Biegung elastischer Stäbe

Clara Rittmann
Anja Beck

Durchführung: 03.11.15

Inhaltsverzeichnis

1 Theorie

Eine Reckstange verbiegt sich, wenn ein Turner daran hängt. Wird an den Enden eines länglichen Stücks Gummi gezogen, wird dieses länger und dünner. Derartige Verformungen werden durch Kräfte verursacht, die an der Körperoberfläche angreifen. Die Spannung

$$\sigma = \frac{dF}{dA} \text{ [1]} \tag{1}$$

beschreibt hierbei die angreifende Kraft pro Fläche. Für hinreichend kleine relative Änderungen einer Größe $\frac{\Delta x}{x}$ kann die Spannung auch mit dem Hookeschen Gesetz

$$\sigma = E\frac{\Delta x}{x} \tag{2}$$

beschrieben werden. Der Elastizitätsmodul E ist dabei eine Materialkonstante. Soll allerdings der Elastizitätsmodul einer Metallstange, wie der des Turners, bestimmt werden, kann die Änderung der Länge oder des Durchmessers nur sehr mühsam bestimmt werden. In diesem Fall bietet sich die Verwendung des Zusammenhangs

$$D(x) = \frac{F}{48 \cdot EI}\left(3L^2x - 4x^3\right) \tag{3}$$

an. F ist die wirkende Kraft, also die Gewichtskraft des Turners. Sie übt einen Drehmoment auf die Stange aus. Das Flächenträgheitsmoment

$$I = \int_Q y^2 \; dq \quad , \tag{4}$$

mit der Querschnittsfläche Q und dem dazugehörigen Flächenelement dq, verursacht im Inneren des Körpers ein entgegengesetzt gerichtetes, gleich großes Drehmoment, sodass sich ein Gleichgewicht einstellt. Bei diesem Gleichgewicht kann dann an einer beliebigen Stelle mit Abstand x zur nähergelegenen Aufhängung, die Auslenkung D vom entspannten Zustand gemessen werden. L ist der Abstand zwischen den beiden Aufhängungen.
Bei Betrachtung eines Systems, das nur an einer Seite befestigt ist, wie einen Ast, an dem eine Schaukel hängt, verändert sich Gleichung 3 zu

$$D(x) = \frac{F}{2 \cdot EI}\left(Lx^2 - \frac{x^3}{3}\right) \quad . \tag{5}$$

L ist jetzt der Abstand von der Einspannung bis zum Ende des Stabes und x der Abstand zwischen Einspannung und Messpunkt.

[1] D. Meschede: „Gerthsen Physik“, Kapitel 3.1.4

2 Aufbau und Ablauf des Experiments

Wie Abbildung 2 zeigt, bestand der Versuchsaufbau im Wesentlichen aus einem Gestell, in das Metallstäbe verschiedener Querschnittsflächen sowohl einseitig, als auch zweiseitig eingespannt werden konnten.
Zunächst wurden die verwendeten Stäbe, ein runder und ein eckiger, in Länge und Durchmesser vermessen und gewogen.
Danach wurden die Stäbe einzeln und einseitige in die Vorrichtung eingespannt und bei verschiedenen Abständen x zur Einspannung wurde die Auslenkung $D(x)$ je einmal mit einem Gewicht am Ende der Stange und einmal ohne gemessen.
Zuletzt wurde der eckige Stab beidseitig eingespannt und ein Gewicht in der Mitte eingehängt. Hier wurde die Auslenkung D bei verschiedenen Abständen zum Gewicht je links und rechts davon gemessen.

3 Auswertung

3.1 Statistische Formeln

3.1.1 Fehlerrechnung

Im folgenden wurden Mittelwerte von N Messungen der Größe x berechnet

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} x_i \tag{6}$$

sowie die Varianz

$$V(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} (x_i - \bar{x})^2 \tag{7}$$

woraus die Standartabweichung folgt

$$\sigma_x = \sqrt{V(x)}. \tag{8}$$

Die Standartabweichung des Mittelwertes, kürzer auch Fehler des Mittelwertes genannt, bezieht noch die Anzahl der Messungen mit ein. Mehr Messungen führen zu einem kleineren Fehler

$$\Delta_x = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}. \tag{9}$$

3.1.2 Regression

Nachfolgend wird eine lineare Regression für Wertepaare (x_i, y_i) durchgeführt. Dafür müssen die Steigung

$$m = \frac{n \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{n \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \right)^2} \tag{10}$$

und der y-Achsenabschnitt

$$b = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} y_i - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i}{n \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \right)^2} \tag{11}$$

berechnet werden. Den jeweiligen Fehler erhält man mit

$$s_m^2 = s_y^2 \cdot \frac{n}{n \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \right)^2} \tag{12}$$

$$s_b^2 = s_y^2 \cdot \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}{n \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \quad . \tag{13}$$

s_y ist hierbei die Abweichung der Regressionsgeraden in y-Richtung.

$$s_y^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (\Delta y_i)^2}{n-2} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - b - m x_i)^2}{n-2} \tag{14}$$

3.2 Auswertung der Messdaten

subsectionBestimmung der Flächenträgheitsmomente Das Flächenträgheitsmoment ist eine Größe, die im weiteren Verlauf wichtig ist, um das Elastizitätsmodul der Stäbe zu ermitteln. Es hängt von dem Querschnitt des Stabes, genauer der Abstände y der Flächenelemente dq zur neutralen Faser ab

$$I = \int_Q y^2 \, \mathrm{d}q \quad . \tag{15}$$

Für den eckigen Stab benötigt man eine Formal für quadratische Quarschnitte. Die Kantenlänge sei h. Für I_E gilt:

$$I_\mathrm{E} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{12} \cdot h^4 \quad . \tag{16}$$

Um das Flächenträgheitsmoment für runde Querschnitte mit Radius r zu berechnen, bietet sich die Verwendung von Polarkoordinaten an. Der Abstand zur y-Achse ist dann $r^2 \cdot \sin^2(x)$. Mit der Jakobideterminante r ist I_R

$$I_\mathrm{R} = \int_0^r \int_0^{2\pi} r^2 \cdot \sin^2(x) \cdot r \, \mathrm{d}\phi\mathrm{d}r = \frac{1}{12} \cdot \pi \cdot r^4 \quad . \tag{17}$$

Sowohl h in wie auch der Durchmesser $2 \cdot r$ wurden sehr genau mit einer Schieblehre gemessen. Zu dem Fehler des Mittelwertes kommt allerdings eine Ableseungenauigkeit von 0,05 mm hinzu.

Tabelle 1: Breite h des eckigen Stabes und Durchmesser $2 \cdot r$ des Runden

Breite h in 0,05 mm	Durchmesser $2 \cdot r$ in 0,05 mm
10.00	10.00
10.00	10.00
10.00	10.00
10.00	9.90
10.00	9.90
10.00	9.95
10.00	10.00
10.00	9.90
10.00	9.90
10.00	9.95

Für den eckigen Stab folgt aus dem Mittelwert der Breite

$$h = (0{,}010\,00 \pm 0{,}000\,05)\,\mathrm{m} \tag{18}$$

ein Flächenträgheitsmoment von

$$I_\mathrm{E} = (3{,}88 \pm 0{,}17) \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m} \quad . \tag{19}$$

Für den runden Stab folgt aus einem Radius von duschnittlich

$$r = (0{,}004\,975 \pm 0{,}000\,032)\,\mathrm{m} \tag{20}$$

das Flächenträgheitsmoment

$$I_\mathrm{R} = (4{,}81 \pm 0{,}12) \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m} \quad . \tag{21}$$

3.3 Bestimmung des Elastizitätsmodul durch lineare Regression

3.3.1 Runder Stab – einseitige Einspannung

Die gemessene Durchbiegung $D(x)$ des Stabes wird durch die Gleichung (5) beschrieben. Alle in ihr vorkommende Größen, bis auf das Elaatizitästmodul sind bekannt. Das Flächenträgheitsmoment wurde im vorherigen Abschnitt als (21) bestimmt und die herabziehende Kraft F ist aus der Masse des Probekörpers zu berechnen

$$F = m \cdot g = 0{,}7476\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 7{,}3339\,\mathrm{N} \quad . \tag{22}$$

Nun lässt sich das Elastizitäsmodul E druch eine lineare Regression der Form

$$D(x) = \frac{F}{2 \cdot EI}\left(Lx^2 - \frac{x^3}{3}\right) = \frac{1}{E} \cdot A + b \tag{23}$$

bestimmen, indem $D(x)$ über A ausgetragen wird (siehe Abbildung 1). E entspricht dem Kehrwert der Steigung der Regressionsgeraden. Unter Verwendung der Formeln aus Kapitel 3.1.2 ergibt die Steigung mit Abweichung

$$\frac{1}{E} = (188{,}9 \pm 1{,}5) \cdot 10^{-13}\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{N}} \tag{24}$$

und der y-Achsenabschnitt mit Abweichung

$$b = (14{,}33 \pm 0{,}36) \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m} \quad . \tag{25}$$

Das hier bestimmte Elastizitästmodul für den runden Stab ist folglich

$$E = (5{,}29 \pm 0{,}04) \cdot 10^{10}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} \quad . \tag{26}$$

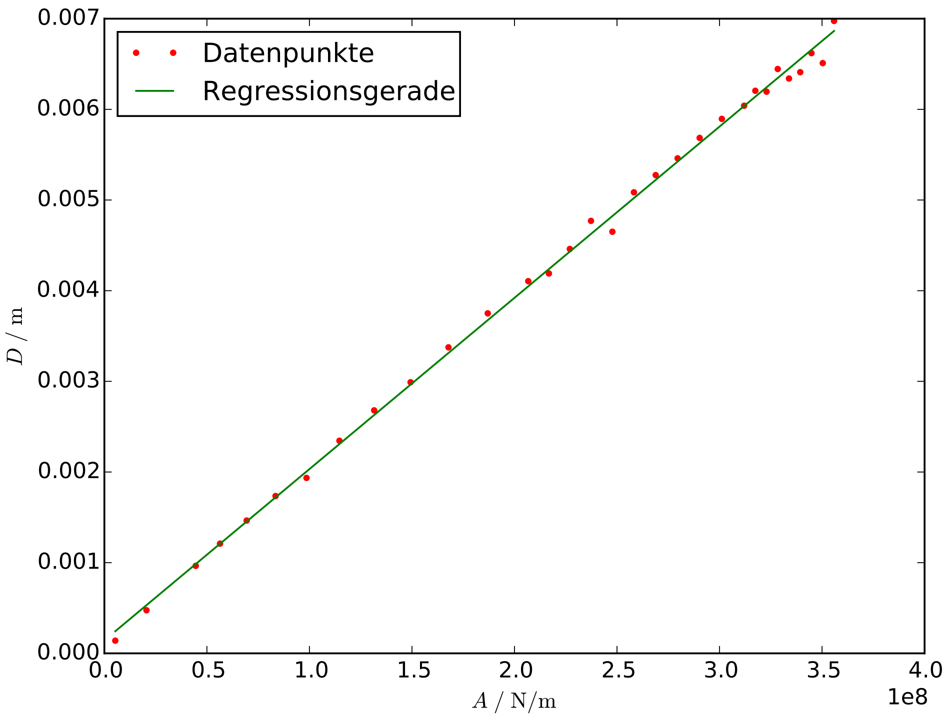


Abbildung 1: Regressionsgerade des runden Stabes bei einseitiger Einspannung

3.3.2 Eckiger Stab – einseitige Einspannung

Hier ist der Vorgehensweise genau so, wie bei dem runden Stab. Es muss lediglich ein anderes Flächenträgheitsmoment 19 und eine andere Kraft

$$F = m \cdot g = 0{,}7676\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 7{,}5302\,\mathrm{N} \tag{27}$$

eingesetzt werden. Dies führt auf eine Steigung mit Abweichung von

$$\frac{1}{E} = (135{,}6 \pm 0{,}9) \cdot 10^{-13}\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{N}} \tag{28}$$

und den y-Achsenabschnitt mit Abweichung

$$b = (6{,}28 \pm 2{,}17) \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m} \quad . \tag{29}$$

Das hier bestimmte Elastizitästmodul für den eckigen Stab ist folglich

$$E = (7{,}37 \pm 0{,}05) \cdot 10^{10}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} \quad . \tag{30}$$

Die Werte wurden in Abbildung 2 aufgetragen.

3.3.3 Eckiger Stab – beidseitige Einspannung

Die Bestimmung des Elastizitätsmoduls bei beidseitiger Einspannung ist ähnlich zu der bei einseitiger. Sie unterscheidet sich in der Ausführung im Wesentlichen durch die minimal andere Formel 3, eine andere Kraft, da ein schwereres

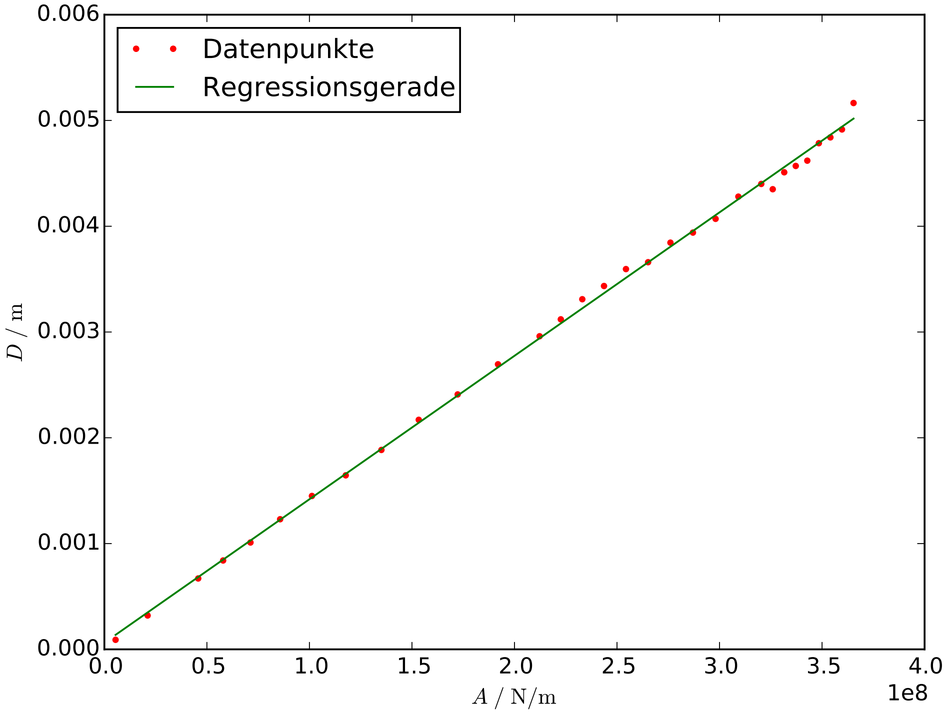


Abbildung 2: Regressionsgerade des eckigen Stabes bei einseitiger Einspannung

Gewicht verwendet wurde

$$F = m \cdot g = 4{,}7004\,\mathrm{kg} \cdot 9{,}81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 46{,}1109\,\mathrm{N} \tag{31}$$

und die Tatsache, dass links und rechts von dem in der Mitte eingehängten Gewicht die Verbiegung des Stabes gemessen wurde. Es gibt zwei Regressiongeraden: Eine für die Werte links vom Stab und die andere für die rechte Seite. Zunächst soll die Regressionsgerade der linken Seite betrachtet werden. Sie hat eine Steigung mit Abweichung von

$$\frac{1}{E} = (55{,}45 \pm 1{,}88) \cdot 10^{-13}\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{N}} \tag{32}$$

und den y-Achsenabschnitt mit Abweichung von

$$b = (44{,}5 \pm 2{,}3) \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m} \quad . \tag{33}$$

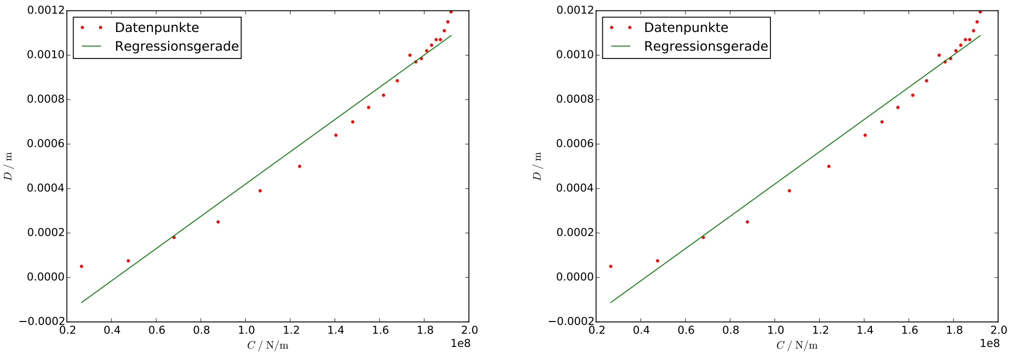
Daraus folg das Elastizitätsmodul

$$E = (18{,}0 \pm 0{,}6) \cdot 10^{10}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} \quad . \tag{34}$$

Für die rechte Seite ergeben sich Werte von

$$\frac{1}{E} = (72{,}25 \pm 3{,}03) \cdot 10^{-13}\,\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{N}} \quad , \tag{35}$$

$$b = (30{,}6 \pm 4{,}7) \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m} \tag{36}$$



(a) Linke Seite

(b) Rechte Seite

Abbildung 3: Regressionsgerade des eckigen Stabes bei beidseitiger Einspannung

und

$$E = (13{,}8 \pm 0{,}6) \cdot 10^{10}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} \quad . \tag{37}$$

3.4 Bestimmung der Dichte

Zur genaueren Festlegung, aus welchen Metallen die Stäbe bestehen können, ist die Dichte wichtig. Zur Berechnung der Dichte sind die Ausmaße der Stäbe und ihr Gewicht wichtig. Der Querschnitt bzw. Radius der Stäbe wurde (Werte in Tabelle 1) bereits als fehlerbehaftete Größe bestimmt. In Länge und das Gewicht haben keine angegebenen Ungenauigkeiten.
Die Dichte ist jeweils

$$\rho = \frac{\text{Gewicht}}{\text{Querschnittsfläche} \cdot \text{Länge}} \quad . \tag{38}$$

Der runde Stab der Länge 0,6 m ist 0,3945 kg schwer und hat die Dichte

$$\rho_{\text{Rund}} = (8455{,}90 \pm 109{,}02)\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \quad . \tag{39}$$

Und der eckige Stab der Länge 0,6 m ist 0,1671 kg schwer und hat die Dichte

$$\rho_{\text{Eckig}} = (2785{,}00 \pm 27{,}85)\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \quad . \tag{40}$$

4 Diskussion