

ANFÄNGERPRAKTIKUM 2015/2016

Das Michelson-Interferometer

Durchführung: 19.04.16

Clara RITTMANN¹
Anja BECK²

Betreuer:
Julia MUCHOWSKI

¹clara.rittmann@tu-dortmund.de

²anja.beck@tu-dortmund.de

Inhaltsverzeichnis

1	Theorie	2
2	Aufbau und Ablauf	4
3	Auswertung	6
3.1	Statistische Formeln zur Fehlerrechnung	6
3.2	Bestimmung der Wellenlänge des Lasers	7
3.3	Bestimmung des Brechungsindex von Luft und CO ₂	7
4	Diskussion	9
5	Anhang	10

1 Theorie

Interferenz bei Lichtwellen

Ziel dieses Versuchs ist die Messung der Wellenlänge eines Lasers und die Bestimmung der Brechzahlen von Luft und CO_2 . Ganz zentral ist hierbei die Interferenz von Licht.

Für die Erklärung der Interferenz eignet sich die Beschreibung des Lichts als ebene, elektromagnetische Welle

$$\vec{E}(x, t) = \vec{E}_0 \cos(kx - \omega t - \delta) \quad (1)$$

am besten. Zur Beschreibung der Effekte ist die Betrachtung des elektrischen Feldes in einer Dimension, der Ausbreitungsrichtung x , ausreichend. Die restlichen Größen sind die Wellenzahl k , die (Kreis-)Frequenz ω und ein Phasenverschub δ bezogen auf einen festen Anfangspunkt. Treffen zwei Lichtwellen aufeinander können ihre Feldstärken einfach addiert werden. Das führt bei einem Gangunterschied von $2\pi n$ ($n \in \mathbb{N}$), zwischen den beiden Einzelwellen, zu einer Feldstärke

$$\begin{aligned} \vec{E}_{ges}(x, t) &= \vec{E}_{10} \cos(kx - \omega t + 2\pi n) + \vec{E}_{20} \cos(kx - \omega t) \\ &= (\vec{E}_{10} + \vec{E}_{20}) \cos(kx - \omega t) , \end{aligned}$$

bei einem Gangunterschied von $(2n + 1)\pi$ dagegen ist die resultierende Gesamtfeldstärke

$$\begin{aligned} \vec{E}_{ges}(x, t) &= \vec{E}_{10} \cos(kx - \omega t + (2n + 1)\pi) + \vec{E}_{20} \cos(kx - \omega t) \\ &= (\vec{E}_{20} - \vec{E}_{10}) \cos(kx - \omega t) . \end{aligned}$$

Haben die beiden Lichtstrahlen die gleiche Amplitude wird die Feldstärke verdoppelt bzw. komplett ausgelöscht.

Aufgrund der hohen Frequenz von sichtbarem Licht, ist es allerdings unmöglich die sich schnell ändernde Feldstärke zu messen, sodass im Experiment die Intensität

$$I = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |\vec{E}(x, t)|^2 dt \quad (2)$$

verwendet wird. Der Integrationszeitraum $t_2 - t_1$ sollte dabei groß gegenüber der Periodendauer $\frac{2\pi}{\omega}$ sein. Für zwei sich überlagernde elektromagnetische Wellen (hier in komplexer Schreibweise, um die Rechnung zu vereinfachen) aus derselben Quelle (gleiche Amplitude und Frequenz) ist die Intensität dann

$$I = \frac{\vec{E}_0^2}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \left| e^{i(kx - \omega t - \delta_1)} + e^{i(kx - \omega t - \delta_2)} \right|^2 dt \quad (3)$$

$$= \frac{\vec{E}_0^2}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} (2 + 2 \cos(\delta_2 - \delta_1)) dt \quad (4)$$

$$= 2\vec{E}_0^2 (1 + \cos(\delta_2 - \delta_1)) . \quad (5)$$

Sie liegt, abhängig vom Gangunterschied $\delta_2 - \delta_1$, zwischen 0 und $4\vec{E}_0^2$.

Voraussetzungen für die Beobachtung von Interferenz

Bei alltäglichen Lichtquellen, wie der Sonne oder einer Glühbirne, sind die Parameter $\omega, k, \delta_1, \delta_2$ keine Konstanten. Dieses Licht hat keine feste Frequenz ω , vielmehr sind verschiedene Frequenzen aus einem Frequenzbereich $\omega_0 \pm \Delta\omega$ vertreten. Gleiches gilt für die Wellenlänge $\lambda = \frac{2\pi}{k}$. Da das Licht solcher Quellen spontan emittiert wird, sind die Phasenverschiebe δ_1 und δ_2 statistische Funktionen der Zeit, sodass das Integral des Cosinus-Terms über eine lange Zeit $t_2 - t_1$ verschwindet und eine konstante Intensität beobachtet wird. Aufgrund der nicht-konstanten Parameter ist dieses Licht nicht interferenzfähig und wird als inkohärent bezeichnet. Kohärentes Licht dagegen kann durch *einen* Ausdruck (1) mit festen k, ω und δ beschrieben werden.

Üblicherweise wird ein Laser verwendet, wenn Licht mit hoher Kohärenz benötigt wird. Durch einen geeigneten Versuchsaufbau (siehe Abbildung 1) können allerdings auch bei eigentlich nichtkohärenten Lichtquellen Interferenz-Erscheinungen beobachtet werden. Hier-

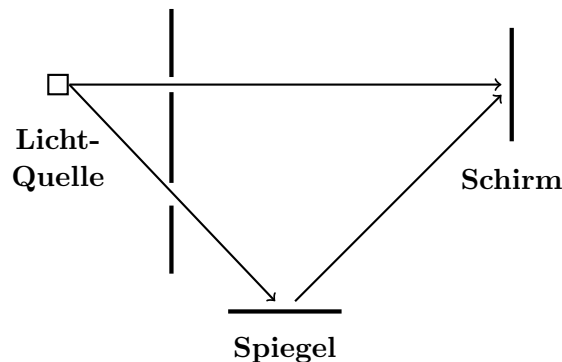


Abbildung 1: Versuchsaufbau, der eine nicht interferenzfähige Lichtquelle für Interferenz-Experimente erlaubt

bei wird das Licht in zwei Teilstrahlen geteilt, die so umgelenkt werden, dass sie am Schirm wieder aufeinander treffen. Um dort Interferenzeffekte beobachten zu können muss das Frequenzspektrum schmal sein, da es sonst beispielsweise zu einer Auslöschung kommen kann, obwohl zwei Wellen zu einem vorigen Zeitpunkt in Phase waren. Zudem ist wichtig, dass der Emissionsvorgang nicht instantan passiert, sondern eine endliche Zeit τ dauert, woraus eine endliche Länge l des Paketes resultiert. Aber nur Wellenpakete, die zur selben Zeit am Schirm auftreffen können interferieren. Deshalb darf der Wegunterschied zweier Strahlen, die unterschiedliche Wege zum Schirm genommen haben, nicht größer als die Kohärenzlänge l sein.

2 Aufbau und Ablauf

Das Michelson-Interferometer

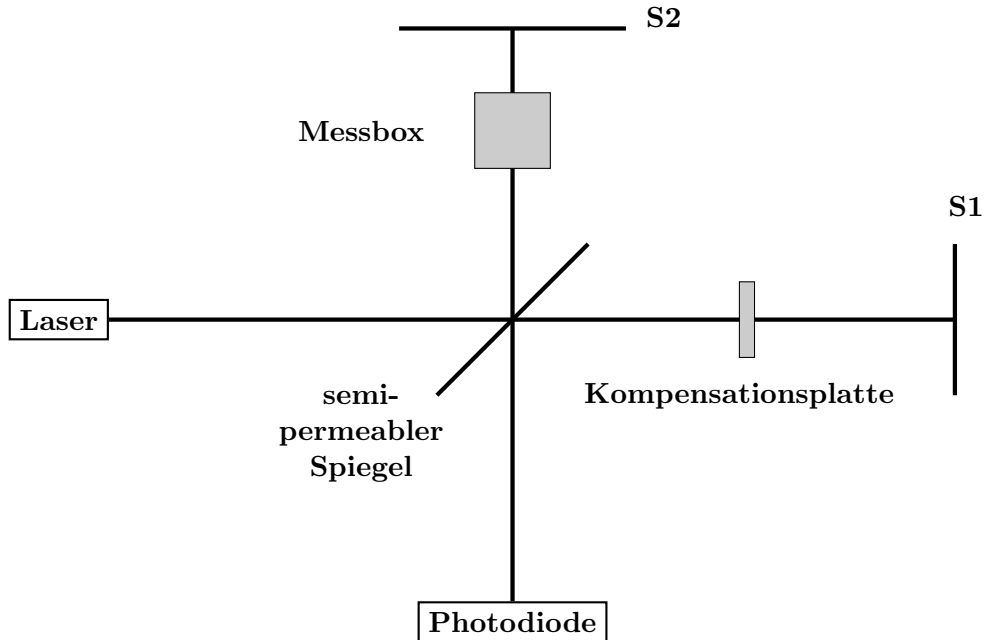


Abbildung 2: Schematischer Aufbau des verwendeten Michelson-Interferometers

Zentraler Bestandteil des Experiments ist ein Michelson-Interferometer (siehe Abbildung 2). Als Michelson-Interferometer bezeichnet man einen kreuzförmigen Versuchsaufbau, bei dem sich jeweils ein Spiegel (S1) und ein Laser und ein zweiter Spiegel (S2) und ein Photodetektor gegenüber stehen. In der Mitte befindet sich ein semipermeabler Spiegel (SP).

Beim Einschalten des Lasers bewegt sich der Lichtstrahl auf SP zu. Dort wird er geteilt. Die beiden einzelnen Strahlen laufen auf S1 oder S2 zu und werden dort reflektiert. Jeder dieser Strahlen wird bei SP abermals geteilt und so treffen zwei parallele Lichtstrahlen auf die Photodiode und erzeugen ein Interferenzbild. Die Intensität im Zentrum wird durch (5)

$$I = 2\vec{E}_0^2 (1 + \cos \Delta s) , \quad (6)$$

mit dem Wegunterschied

$$\Delta s = 2(\overline{SPS1} - \overline{SPS2}) , \quad (7)$$

beschrieben. Eigentlich müsste hier auch ein anfänglicher Phasenverschub beim Austreten des Lichts aus dem Laser beachtet werden, aber es wird davon ausgegangen, dass alle Lichtwellen aus dem Laser in Phase sind.

Bestimmung der Wellenlänge

Die Wellenlänge des Lasers (sichtbares Licht) liegt im nm-Bereich. Um vom Wegunterschied auf die Wellenlänge schließen zu können, muss dieser mit gleicher Genauigkeit bekannt sein. Mit den vorhandenen Mitteln kann das nicht geleistet werden. Alternativ wird ein Aufbau verwendet, bei dem S2 von einem Motor vor und zurück bewegt werden kann. Während der Fahrt wird die Anzahl der Impulse (Intensitätsmaxima) z gezählt. Nach einer Distanz $d \gg \lambda$, wird der Motor gestoppt. Innerhalb einer räumlichen Periode λ gibt es zwei Impulse, sodass

$$d = z \frac{\lambda}{2} \quad (8)$$

gilt.

Bestimmung des Brechungsindex

Im zweiten Versuchsteil wird die Messbox zwischen SP und S2 benötigt. Die Messbox wird evakuiert, sodass eines der Strahlenbündel während eines Weges b ein Medium mit Brechungsindex $n' = n + \Delta n$ durchläuft. Der Wegunterschied der beiden Strahlen, die an der Photodiode auftreffen ist damit $\Delta n \cdot b$. Lässt man die Luft langsam wieder einströmen, können an der Photodiode Impulse gezählt werden, für die wieder der Zusammenhang (8)

$$\Delta n \cdot b = z \frac{\lambda}{2} \quad (9)$$

gilt. Da bei Experimenten mit Gasen Druck und Temperatur besonders berücksichtigt werden müssen, verwendet man zur Berechnung der Brechzahl die Funktion

$$n(p_0, T_0) = 1 + \Delta n \frac{T}{T_0} \frac{p_0}{p - p'} . \quad (10)$$

Sie erweitert den Zusammenhang $n_{\text{Luft}} = n_0 + \Delta n$ mit einem Quotienten aus der Temperatur in der Messbox T und der Normaltemperatur $T_0 = 273.15 \text{ K}$, sowie einem Quotienten, aus dem Normaldruck $p_0 = 1013.2 \text{ mbar}$ und der Differenz der Drucke p' in der evakuierten und p in der mit Luft gefüllten Messbox.

Dieser Versuchsteil wird für CO_2 wiederholt, indem die Messbox mit dem Gas gefüllt wird und man es langsam heraus strömen lässt.

In diesem zweiten Versuchsteil ist auch die Kompensationsplatte relevant. Sie gleicht die Störungen aus, die durch das Glas an der Messbox verursacht werden.

3 Auswertung

3.1 Statistische Formeln zur Fehlerrechnung

Im folgenden wurden Mittelwerte von N Messungen der Größe x berechnet

$$\bar{x} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N x_i, \quad (11)$$

sowie die Varianz

$$V(x) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \quad (12)$$

woraus die Standardabweichung folgt

$$\sigma_x = \sqrt{V(x)}. \quad (13)$$

Die Standardabweichung des Mittelwertes

$$\Delta_x = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}, \quad (14)$$

kürzer auch Fehler des Mittelwertes genannt, bezieht noch die Anzahl der Messungen mit ein.

Des weiteren ist die Gaußsche Fehlerfortpflanzung definiert als

$$\sigma_A = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial A(x_1, \dots, x_N)}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_{x_i}^2}. \quad (15)$$

3.2 Bestimmung der Wellenlänge des Lasers

Die Bestimmung der Wellenlänge erfolgt durch Umstellung der Formel (8)

$$\lambda = \frac{2 \cdot d}{z} . \quad (16)$$

Bei den Angaben von Start- und Endpunkt muss die Hebeluntersetzung des Synchronmotors $u = 1 : 5.046$ beachtet werden. Die Ergebnisse für alle zehn Messungen sind in Tabelle 1 aufgelistet. Die durchschnittliche Wellenlänge beträgt

$$\lambda = (661.5 \pm 6.6) \cdot 10^{-9} \text{ m} . \quad (17)$$

Tabelle 1: Wellenlänge

Anfangs-	Endpunkt	Anfangs- / mm	Endpunkt / mm	Impuls	Wellenlänge / nm
10.00	5.03	1.98	1.00	3001	656.4
5.00	9.97	0.99	1.98	3010	654.4
10.00	5.04	1.98	1.00	3002	654.9
5.00	9.96	0.99	1.97	3002	654.9
10.00	5.04	1.98	1.00	3003	654.6
5.00	10.14	0.99	2.01	3110	655.1
10.00	5.00	1.98	0.99	3028	654.5
5.00	9.96	0.99	1.97	3001	655.1
10.00	4.45	1.98	0.88	3052	720.8
5.00	9.95	0.99	1.97	2998	654.4

3.3 Bestimmung des Brechungsindex von Luft und CO₂

Zur Bestimmung des Brechungsindex n werden die Gleichungen (9) und (10) benötigt. Die Endgleichung ist

$$n(p_0, T_0) = 1 + \frac{z}{2b} \frac{T}{T_0} \frac{p_0}{\Delta p} \lambda = 1 + a\lambda . \quad (18)$$

Der Fehler ist nach der Gaußschen Fehlerfortpflanzung

$$\Delta_{n(p_0, T_0)} = \sqrt{a^2 \Delta_\lambda^2 + \lambda^2 \Delta_a^2} . \quad (19)$$

Wobei die Kammernweite b , die Raumtemperatur T und die durch das Vakuum erzeugte Druckdifferenz Δp berücksichtigt werden müssen, um den druck- und temperaturabhängigen Brechungsindex für die Standardbedingungen T_0 und p_0 zu erhalten.

$$b = 0.05 \text{ m}$$

$$T = 293.15 \text{ K}$$

$$T_0 = 273.15 \text{ K}$$

$$p_0 = 1.01325 \text{ bar}$$

Die errechneten Werte für den Koeffizienten a_{Luft} von Luft sind in Tabelle 2 zu finden und die für Kohlenstoffdioxid a_{CO_2} in Tabelle 3. Die Mittelwerte sind:

$$a_{\text{Luft}} = 451 \pm 3 \quad (20)$$

$$a_{\text{CO}_2} = 718 \pm 28 \quad (21)$$

Daraus ergeben sich die Brechungsindizes und ihrer Fehler:

$$n_{\text{Luft}} = 1.000\,299 \pm 0.000\,003 \quad (22)$$

$$n_{\text{CO}_2} = 1.000\,475 \pm 0.000\,019 \quad (23)$$

Tabelle 2: Brechungsindex Luft

Druckunterschied / bar	Impulse	$a_{\text{Luft}} / 1/\text{m}$
0.8	33	448.569
0.8	33	448.569
0.8	34	462.162
0.8	33	448.569
0.8	33	448.569

Tabelle 3: Brechungsindex Kohlenstoffdioxid

Druckunterschied / bar	Impulse	$a_{\text{CO}_2} / 1/\text{m}$
0.8	57	774.801
0.8	53	720.429
0.8	54	734.022
0.8	45	611.685
0.8	55	747.615

4 Diskussion

Mit Hilfe des Michelson-Interferometers können die Brechungsindizes von Luft und Kohlenstoffdioxid hier sehr genau bestimmt werden. Trotz anfänglicher Schwierigkeiten, den Laserstrahl zu justieren, sind die Abweichungen von den Literaturwerten [**Brechungsindex**] sehr gering. Es kann argumentiert werden, dass die eigentliche Aussagekraft der Brechungsindex erst ab der 10^{-4} -ten Stelle existiert. Auch dann sind die Abweichungen sehr klein (siehe Tabelle 4.)

Tabelle 4: Vergleich mit Literaturwerten

	gemessen	Literaturwert	Abweichung	Abweichung ab 10^{-4}
n_{Luft}	1.000 299	1.000 292	$7 \cdot 10^{-4} \%$	3.2 %
n_{CO_2}	1.000 475	1.000 449	$2.6 \cdot 10^{-3} \%$	5.5 %

Die gemessene Wellenlänge des Lasers weicht allerdings von dem Wert, der am Versuchsaufbau vermerkt ist ab.

$$\lambda_{\text{gemessen}} = (661.5 \pm 6.6) \cdot 10^{-9} \text{ m} \quad (24)$$

$$\lambda_{\text{gegeben}} = 635 \cdot 10^{-9} \text{ m} \quad (25)$$

Dies scheint zunächst verwunderlich, ist doch der Brechungsindex so genau gestimmt worden. Allerdings muss hier die Abweichung von der vierten Nachkommastelle berücksichtigt werden. Diese weicht zumindest bei der Berechnung mit Kohlenstoffdioxid ebenso wie die Wellenlänge um zirka fünf Prozent vom Erwartungswert ab.

5 Anhang

Abbildungsverzeichnis

1	Versuchsaufbau, der eine nicht interferenzfähige Lichtquelle für Interferenz-Experimente erlaubt	3
2	Schematischer Aufbau des verwendeten Michelson-Interferometers	4

Tabellenverzeichnis

1	Wellenlänge	7
2	Brechungsindex Luft	8
3	Brechungsindex Kohlenstoffdioxid	8
4	Vergleich mit Literaturwerten	9