

背理法の 練習

著: 数学美食家

暗晦通信団

まずはこの本を手にとってくれたあなたにお礼を。ありがとうございます。きっとあなたは背理法に興味を持っているだろうと思います。そんなあなたを満足させるために私が素晴らしい問題を回収・作成してまいりました。ぜひ、飽きるまで背理法を楽しんで下さい。

<そもそも背理法とは？>

ここであなたが命題 P を示したいとします。背理法とは、「一旦 P を否定し、 P が否定されたときに矛盾が生じることを示す方法により、 P の否定をまた否定して P を肯定する証明法」です。

例) $P =$ 「 C は生きている」

P を否定する。つまり、 C は死んでいると仮定する。このとき、 C はしゃべっているから、「死人に口なし」の定理により矛盾。よって P が示された。

以上です。あとは自分で考えましょう。

【1, 前菜】

(1) $\sqrt{3}$ が無理数であることを示せ.

(2) 8×8 のチェス盤を考える. 任意の相異なるマスにキングを 2 つ置く. このとき, キングを相手のキングをとるように動かすとする. さて, 2 手目以降で勝者は出るだろうか?

(3) $\frac{a^5 - a^2}{a^4 + b + c} \geq \frac{a^3 - 1}{a(a + b + c)}$ を示せ.

【2, メインディッシュ】

(1) $\tan 1^\circ$ は有理数か. (京大)

(2) 1 つの立方体を大きさの異なる 1 つ以上の立方体で分割できないことを示せ.

(3) 四面体 ABCD の面及び内部から一直線上にない P, Q, R の 3 点をとる. このとき, $\triangle PQR$ の面積が四面体の面のうち最大のものを超えないことを示せ. (京大)

【3, デザート】

$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} + \sqrt{e}$ ($a \sim e$ は正の数) が有理数のとき, $\sqrt{a} \sim \sqrt{e}$ の全てが有理数であることを示せ.

はいりほう れんしゅう
背理法の練習

2022 年 8 月 20 日 初版 発行

2022 年 8 月 24 日 第 2 版 発行

2022 年 11 月 17 日 第 3 版 発行

2023 年 9 月 29 日 第 4 版 発行

著 者 数学美食家 (すうがくびしょくか)

発行者 Varjo (ばりお)

発行所 同人集合 暗晦通信団

〒277-0825 千葉県立柏高等学校理数科

頒 価 0 円 / C7041



正誤が知りたい場合は自分で解いた回答を暗晦通信団に送りつけてください。採点します。

本体 0 円

THE DARKNESS COMMUNICATION GROUP