第 1 問 （必答問題）（配点　??）

太郎さんと花子さんが放課後の教室で話している。

花子：ねぇ太郎くん。

太郎：どうしたんだ？

花子：この前友達と遊んでいて，平方根の近似値をみんなで手計算で求めることになったのよ。私は $\sqrt{2}$ を計算したんだけど，私が 3 桁求める間にみんなは倍以上計算し終えていたのよ。一体みんははどう計算していたのかしら。

太郎：なるほどな。それじゃあ今日は，「平方根の近似値の計算方法」について解説するぜ。

花子：お願いします。

太郎：ところで花子さんは，どうやって計算したんだ？

花子：ええと，

〔1〕 $\sqrt{2}$ の近似値を求める。以下，a_n を $\sqrt{2}$ の小数点以下第 n 桁目の数とする。ただし，a_0 は整数部分である。

$a_0^2 \leqq 2 < (a_0+1)^2$ を満たす a_0 を求めると，$a_0 = \boxed{\text{ア}}$ である。

$(a_0 + a_1 \times 10^{-1})^2 \leqq 2 < (a_0 + (a_1+1) \times 10^{-1})^2$ を満たす a_1 を求めると，$a_1 = \boxed{\text{イ}}$ である。同様に，$(a_0 + a_1 \times 10^{-1} + 1 \times 10^{-2})^2 = \boxed{\text{ウエオカキ}}$，$(a_0 + a_1 \times 10^{-1} + 2 \times 10^{-2})^2 = \boxed{\text{クケコサシ}}$ であるから $a_2 = 1$ となり，さらに続けると $a_3 = \boxed{\text{ス}}$ である。よって $\sqrt{2}$ が 3 桁求められた。

（数学総合第 1 問は次ページに続く。）

数学総合

太郎：なるほどな。花子さんは工夫せずに地道に計算していったのか。

花子：そうよ。なにか工夫できる方法があるの？

太郎：もちろんあるぜ。じゃあまずは「ニュートン法」を解説するぜ。

〔2〕

(1) $\sqrt{2}$ を解の一つに持つ二次関数として, $f(x)=x^2-2$ とする。$f(x_0)\neq 0, f'(x_0)\neq 0$ である x_0 を置くと，$x=x_0$ における $f(x)$ の接線の式 $g_1(x)$ は

$$g_1(x)=\boxed{\text{セ}}$$

また，$g_1(x)$ と x 軸の交点の x 座標を x_1 とおくと，

$$\boxed{\text{ソ}}=0$$

が得られる。この式を用いると，x_1 を x_0 を用いて

$$x_1=\boxed{\text{タ}} \qquad \cdots\cdots ①$$

と表せる。

$x=x_1$ における接線の式を $g_2(x)$ とし，$g_2(x)$ と x 軸との交点を x_2 とし，先と同様の操作を繰り返すと①と同様の関係式を得る。

$x=x_n$ における接線の式を $g_{n+1}(x)$ とし，$g_{n+1}(x)$ と x 軸との交点を x_{n+1} として一般化すると，x_n についての漸化式を得られる。

（数学総合第 1 問は次ページに続く。）

$\boxed{\text{セ}}$ の解答群

⓪ $2x(x_0 - x) + x^2 - 2$	① $2x(x_0 - x) - x^2 + 2$
② $2x_0(x - x_0) + {x_0}^2 - 2$	③ $2x_0(x - x_0) - {x_0}^2 + 2$

$\boxed{\text{ソ}}$ の解答群

⓪ $g(x_0)$	① $g(x_1)$	② $g(-x_0)$	③ $g(-x_1)$
④ $g(x_0) - x_0$	⑤ $g(x_1) - x_1$	⑥ $g(-x_0) - x_0$	⑦ $g(-x_1) - x_1$

$\boxed{\text{タ}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{x_0}{2}$	① $\dfrac{3x_0}{2}$	② $x_0 + \dfrac{x_0^2 - 1}{x_0}$
③ $x_0 - \dfrac{x_0^2 - 1}{x_0}$	④ $x_0 + \dfrac{x_0^2 - 2}{2x_0}$	⑤ $x_0 - \dfrac{x_0^2 - 2}{2x_0}$

（数学総合第 1 問は次ページに続く。）

花子：なるほど。この方法では $\boxed{\text{チ}}$ ことで近似を求めるのね。同じようにして，別の関数にも応用できるのかしら。

太郎：そうだな。それじゃあ $\sqrt[3]{2}$ を求めるために $f(x) = x^3 - 2$ としてみようか。

会話文中の $\boxed{\text{チ}}$ については，最も適当なものを次の⓪～③のうちから一つ選べ。

⓪ 接線と x 軸との交点を次々に更新することで真の値に近づける

① 展開式を利用して面積が 2 を超えない正方形をつくる

② 接線の傾きを $\sqrt{2}$ に近づけ座標の比を考える

③ 特殊な手法でナーマギリ女神を召喚する

（数学総合第 1 問は次ページに続く。）

(2)　太郎さんと花子さんは $\sqrt[3]{2}$ の近似を求めるために，$f(x) = x^3 - 2$ として，数列 $\{x_n\}$ についての漸化式

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 2}{3x_n^2}$$

を得た。

花子：ところで，この漸化式で表される数列 $\{x_n\}$ は本当に $\sqrt[3]{2}$ に近づくのかしら。

太郎：それじゃあ，証明してみようか。