

ANFÄNGERPRAKTIKUM 2015/2016

Versuch

Durchführung: TT.MM.JJ

Clara RITTMANN¹
Anja BECK²

Betreuer:
Max MUSTERMANN

¹clara.rittmann@gmail.com

²anja.beck@tu-dortmund.de

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	2
2	Aufbau und Ablauf des Experiments	4
3	Auswertung	6
3.1	Auswertung der Messdaten	6
4	Diskussion	9

1 Theorie

Ein LC-Schwingkreis besteht aus einer Spule mit der Induktivität L und einem Kondensator mit der Kapazität C . Die Spule speichert ein magnetisches Feld und der Kondensator ein elektrisches. In dem Schwingkreis wechseln sich beide Felder periodisch ab mit der Folge, dass sich der Stromfluss mit gleicher Periode umkehrt. Zwei LC-Schwingkreise können durch einen weiteren Kondensator C_K gekoppelt werden (siehe Abbildung 1).

Der Stromfluss in beiden einzelnen gekoppelten Kreisen wird durch die Kirchhoff-

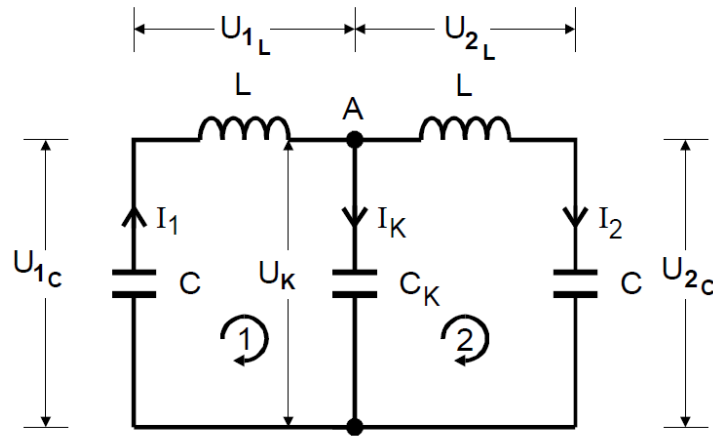


Abbildung 1: Gekoppelter LC-Schwingkreis

schen Regeln bestimmt.

$$I_K = I_1 - I_2 \quad (1)$$

$$U_{1C} + U_{1L} + U_K = 0 \quad (2)$$

$$U_{2C} + U_{2L} + U_K = 0 \quad (3)$$

Die gekoppelten Differentialgleichungen für beide Schwingkreise folgen mit

$$U_C = \frac{1}{C} \int I dt \quad \text{und} \quad U_L = L \frac{dI}{dt} \quad (4)$$

$$1. \text{ DGL: } L \frac{d^2 I_1}{dt^2} + \frac{1}{C} I_1 + \frac{1}{C_K} (I_1 + I_2) = 0 \quad (5)$$

$$2. \text{ DGL: } L \frac{d^2 I_2}{dt^2} + \frac{1}{C} I_2 - \frac{1}{C_K} (I_1 + I_2) = 0 \quad (6)$$

Durch entkoppeln der Differentialgleichungen folgen Lösungen für die einzelnen Ströme I_1 und I_2 mit den Frequenzen ν^+ und ν^- . Die Lösungen sind zudem abhängig von den Anfangsamplituden I_{10} des ersten Schwingkreises und I_{20} des zweiten Schwingkreises.

$$I_1(t) = \frac{1}{2} (I_{10} + I_{20}) \cos(2\pi\nu^+ t) + \frac{1}{2} (I_{10} - I_{20}) \cos(2\pi\nu^- t) \quad (7)$$

$$I_2(t) = \frac{1}{2} (I_{10} + I_{20}) \cos(2\pi\nu^+ t) - \frac{1}{2} (I_{10} - I_{20}) \cos(2\pi\nu^- t) \quad (8)$$

Die Frequenzen sind

$$\nu^+ = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad \text{und} \quad (9)$$

$$\nu^- = \frac{1}{2\pi\sqrt{L\left(\frac{1}{C} + \frac{2}{C_K}\right)^{-1}}} \quad . \quad (10)$$

Nun werden wichtige Spezialfälle dieses komplexen Verhaltens beschrieben. Die zwei **Fundamentalschwingungen** zeichnen sich dadurch aus, dass die Anfangsamplituden I_{10} und I_{20} gleich groß sind ($|I_{10}| = |I_{20}|$). Sind beide Schwingkreise in Phase ($I_{10} = I_{20}$) schwingen sie mit der Frequenz ν^+ . Der Koppelkondensator hat hier keine Funktion. Er ist zu keinem Zeitpunkt geladen. Der Schwingkreis verhält sich wie ein einfacher LC-Kreis. Sind die Schwingkreise um eine halbe Periode phasenverschoben ($I_{10} = -I_{20}$) schwingen sie mit der etwas höheren Frequenz ν^- . Die höhere Frequenz entsteht dadurch, dass der Koppelkondensator einem periodisch wechselnden Stromfluss ausgesetzt ist und den normalen Kondensator unterstützt. Das Phänomen der **Schwebung** tritt auf, wenn einer der Kreise stimuliert wird bzw. eine Anfangsamplitude hat und der andere Kreis keine Anfangsamplitude aufweist. Beim Aufstellen der Gleichungen wird ausgenutzt, dass die Frequenzen ν^+ und ν^- nahezu übereinstimmen.

$$I_1(t) = I_{10} \cos(\pi(\nu^+ + \nu^-)t) \cdot \cos(\pi(\nu^+ - \nu^-)t) \quad (11)$$

$$I_2(t) = I_{10} \sin(\pi(\nu^+ + \nu^-)t) \cdot \sin(\pi(\nu^+ - \nu^-)t) \quad (12)$$

Es entsteht eine Schwingung (siehe Abbildung 2) mit den Frequenzen der einzelnen Schwingkreise

$$\nu = \pi(\nu^+ + \nu^-) \quad (13)$$

und einer Schwebungsfrequenz von

Ich glaube hier müsste ein Minus sein und die 2 weg.

Das Minus muss auf jeden Fall hin, bei der zwei bin ich mir ziemlich sicher. Das hatten wir auch im Kolloquium besprochen. In der Anleitung steht vor der anderen Formel halt ein 1/2.

$$f = 2\pi(\nu^+ - \nu^-) \quad . \quad (14)$$

Es handelt sich um einen periodischen Energieaustausch zwischen den beiden Schwingkreisen mit der Schwebungsfrequenz.

Ich finde du wiederholst dich hier, wenn du sagst, dass die Frequenzen nahezu übereinstimmen.

Findest du es so besser?

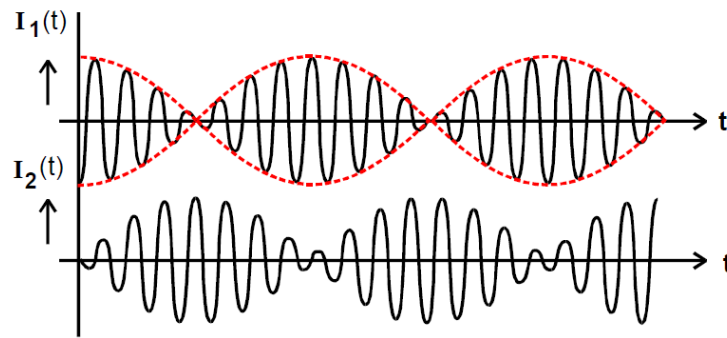


Abbildung 2: Stromverläufe beider Schwingkreise im Fall der Schwebung

2 Aufbau und Ablauf des Experiments

Ein Schaltkreis wie in Abbildung 3 dargestellt ist die Grundlage für alle Messungen. Die Als erstes müssen die Frequenzen der beiden Schwingkreise aufeinander abgestimmt werden, da eine der Kapazitäten variabel ist.

Die Frequenzen der Fundamentalschwingungen werden auf zwei Methoden be-

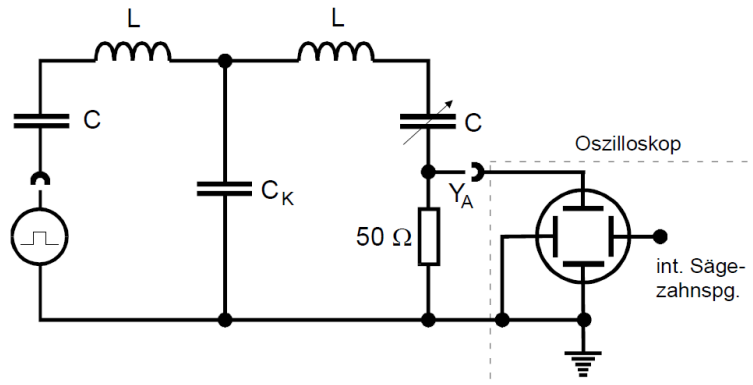


Abbildung 3: Schaltkreis für alle Messungen

stimmt. Zuerst wird der Erreger durch eine Sinusspannung ersetzt und mit Hilfe von Lissajous-Figuren festgestellt, für welche Frequenzen bei Variation der Erregerfrequenz beide Schwingkreise um die Phasen 0 und π verschoben sind. Bei der zweiten Methode erzeugt man ein kontinuierliches Frequenzspektrum und zeichnet den Stromverlauf des rechten Schwingkreises über die Zeit auf. Wenn der Strom ein Maximum einnimmt, ist die Frequenz gerade ν_+ oder ν_- .

Des Weiteren wird die Schwebung untersucht, indem einer der beiden Schwingkreise mit einem einzelnen Impuls (bzw. Rechteckimpuls mit einer viel kleineren Frequenz als der Schwing- und Schwebungsfrequenz) angeregt wird. Es sollen die Maxima der Schwingung innerhalb einer Schwebungsperiode für verschiedene Kapazitäten des Kondensators C_K auf einem Oszilloskop beobachtet werden.

Die Induktivität der verwendeten Spulen ist

$$L = 23.954 \text{ mH} .$$

Die Kondensatoren in den Schwingkreisen haben eine Kapazität von

$$C^* = 0.7932 \text{ nF} .$$

Es gilt zu beachten, dass auch die Spulen eine Kapazität von

$$C_{\text{Sp}} = 0.028 \text{ nF}$$

haben. Das erschwert die Rechnung kaum, da mit

$$C = C^* + C_{\text{Sp}}$$

gerechnet werden kann.

3 Auswertung

Im folgenden wurden Mittelwerte von N Messungen der Größe x berechnet

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad (15)$$

sowie die Varianz

$$V(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \quad (16)$$

woraus die Standardabweichung folgt

$$\sigma_x = \sqrt{V(x)}. \quad (17)$$

Die Standardabweichung des Mittelwertes

$$\Delta_x = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}, \quad (18)$$

kürzer auch Fehler des Mittelwertes genannt, bezieht noch die Anzahl der Messungen mit ein.

3.1 Auswertung der Messdaten

Die Bestimmung der Fundamentalfrequenzen über die Phasenbeziehung ergibt die in Tabelle 1 aufgelisteten Messdaten.

C_K in nF	$\nu_{\varphi=0}^+$ in kHz	$\nu_{\varphi=\pi}^-$ in kHz
1.0	33.11	79.62
2.2	32.47	60.39
2.7	32.47	56.56
4.7	32.68	48.08
6.8	32.47	44.01
8.2	32.89	41.67
10.0	33.11	40.65
12.0	32.89	40.00

Tabelle 1: Fundamentalfrequenzen bei der Bestimmung über die Phasenbeziehung für verschiedene Koppelkondensatoren C_K

Bei der „dynamischen“ Messung der Fundamentalfrequenzen wird die am Schwingkreis angelegte Frequenz kontinuierlich erhöht. Die Zeitdifferenz zwischen dem Beginn der Frequenzsteigerung und dem Erreichen der beiden Fundamentalfrequenzen wird am Oszilloskop bestimmt werden. Diese Zeiten sind in Tabelle 2 dargestellt. Über die Startfrequenz $\nu_{start} = 11.16$ kHz, die Endfrequenz $\nu_{end} = 112.6$ kHz und das eingestellte Intervall $T = 1$ s kann eine Funktion

$$\nu(t) = \frac{\nu_{end} - \nu_{start}}{T} t + \nu_{start}$$

Kapazität C_k in nF	t_1 in s	t_2 in s
1.0	0.2280	0.6761
2.2	0.2200	0.4880
2.7	0.2160	0.4480
4.7	0.2120	0.3560
6.8	0.2160	0.3240
8.2	0.2160	0.3040
10.0	0.2160	0.2920
12.0	0.2120	0.2760

Tabelle 2: Zeiten t_1 und t_2 nach denen die Fundamentalfrequenzen erreicht wurden aufgestellt werden. Damit können nun die Fundamentalfrequenzen (siehe Tabelle 3) berechnet werden.

C_K in nF	$\nu_{t_1}^+$ in kHz	$\nu_{t_2}^-$ in kHz
1.0	34.29	79.75
2.2	33.48	60.67
2.7	33.07	56.61
4.7	32.67	47.27
6.8	33.07	44.03
8.2	33.07	42.00
10.0	33.06	40.78
12.0	32.67	39.16

Tabelle 3: Fundamentalfrequenzen, die sich bei der „dynamischen“ Messung für verschiedene Koppelkondensatoren C_K ergeben

Das Zählen der Schwingungen innerhalb einer Schwebungsperiode, also einem Schwebungsbauch hat nur teilweise funktioniert. Bei den kleineren Kapazitäten war dies (siehe Tabelle 4) nicht möglich.

Mit (11) kann die Anzahl an Schwingungen pro Schwebungsbauch in Zusammenhang mit den Fundamentalfrequenzen gebracht werden. So schwingt das System n -mal

$$\pi(\nu^+ + \nu^-)T \stackrel{!}{=} 2\pi n$$

während einer Schwebungsperiode (also einem Schwebungsbauch)

$$\pi(\nu^- - \nu^+)T \stackrel{!}{=} \pi .$$

Zusammen ergibt sich

$$n = \frac{(\nu^+ + \nu^-)}{2(\nu^- - \nu^+)} . \quad (19)$$

Endlich verstehe ich das. Da n nicht ganzzahlig sein muss, funktioniert das super!

Die Resonanzfrequenz des Schwingkreises bei einer Phasenverschiebung von $\varphi = 0$ ist $\nu^+ = 33.33$ kHz. Damit kann nun ν^- berechnet werden. Die so erhaltenen Werte ergänzen Tabelle 4.

Kapazität C_K in nF	Bäuche	ν^- in kHz
4.7	2	41.66
6.8	3	38.89
8.2	4	37.50
10.0	4	37.50
12.0	5	36.66

Tabelle 4: Anzahl der Schwingungen pro Schwingungsbauch und die daraus berechneten Frequenzen ν^-

Über Beziehung (19) kann auch die Anzahl an Schwingungen pro Schwebungsperiode bei bekannten Frequenzen berechnet werden. Ein Vergleich zwischen der gezählten, der für die Frequenzen aus dem ersten Versuchsteil berechneten und der theoretisch zu erwartenden Anzahl an Bäuchen pro Schwebung befindet sich in Tabelle 7.

Super Asuwertung. Gefällt mir sehr gut. Mir ist nichts aufgefallen, das fehlen würde.

Ich fände es schön, wenn das Kapitel angegeben würde, in dem Tabelle 7 steht, sonst bin ich da beim lesen verwirrt

4 Diskussion

Die Tabellen 7, 5 und 6 stellen die Ergebnisse der drei Messreihen noch einmal gegenüber.

Die verschiedenen Messungen der Fundamentalfrequenz ν^+ ergeben sehr ähnliche Werte. Da sie nicht vom Koppelkondensator abhängt, werden hier die Mittelwerte

$$\bar{x} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N x_i$$

mit ihren Fehlern

$$\Delta_x = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}}{\sqrt{N}}$$

miteinander verglichen. Die Werte erhalten so mehr Aussagekraft, da nicht nur einzelne, sondern mehrere Messwerte mit eingehen.

	Messung über Phasenbeziehung	dynamische Messung	Messung beim Kalibrieren	Theorie
Wert	(33.17 ± 0.17)	(32.76 ± 0.09)	33.33	36.66
Abweichung	-9.5%	-10.6%	-9.1%	

Tabelle 5: Mittelwerte der Messungen von ν^+ in kHz und Abweichungen vom theoretisch erwarteten Wert

Auch bei der Messung der Frequenz ν^- liegen die Messwerte sehr dicht beieinander. Die Abweichung vom Theorie-Wert jedoch steigert sich von 5% bei großen Koppelkapazitäten C_K bis zu 65% bei kleinen C_K . Die über die Anzahl der Schwingungen pro Schwebungsbauch berechneten Frequenzen ν^- dagegen weichen nur wenig von den erwarteten Werten ab. Hier gilt allerdings zu beachten, dass der systematische Fehler der Zählung der Schwingungen sehr groß ist, da nur die Schwingungen pro einem Bauch gezählt wurden. Diese Werte sind also nicht sehr aussagekräftig.

C_K in nF	Messung über Phasenbeziehung	dynamische Messung	berechnet über Anzahl der Schwingungen pro Schwebung	Theorie
1.0	79.62	79.75	-	48.43
2.2	60.39	60.67	-	42.05
2.7	56.56	56.61	-	40.98
4.7	48.08	47.27	41.67	38.89
6.8	44.01	44.03	38.89	37.99
8.2	41.67	42.00	37.50	37.64
10.0	40.65	40.78	37.50	37.33
12.0	40.00	39.16	36.66	37.09

Ich fände es gut, wenn noch dastehen würde, dass die Schwingungszahl pro Bauch stark unterschiedlich war.

Tabelle 6: Werte der Messungen von ν^- in kHz

Bei der Anzahl der Schwingungen pro Schwebungsbauch liegt ein ähnliches Bild vor: Die errechneten Werte unterscheiden sich nur wenig. Sie weichen aber allesamt vom erwarteten Wert ab, bei großen Koppelkapazitäten C_K sogar um über 80%.

C_K in nF	gezählt	berechnet, dynamisch	berechnet, Phase	erwartet, Theorie
1.0	-	1.3	1.2	3.4
2.2	-	1.7	1.7	6.3
2.7	-	1.9	1.8	7.5
4.7	2	2.7	2.6	12.4
6.8	3	3.5	3.3	17.5
8.2	4	4.2	4.2	21.0
10.0	4	4.8	4.9	25.3
12.0	5	5.5	5.1	30.2

Tabelle 7: Gezählte, berechnete und erwartete Anzahl an Schwingungen pro Schwebungsbauch für verschiedene Koppelkondensatoren C_K

Hier müsste jetzt noch etwas dazu stehen, warum die Werte so stark von der Theorie abweichen. Aber um ehrlich zu sein: Ich habe keine Ahnung.

Wie kommst du auf die Theoriewerte?