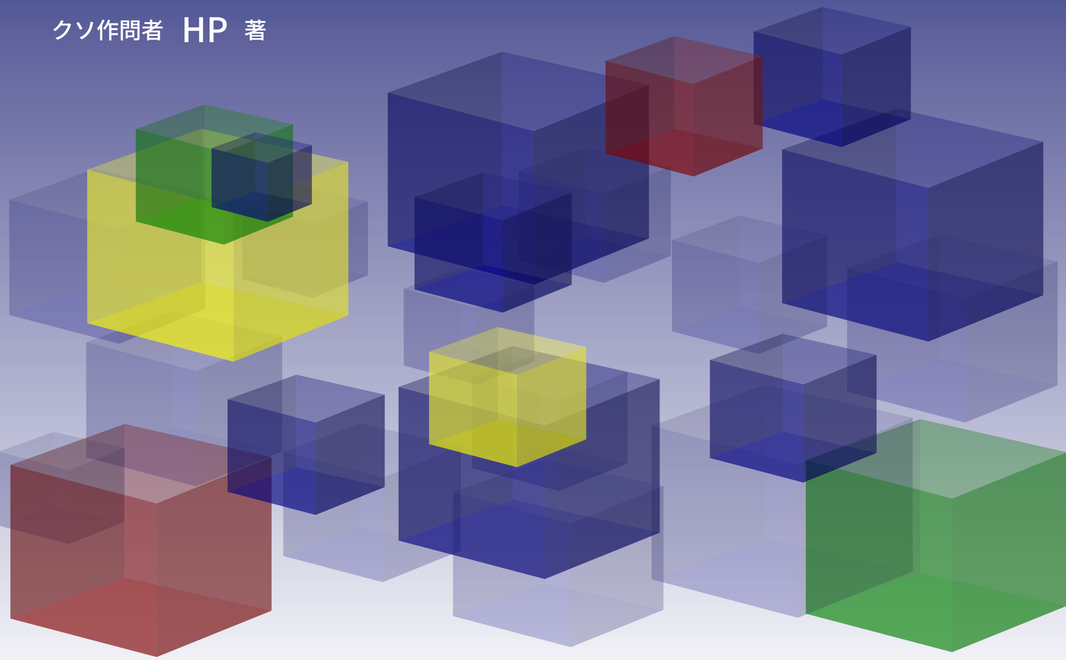
暗晦通信団
The Darkness Communication Group

限界悪質問題集

理系数学のクソ問プラチカ

数学 I·A·II·B·C

クソ作問者 HP 著



- クソ問に的を絞って 16 題を精選
- クソ問=時間の無駄・ネタ問題
- 1日1題・6ヵ月完成

暗晦通信団

この問題集は事情により没になった問題や単なるクソ問をまとめたものである。そのため、問題に不備があってもそういうものだと割り切って問題に臨むこと。問題の順番も適当なので、できる問題（があればその問題）から解いてもらいたい。

(1) 以下の多項式を展開せよ。

① $(a-x)(b-x)$

② $(a-x)(b-x)(c-x)$

③ $(a-x)(b-x)(c-x)\cdots(z-x)$

(2) b についての二次方程式 $b^2x+a^2b-ax=ac$ の解を答えよ。

(3) 半素数かつ完全数である数を全て求めよ。

(4) n を素数とする。

① n^4+14 が素数であるときの n を全て求めよ。

② n^2+14 が素数であるときの n を全て求めよ。

③ $n+14$ が素数であるときの n を全て求めよ。

(5) n を自然数とする。$3n$ 桁の自然数のなかで 3 種類の数字がそれぞれ n 回ずつ使用されている数字を足すと、和はいくつになるか n を用いて表せ。

(6) $a^3+b^3=c^3$ を満たす自然数組 (a,b,c) が存在しないことを示せ。

(7) 以下の問いに答えよ。それぞれの問いに対して n または m をあなたの得点とする。

① $f(x)=x^n$ を n 回微分せよ。

② $f(x)=x^x$ を m 回微分せよ。

(8) 三辺の長さの和が l であるような直角三角形の斜辺の長さの取りうる範囲を求めよ。

(9) タクシー数について考える。以下の等式 (i)〜(iii) は 1 番目から 3 番目までのタクシー数について表したものである。このとき、a〜g に当てはまる自然数を求めよ。

(i) a^3+b^3

(ii) $c^3+1=d^3+10^3$

(iii) $167^3+e^3=223^3+f^3=414^3+g^3$

(10) 13 や 31 のように 10 進数表記で元の数も反対から書いた数も素数である数をエマープ数という。以下、エマープ数という言葉は元の数のみを表しているものとし、最高位の数が 0 だった場合は一桁小さい数となる。

①「エマープ」の語源を答えよ。

② 3 桁のエマープ数と反対から書いた数の和の最大値を求めよ。

③ 素数は無限に存在するか。

④ エマープ数は無限に存在するか。

(11) 以下の 2 つの証明で誤っている点を指摘し、それぞれの命題が間違っていることを示せ。なお、正しいと考えるならば誤っている点を指摘しなくてもよい。

① 数ならば、その数は 0 に等しい。

証明. a を任意の数とする。

$$
\begin{aligned}
a &= b \\
a^2 &= ab \\
a^2 - b^2 &= ab - b^2 \\
(a+b)(a-b) &= b(a-b) \\
a+b &= b \\
a &= 0
\end{aligned}
$$

よって、題意は示された。 □

② 円周率は 4 である。

証明. 半径が 2 である中心角が 90° である扇形と一辺が 2 である正方形が二辺で接している図形を考える。このとき、扇形の弧の長さは π である。そして、この正方形を扇形の弧の部分とすべて接するように折り返す。このとき、折り返しても元の正方形二辺の長さと等しいので、接するように折った図形の扇形の弧に接している部分の長さは 4 である。

よって、題意は示された。 □

(12) 以下の A さんと B さんの会話を読み、続く問いに答えよ。

A: B さん、この問題解ける？

⟨問題⟩ 半径 3 cm の球の体積を求めよ。

B: 簡単だよ。答えは［ア］だよね？

A: 正解！ じゃあ、今答えに π を使ったと思うけど、π って何を表す記号なのか分かる？

B: π は円周率を表す記号のことで、円周率は分数で表せないから［イ］だし、有理数係数の代数方程式の解にならないから、［ウ］でもあるよね。

A: そうだね。ところで、B さんは ii) 円周率をどこまで言えるの？

B: えっと… 3.14 までしかわからないや。でも数学の問題では近似値はほとんど使われないから、最悪大体 3 であることを知っていれば大丈夫だね。

A: iii) 3 だと矛盾が生じることもあるから、その考え方は間違っていると思うよ。
B: というか、なんで円周率には π という記号を用いるんだろう？
A: この記号は［エ］語で［オ］を意味する単語に由来しているんだ。この記号を最初に使い始めたのはウィリアム・ジョーンズなんだよ。
B: 一人の数学者が使い始めた記号を iv) 今も使っているんだね。

① 空欄［ア］〜［オ］に当てはまる言葉や数、文字を答えよ。
② i) より、日本では「円周率の日」が 3 月 14 日に定められている。そのほかにも「円周率近似値の日」というものが定められている。なぜ定められているのか考えて次の選択肢から選べ。
(i) 7 月 22 日　　(ii) 12 月 21 日
③ ii) より、円周率をできる限りかけ。
④ iii) より、なぜ矛盾が生じるのか説明しなさい。
⑤ iv) より、現在コンピュータにより計算されている円周率の桁数はおよそ何桁か。ただし、「10^n 桁」（n は自然数）の n に適した数を入れて解答すること。

(13) 以下のようなゲームを考える。

1. プレイヤーは 3×3 のパネルに向かって球を投げる。
2. パネルは球が当たると倒れる（倒れたパネルは起き上がることはない）。
3. 倒れたパネルがビンゴとなったら 1 pt となる。

ただし、1 つの球で複数のパネルを当てることは起こらないものとする。
以下ではプレイヤーを「A さん」と表記する。

① A さんは球を 5 球持っており、全ての球を何かしらのパネルを当てることができた。このとき、A さんが 2 pts 獲得するときの球の当て方は何通りか。ただし、当て方が異なっても 5 球投げた後、倒れたパネルが同じときは区別しない。
② A さんはできる限りポイントを獲得するために最善の方法でパネルを狙う。
(i) 5 pts 獲得するのに必要な球の最低個数を求めよ。
A さんは必ずしも狙ったパネルに球を当てられるわけではない。A さんは $\dfrac{1}{3}$ の確率で狙ったパネルに当てられ、$\dfrac{1}{12}$ ずつの確率で上下左右のパネルに当て（上下左右にパネルがない場合はパネルに当たらない）、$\dfrac{1}{3}$ の確率でパネルに当たらない。
(ii) 球を 3 回投げたとき、1 pt 獲得する確率を求めよ。
(iii) 球を 9 回投げる。このとき、球がすべて当たる確率を求めよ。
(iv) 球を 9 回投げる。このとき、獲得するポイントの期待値を求めよ。
③ ②と同じようにパネルに当てる。しかし、A さんは p の確率で狙ったパネルに当てられ、q ずつの確率で上下左右のパネルに当て（上下左右にパネルがない場合はパネルに当たらない）、$1-(p+4q)$ の確率でパネルに当たらない。

(i) 球を 9 回投げる。このとき、獲得するポイントの期待値を求めよ。

(ii) m pt(s) 獲得するまで球を投げ続ける。このとき、n 回球を投げたときに球を投げ終わる確率を m,n を用いて表せ。ただし、m,n は自然数とする。

(14) $a_m = \sum_{k=1}^{n} k^m$ とする。

① $a_1 = \frac{1}{2}n(n+1),\ a_2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ であることを示せ。

② a_4 を n の式で表せ。

③ 任意の自然数 m を定め、a_m を n の式で表せ。このときの m をあなたの得点とする。

(15) 2 つの箱 A、B がある。箱 A には「円周率」「1000 以下の素数の個数」「$\tan 1^\circ$」と書かれたカード、箱 B には「3.05 以上」「250 以下」「有理数」と書かれたカードのいずれかが入っている。このとき、以下の動作について考える。

《動作》

1. 箱 A、箱 B から 1 枚ずつカードを取り出す。
2. 取り出したカードをそれぞれ $\langle \mathrm{A} \rangle$、$\langle \mathrm{B} \rangle$ として、以下の命題に当てはめる。

命題 $\langle \mathrm{A} \rangle$ は $\langle \mathrm{B} \rangle$ である。

① 箱 A から「$\tan 1^\circ$」、箱 B から「有理数」を取り出したとき、命題の真偽を調べよ。

②《動作》を 1 回行ったとき、命題が真である確率を求めよ。

③《動作》を 1 回行ったあと、それぞれの箱にカードを戻さずに《動作》をあと 2 回行い全部で 3 つの命題を作る。このとき、作った 3 つの命題のうち真であるものの数の期待値を求めよ。

(16) ある無理数 a に対して、その小数点以下の数の n 桁目を a_n と表す。例えば、円周率 π 及び $\sqrt{2}$ に対して $\pi_1 = 1$ であり、$\sqrt{2}_2$=1 である。

① $\sum_{k=1}^{n}(\pi_k) + \sum_{k=1}^{m}(e_k) = 40, \quad \sum_{k=1}^{n}(\pi_k) + \sum_{k=1}^{m}(e_k) = 60$ となるときの自然数組 (n,m) をそれぞれ全て求めよ。

② $\prod_{k=1}^{n} \pi_k$ の最大値を求めよ。

③ $\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k}_k) > 2024$ を満たす最小の自然数 n を求めよ。

(17) 座標平面内の点で x 座標、y 座標がすべて整数である点を格子点とよぶ。

自然数 n に対しての以下の条件

$$0 < x \leq \frac{n}{2}, \quad 0 < y \leq \frac{n}{2}、\frac{n}{2} \leq x + y$$

をすべてみたす格子点 (x, y) の個数を A_n とする。

このとき、$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} A_{2n}$ を求めよ。

(18) $\displaystyle\sum_{n=1}^{100} \frac{n}{n+1}$ を計算せよ。

(19) n, x, y, z は自然数であり、$3 \leq n$ を満たす。このとき、$x^n + y^n = z^n$ を満たす自然数組 (n, x, y, z) が存在しないことを示せ。ただし、余白は十分にあるとする。

(20) アルファベット 26 文字がそれぞれ書かれたカードが 1 枚ずつある。ここから、無造作に 2 枚のカードを取り出し、1 列に並べる。このとき、そのカードの単語が存在する確率を求めよ。ただし、カードの単語が存在するとは、並べられたカードに書かれた文字を 1 つの 2 文字の英単語として、その単語が「Oxford Advanced Learner’s Dictionary 10th Edition」に見出し語として掲載されていることを指す。

(21) x についての関数 $f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} x^{k-1}$ について考える。ただし、n は自然数とする。

① $n = 3$ のとき、$f(x)$ を因数分解せよ。
② $f(x)$ を因数分解せよ。
③ $f(x) = 0$ の実数解は $x = -1$ だけであることを示せ。

(22) すべての実数 x について、$T_n(\cos x) = \cos(nx)$ を満たす $T_n(x)$ を考える。ただし、n は自然数とする。

① x についての方程式 $T_n(x) = 0$ を解け。
② $T_n(x)$ を求めよ。
③ $T_n(\sin x) = \sin(nx)$ を満たす $T_n(x)$ は存在するか。

(23) 対角線のうち、最も長いものの長さが $1 + \sqrt{5} + \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$ である正二十角形の面積を求めよ。

(24) 2^{2025} の上 3 桁の値を求めよ。必要であれば $\log_{10} 2025 \fallingdotseq 3.306$ を用いてもよい。

(25) 次の 3 つの条件と自然数組 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を考える。ただし n は自然数であり、k は $1 \leq k \leq n$ を満たす任意の自然数である。

(i) $1 \leq x_k \leq n$ である。
(ii) $x_1, x_2, \cdots, x_n$ は全て異なる数である。
(iii) $x_k \neq k$ である。

① (i) を満たす自然数組 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ の組数を求めよ。

② (i)、(ii) を同時に満たす自然数組 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ の組数を求めよ。

③ (i)、(ii)、(iii) を同時に満たす自然数組 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ の組数 a_n を求めよ。

④ 極限値 $\lim_{n \to \infty} a_n$ を求めよ。

⑤ a_n がすべて自然数であることを示せ。

(26) 次の 2 つの関数 C_1, C_2 について考える。

$$C_1 : \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

$$C_2 : y = \frac{1}{tx}$$

① C_1 と C_2 が 4 つの交点を持つとき、t の条件を求めよ。

② t が①で求めた条件を満たしているとき、x 座標、y 座標ともにが正である交点の座標を全て求めよ。

（おまけ）クソ問を 1 問挙げよ。

くそもんぷらせんりき
クソ問プラ千力

2024年9月22日 初版 発行

著　者	HP（えいちぴー）
発行者	Varjo（ばりお）
発行所	同人集合 暗晦通信団（https://ankai-dan.themedia.jp/）
	〒277-0825 千葉県立柏高等学校理数科
頒　価	0円 / C7341

乱丁・落丁は在庫がある限りお取り替えいたします。

C7341 ¥0E
本体 0 円

THE DARKNESS COMMUNICATION GROUP

プラチカ＝河合出版「プラチカ」のパロディ