

Versuch E2: Signale auf Leitungen

1 Ziel

In diesem Versuch sollen die Leitungskonstanten R , L , G , C und α verschiedener Koaxialkabel bestimmt werden, sowie die Ausbreitung von Pulsen auf Leitungen (z.B. Reflexion, Dispersion) und ihr Verhalten bei reellen und komplexen Leitungsabschlüssen untersucht werden.

2 Stichworte

Telegraphengleichung, Leitungskonstanten, Skin-Effekt, Dämpfung, Dispersion, Impedanz, Wellenwiderstand, Phasengeschwindigkeit, Impulsdiagramm, Laplace-Transformation, Reflexion, Smith-Diagramm, Übertragungsleitung

3 Theoretische Grundlagen

Die elektrischen Eigenschaften einer verlustlosen Leitung lassen sich durch eine Spule L und einem Kondensator C modellieren (Abb.1). In realen Leitern erfolgt durch den elektrischen Widerstand des Leitermaterials, und durch die Leitfähigkeit und dielektrische Verluste im Isolator zwischen den Leitern eine Dämpfung des Signals, sodaß das Ersatzschaltbild einer verlustbehafteten Leitung durch den Kapazitätsbelag (C), den Induktivitätsbelag (L), den ohmschen Belag (R) und den Querleitfähigkeitsbelag (G) charakterisiert wird. Der "Längsspannungsverlust" wird durch den Widerstandsbelag R und die "Querstromverluste" durch den Leitwertbelag G berücksichtigt. Bei den meisten Leitungen mit metallischen Leitern überwiegen die ohmschen Verluste gegenüber den dielektrischen.

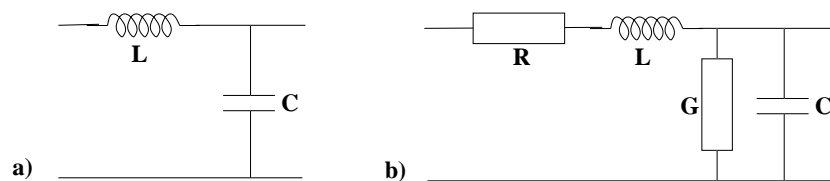


Abbildung 1: Ersatzschaltbild einer verlustfreien (a) und einer verlustbehafteten (b) Leitung.

Betrachtet man die Ausbreitung von Strom und Spannung auf verlustbehafteten Leitungen, so läßt sich die Ausbreitung einer elektromagnetischen Welle durch die Wellengleichung (Telegraphengleichung)

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = L C \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + (LG + RC) \frac{\partial U}{\partial t} + R G U \quad (1)$$

beschreiben.¹ Die Lösungen der Telegraphenleitung sind gedämpfte, harmonische, ein- bzw. rücklaufende Wellen für Strom und Spannung zur Zeit t am Ort z der Leitung

$$U(z, t) = U e^{-\gamma z} e^{i\omega t} \quad (2)$$

Dabei ist $\gamma = \alpha + j\beta = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)}$ die *Ausbreitungskonstante*, mit α Dämpfungsbelag und β Phasenbelag. Die frequenzabhängige Phasengeschwindigkeit (Dispersion) eines Signals führt bei einer verlustbehafteten Leitung zu dessen Verzerrung. Diese ist vom Aufbau (Koaxial, Mikrostrip,...) und dem Wellenwiderstand Z_0 der Leitung abhängig. Bei gleichbleibender Geometrie des Kabels ist der Wellenwiderstand Z_0 an jeder Stelle z des Kabels konstant. Er ist für ein sinusförmiges Signal mit der Frequenz ω als Quotient aus der komplexen Spannungsamplitude und der komplexen Stromamplitude des Signals definiert.

$$Z_0 = \frac{U(\omega)}{I(\omega)} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \quad (3)$$

Bei einem verlustlosem Kabel mit $R=G=0$ ist die Phasengeschwindigkeit $v = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ unabhängig von der Frequenz, so daß die Form eines beliebigen Signals erhalten bleibt (dispersionsfreie Ausbreitung) bzw. die Fourierkomponenten eines Signals ihre Phasenlage zueinander beibehalten.

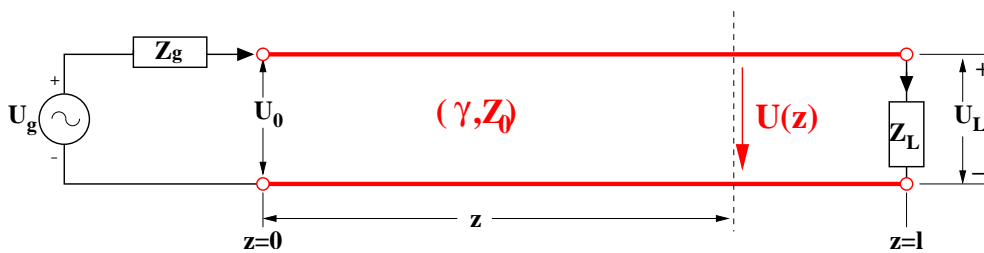


Abbildung 2: Eine Leitung mit Generator und Abschlußwiderstand Z_L

¹Für die Herleitung der Telegraphengleichung muß man den Stromverlauf und den Spannungsverlauf im Ersatzschaltbild betrachten

Vielfach ist es nützlich das Verhalten von Spannung- und Strompulsen auf Übertragungsleitungen zu untersuchen (Digital- und Nachrichtentechnik). Betrachtet man einen Spannungspuls auf einer Leitung, so ist die Lösung der Telegraphenleitung ein hin- und rücklaufender Puls, der sich mit der Phasengeschwindigkeit v fortbewegt. Die rücklaufende Welle entsteht durch Reflektion des hinlaufenden Pulses am Leitungsende. Bei Übertragungsleitungen mit einer Quelle und einer Last am Abschluß (Abb.2) wird das Signal $U(z,t)$ neben der charakteristischen Impedanz Z_0 durch die Quellenimpedanz Z_g und die Lastimpedanz Z_L des Leitungskreises beeinflusst. Die Gesamtspannung U_L am Lastwiderstand ist dann die Vektorsumme des Eingangspulses U_0 und des reflektierten Pulses U_r . Der Reflektionsfaktor Γ ist dabei das Verhältnis der Spannung des reflektierten Pulses U_r und des Eingangspulses U_0 am Ende der Leitung.

$$\Gamma = \frac{U_r}{U_0} = \frac{Z_L - Z_0}{Z_L + Z_0} = |\Gamma| e^{i\varphi_\Gamma} \quad (4)$$

Analog kann der Reflektionsfaktor auch über die Lastimpedanz Z_L und den Wellenwiderstand Z_0 definiert werden. Gilt $Z_L = Z_0$ dann ist $\Gamma = 0$ und es gibt keine reflektierte Welle, d.h. die Leitung ist angepaßt.

Wie aus Gl.4 ersichtlich erfährt der reflektierte Puls im Allgemeinen am Leitungsende einen Phasensprung φ_Γ . Der Verlauf der reflektierten Signalspannung $U_r(z,t)$ läßt sich aus der Impulsdarstellung mit einer Laplace-Transformation

$$\mathcal{L} = \int_0^\infty f(t) e^{-(a+jb)t} dt \quad (5)$$

analytisch berechnen. Die Signalspannung in Ortsdarstellung ist dann die Laplacetransformierte der hinlaufenden Welle $U_h(p)$ und des Reflektionskoeffizienten $\Gamma(p)$ in der Impulsebene.

$$U_r(t) = \mathcal{L}^{-1}\{U_r(p)\} = \mathcal{L}^{-1}\{\Gamma(p) \cdot U_h(p)\} \quad (6)$$

Verwendet man zum Beispiel als Eingangspuls einen idealen Spannungspuls $U_h(p) = U_0/p$ und als Abschlußimpedanz eine Induktivität L , so gilt $\Gamma(p) =$

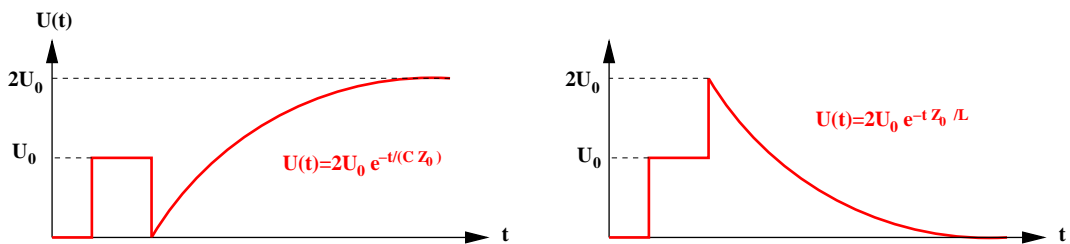


Abbildung 3: Zeitlicher Verlauf der Signalspannung U für eine Spule (links) und einen Kondensator (rechts) als Abschlußwiderstand.

$\frac{pL-Z_0}{pL+Z_0}$ und man erhält einen rücklaufenden Spannungspuls

$$U_r(t) = -U_0 + 2U_0 e^{-t/T} \quad (7)$$

mit der Zeitkonstante $T = L/Z_0$ (Abb.4). Aus den Signalformen kann man so die Impedanzen der Übertragungsleitung bestimmen.

Befinden sich mehrere Störstellen in einer Meßanordnung, so empfiehlt sich ein Weg-Zeit-Diagramm (Impulsfahrplan), das Spannungsänderungen den Störstellen zuordnet. Betrachtet man einen Rechteckpuls mit einer Amplitude U_0 , dann wird nach Eintreffen des Pulses am Leitungsende zum Zeitpunkt t eine zweite Welle durch Reflektion am Leitungsende mit der Amplitude

$$U_a = \Gamma_a \cdot \Gamma_e \cdot U_0 \quad (8)$$

erzeugt. Nach der Zeit $2T$ trifft dieser Puls am Leitungsanfang an und wird mit der Amplitude $\Gamma_a \cdot \Gamma_e \cdot U_0$ reflektiert, wobei Γ_a und Γ_e die Reflektionskoeffizienten am Anfang und am Ende der Leitung sind. Nach n -facher Reflexion ist die Amplitude des Ausgangspulses U_e an der Stelle z der Übertragungsleitung die Summe aller reflektierten Pulse

$$U_e = U_0 + \Gamma_L U_0 + \Gamma_L \Gamma_g U_0 + \dots + \Gamma_L^n \Gamma_g^m U_0 \quad (9)$$

die sich als geometrische Reihe dem Grenzwert

$$U_e = U_0 \left(\frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma_a \Gamma_e} \right) \quad (10)$$

annähert. Abb.3 und Abb.4 zeigen als Beispiel einen Impulsfahrplan und den zeitlichen Spannungsverlauf $U(z, t)$ für eine Leitung der Länge l , die mit einem Ohmschen Widerstand abgeschlossen ist (Abb.2). Abb. 4 zeigt, daß am Leitungsanfang ein idealer Spannungspuls auf die Übertragungsleitung gegeben wird, der zur Zeit t_1 beobachtet wird. Nach Reflektion am Leitungsende trifft der rücklaufende Puls $\Gamma_L U_0$ zur Zeit t_2 am Meßpunkt ein und man beobachtet die Amplitude $U_0 + \Gamma_L U_0$. Danach wird er wieder reflektiert, bis er die Grenzamplitude U_e erreicht. Bei mehreren Störstellen in der Leitung

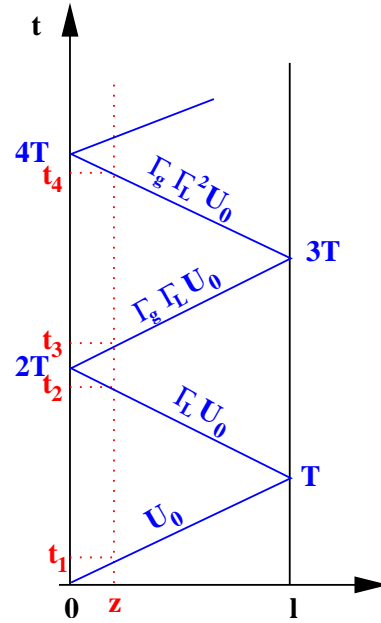


Abb. 3: Impulsfahrplan

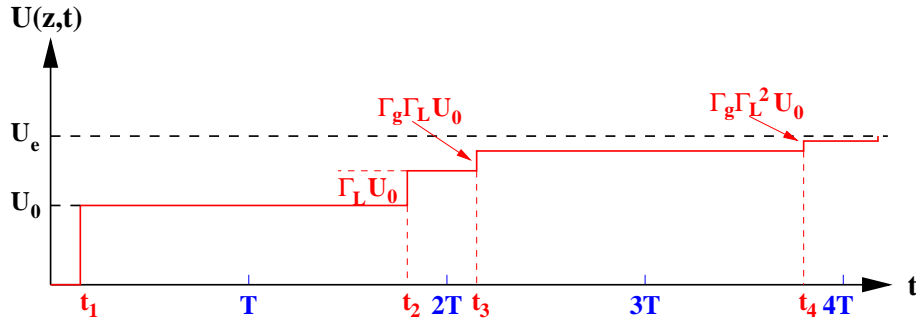


Abbildung 4: Zeitlicher Verlauf der Signalspannung $U(z,t)$ am Punkt z einer Leitung (Abb.2).

wird analog verfahren, zuerst wird ein Impulsfahrplan aufgestellt und danach der zeitliche Spannungsverlauf konstruiert.

In diesem Experiment wird das Verhalten transversaler elektromagnetischer Wellen (TEM) auf Leitungen am Beispiel des Koaxialkabels betrachtet. Das Koaxialkabel besteht aus zwei zylinderförmigen ineinander gesteckten Leitern mit Durchmessern d und D , die durch ein Dielektrikum voneinander getrennt sind. Sowohl der Wellenwiderstand des Kabels als auch das Dämpfungsverhalten des Koaxialkabels hängen stark vom Verhältnis der Leiterdurchmesser ab. Der Leiterwiderstand R und der Querleitwert G , der die Verluste im Dielektrikum berücksichtigt, werden bei hohen Frequenzen frequenzabhängig. Eine stromdurchflossene Leitung baut auch im Inneren des Leiters ein Magnetfeld auf, daß periodisch seine Richtung ändert und so Wirbelströme erzeugt. Diese Wirbelströme verdrängen den Wechselstrom im

Parameter	Koaxial-Kabel	Einheit
Widerstandsbelag R	$\frac{R_s}{2\pi} \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{D} \right)$	Ω/m
Induktivitätsbelag L	$\frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{D}{d}$	H/m
Querleitwertbelag G	$\frac{2\pi\sigma}{\ln(D/d)}$	S/m
Kapazitätsbelag C	$\frac{2\pi\epsilon}{\ln(D/d)}$	F/m

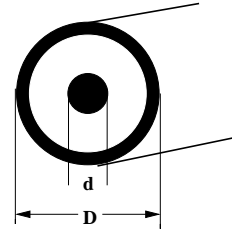


Tabelle 1: Leitungskonstanten für Koaxial-Kabel, mit $R_s = \sqrt{\pi \nu \mu_c / \sigma_c}$ und $\sigma_c = \omega \Im(\epsilon)$

Leiterinnerem zur Leiteroberfläche (Skin-Effekt), sodaß sich bei hohen Frequenzen der effektive Leitungsquerschnitt verringert und der Widerstand R bei Koaxialkabeln bei Frequenzen oberhalb von ca. 100 kHz einer $\sqrt{\omega}$ -Abhängigkeit gehorcht.

Bei der Anpassung von Impedanzen ist es nützlich ein Smith-Diagramm zu verwenden. In den hier durchgeführten Versuchen kann in erster Näherung eine verlustlose Leitung angenommen werden. Hierbei werden die Koordinaten des Imaginärteil und Realteil der Impedanzen aus der Impulsebene in die Reflexions-ebene transferiert. Dabei werden die karthesischen Koordinatenlinien der Impulsebene in Kreise transferiert (Möbiustransformation), die im Smith-Diagramm durch den Punkt $\Gamma = 1$ verlaufen. Durch Einsetzen der normierten Impedanz

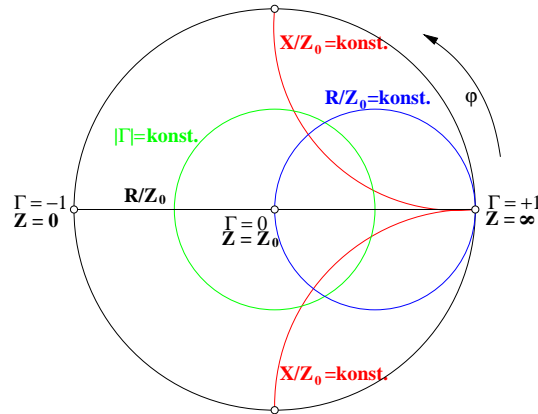


Abb. 5: Smith-Diagramm in Impedanzdarstellung

$$z_L = \frac{Z_L}{Z_0} = \frac{R_L}{Z_0} + j \frac{X_L}{Z_0} = r + j x \quad (11)$$

ins Smith-Diagramm kann z.B. der Reflexionsfaktor direkt abgelesen werden. Hierzu wird die Impedanz Z_L auf den Wellenwiderstand des Kabels normiert und in das Impedanzkoordinatensystem eingetragen. Durch Wechseln in das Reflexionskoordinatensystem können der Realteil und der Imaginärteil sowie die Phase des Reflexionsfaktors abgelesen werden. Hierbei ist zu beachten, daß eine positive Phase im Uhrzeigersinn eingetragen wird.

Beispiel: Bestimmen Sie den Reflexionsfaktor Γ einer Leitung mit Abschlußimpedanz $Z_L = (50 + 100j)\Omega$ und Wellenwiderstand $Z_0 = 50 \Omega$.

- Normieren der Abschlußimpedanz auf den Wellenwiderstand

$$z_L = \frac{Z_L}{Z_0} = \frac{(50 + 100j)\Omega}{50\Omega} = 1 + 2j \quad (12)$$

- Eintragen von z_L ins Smith-Diagramm (Punkt P in Abb.6)
- Ablesen des Reflektionsfaktors: $|\Gamma| = 0.55$ und $\varphi = 46^\circ$

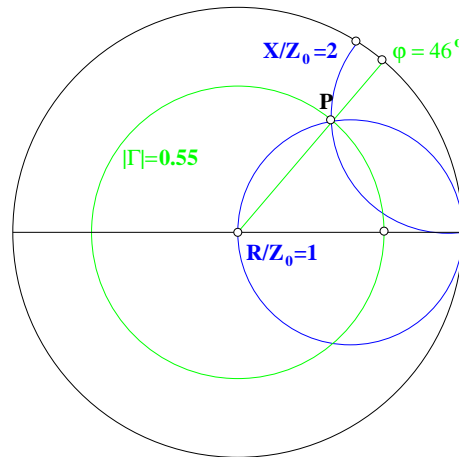


Abbildung 6: Smith-Diagramm in Impedanzdarstellung für eine Abschlußimpedanz $z_L = 1 + 2j$.

4 Vorbereitung

- Berechnen sie die Leitungskonstanten (L, C, R, G), die Dämpfung α und die Phasengeschwindigkeit v für ein RG-58C/U Kabel ($d=0.9$ mm, $D=2.95$ mm, $\epsilon_r = 2.25$).
- Berechnen sie den zeitlichen Verlauf der Signalspannung $U(t)$ für eine Induktivität oder eine Kapazität unter Zuhilfenahme der Laplace-Transformation.

5 Aufgaben

- Bestimmen Sie mit einem LRC-Meßgerät die Leitungskonstanten R, L und C in Abhängigkeit von der Frequenz. Berechnen sie G und zeichnen sie R, L, G und C in Abhängigkeit von ω .
- Messen Sie die Dämpfungskonstante α für verschiedene Kabel aus. Hinweis: Um die Dämpfung hochfrequenter Signale auszumessen, kann man die Oberwellen der Fourier-Transformierten eines Eingangspulses mit steiler Flanke (d.h. hohem Oberwellenanteil) ausmessen.

- Bestimmen Sie die Leitungskonstanten aus den Eingangsimpedanzen einer Leitung mit kurzgeschlossenem und offenem Ende. Bestimmen sie aus den reflektierten Pulsen die Länge des Kabels. Benutzen sie zusätzlich ein Smith-Diagramm, um die Eingangsimpedanzen und die Kabellänge zu bestimmen.
- Ermitteln Sie für 3 verschiedene Abschlußwiderstände die Signalspannung. Um welche Bauelemente handelt es sich? Wie groß ist die relative Dielektrizitätskonstante ϵ_r der Meßleitung?
- Erzeugen Sie durch Reihenschaltung eines $50\ \Omega$ und eines $75\ \Omega$ Kabels Mehrfachreflexionen. Bestimmen sie die Reflexionsfaktoren und zeichnen sie einen Impulsfahrplan. Konstruieren Sie den Signalverlauf am Meßpunkt.
- *Für Interessenten:* Erzeugen Sie sich durch Reflektion am Kabelende einen hin- und rücklaufenden Puls, sodaß die Überlagerung einen Rechteckpuls mit 25 ps Anstiegszeit und 50 ns Breite ergibt.

6 Meßmethoden

Für die Messungen stehen ein RLC-Meßgerät (50 Hz - 100 kHz), ein Oszilloskop, ein NIM-Pulser, verschiedene Kabel (RG-58C/U, RG), sowie verschiedene Abschlußwiderstände zur Verfügung. Für die Bestimmung der Leitungskonstanten, wird ein ca. 20 m langes Koaxialkabel kurzgeschlossen und direkt an das RLC-Meßgerät angeschlossen. Überlegen Sie sich anhand des Ersatzschaltbildes eines Koaxialkabels, ob sie die charakteristischen Größen in Reihe oder als Parallelschaltung messen. Für die übrigen Messungen wird

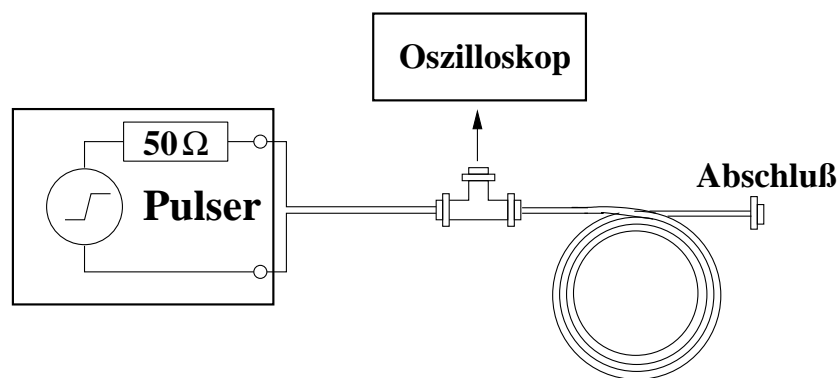


Abbildung 5: Experimenteller Aufbau zur Messung des Spannungsverlaufes

der Aufbau in Abb.7 verwendet. Ein Pulser schickt Pulse auf eine Leitung, deren Spannungsverläufe mit einem Oszilloskop ausgemessen werden. Tip: Für die Bestimmung der Dämpfungskonstanten bzw. der Leitungskonstanten empfiehlt sich der Nim-Pulser als Signalquelle, während für die Reflexionsmessungen ein Rechtecksignal mit möglichst steiler Flanke verwendet werden sollte.

Literatur

- [1] D.K. Cheng, Field and Wave Electromagnetics, Addison-Wesley Publishing (1989).
- [2] W.R. Leo, Techniques for Nuclear and Particle Physics Experiments, Springer Verlag (1994).
- [3] K. Beuth, R. Hanebuth, G. Kurz, Nachrichtentechnik, Vogel Buchverlag (1996).
- [4] E. Phillippow, Grundlagen der Elektrotechnik, Hüthig Verlag (1989).
- [5] H. Weber, Laplace Transformation für Ingenieure der Elektrotechnik, Teubner Studienskripten (1987)
- [6] Jackson, Elektrodynamics, Addison-Wesley

7 Anhang

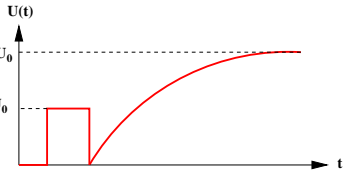
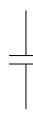
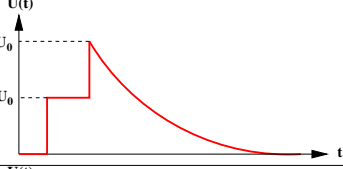

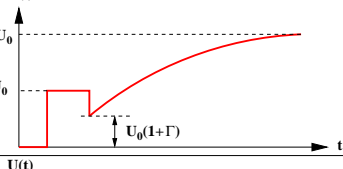

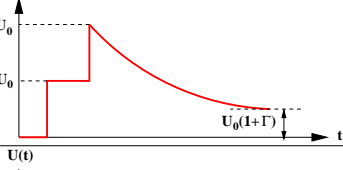

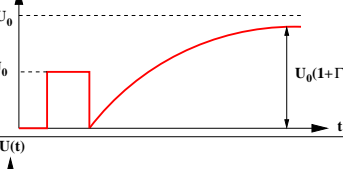
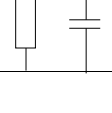
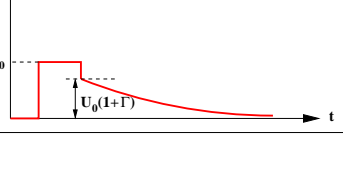
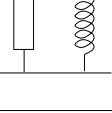
Signalspannung	Abschluß	Zeitkonst.
		$Z_0 C$
		L/Z_0
		$(Z_0 + R)C$
		$L/(Z_0 + R)$
		$(Z_0 // R)C$
		$L/(Z_0 // R)$

Tabelle 2: Signalspannung $U(t)$ und Zeitkonstanten T für verschiedene Abschlußwiderstände

The Complete Smith Chart

Black Magic Design

