

ANFÄNGERPRAKTIKUM 2015/2016

Dispersion am Glasprisma

Durchführung: 26.04.16

Clara RITTMANN¹
Anja BECK²

Betreuer:
Felix NEUBÜRGER

¹clara.rittmann@tu-dortmund.de

²anja.beck@tu-dortmund.de

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	2
2	Versuchsaufbau und Ablauf	4
2.1	Messung des Innenwinkels φ	5
2.2	Messung des Brechungswinkels η	5
3	Auswertung	6
3.1	Die Wellenlängen der Spektrallinien	6
3.2	Berechnung von Innenwinkel und Brechwinkel	7
3.3	Bestimmung der Dispersionskurve	8
3.4	Kenndaten des Prismas	10
4	Diskussion	11
A	Anhang	12
A.1	Mathematische Formeln	12

1 Theorie

Wenn Licht auf eine Grenzfläche wie zum Beispiel Glas oder Wasser trifft, ändert die Lichtwelle auf beiden Seiten der Grenzfläche sowohl die Richtung als auch die Ausbreitungsgeschwindigkeit. Dieses Phänomen wird als **Brechung** bezeichnet und quantitativ über den Brechungsindex n beschrieben

$$n = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \quad . \quad (1)$$

Dieser Zusammenhang wird auch Snelliussches Gesetz genannt. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit im jeweiligen Medium ist v und der Eintrittswinkel α .

Die Brechung ist im Allgemeinen abhängig von der Wellenlänge λ des einfallenden Lichtes. Man spricht von **Dispersion**.

Eine, für viele Phänomene hinreichend genaue, Dispersionsrelation wird aus der Maxwellschen Theorie der elektromagnetischen Wellen hergeleitet. Sie gilt für Wellenlängen, bei denen kaum Absorption auftritt. Überlegungen zur Kraft eines Elektrischen Feldes liefern eine inhomogene Differentialgleichung (DGL) zweiter Ordnung, die der einer erzwungenen und gedämpften Schwingung entspricht. Die Anregung erfolgt durch eine ebene elektromagnetische Welle der Form

$$\vec{E}_0 e^{i\omega t} \quad . \quad (2)$$

Die Reibungskraft dämpft proportional zur Geschwindigkeit und die rücktreibende Kraft hängt von der Auslenkung des Ladungsträgers aus seiner Ruhelage ab

$$m_i \frac{d^2 \vec{x}_i}{dt^2} + f_i \frac{d\vec{x}_i}{dt} + a_i \vec{x}_i = q_i \vec{E}_0 e^{i\omega t} \quad . \quad (3)$$

Diese DGL kann auch über die Polarisierung und das damit verbundene Dipolmoment $\vec{p}_i = q_i \vec{x}_i$ ausgedrückt werden:

$$\vec{P} = \sum_i \vec{P}_i = \sum_i N_i q_i \vec{x}_i \quad . \quad (4)$$

Die Lösung lautet dann:

$$\vec{P} = \sum_i \frac{1}{\omega_i^2 - \omega^2 + \frac{if_i\omega}{m_i}} \frac{N_i q_i^2}{m_i} \vec{E}_0 e^{i\omega t} \quad . \quad (5)$$

Der Bezug zum Brechungsindex wird über die dielektrische Verschiebung ϵ , eine Materialeigenschaft, hergestellt

$$\vec{P} = (\tilde{\epsilon} - 1)\epsilon_0 \vec{E} = (\tilde{n}^2 - 1)\epsilon_0 \vec{E}_0 e^{i\omega t} \quad , \quad \tilde{\epsilon}, \tilde{n} = n(1 - ik) \in \mathbb{C} \quad . \quad (6)$$

Es folgt

$$\text{Re}(\tilde{n}^2) = n^2(1 - k^2) = 1 + \sum_i \frac{N_i q_i^2 (\omega_i^2 - \omega^2)}{\epsilon_0 m_i \left((\omega_i^2 - \omega^2)^2 + \frac{f_i^2}{m_i^2} \omega^2 \right)} \quad . \quad (7)$$

Aus der Forderung, dass die Gleichung nur gelten soll, wenn der Absorptionskoeffizient k verschwindet folgt wiederum direkt

$$\text{Im}(\tilde{n}^2) = -2n^2 k = 0 \rightarrow f_i = 0 \quad (8)$$

und demnach

$$n^2(\omega) = 1 + \sum_i \frac{N_i q_i^2}{\epsilon_0 m_i} \frac{1}{\omega^2 - \omega_i^2} \quad . \quad (9)$$

In Gleichung (9) wird noch die Winkelgeschwindigkeit ω durch die Observable, die Wellenlänge $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$ ersetzt, um sie dann in eine Potenzreihe zu entwickeln.

Hierbei werden zwei Fälle unterschieden: Ist die Wellenlänge größer oder kleiner als die Absorptionsstelle λ_1 . Es wird davon ausgegangen, dass nur eine solche Absorptionsstelle vorliegt.

Fall 1 ($\lambda \gg \lambda_1$) :

$$n^2(\lambda) = A_0 + \frac{A_2}{\lambda^2} + \frac{A_4}{\lambda^4} + \dots, \quad A_0, A_2, A_4 > 0 \quad (10)$$

Fall 2 ($\lambda \ll \lambda_1$) :

$$n^2(\lambda) = 1 + A'_2 \lambda^2 + A'_4 \lambda^4 + \dots, \quad A'_2, A'_4 > 0 \quad (11)$$

Die beiden Dispersionskurven stellen die normale Dispersion dar. Das bedeutet, dass der Brechungsindex mit zunehmender Wellenlänge abnimmt. Die beiden Fälle unterscheiden sich jedoch in der Krümmung. Abbildung 1 zeigt Fall 1 in a) und Fall 2 in b).

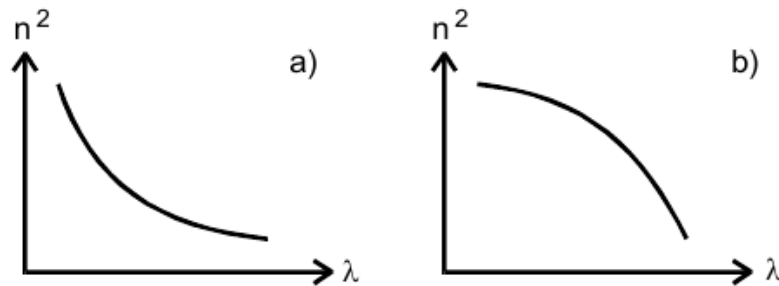


Abbildung 1: Dispersionskurven [3]

2 Versuchsaufbau und Ablauf

Ziel des Versuches ist es, den Brechungsindex und die Dispersionskurve eines Gases zu bestimmen. Dies geschieht mit Hilfe eines Prismas, einer Cadmium-Quecksilber-Lampe, eines Fernsrohs und eines Winkelmessers, die wie in Abbildung 2 gezeigt angeordnet sind. Die Lampe ist fest. Vor ihr ist auf einer drehbaren Platte mit Winkelanzeige das Prisma angebracht. Ein Fernrohr ist darum herum schwenkbar.

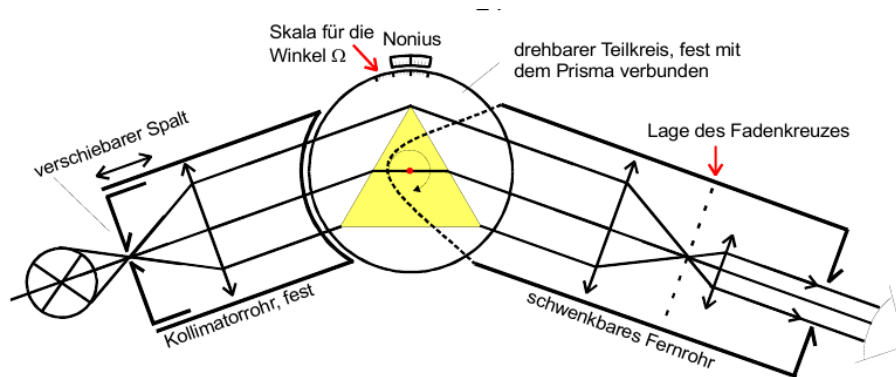


Abbildung 2: Versuchsaufbau [3]

An dem Prisma wird der Lichtstrahl doppelt gebrochen. Zur Berechnung des Brechungsindex ist zum einen der Winkel η zwischen eingehendem und ausgehendem Strahl relevant zum anderen der Innenwinkel φ des Prismas. Wobei hier ein gleichseitiges Prisma vorliegt. Mit Hilfe des Snelliusschen Gesetz (1), das auf eine Doppelbrechung, wie in Abbildung 3 dargestellt, angewendet wird, folgt der Brechungsindex

$$n = \frac{\sin \frac{\eta + \varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}} \quad (12)$$

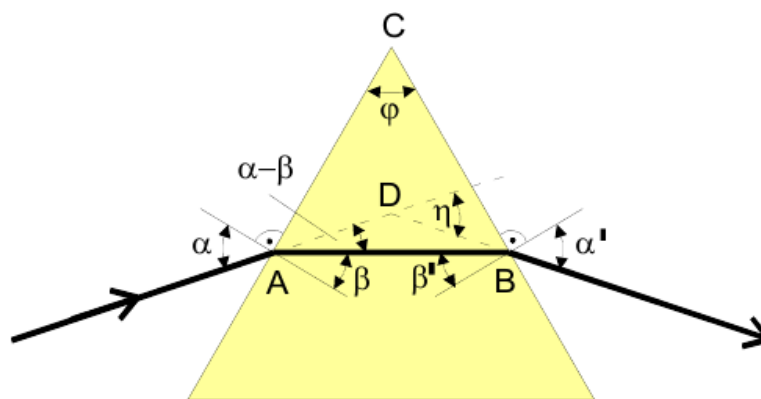


Abbildung 3: Doppelbrechung am Prisma [3]

2.1 Messung des Innenwinkels φ

Zur Messung des Innenwinkels φ wird das Prisma so ausgerichtet, dass eine Spitze auf die Lampe zeigt und dann unverändert in dieser Position gelassen. Durch das Fernglas wird eine Spektrallinie der Lampe, die auf der Prismenoberfläche zu sehen ist erst auf der einen Seite des Prismas, dann auf der anderen Seite anvisiert. Jeweils wird der Winkel φ_r bzw. φ_l notiert. Aus Abbildung 4 folgt mit einfacher Geometrie

$$\varphi = \frac{1}{2}(\varphi_r - \varphi_l) \quad . \quad (13)$$

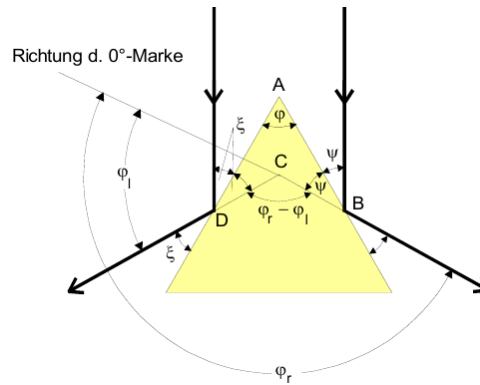


Abbildung 4: Innenwinkelmessung [3]

2.2 Messung des Brechungswinkels η

Im Gegensatz zur Messung des Innenwinkels wird bei der Bestimmung des Brechungswinkels das Prisma rotiert und das Fernrohr an einem festen Ort gelassen.

Fernrohr und Prisma werden einmalig so ausgerichtet, dass die Spektrallinien zu sehen sind. Eine Linie wird ausgewählt und beobachtet. Dann wird das Prisma so lange gedreht, bis dieselbe Spektrallinie wieder im Fadenkreuz des Fernrohres liegt. Die Winkel beider Einstellungen Ω_r und Ω_l dienen zur Berechnung des Brechungswinkels η

$$\eta = 180 - (\Omega_l - \Omega_r) \quad . \quad (14)$$

Der Vorgang ist in Abbildung 5 dargestellt.

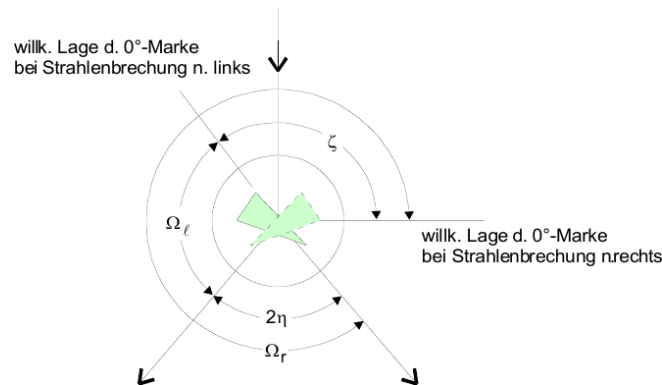


Abbildung 5: Brechungswinkelmessung [3]

3 Auswertung

3.1 Die Wellenlängen der Spektrallinien

Für Berechnungen werden die genauen Wellenlängen der Spektrallinien benötigt. Um sie zu bestimmen wird ein Auszug aus [4, Tabellenanhang Tab. A 4.3] (Tabelle 1) verwendet. Bei der Messung wird ein Spektrum wie in Abbildung 6, allerdings ohne die kurzwelligen dunkelroten Linien, gesehen.

Element	λ in nm	Farbeindruck	Helligkeitseindruck ¹
Cadmium (Cd)	643.86	rot	stark
	635.99	gelbrot	schwach
	508.58	grün	stark
	479.99	blaugrün	stark
	467.82	blau	stark
	441.46	blau	mittel
Quecksilber (Hg)	708.19	rot	schwach
	690.72	rot	schwach
	579.07	gelb	sehr stark
	576.96	gelb	sehr stark
	546.07	grün	stark
	491.60	blaugrün	mittel
	435.84	blau	stark
	407.78	violett	mittel
	404.66	violett	mittel

Tabelle 1: Wellenlängen der Spektrallinien von Cadmium und Quecksilber

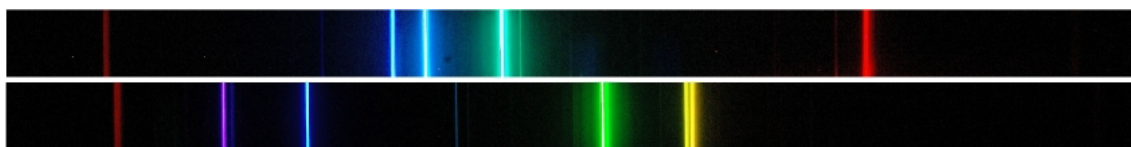


Abbildung 6: Spektrallinien einer Cadmiumspektrallampe [1] (oben) und einer Quecksilberdampflampe [2] (unten)

Durch Kombination von Tabelle 1 und Abbildung 6 wird sich für die in Tabelle 2 aufgelisteten Wellenlängen entschieden.

Farbe	λ in nm	Element
rot	643.86	Cd
gelb	576.96 / 579.07	Hg
grün	546.07	Hg
grün	508.58	Cd
blaugrün	479.99	Cd
blau	467.82	Cd
blau	435.84 / 441.46	Hg / Cd
violett	404.66 / 407.78	Hg

Tabelle 2: Beobachtete Wellenlängen

¹relative Lichtstärke für ein einzelnes Element

3.2 Berechnung von Innenwinkel und Brechwinkel

Die Berechnungen in diesem und allen nächsten Kapiteln werden mit Python durchgeführt. Bei der Messung des Innenwinkels des Prismas und mit Formel (13) ergeben sich die Werte in Tabelle 3. Der Mittelwert² ist

$$\bar{\varphi} = 55.13 \pm 0.06 . \quad (15)$$

φ_r	φ_l	φ
376.0	266.0	55.0
376.0	265.5	55.2
376.0	265.7	55.2

Tabelle 3: Messwerte zur Bestimmung des Innenwinkels φ in $^\circ$

Die nachfolgenden Werte werden allerdings mit dem zu erwartenden Wert $\varphi = 60^\circ$ berechnet. Tabelle 4 zeigt die Winkel Ω_l und Ω_r , die zusammen mit Formel (14) die Werte für die Brechwinkel η ergeben.

Wellenlänge λ in nm	Ω_l	Ω_r	η
406.22	160.4	122.0	141.6
438.65	159.5	122.7	143.2
467.82	159.1	123.0	143.9
479.99	158.1	123.7	145.6
508.58	157.9	124.3	146.4
546.07	156.9	124.8	147.9
578.02	156.6	126.0	149.4
643.86	154.6	127.3	152.7

Tabelle 4: Messwerte zur Bestimmung des Brechwinkels η in $^\circ$

²siehe A.1

3.3 Bestimmung der Dispersionskurve

Mit Hilfe von Formel (12) kann nun für jede Wellenlänge λ der Brechungsindex (siehe Tabelle 5) ausgerechnet werden.

λ in nm	n	Fehler Δ_n
406.22	1.965	0.000
438.65	1.959	0.000
467.82	1.957	0.000
479.99	1.950	0.000
508.58	1.947	0.000
546.07	1.941	0.000
578.02	1.935	0.000
643.86	1.919	0.000

Tabelle 5: Errechnete Brechzahlen n mit Fehlern³ für jede Wellenlänge λ

Wie in der Theorie beschrieben muss nun entschieden werden, ob das betrachtete Spektrum über (Fall 1) oder unter (Fall 2) der Absorptionsstelle liegt. Dazu werden Formel (10) als

$$n^2(\lambda) = A_0 + \frac{A_2}{\lambda^2} \quad (16)$$

und Formel (11) als

$$n^2(\lambda) = A'_0 + A'_2 \lambda^2 \quad (17)$$

genähert. Es wird jeweils eine lineare Regression⁴ mit den Wertepaaren $\{(\frac{1}{\lambda_i^2}, n^2(\lambda_i))\}$ (bei (16)) bzw. $\{(\lambda_i^2, n^2(\lambda_i))\}$ (bei (17)) durchgeführt, um die Parameter A_0, A_2, A'_0, A'_2 auszurechnen. Die „Güte“ der Parameter kann durch die quadratischen Abweichungen⁵ s^2, s'^2 bestimmt werden. Alle diese Werte finden sich in Tabelle 6. Eigentlich sollte die Entscheidung welche Näherung die

Größe	Wert	relativer Fehler
A_2	$(4.6 \pm 0.6) \cdot 10^{-14} \text{ m}^2$	-0.1 m^2
A'_2	$(-7.0 \pm 0.2) \cdot 10^{-25} \text{ m}^{-2}$	0.0 m^{-2}
A_0	3.60 ± 0.02	0.007
A'_0	3.974 ± 0.006	0.002
$s^2(A_0, A_2)$	$0.3 \cdot 10^{-3}$	
$s'^2(A'_0, A'_2)$	$49.2 \cdot 10^{-3}$	

Tabelle 6: Durch die lineare Regression berechnete Werte A_0, A'_0, A_2, A'_2 mit Fehlern und relativen Fehlern, sowie die quadratischen Abweichungen s^2, s'^2 der Regressionsgeraden zu den Datenpunkten

bessere ist, allein durch Betrachtung der Krümmung der Kurve, die die Messwerte in Abbildung 7 beschreiben, getroffen werden können. In diesem Fall ist das nicht sehr aussagekräftig, weshalb sich hier nur auf die Abweichungsquadrate verlassen wird. Demnach ist (16) die bessere Wahl und die Dispersionsgleichung wird zu

$$n(\lambda) = \sqrt{3.6 + 4.6 \cdot 10^{-14} \lambda^{-2}}$$

bestimmt. Der Funktionsgraf ist in Abbildung 8 zu sehen.

³siehe: A.1

⁴siehe: A.1

⁵siehe: A.1

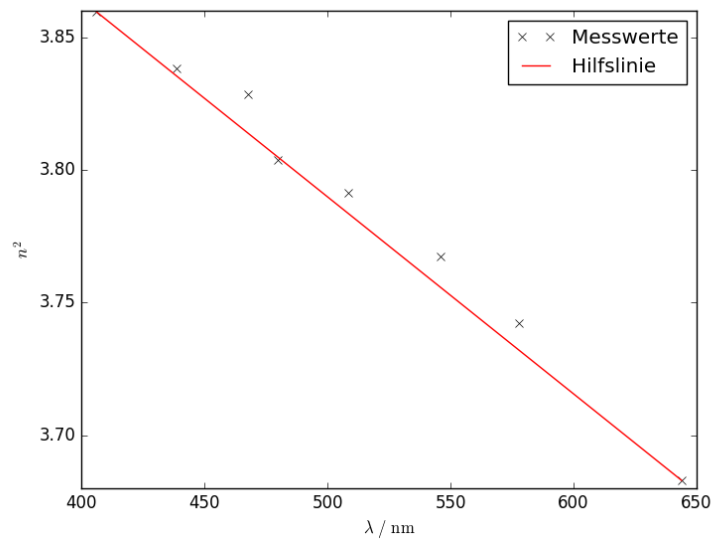


Abbildung 7: Graphik zur Abschätzung, ob die Absorptionsstelle größer oder kleiner als das betrachtete Spektrum ist

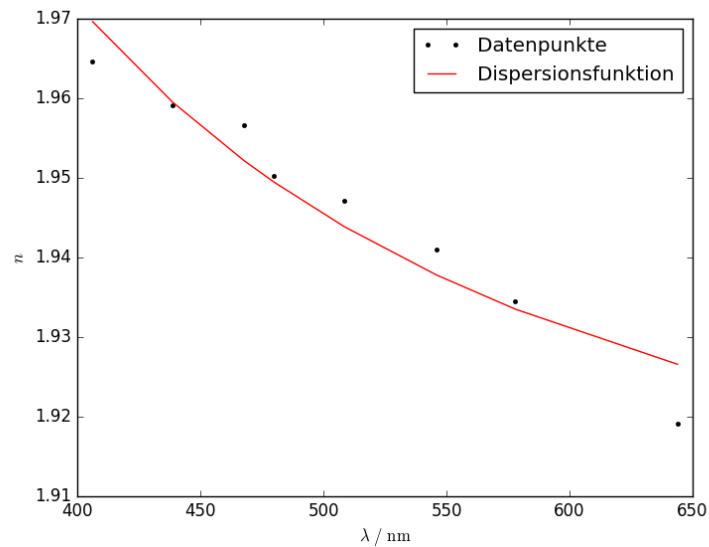


Abbildung 8: Dispersionskurve

Für die nächstgelegene Absorptionsstelle λ_1 gilt also $\lambda_1 \gg \lambda_i$. Es wird davon ausgegangen, dass es nur eine Absorptionsstelle gibt. Es folgt dann aus (7), dass der Brechindex für $\omega \rightarrow \omega_1$ bzw. $\lambda \rightarrow \lambda_1$ gegen 1 geht. Es gilt für (16):

$$n^2(\lambda_1) = 1 = A_0 + \frac{A_2}{\lambda_1^2}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = \sqrt{\frac{A_2}{A_0 - 1}} = 133 \text{ nm} .$$

3.4 Kenndaten des Prismas

Zuletzt sollen einige Kenndaten des verwendeten Prismas berechnet werden.

Die Abbesche Zahl ist ein Maß für die Farbzerstreuung bei Gläsern. Sie ist definiert als

$$\nu = \frac{n_D - 1}{n_F - n_C} , \quad (18)$$

wobei die n_I die Brechzahlen der Fraunhoferschen Linien $\lambda_D = 589 \text{ nm}$, $\lambda_F = 486 \text{ nm}$ und $\lambda_C = 656 \text{ nm}$ sind. Sie hat hier den Wert

$$\nu = 41 . \quad (19)$$

Das Auflösungsvermögen bezeichnet den Koeffizienten $\frac{\lambda}{\Delta\lambda}$, der beschreibt, wie nah zwei Spektrallinien liegen dürfen, sodass sie vom Prisma noch getrennt werden können. Für das verwendete Prisma kann das Auflösungsvermögen mit

$$\left| \frac{\lambda}{\Delta\lambda} \right| = \left| b \frac{dn}{d\lambda} \right| = b \frac{4.6 \cdot 10^{-14} \lambda^{-3}}{\sqrt{3.6 + 4.6 \cdot 10^{-14} \lambda^{-2}}}$$

berechnet werden (Werte für jede Wellenlänge siehe Tabelle 7). Die Länge $b = 3 \text{ cm}$ ist die Seitenlänge des Prismas.

Wellenlänge in nm	Auflösungsvermögen
406.2	10449
438.7	8341
467.8	6902
480.0	6399
508.6	5395
546.1	4372
578.0	3695
643.9	2683

Tabelle 7: Auflösungsvermögen bei verschiedenen Wellenlängen

4 Diskussion

Tabelle 8 zeigt die Brechzahlen einiger Gläser und ihre Abbezahl. Die berechneten Werte von n_C, n_D, n_F liegen etwas über denen der Literaturwerte. Es könnte sein, dass das verwendete Prisma aus einem Glas mit relativ hohem Brechindex ist. Vermutlich liegt die Ursache der Abweichung aber in der Methode der Bestimmung von $n(\lambda)$. Dabei wurde Gleichung 9 als Polynom mit nur zwei Termen genähert, sodass hier unvermeidbar ein Fehler entstand. Die Abweichung um -8.1%

Stoff	n_C	n_D	n_F	ν
FK 1	1.46	1.47	1.48	67
BK 1	1.51	1.51	1.51	63
SK 1	1.61	1.61	1.62	57
LF 1	1.57	1.57	1.58	43
F 1	1.62	1.63	1.64	46
SF 4	1.75	1.76	1.77	28
SF 6	1.79	1.80	1.83	20
Quarzglas	1.46	1.46	1.46	67
$n(\lambda)$	1.93	1.93	1.95	41

Tabelle 8: Brechzahlen verschiedener Gläser bei den Fraunhofer-Linien (siehe Kapitel 3.4) und Abbezahlen [4, Tabellenanhang Tab. A 4.3] und berechnete Werte $n(\lambda)$

von φ von den erwarteten 60° deuteten allerdings darauf hin, dass auch die Messung nicht ganz zu vernachlässigende Fehler verursacht hat. Diese liegen vielleicht im Messprozess, wahrscheinlich aber auch am Prisma selbst, das nach einigen Jahren Verwendung schon abgestoßene Kanten hat, sodass die verwendeten Formeln das Experiment nur unzureichend beschreiben.

A Anhang

A.1 Mathematische Formeln

Der Mittelwert mehrerer Werte x_i und der Fehler dieses Mittelwerts wurden mit

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

$$\Delta_x = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$$

berechnet.

Fehlerfortpflanzung

Den Fehler des Brechungsindex

$$n(\eta, \phi) = \frac{\sin \frac{\eta+\phi}{2}}{\sin \frac{\phi}{2}}$$

erhält man durch die Gauß'sche Fehlerfortpflanzung

$$\Delta_n = \sqrt{\left(\frac{\partial n}{\partial \eta}\right)^2 \Delta_\eta^2 + \left(\frac{\partial n}{\partial \phi}\right)^2 \Delta_\phi^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\sin \frac{\phi}{2} \cos \frac{\eta+\phi}{2} - \sin \frac{\eta+\phi}{2} \cos \frac{\phi}{2}}{2 \sin^2 \frac{\phi}{2}}\right)^2 \Delta_\phi^2},$$

wenn systematische Fehler vernachlässigt werden, sodass $\Delta_\phi = 0$.

Lineare Regression

Bei der lineare Regression mit den acht Wertepaaren $\{(X_i^2, n^2(X_i))\}$ wurde die Steigung

$$P_2 = \frac{8 \cdot \sum_{i=1}^8 X_i \cdot n^2(X_i) - \sum_{i=1}^8 X_i \cdot \sum_{i=1}^8 n^2(X_i)}{8 \cdot \sum_{i=1}^8 X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^8 X_i\right)^2}$$

und die Verschiebung in y -Richtung

$$P_0 = \frac{\sum_{i=1}^8 X_i^2 \cdot \sum_{i=1}^8 n^2(X_i) - \sum_{i=1}^8 X_i \cdot \sum_{i=1}^8 X_i \cdot n^2(X_i)}{8 \cdot \sum_{i=1}^8 X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^8 X_i\right)^2}$$

verwendet. Die Fehler dieser Werte sind

$$\Delta_{P_2}^2 = S^2 \cdot \frac{8}{8 \cdot \sum_{i=1}^8 X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^8 X_i\right)^2}$$

und

$$\Delta_{P_0}^2 = S^2 \cdot \frac{\sum_{i=1}^8 X_i^2}{8 \cdot \sum_{i=1}^8 X_i^2 - \left(\sum_{i=1}^8 X_i \right)^2}.$$

Hierbei wird die quadratische Abweichung

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^8 (n^2(X_i) - P_0 - P_2 X_i)^2}{6}$$

verwendet.

Alle verwendeten Formeln stammen aus [4, Kap. 1.2.10].

Literaturverzeichnis

- [1] Rapp Instruments. URL: <http://www.rapp-instruments.de/foto/spectrum/images/Cd.jpg>.
- [2] Rapp Instruments. URL: <http://www.rapp-instruments.de/foto/spectrum/images/Hg.jpg>.
- [3] *Versuchsanleitung V402: Dispersion am Glasprisma*. Anfängerpraktikum, TU Dortmund.
- [4] W. Walcher. *Praktikum der Physik*. Teubner Studienbücher, 1989.

Abbildungsverzeichnis

1	Dispersionkurven	3
2	Versuchsaufbau [3]	4
3	Doppelbrechung am Prisma [3]	4
4	Innenwinkelmessung [3]	5
5	Brechungswinkelmessung [3]	5
6	Spektrallinien einer Cadmiumspektrallampe [1] (oben) und einer Quecksilberdampflampe [2] (unten)	6
7	Graphik zur Abschätzung, ob die Absorptionsstelle größer oder kleiner als das betrachtete Spektrum ist	9
8	Dispersionskurve	9

Tabellenverzeichnis

1	Wellenlängen der Spektrallinien von Cadmium und Quecksilber	6
2	Beobachtete Wellenlängen	6
3	Messwerte zur Bestimmung des Innenwinkels φ in $^\circ$	7
4	Messwerte zur Bestimmung des Brechwinkels η in $^\circ$	7
5	Errechnete Brechzahlen n mit Fehlern für jede Wellenlänge λ	8
6	Durch die lineare Regression berechnete Werte A_0, A'_0, A_2, A'_2 mit Fehlern und relativen Fehlern, sowie die quadratischen Abweichungen s^2, s'^2 der Regressionsgeraden zu den Datenpunkten	8
7	Auflösungsvermögen bei verschiedenen Wellenlängen	10
8	Brechzahlen verschiedener Gläser bei den Fraunhofer-Linien (siehe Kapitel 3.4) und Abbezahlen [4, Tabellenanhang Tab. A 4.3] und berechnete Werte $n(\lambda)$	11