10^n -ten) Impulses auf L zurück. Dieses Signal kann man zum Auslösen weiterer Schaltfunktionen benutzen.

Die hier verwendeten digitalen Bausteine können nur sogenannte TTL-Signale³ verarbeiten, die von den Signalquellen (Mikrofon und Phototransistor) primär nicht geliefert werden. Die von ihnen abgegebenen Spannungen müssen erst durch Impulsformerstufen oder Schmitt-Trigger in TTL-Signale umgewandelt werden, bevor sie in die digitale Schaltung eingespeist werden können.

Hinweis! Beim Verdrahten der digitalen Schaltung dürfen niemals die roten Buchsen auf der Frontplatte der Apparatur miteinander verbunden werden.

Eine eingebaute Leuchtdiode kann zur Kontrolle des Potentials an einem Ausgang herangezogen werden. Sie leuchtet auf, wenn sie an H-Potential liegt.

Man entwerfe digitale Schaltungen zur v- und v-Messung, erprobe sie im Experiment und beschreibe ihre Funktionsweise.

5. Messprogramm

Man messe

- die Geschwindigkeit v eines von einem Synchronmotor angetriebenen Wagens bei verschiedenen Getriebestellungen,

³ TTL-Pegel: H-Potential: 5-2,4 V; L-Potential: 0 - 0,4 V

- b) die Frequenz ν_0 einer von einem ruhenden Lautsprecher emittierten Schallwelle mit Hilfe einer digitalen Schaltung,
- c) die Schallgeschwindigkeit c in Luft bei Zimmertemperatur,
- d) die Frequenz ν_Q , die durch die Bewegung der Schallquelle hervorgerufen wird, in Abhängigkeit von der Relativgeschwindigkeit v zwischen Sender und Empfänger sowohl für positive als auch für negative v ,
- e) Die Frequenzänderung $\Delta\nu$ die durch die Bewegung der Schallquelle (Reflektor auf Wagen) hervorgerufen wird, in Abhängigkeit von der Relativgeschwindigkeit mittels der Schwebungsmethode.

6. Auswertung der Ergebnisse

- a) Auf der Grundlage der Apparaturdaten (ν_0 und ν_{\max}) entscheide man, ob mit der vorliegenden Apparatur die Differenz zwischen ν_Q und ν_E gemessen werden kann und ob deshalb hier ein Unterschied zwischen den Gleichungen (2) und (5) gemacht werden muss.
- b) Man berechne die Größe ν_0/c bzw. $1/\lambda$ aus Wellenlängenmessungen.
- c) Man trage in 2 Diagrammen die aus den Messungen 5c, 5d und 5e gewonnenen Frequenzänderungen $\Delta\nu$ gegen v auf.
- d) Man bestimme mittels linearer Ausgleichsrechnung den Proportionalitätsfaktor zwischen $\Delta\nu$ und v .
- e) Mit Hilfe eines Studentischen t-Testes^{*)} beurteile man, in wie weit die Ergebnisse 6b und 6d übereinstimmen.

^{*)} Informationen hierzu findet man z.B. in Kap. 10a der „Fehlerrechnung“.