Zusammenfassung meines Vortrags zum Thema

Die Gruppe SU(3) und das Quarkmodell

im Seminar zur

Theorie der Teilchen und Felder

Katrin Schmietendorf

4. Juni 2008

Inhaltsverzeichnis

1	Ma	${ m thematische\ Beschreibung\ der\ Gruppe\ SU(3)}$	2
	1.1	Die Gruppen $U(n)$ und $SU(n)$	2
	1.2	Die Generatoren der $SU(3)$	2
	1.3	Die Gestalt der Darstellung von $\mathrm{SU}(3)\text{-Multipletts}$	5
2	Die	SU(3) und das Quarkmodell	6
	2.1	Darstellungen der $SU(3)$	7
	2.2	Die kleinste nichttriviale Darstellung	7
		2.2.1 Mesonen	8
		2.2.2 Baryonen	10
	2.3	Einordnung in die Geschichte der starken Wechselwirkung $\ .\ .\ .\ .$.	12
3	${ m Lit}\epsilon$	eratur	12

1 Mathematische Beschreibung der Gruppe SU(3)

1.1 Die Gruppen U(n) und SU(n)

Die Gruppe U(n) ist die Gruppe der unitären n×n-Matrizen, d. h. es gilt

$$\mathbf{U}^{\dagger}\mathbf{U} = \mathbf{1}$$
 bzw. $\mathbf{U}^{\dagger} = \mathbf{U}^{-1}$.

Jede Matrix dieser Gruppe kann in der Form

$$\mathbf{U} = e^{i\mathbf{H}}$$

geschrieben werden, wobei H eine hermitesche n×n-Matrix ist. Wegen

$$H_{ii}^* = H_{ii}$$
 , $H_{ij}^* = H_{ji}$

besitzt diese Matrix \mathbf{n}^2 unabhängige reelle Parameter.

Die Determinante der Matrix U ist eine komplexe Zahl vom Betrag 1:

$$|det(\mathbf{U})| = 1.$$

Die Gruppe U(n) stellt eine (kompakte) Lie-Gruppe dar.

Bei der Gruppe SU(n), der speziellen unitären Gruppe in n Dimensionen, fordert man neben der Unitarität noch Unimodalität:

$$det(\mathbf{U}) = 1.$$

Mithilfe der Determinanten-Spur-Beziehung

$$det(\mathbf{U}) = e^{iSp\mathbf{H}}$$

findet man, dass diese Bedingung genau für

$$Sp(\mathbf{H}) = 0, 2\pi, ...$$

erfüllt ist. Diese zusätzliche Bedingung reduziert die unabhängigen reellen Parameter auf $\rm n^2\text{-}1.$

Die Gruppe SU(n) bildet eine Untergruppe der U(n):

$$SU(n) \subset U(n)$$

1.2 Die Generatoren der SU(3)

Als Basis für die hermiteschen, spurlosen n×n-Matrizen ${\bf H}$ wählte Gell-Mann die sogenannten λ -Matrizen:

$$\lambda_{1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \lambda_{2} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \lambda_{3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \lambda_{5} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \lambda_{6} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_{7} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \lambda_{8} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

(ijk)	f_{ijk}
123	1
147	1/2
156	-1/2
246	1/2
257	1/2
345	1/2
367	-1/2
458	$\sqrt{\frac{3}{2}}$
678	$\sqrt{\frac{3}{2}}$

Abbildung 1: Strukturfaktoren f_{ijk}

Die Matrizen λ_1 , λ_2 und λ_3 wurden aus den Pauli-Matrizen durch Einfügen von Nullkomponenten in der dritten Zeile und Spalte entwickelt. Bei den Matrizen λ_4 bis λ_7 wurden jeweils in der zweiten Zeile und Spalte bzw. in der ersten Zeile und Spalte Nullen eingefügt. Zwei der n²-1=8 Basismatrizen, λ_3 und λ_8 , besitzen Diagonalform, d. h. Rang SU(3)=2.

Mithilfe dieser λ -Matrizen läßt sich die Matrix U gemäß der Einstein´schen Summenkonvention in der Form

$$\mathbf{U} = e^{i\alpha_j \frac{\lambda_j}{2}}$$

ausdrücken.

Nun definiert man die Generatoren:

$$F_i = \frac{\lambda_i}{2}.$$

Durch die Vertauschungsrelation

$$[F_i, F_i] = i f_{ijk} F_k$$

wird eine Lie-Algebra definiert, welche auch als F-Spin-Algebra bezeichnet wird. Die sogenannten Strukturfaktoren \mathbf{f}_{ijk} sind total antisymmetrisch unter der Vertauschung zweier benachbarter Indizes. Die nichtverschwindenden Strukturfaktoren \mathbf{f}_{ijk} sind in Tabelle 1 angegeben. Für den Antikommutator zweier Generatoren gilt:

$$\{F_i, F_j\} = \frac{2}{3}\delta_{ij}\mathbf{1} + 4d_{ijk}F_k$$

Die Faktoren d_{ijk} sind in diesem Fall total symmetrisch.

Weiter definiert man:

$$T_{\pm} = F_1 \pm iF_2$$

$$U_{\pm} = F_6 \pm iF_7$$

$$V_{\pm} = F_4 \pm iF_5$$

$$T_3 = F_3$$

$$Y = \frac{2}{\sqrt{3}}F_8$$

Der Operator T_3 wird später der dritten Isospin-Komponente zugeordnet und der Operator Y der Hyperladung Y=B+S, welche über die Gell-Mann-Nishima-Relation

$$Q = \frac{1}{2}Y + T_3$$

mit der Ladung Q und der dritten Isospinkomponente verknüpft ist.

Die so definierten Operatoren erfüllen folgende Vertauschungsrelationen:

$$\begin{split} [T_3,T_\pm] &= \pm T_\pm \quad ; \quad [T_3,U_\pm] = \mp \frac{1}{2}U_\pm \quad ; \quad [T_3,V_\pm] = \pm \frac{1}{2}V_\pm \\ [Y,T_\pm] &= 0 \quad ; \quad [Y,U_\pm] = \pm U_\pm \quad ; \quad [Y,V_\pm] = \pm V_\pm \\ [T_+,T_-] &= 2T_3 \\ \\ [V_+,V_-] &= \frac{3}{2}Y - T_3 \equiv 2V_3 \quad ; \quad [U_+,U_-] = \frac{3}{2}Y + T_3 \equiv 2U_3 \\ [T_+,V_+] &= [T_+,U_-] = [U_+,V_+] = 0 \\ [T_+,V_-] &= -U_- \quad [T_+,U_+] = V_+ \\ [U_+,V_-] &= T_- \quad [T_3,Y] = 0 \end{split}$$

Man sieht, dass die Operatoren T_3 , T_+ , T_- die SU(2)-Isospin-Algebra erfüllen. Sie bildet damit eine Unteralgebra der SU(3)-Algebra. Ebenso erfüllen die Operatoren U_3 , U_+ , U_- und V_3 , V_+ , V_- die Isospin-Algebra. Die drei Algebren sind, wie den obigen Kommutatorrelationen zu entnehmen ist, miteinander verkoppelt. SU(3)-Multipletts bestehen also aus verkoppelten T_- , V_- und U_- Multipletts.

Wegen $[\hat{T}_3, \hat{Y}]=0$ können die Multiplettzustände durch die Eigenwerte T_3 und Y charakterisiert werden:

$$|T_3Y\rangle$$

Die zugehörigen Eigenwertgleichungen lauten:

$$\hat{T}_3|T_3Y\rangle = T_3|T_3Y\rangle$$

 $\hat{Y}|T_3Y\rangle = Y|T_3Y\rangle$

Wir wollen uns nun die Wirkung der Shift-Operatoren auf einen Zustand $|T_3Y\rangle$ anschauen. Als Beispiel betrachten wir

$$\hat{T}_3(\hat{V}_{\pm}|T_3,Y\rangle) = (\hat{V}_{\pm}\hat{T}_3 \pm \frac{1}{2}\hat{V}_{\pm})|T_3Y\rangle = (T_3 \pm \frac{1}{2})(\hat{V}_{\pm}|T_3Y\rangle).$$

(Dabei haben wir ($[\widehat{T}_3,\widehat{V}_\pm]=\pm\frac{1}{2}\widehat{V}_\pm$ verwendet.)

 \hat{V}_{\pm} bewirkt also eine Erhöhung bzw. Verringerung der Quantenzahl T₃ um $\pm \frac{1}{2}$. Darüber hinaus erhält man:

- \hat{U}_{\pm} verändert QZ T₃ um $\mp \frac{1}{2}$
- \hat{T}_+ verändert QZ T_3 um ± 1
- \hat{V}_{\pm} verändert QZ Y um ± 1
- \hat{U}_{\pm} verändert QZ Y um ± 1
- \hat{T}_+ verändert QZ Y nicht

Abbildung 2 illustriert die Wirkung der Operatoren in der Y- T_3 -Ebene. Die Skalierung ist dabei so gewählt, dass die Winkel zwischen den durch die Operatoren definierten Linien 60° betragen.

Die T-, V- und U-Untermultipletts erstrecken sich jeweils parallel zu den eingezeichneten Linien.

Durch Anwendung der Leiteroperatoren auf irgendeinen Zustand einer irreduziblen Darstellung kann jeder Zustand derselben Darstellung erreicht werden. Die Darstellung ist festgelegt, wenn die besetzten Stellen und die Anzahl der Besetzung bestimmt sind.

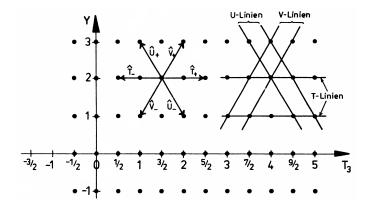


Abbildung 2: Operatordiagramm [GM85]

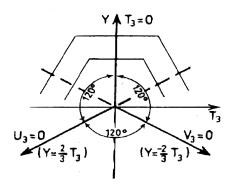


Abbildung 3: Symmetrieachsen der Darstellung [GM85]

1.3 Die Gestalt der Darstellung von SU(3)-Multipletts

Für die geometrische Form eines irreduziblen SU(3)-Multipletts gilt:

- Die Gestalt weist eine 120° -Symmetrie auf. Der Grund hierfür ist, dass die T-Untermultipletts symmetrisch zur T_3 =0-Achse, die U-Untermultipletts symmetrisch zur U_3 =0-Achse und die V-Untermultipletts symmetrisch zur V_3 =0-Achse liegen. Diese drei Achsen schließen miteinander 120° -Winkel ein (vgl. Abb. 3).
- Der Rand der Darstellung ist immer konvex.

 (Dies kann mithilfe der Vertauschungsrelationen bewiesen werden.)

Insbesondere ist damit der Ursprung Mittelpunkt eines jeden SU(3)-Multipletts.

Ein SU(3)-Multiplett hat entweder Drei- oder Sechseckgestalt. Zwölfecke (oder höhere), welche mit unseren gerade gemachten Aussagen ebenfalls kompatibel sind, werden dadurch ausgeschlossen, dass uns mit unseren Operatoren nur sechs Richtungen (jeweils zwei davon antiparallel) zur Verfügung stehen.

Zur Bestimmung des Randes betrachten wir nun den sogenannten Zustand mit maximalem Gewicht

$$\Phi(T_{3,max},Y) = \Phi_{max}.$$

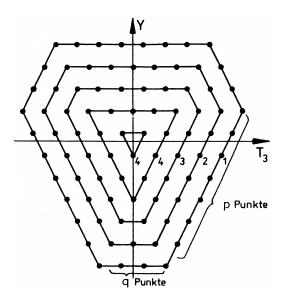


Abbildung 4: (7,3)-Darstellung [GM85]

Er zeichnet sich durch

$$\widehat{T}_{+}\Phi(T_{3,max},Y)=0.$$

aus. Nun wendet man V_ auf Φ_{max} an bis

$$(\widehat{V}_{-})^{p+1}\Phi_{max} = 0.$$

Auf den Zustand $(\widehat{V}_{-})^{p}\Phi_{max}=0$ wendet man hiernach \widehat{T}_{-} an bis

$$(\widehat{T}_{-})^{q+1}(\widehat{V}_{-})^{p}\Phi_{max} = 0$$

Von hier ab ist das weitere Vorgehen durch die 120°-Symmetrie der Darstellung vorherbestimmt. Mit den nun folgenden Aussagen über die Anzahl der Besetzung der Gitterpunkte ist die Darstellung durch die Angabe von (p,q) eindeutig charakterisiert.

Jeder Gitterpunkt auf der Randlinie ist einfach besetzt. Beim Übergang zur nächstinneren Linie erhöht sich die Multiplizität um 1 bis eine Dreiecksform erreicht ist. Dann verändert sich die Multiplizität beim Übergang zur nächstinneren Linie nicht mehr. (vgl. Abb. 4)

2 Die SU(3) und das Quarkmodell

Die fundamentale Annahme des Quarkmodells ist, dass es sich bei Mesonen um Quark-Antiquark-Zustände und bei Baryonen um Drei-Quark-Zustände handelt. D. h. unter Vernachlässigung der Orts- und Spinwellenfunktionen:

Mesonen
$$\sim q\bar{q}$$

Baryonen
$$\sim qqq$$

Die beobachteten Hadronen entsprechen dann den Eigenzuständen des Hamiltonoperators der starken Wechselwirkung. Das Ziel ist es nun, mithilfe der gruppentheoretischen Überlegungen Aussagen über das Hadronen-Spektrum zu machen ohne dafür eine Schrödinger-Gleichung lösen zu müssen.

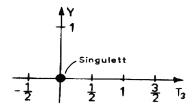


Abbildung 5: Singulett-Darstellung [GM85]

Gegenstand dieses Vortrags ist die SU(3)-Flavor-Symmetrie. Auf die SU(3)-Farb-Symmetrie soll hier nicht eingegangen werden.

Wir betrachten eine idealisierte Welt mit drei Quarkflavors up, down und strange unter folgenden beiden Annahmen:

- Flavor-Universalität der starken Kräfte
 d. h. die starke WW macht keinen Unterschied zwischen Quarks verschiedener
 Flavor.
- Gleichheit der Massen von u-, d-, s-Quark Diese zweite Forderung ist wie wir wissen nicht realistisch. Tatsächlich sind die Massen von up- und down-Quark ähnlich (3-4 MeV), die des strange-Quarks aber wesentlich größer (7-8 MeV).

Unter diesen Annahmen ist der Hamiltonoperator der starken WW invariant unter SU(3)-Transformationen der Quarks.

2.1 Darstellungen der SU(3)

2.2 Die kleinste nichttriviale Darstellung

Die kleinste, aber auch triviale Darstellung der SU(3) ist die Singulettdarstellung (0,0) mit Y=0, $T_3=0$ und Q=0. (vgl. Abb. 5)

Mit der trivialen Darstellung können keine höheren Multipletts aufgebaut werden. Deswegen wollen wir jetzt die kleinste nichttriviale Darstellung suchen. Bei der SU(2) war dies das Dublett mit $T=\frac{1}{2}$ und $T_3=\pm\frac{1}{2}$. Dieses Dublett muss im gesuchten Multiplett enthalten sein und wegen der Gleichberechtigung der drei Unteralgebren zusätzlich noch ein U- und ein V-Dublett. Zusammen mit den vorherigen Überlegungen zur allgemeinen Gestalt von SU(3)-Multipletts ergeben sich die in Abbildung 5 gezeigten Darstellungen.

Abbildung 6 zeigt die 3-Darstellung, nach welcher die Quarks transformieren. Die Quantenzahlen Y, T₃, S und Q sind in der Tabelle angegeben. Die Antiquarks transformieren nach der 3*-Darstellung (Abb. 7). Ihre Quantenzahlen weisen jeweils ein anderes Vorzeichen als die der Quarks auf.

	u	d	S
I_3	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
Y	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$
S	0	0	-1
Q	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$

	\overline{u}	\overline{d}	\overline{s}
I_3	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Y	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
S	0	0	1
Q	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

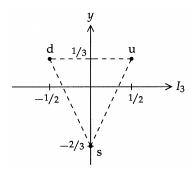


Abbildung 6: 3- bzw. (1,0)-Darstellung: Quarks[Wei06]

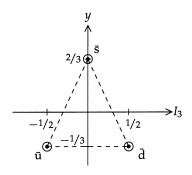


Abbildung 7: 3*- bzw. (0,1)-Darstellung: Antiquarks[Wei06]

Im Folgenden soll mithilfe der elemantaren Darstellungen 3 und 3^* höhere Multipletts konstruiert werden.

Beim Isospin hatten wir das schon erwähnte fundamentale Dublett, aus dem mittels sukzessiver Kopplung höhere Multipletts aufgebaut werden können:

$$\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 1 \oplus 0$$

$$\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \oplus \frac{1}{2} \oplus \frac{1}{2}$$

2.2.1 Mesonen

Bei einem Meson handelt es sich um einen Quark-Antiquark-Zustand, d. h. unsere Aufgabe ist es jetzt, das Produkt der irreduziblen Darstellungen 3 und 3^*

$$3 \otimes 3^*$$

auszureduzieren. Die Ausreduktion erfolgt graphisch. Wir haben zwei additive Quantenzahlen T_3 und Y. Wie in Abbildung 8 illustriert wird auf die drei besetzten Gitterpunkte der 3-Darstellung jeweils der Mittelpunkt einer 3*-Darstellung gesetzt. Man erhält eine Sechseckstruktur, deren Stellen jeweils einfach besetzt sind und drei Zustände im Ursprung. Hiervon können gemäß den im ersten Teil vorgestellten Regeln für die Besetzungszahlen jedoch nur zwei zur äußeren Linie gehören. Wir erhalten somit ein Oktett und ein Singulett:

$$3\otimes 3^* = 8 \oplus 1$$

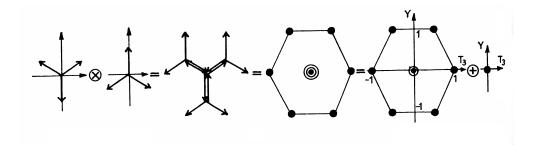


Abbildung 8: Reduktion von 3 $\otimes 3^*[\mathrm{GM}85]$

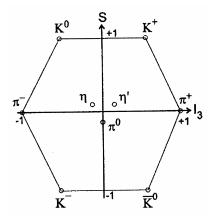


Abbildung 9: Mesonenoktett und -singulett [Wei06]

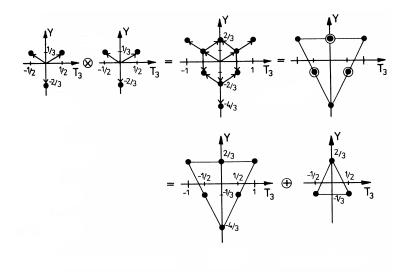


Abbildung 10: Reduktion von 3⊗3 [GM85]

In Abbildung 9 ist das Mesonennonett für pseudoskalare Mesonen (0^-) dargestellt. Für den Quarkgehalt der Mesonen gilt:

$$\pi^{+} \sim u\overline{d}$$

$$\pi^{0} \sim \frac{1}{\sqrt{2}}(u\overline{u} - d\overline{d})$$

$$\pi^{-} \sim d\overline{u}$$

$$K^{+} \sim u\overline{s}$$

$$\overline{K}^{0} \sim d\overline{s}$$

$$\overline{K}^{0} \sim s\overline{d}$$

$$K^{-} \sim s\overline{u}$$

$$\eta_{8} \sim \frac{1}{\sqrt{6}}(u\overline{u} + d\overline{d} - 2s\overline{s})$$

$$\eta_{1} \sim \frac{1}{\sqrt{3}}(u\overline{u} + d\overline{d} + s\overline{s})$$

Alle bisher beobachteten Mesonen aus u-, d-, s-Quarks passen in Singulett- oder Oktett-Darstellungen der SU(3).

2.2.2 Baryonen

Im Falle der Baryonen, Drei-Quark-Zuständen, muss das Produkt

$$3\otimes 3\otimes 3$$

ausreduziert werden. Dazu betrachtet man zunächst das Produkt zweier 3-Darstellungen. Die Ausreduktion hiervon ist in Abbildung 10 dargestellt. Man erhält eine 6- und eine 3^* -Darstellung:

$$(3 \otimes 3) \otimes 3 = (6 \oplus 3^*) \otimes 3$$

Es gilt Distributivität. Das Produkt aus 3- und 3*-Darstellung ist von den Mesonen bekannt. Reduzieren wir also noch das Produkt $6\otimes 3$ aus. Dies ist in Abbildung 11 dargestellt. Man erhält ein Dekuplett sowie ein weiteres Oktett. Insgesamt gilt also:

$$3\otimes 3\otimes 3=1\oplus 8\oplus 8\oplus 10$$

d. h. Baryonen treten als Singuletts, Oktetts oder Dekupletts auf.

Abbildung 12 zeigt das leichteste Baryonenoktett $(\frac{1}{2}^+)$ und -dekuplett $(\frac{3}{2}^+)$.

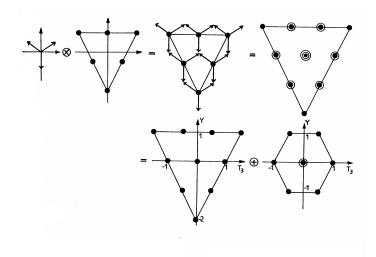


Abbildung 11: Reduktion von $3{\otimes}6$ [GM85]

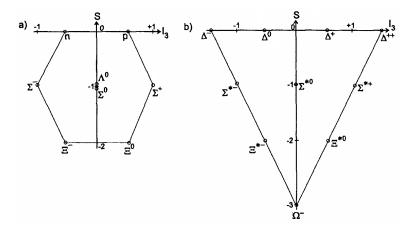


Abbildung 12: Leichtestes Baryonenoktett $(\frac{1}{2}^+)$ und -dekuplett $(\frac{3}{2}^+)$ [Wei06]

2.3 Einordnung in die Geschichte der starken Wechselwirkung

1938 erweiterte Kemmer den 1932 von Heisenberg für die Nukleonen eingeführten Begriff des Isospins auf Mesonen. Dabei postulierte er, dass die π -, oder Yukawa-Mesonen, ein Isotriplett mit I=1 bilden.

Die weitere Entwicklung wurde durch folgende Problematik eingeleitet. Die experimentell gemessene Lebensdauer sogenannter V-Teilchen (Mesonen, λ -Hyperonen etc.) wich um viele Größenordnungen von den theoretisch für einen starken Zerfall erwarteten ab. Dies führte zur Einführung einer neuen Quantenzahl, der Strangeness S. Neben den äußeren Quantenzahlen Spin und Parität wurden die Hadronen nun durch die inneren Quantenzahlen Ladung Q, Baryonenzahl B, Isospin I bzw. I $_3$, Strangeness S und Hyperladung Y=B+S beschrieben.

Der Isospin und die Hyperladung stellten die Erzeugende einer Invarianzgruppe der starken Wechselwirkung dar (SU(2)×U(1)). Hiermit konnten aber keine Zusammenhänge zwischen K- und π -Mesonen, λ -Hyperonen und Nukleonen hergestellt werden.

Der Wunsch nach einer einheitlichen Theorie veranlasste Gell-Mann und Ne´eman 1961 dazu, die Hadronen nach SU(3)-Darstellungen zu klassifizieren ("achtfacher Weg´´). Damit gelang es ihnen, alle damals bekannten Hadronen einzuordnen, sowie z. B. die Vorhersage des später entdeckten Ω^- .

Allerdings waren die Teilchen, welche sich nach der einfachsten nichttrivialen Darstellung transformieren, unbekannt. Sie wurden 1964 von Gell-Mann und Zweig postuliert, wobei Gell-Mann sich mit der Benennung Quarks durchsetzte. Dieses Postulat stand im Gegensatz zur damaligen Lehrmeinung, welche eine Aufspaltung der Hadronen in Konstituenten vermeiden wollte.

3 Literatur

- Stephen Gasiorowicz: Elementarteilchenphysik, B.I.-Wissenschaftsverlag 1975 [Gas75]
- Max Wagner: Gruppentheoretische Methoden in der Physik, Vieweg 1998 [Wag98]
- Christoph Berger: Elementarteilchenphysik: Von den Grundlagen zu den modernen Experimenten, Springer 2002 [Ber02]
- Walter Greiner, Berndt Müller: Theoretische Physik Band 5: Quantenmechanik II: Symmetrien, Verlag Harri Deutsch, 1985 [GM85]
- Otto Nachtmann: Elementarteilchenphysik: Phänomene und Konzepte, Vieweg 1986 [Nach86]
- Christian Weinheimer: Skript zur Vorlesung Kern- und Teilchenphysik, 2006 [Wei06]