Anfängerpraktikum 2015/2016

Versuch

Durchführung: TT.MM.JJ

Clara Rittmann[1]
Anja Beck[2]

Betreuer:
Max Mustermann

[1]clara.rittmann@gmail.com
[2]anja.beck@tu-dortmund.de

Inhaltsverzeichnis

1 Theorie

Ein LC-Schwingkreis besteht aus einer Spule mit der Induktivität L und einem Kondensator mit der Kapazität C. Die Spule speichert ein magnetisches Feld und der Kondensator ein elektrisches. In dem Schwingkreis wechseln sich beide Felder periodisch ab mit der Folge, dass sich der Stromfluss mit gleicher Periode umkehrt. Zwei LC-Schwingkreise können durch einen weiteren Kondensator C_K gekoppelt werden (siehe Abbildung (Anleitung 2)).
Der Stromfluss in beiden einzelnen gekoppelten Kreisen wird durch die Kirchhoffschen Regeln bestimmt.

$$I_\mathrm{K} = I_1 - I_2 \tag{1}$$
$$U_\mathrm{1C} + U_\mathrm{1L} + U_\mathrm{K} = 0 \tag{2}$$
$$U_\mathrm{2C} + U_\mathrm{2L} + U_\mathrm{K} = 0 \tag{3}$$

Die gekoppelten Differentialgleichungen für beide Schwingkreise folgen mit

$$U_\mathrm{C} = \frac{1}{C}\int I \mathrm{d}t \quad \text{und} \quad U_\mathrm{L} = L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}x} \quad . \tag{4}$$
$$\text{1. DGL:} \quad L\frac{\mathrm{d}^2 I_1}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{C}I_1 + \frac{1}{C_\mathrm{K}}(I_1 + I_2) = 0 \tag{5}$$
$$\text{2. DGL:} \quad L\frac{\mathrm{d}^2 I_2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{C}I_2 - \frac{1}{C_\mathrm{K}}(I_1 + I_2) = 0 \tag{6}$$

Die Lösungen sind abhängig von den Anfangsamplituden I_{10} des erstem Schwingkreises und I_{20} des zweiten Schwingkreises, sowie den Frequenzen ν^+ und ν^-.

$$I_1(t) = \frac{1}{2}(I_{10} + I_{20})\cos\left(2\pi\nu^+ t\right) + \frac{1}{2}(I_{10} - I_{20})\cos\left(2\pi\nu^- t\right) \tag{7}$$
$$I_2(t) = \frac{1}{2}(I_{10} + I_{20})\cos\left(2\pi\nu^+ t\right) - \frac{1}{2}(I_{10} - I_{20})\cos\left(2\pi\nu^- t\right) \tag{8}$$

Die Frequenzen sind

$$\nu^+ = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad \text{und} \tag{9}$$
$$\nu^- = \frac{1}{2\pi\sqrt{L\left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_\mathrm{K}}\right)^{-1}}} \quad . \tag{10}$$

Nun werden wichtige Spezialfälle dieses komplexen Verhaltens beschrieben. Die zwei **Fundamentalschwingungen** zeichnen sich dadurch aus, dass die Anfangsamplituden I_{10} und I_{20} gleich groß sind ($|I_{10}| = |I_{20}|$). Sind beide Schwingkreis in Phase ($I_{10} = I_{20}$) schwingen sie mit der Frequenz $\nu+$. Sind die Schwingkreise um eine halbe Periode phasenverschoben ($I_{10} = -I_{20}$) schwingen sie mit der etwas höheren Frequenz $\nu-$.
Das Phänomen der **Schwebung** tritt auf, wenn einer der Kreise stimuliert wird bzw. eine Anfangsamplitude hat und der andere Kreis keine Anfangsamplitude aufweist

und die Frequenzen ν^+ und ν^- nahezu übereinstimmen.

Wieso hast du bei einem Strom (t) dahinter geschrieben und beim anderen nicht?

$$I_1 = I_{10}\cos\big(\pi(\nu^+ + \nu^-)t\big) \cdot \cos\big(\pi(\nu^+ - \nu^-)t\big) \tag{11}$$

$$I_2(t) = I_{10}\sin\big(\pi(\nu^+ + \nu^-)t\big) \cdot \sin\big(\pi(\nu^+ - \nu^-)t\big) \tag{12}$$

Es entsteht eine Schwingung (siehe Abbildung (Abb.3)) mit den Frequenzen der einzelnen Schwingkreisen

$$\nu = \pi(\nu^+ + \nu^-) \tag{13}$$

und einer Schwebungsfrequenz von

Ich glaube hier müsste ein Minus sein und keine 2.

$$f = 2\pi(\nu^+ + \nu^-) \quad . \tag{14}$$

Es handelt sich um einen periodischen Energieaustausch zwischen den beiden Schwingkreisen mit der Schwebungsfrequenz.

Entweder ich habe einen großen Denkfrehler, oder die Anleitung ist an dieser Stelle falsch und verstauch die Frequenz mit der Winkelgeschwindigkeit?! Es geht um Formel (12) und (13) in Vergleich mit dem Fließtext oben auf Seite 302.

Jetzt wo du es sagst. Bei den angegebenen Frequenzen ganz oben auf 302 haben die ν und ω vertauscht. So wie du das gemacht hast ist das meine ich richtig. (Bis auf die Schwebung). Ich hoffe, das war es was du meintest.

2 Aufbau und Ablauf des Experiments

Ein Schaltkreis wie in Abbildung (VERWEIS) dargestellt ist die Grundlage für alle Messungen. Die Als erstes müssen die Frequenzen der beiden Schwingkreise aufeinander abgestimmt werden, da eine der Kapazitäten variabel ist.
Die Frequenzen der Fundamentalschwingungen werden auf zwei Methoden bestimmt. Zuerst wird der Erreger durch eine Sinusspannung ersetzt und mit Hilfe von Lissajous-Figuren festgestellt, für welche Frequenzen bei Variation der Erregerfrequenz beide Schwingkreise um die Phasen 0 und π verschoben sind. Bei der zweiten Methode erzeugt man ein kontinuierliches Frequenzspektrum und zeichnet den Stromverlauf des rechten Schwingkreises über die Zeit auf. Wenn der Strom ein Maximum einnimmt, ist die Frequenz gerade $\nu+$ oder ν^{-}.
Des Weiteren wird die Schwebung untersucht, indem einer der beiden Schwingkreise mit einem einzelnen Impuls (bzw. Rechteckimpuls mit einer viel kleinerer Frequenz als der Schwing- und Schwegunsfrequenz) angeregt wird. Es sollen die Maxima der Schwingung innerhalb einer Schwebungsperiode für verschiedene Kapazitäten des Kondensators C_{K} auf einem Oszilloskop beobachtet werden.

Hier habe ich die Reihenfolge geändert, weil ich das dann in der Auswertung besser beschreiben konnte.

3 Auswertung

3.1 Auswertung der Messdaten

Die Bestimmung der Fundamentalfrequenzen über die Phasenbeziehung ergibt die in Tabelle 1 aufgelisteten Messdaten.

C_K in nF	$\nu^+_{\varphi=0}$ in kHz	$\nu^-_{\varphi=\pi}$ in kHz
1.0	33.11	79.62
2.2	32.47	60.39
2.7	32.47	56.56
4.7	32.68	48.08
6.8	32.47	44.01
8.2	32.89	41.67
10.0	33.11	40.65
12.0	32.89	40.00

Tabelle 1: Fundamentalfrequenzen bei der Bestimmung über die Phasenbeziehung für verschiedene Koppelkondensatoren C_K

Bei der „dynamischen" Messung der Fundamentalfrequenzen wird die am Schwingkreis angelegte Frequenz kontinuierlich erhöht. Die Zeitdifferenz zwischen dem Beginn der Frequenzsteigerung und dem erreichen der beiden Fundamentalfrequenzen wird am Oszilloskop bestimmt werden. Diese Zeiten sind in Tabelle 2 dargestellt. Über die Startfrequenz $\nu_{start} = 11.16\,\mathrm{kHz}$, die Endfrequenz $\nu_{end} = 112.6\,\mathrm{kHz}$ und

Kapazität C_k in nF	t_1 in s	t_2 in s
1.0	0.2280	0.6761
2.2	0.2200	0.4880
2.7	0.2160	0.4480
4.7	0.2120	0.3560
6.8	0.2160	0.3240
8.2	0.2160	0.3040
10.0	0.2160	0.2920
12.0	0.2120	0.2760

Tabelle 2: Zeiten t_1 und t_2 nach denen die Fundamentalfrequenzen erreicht wurden

das eingestellte Intervall $T = 1\,\mathrm{s}$ kann eine Funktion

$$\nu(t) = \frac{\nu_{end} - \nu_{start}}{T} t + \nu_{start}$$

aufgestellt werden. Damit können nun die Fundamentalfrequenzen (siehe Tabelle 3) berechnet werden.

C_K in nF	$\nu_{t_1}^+$ in kHz	$\nu_{t_2}^-$ in kHz
1.0	34.2881	79.7469
2.2	33.4790	60.6671
2.7	33.0693	56.6080
4.7	32.6652	47.2725
6.8	33.0693	44.0310
8.2	33.0693	42.0022
10.0	33.0629	40.7775
12.0	32.6652	39.1589

Tabelle 3: Fundamentalfrequenzen, die sich bei der „dynamischen“ Messung für verschiedene Koppelkondensatoren C_K ergeben

Das Zählen der Schwingungen innerhalb einer Schwebungsperiode, also einem Schwingungsbauch hat nur teilweise funktioniert. Bei den kleineren Kapazitäten war dies nicht möglich. Die Resonanzfrequenz des Schwingkreises bei einer Phasenverschiebung von $\varphi = 0$ ist $\nu^+ = 33.33\,\text{kHz}$. Damit kann auch ν^- berechnet werden. Die gezählten Schwingungen pro Schwingungsbuach und die berechneten Werte für ν^- stehen in Tabelle 4.

Kapazität C_K in nF	Bäuche	ν^- in kHz
4.7	2	41.66
6.8	3	38.89
8.2	4	37.50
10.0	4	37.50
12.0	5	36.66

Tabelle 4: Anzahl der Schwingungen pro Schwingungsbauch und die dazu berechneten Frequenzen ν^-

Über Beziehung (15) kann auch die Anzahl an Schwingungen pro Schwebungsperiode bei bekannten Frequenzen berechnet werden. Ein Vergleich zwischen der gezählten Anzahl an Bäuchen, der für die Frequenzen aus dem ersten Versuchsteil berechneten und der theoretisch zu erwartenden befindet sich in Tabelle 5.

3.2 Theoretisch erwartete Werte

Die Induktivität der verwendeten Spulen ist

$$L = 23.954\,\text{mH} \ .$$

Die Kondensatoren in den Schwingkreisen haben eine Kapazität von

$$C^* = 0.7932\,\text{nF} \ .$$

Es gilt zu beachten, dass auch die Spulen eine Kapazität von

$$C_{\text{Sp}} = 0.028\,\text{nF}$$

haben. Das erschwert die Rechnung kaum, da mit

$$C = C^* + C_{\mathrm{Sp}}$$

gerechnet werden kann.
Die mit diesen Daten und den Formeln (9) und (10) theoretisch zu erwartenden Fundamentalfrequenzen finden sich in Tabelle VERWEIS.
Aus (11) kann die theoretisch zu erwartende Anzahl an Schwingungen pro Schwebungsbauch berechnet werden. So schwingt das System n-mal

$$\pi(\nu^+ + \nu^-)T \stackrel{!}{=} 2\pi n$$

während einer Schwebungsperiode (also einem Schwebungsbauch)

$$\pi(\nu^- - \nu^+)T \stackrel{!}{=} \pi \ .$$

Zusammen ergibt sich

$$n = \frac{(\nu^+ + \nu^-)}{2(\nu^- - \nu^+)} \ . \tag{15}$$

4 Diskussion

C_K in nF	gezählt	berechnet, dynamisch	berechnet, Phase	erwartet, Theorie
1.0	-	1.3	1.2	
2.2	-	1.7	1.7	
2.7	-	1.9	1.8	
4.7	2	2.7	2.6	
6.8	3	3.5	3.3	
8.2	4	4.2	4.2	
10.0	4	4.8	4.9	
12.0	5	5.5	5.1	

Tabelle 5: Gezählte, berechnete und erwartete Anzahl an Schwingungen pro Schwebungsbauch für verschiedene Koppelkondensatoren C_K