トートロジー入門

§0. 本書の構成

本書では、トートロジーというものについて、命題の考え方から数学的に定義する。

トートロジーを wikipedia で調べると、「トートロジーとは同義語または類語または同語を反復させる修辞技法のこと」（wikipedia より・一部略）と掲載されている。しかし、数学的には異なる定義をされるので、この差異についても意識しながら本書を読んでほしい。

なお、本書はこのセクションを含めて 5 つのセクションに分けられている。§1〜3 では最後に読者へ知識の定着を図るために問題を載せているのでぜひ取り組んでほしい。

§1. 命題

トートロジーについて考える前に、まずは命題について考える。命題を次のように定義する。

def 1.1

真偽の定まる文章のこと命題という。

例えば、

① 「4 は 3 より大きい」という命題は真
② 「$x^2+1=0$ を満たす実数 x が存在する」という命題は偽
③ 「1000 は大きな数である」という文章は大きいという表現が曖昧であるために真偽が定まらない。よってこの文章は命題ではない。

また、要素命題というものも定義する。

def 1.2

命題を構成する最小命題を要素命題という。

例えば、次の命題「12 は 4 または 3 の倍数である」は真の命題である。

この命題は、「12 は 4 の倍数である。または、12 は 3 の倍数である。」と言い換えることができる。

このように、命題は複数の命題を「かつ」「または」といった接続詞で繋げたものに言い換えることができるものがある。

このとき、「12 は 4 の倍数である。」「12 は 3 の倍数である。」はそれぞれ分割できない命題であるから、要素命題である。

問題

以下の文章について、命題かどうか判定し、命題ならば真偽を判定せよ。なお証明する必要はない。

(1)$\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ である。

(2)$n, x, y, z \in \mathbb{N}, n \geq 3$ であるとき、$x^n + y^n = z^n$ を満たすものが存在する。

(3)57 は素数である。

※ $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ はそれぞれ自然数、整数、有理数、実数、複素数を表す集合である。よって、$n \in \mathbb{N}$ とは、n が自然数の集合に属していること、すなわち n は自然数であることを表す。なお、包含記号 $\subset$ を用いると、$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ である。

§2. 論理記号、真偽表

前のセクションではトートロジーを考える前に命題について定義した。このセクションでは、トートロジーを定義・証明するために必要な論理記号や真偽表について定義する。

また、以下では、議論を簡潔に進めるために P, Q, R を要素命題とする（そのため、これらの記号は真または偽のいずれかの値をとる変数だということもできる）。なお、後述する論理記号やその法則を用いることで、要素命題が集まってできた命題についても同じように議論することができる。

def 2.1

次のような論理記号を命題 P, Q に対して定義する。

また、このような論理記号を用いて表した、真または偽のいずれかをとる式を論理式という。

①$\neg P$：否定（P でない）
②$P \vee Q$: または（P または Q）
③$P \wedge Q$：かつ（P かつ Q）
④$P \Rightarrow Q$：ならば（P ならば Q）
⑤$P \Leftrightarrow Q$：同値（P と Q は同値）

①〜③については何を意味しているかは容易に理解できる。しかし、④⑤についてはやや理解しにくいところがある。そこで、①〜③を用いて④⑤を定義する。

def 2.2

$P \Rightarrow Q$、$P \Leftrightarrow Q$ については以下のような規則が成り立つ。

①$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$
②$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \Rightarrow Q) \wedge (P \Leftarrow Q))$

②については容易に理解できると思われる。しかし、①については難解な部分もあるので、少し解説する。

まず、$\neg P \vee Q$ は次のように分割できる。

(1)Q が真であれば、P の真偽に関わらず $P \Rightarrow Q$ は真
(2)P が偽であれば、Q の真偽に関わらず $P \Rightarrow Q$ は真

このようにすると、(1) は自然な規則であると考えることができる。しかし、(2) については納得できないと考える読者もいるであろう。そこで、(1) の対偶をとることを考える。この対偶は (2) と一致するので、(1) と対偶の原理を認めれば、def2.2①も成り立つ。しかし、この考え方は納得できない読者もいるかもしれない。その場合は、「今後の議論が上手くいくように定義した」と考えてもらいたい（このように定義した恩恵は後の議論で少し登場する）。

次に、真偽表に定義する。なお、真偽表でのみ真を T、偽を F と表記する。これは正しい表現というよりは証明での分かりやすさや見栄えを考慮して独自に書いているものなので、必ずしも正しいとは限らない。

def 2.3

真偽表とは、論理演算において命題の真偽の出力と入力を並べた表である。

これだけでは分からない人も多いと思うので、def2.1 に出てきた論理式の真偽表を示す。

なお、真偽表では各行ごとに命題の TF の場合分けを各列に入力および出力の結果を記入する。

よって、n 個の命題に対しては真偽表の行数は 2^n 行となる。

①$\neg P$

P	$\neg P$
T	F
F	T

②$P \vee Q$

P	Q	$P \vee Q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

③$P \wedge Q$

P	Q	$P \wedge Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

④$P \Rightarrow Q$

P	Q	$P \Rightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

⑤$P \Leftrightarrow Q$

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

なお、例④⑤では、def2.3 による変形も満たしている。

そのため、このセクションの定義では def2.1 で記号の定義を、def2.2 及び 2.3 では記号の意味を定義したと考えてもらうと分かりやすいかもしれない。

また、プログラミングをやったことがある読者は真理値表の 1・0 を T・F に置き換えたものであると考えてもらうと理解しやすいかもしれない。

問題

(1) 以下の命題の真偽を述べよ。証明も行うこと。

$n \in \mathbb{N}$ である n に対し、$n^2 - 2 = 0 \Rightarrow n = 2$

(2) 以下の問いに答えよ。

①P、Q と $P \wedge Q$ 及び P、Q と $\neg P \wedge \neg Q$ についての真偽表をそれぞれ作成せよ。
②P、Q と $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$ についての真偽表を作成せよ。
③P, Q と $P \Leftrightarrow Q$ についての真偽表を作成せよ。
④ ②と③による真偽表から、$((P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)) \Leftrightarrow (P \Leftrightarrow Q)$ であることを示せ。

§3. トートロジー

さて、今までは命題や論理記号、真偽表について定義してきた。これらの定義を用いることで、トートロジーについて定義・証明することができる。

def 3.1

命題の真偽に関わらず常に真となる論理式をトートロジーという。

これもまた分かりにくいと思うので、いかにいくつかの具体例を示す。

なお、ある論理式がトートロジーであることは全て論理式によって簡単に示される。また、同値の条件についてはセクション 2 を参考にしてもらいたい。①、⑤についてはトートロジーであることを示し、残りは読者への練習問題とする。

①$\neg(\neg P) \Leftrightarrow P$

証明：以下の真偽表で P の真偽と $\neg(\neg P)$ の真偽が一致するので示される。

P	$\neg P$	$\neg\neg P$
T	F	T
F	T	F

②$(P \wedge Q) \Leftrightarrow (Q \wedge P)$

③$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$

なお、これは $P \Rightarrow Q$ とその対偶がトートロジーであることを示している。

④$((P \vee Q) \vee R) \Leftrightarrow (P \vee (Q \vee R))$

このような法則を集合の結合則と呼ぶ。

同様にして、命題が 4 個以上でもこのような法則は成り立つので、順番を区別せずに $A_1 \vee A_2 \vee A_3 \vee ...A_n$ と書くこともある（$n \in \mathbb{N}$、$1 \leq k \leq n$、A_k は集合)。

⑤$(P \lor (Q \land R)) \Leftrightarrow ((P \lor Q) \land (P \lor R))$

証明：以下の真偽表で $P \lor (Q \land R)$ の真偽と $(P \lor Q) \land (P \lor R)$ の真偽が一致するので示される。

P	Q	R	$Q \land R$	$P \lor (Q \land R)$	$P \lor Q$	$P \lor R$	$(P \lor Q) \land (P \lor R)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T	F	F
F	F	T	F	F	F	T	F
F	F	F	F	F	F	F	F

⑥$\neg(P \lor Q) \Leftrightarrow (\neg P \land \neg Q)$

これは、ド・モルガンの法則として知られている。

また、トートロジーに関する定理として、以下のようなものも知られている。

def 3.2

すべての論理式はトートロジーかどうか決定可能である。

証明：
論理式の真偽の組み合わせを全て調べることにより、トートロジーかどうか判別することができる。

当たり前のことで定理と呼べないものであるように感じるが、簡単に示すことのできる定理である。

問題

(1)A_1、$A_2 ... A_n$ をそれぞれ命題とする（$n \in \mathbb{N}$）。このとき、$A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_{2n}$ はどの順番で $\wedge$ を作用させても最終的な真偽は変わらないことを示せ。

(2) 三段論法とは、3 つの命題 P、Q、R に対して、$P \Rightarrow Q$ 及び $Q \Rightarrow R$ が成り立つことから、$P \Rightarrow R$ が成立することを示す論法である。これが正しいことを示せ。つまり、$((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$ がトートロジーであることを示せ。

§4. 問題の解説・ヒント

今までのセクションの最後に出題してきた問題への解答やヒントを参考までに述べる。

§1

(1) 真（証明するなら、$\sqrt{3}$ が無理数であることを示せばよい。これは背理法による。）

(2) 偽（フェルマーの最終定理による）

(3)57 は素因数分解することができる。よって、57 は素数ではない。しかし、Grothendieck は 57 を素数だと述べている。

§2

(1) 真（「$n \in \mathbb{N}$ である n に対し、$n^2 - 2 = 0$」となる n は存在しない。よって、この命題は偽となる。よって、問題中の命題は真となる。）

(2) それぞれの命題を作成し、2 つの命題が一致することを示す。なお、これはトートロジーである（定義は§3 で述べた）。

§3

(1)def 3.1 中に述べた例④と同様に命題が 3 個以上のときに結合則が成り立つことを示し、これを繰り返す。また、②を繰り返し用いて全ての作用させる順番が同じ順番になることを示してもよい。

(2) 真偽表によって示す。（左辺）$\Rightarrow$（右辺）であるため、それぞれの真偽表は必ずしも一致しないことに注意する。