多传感器融合方法

下面我们先给出离散系统的过程状态方程如下：

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)w(k) \tag{1}$$

其中 $x(k) \in R^n$ 是 k 时刻系统状态，$A(k) \in R^{n,n}$ 为状态转移矩阵，$B(k) \in R^{n,h}$ 是过程噪声分布矩阵，$w(k) \in R^h$ 是过程噪声向量。设系统共有 N 个传感器，测量方程为：

$$y_i(k) = C_i(k)x(k) + v_i(k) \tag{2}$$

其中，$i = 1,2,3,\ldots N$，$y_i(k) \in R^m$ 是第 i 个传感器的测量向量，$C_i(k)$ 是相应的测量矩阵，$v_i(k) \in R^m$ 为测量噪声。

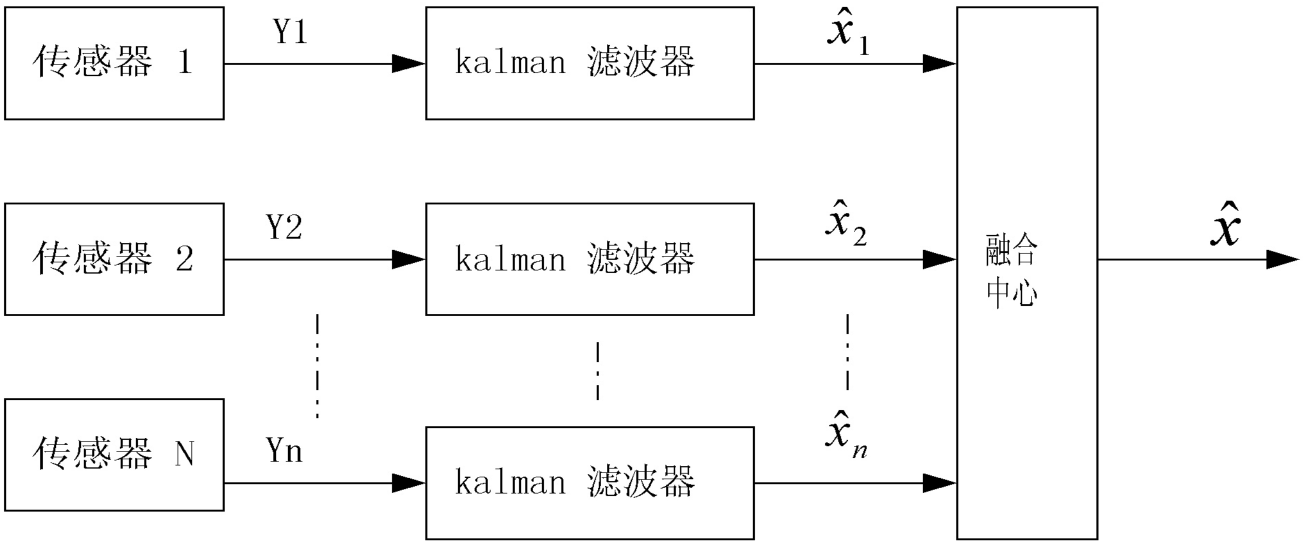


图　1 分布式状态融合估计算法示意图

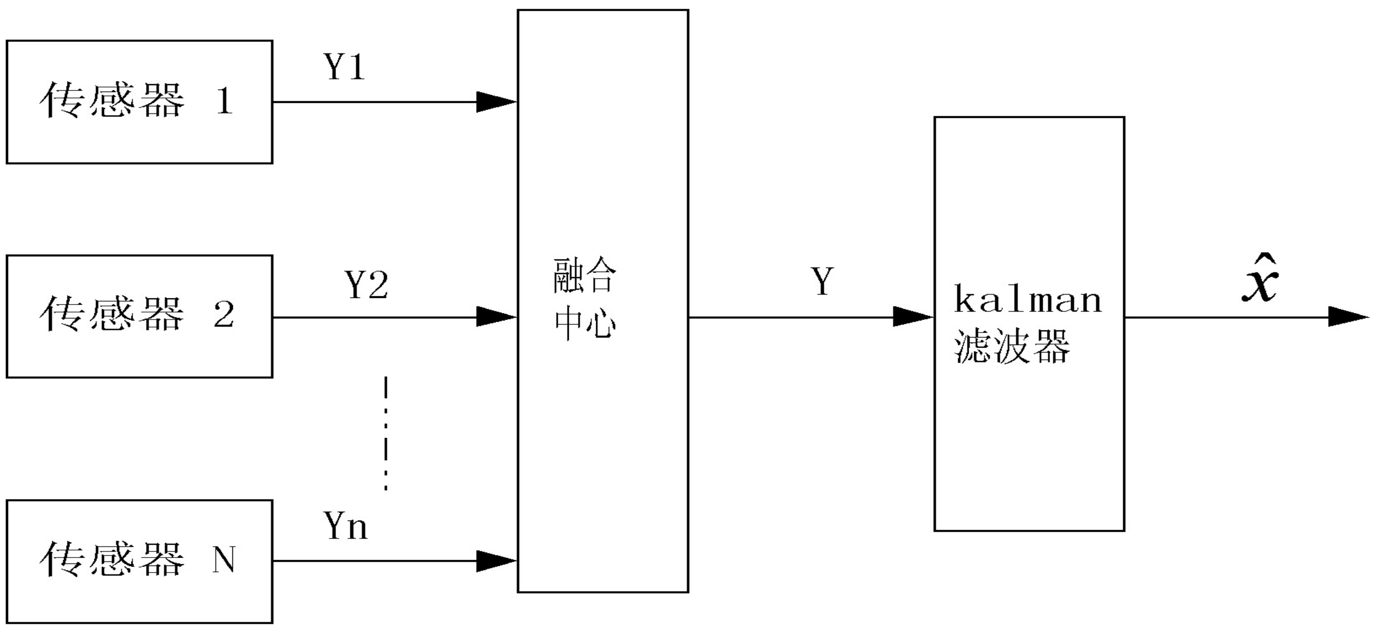


图　2 集中式状态融合估计算法示意图

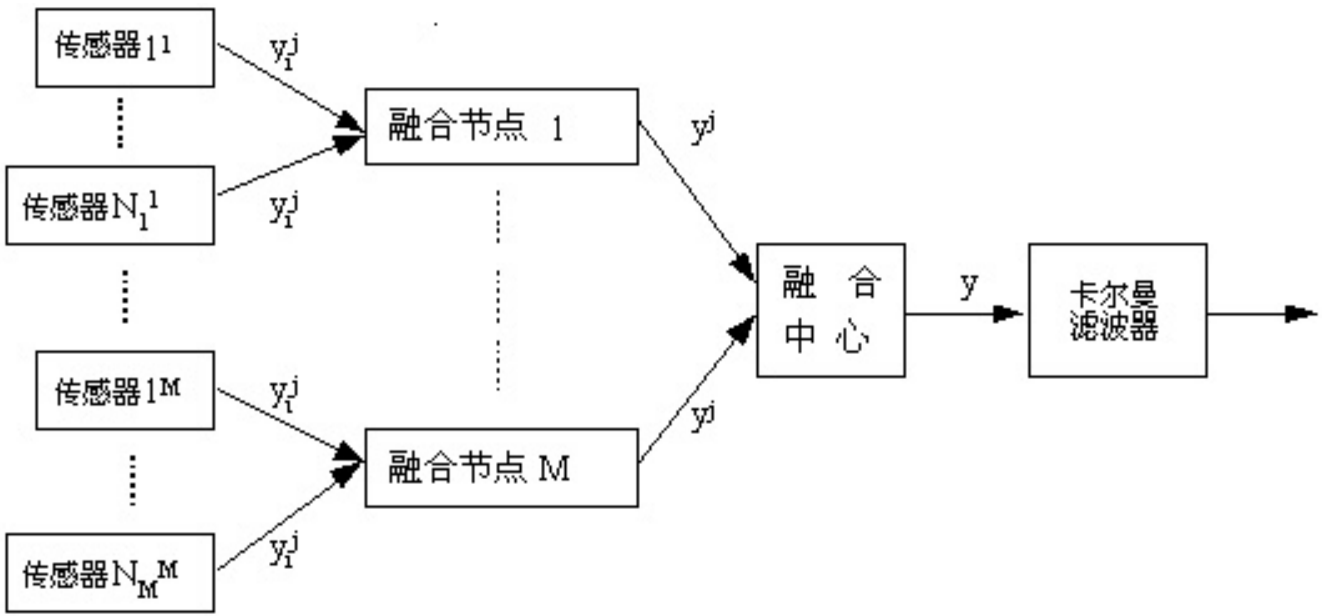


图　3多级式集—集式状态融合估计算法示意图

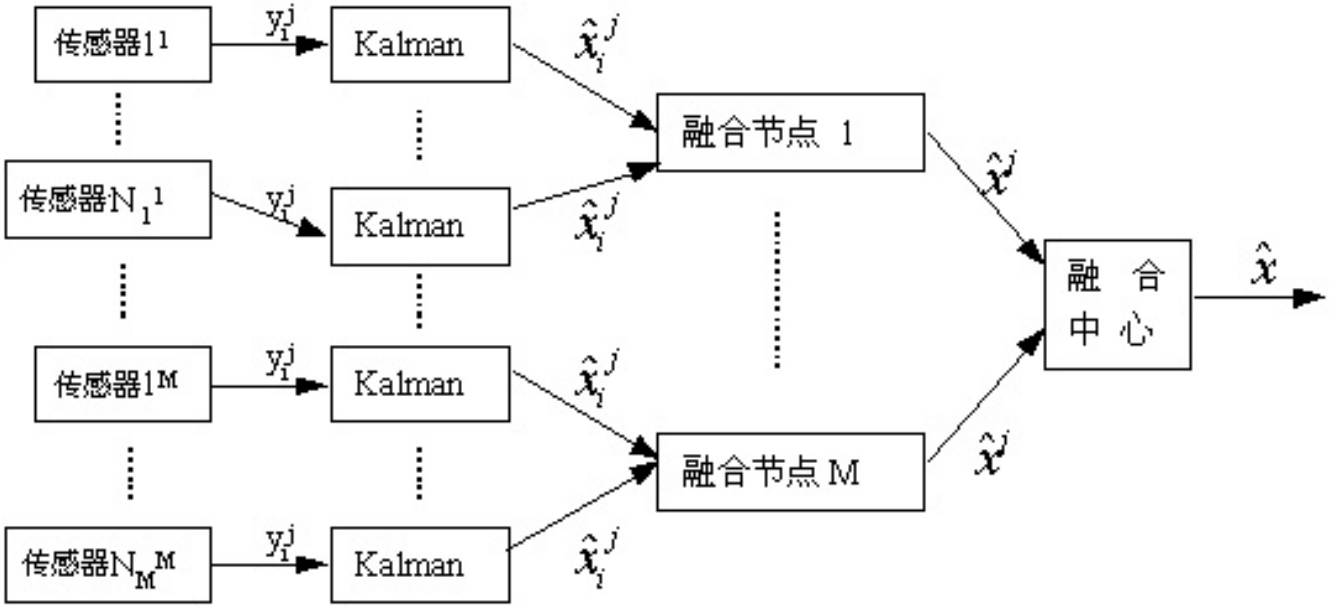


图 4 多级式分一分式状态融合估计算法示意图

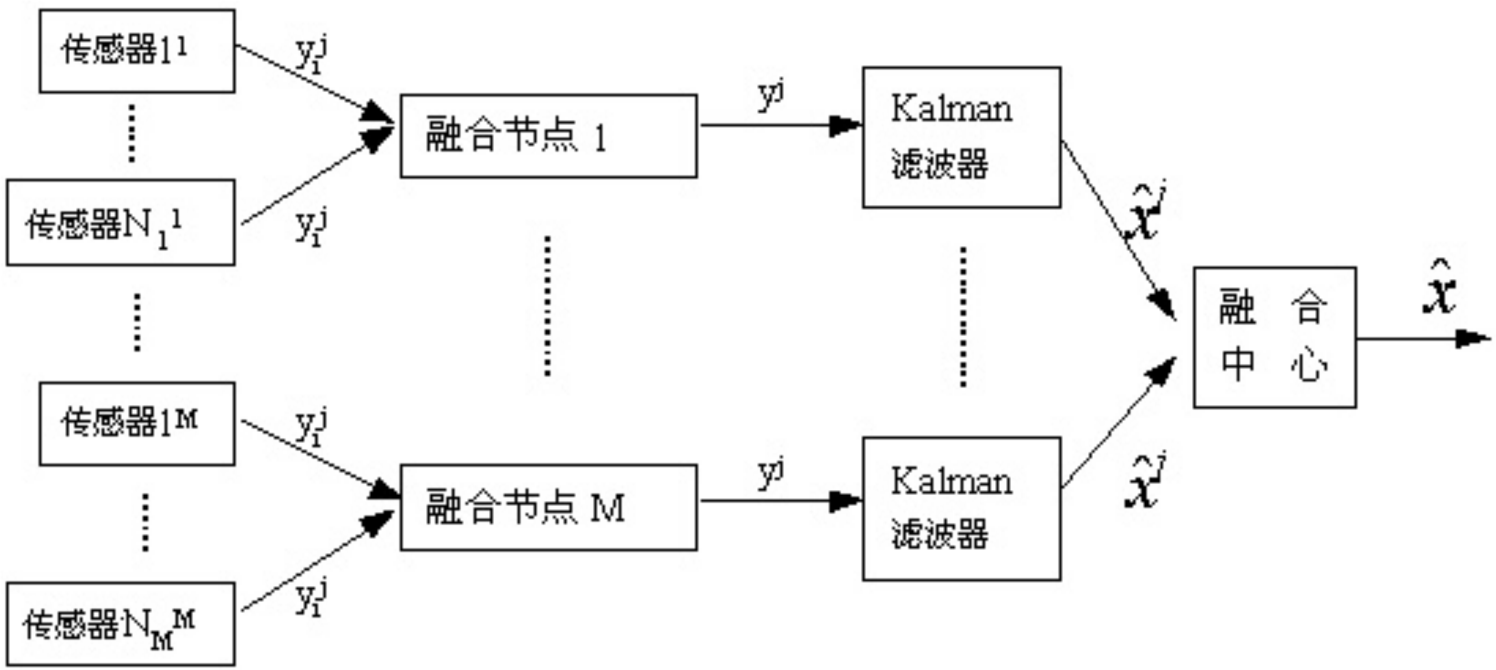


图　5 多级式集—分式状态融合估计算法示意图

测量融合算法

（1）测量融合方法 I

此类融合算法形式十分直观，直接把测量方程列写成如下的向量形式，然后利用 Kalman 滤波进行估计。

$$y(k)=y^{(I)}(k)=[y_1^T(k),y_2^T(k),\cdots,y_N^T(k)]^T$$

$$C(k)=C^{(I)}(k)=[C_1^T(k),C_2^T(k),\cdots,C_N^T(k)]^T$$

$$R^{(I)}(k)=block\ diag\ [R_1(k),R_2(k),\cdots,R_N(k)]$$

下面我们来推导利用 Kalman 滤波进行估计的结果。我们先来求滤波增益 $K(k)$，

已知 $K(k)=P(k|k)C^T(k)R^{-1}(k)$ ，将 $C(k)$ 和 $R(k)$ 代入后得到

$$K(k)=P(k|k)C^T(k)R^{-1}(k)=[\ K_1(k),\ \ K_2(k),\ \ \cdots,\ \ K_N(k)\ ]$$

$$K_i(k)=P(k|k)C_i^T(k)R_i^{-1}(k)$$

则我们估计 Kalman 滤波器可以得到如下的更新估计及向前一步预测估计

$$\hat{x}(k|k)=\hat{x}(k|k-1)+\sum_{i=1}^{N}K_i(k)[y_i(k)-C_i(k)\hat{x}(k|k-1)]$$

测量融合方法Ⅰ总结如下

$$\hat{x}(k|k)=\hat{x}(k|k-1)+\sum_{i=1}^{N}K_i(k)[y_i(k)-C_i(k)\hat{x}(k|k-1)]$$

$$\hat{x}(k|k-1)=A(k-1)\hat{x}(k-1|k-1)$$

$$K_i(k)=P(k|k)C_i^T(k)R_i^{-1}(k)$$

估计方差为

$$P^{-1}(k|k)=P^{-1}(k|k-1)+\sum_{i=1}^{N}C_i^T(k)R_i^{-1}(k)C_i(k)$$

$$P(k|k-1)=A(k-1)P^T(k-1|k-1)A(k-1)+B(k-1)Q(k-1)B^T(k-1)$$

（2）测量融合方法 II

该方法融合中心的融合规则基于线性估计原理，现将 N 个测量进行融合得到融合后的测量，然后再利用 Kalman 进行估计。

首先，将来自各个传感器的测量向量用线性均方估计进行融合：

$$y(k)=y^{(II)}(k)=[\sum_{i=1}^{N}R_i^{-1}(k)]^{-1}\sum_{i=1}^{N}R_i^{-1}(k)y_i(k)$$

$$C(k)=C^{(II)}(k)=[\sum_{i=1}^{N}R_i^{-1}(k)]^{-1}\sum_{i=1}^{N}R_i^{-1}(k)C_i(k)$$

$$R(k)=R^{(II)}(k)=[\sum_{i=1}^{N}R_i^{-1}(k)]^{-1}$$

下面给出利用 Kalman 滤波进行估计的算法如下：

$$\hat{x}(k|k)=\hat{x}(k|k-1)+K(k)[\sum_{i=1}^{N}R_i^{-1}(t)]^{-1}\sum_{i=1}^{N}R_i^{-1}(t)[y_i(k)-C_i(k)\hat{x}(k|k-1)]$$

$$\hat{x}(k|k)=A(k-1)\hat{x}(k-1|k-1)$$

$$K(k)=P(k|k)\{[\sum_{i=1}^{N}R_i^{-1}(t)]^{-1}\sum_{i=1}^{N}R_i^{-1}(t)C_i(t)\}^T\sum_{i=1}^{N}R_i^{-1}(t)$$

$$P(k|k-1)=A(k-1)P(k-1|k-1)A^T(k-1)+B(k-1)Q(k-1)B^T(k-1)$$

$$P^{-1}(k|k)=P^{-1}(k|k-1)+\{[\sum_{i=1}^{N}R_i^{-1}(t)]^{-1}\sum_{i=1}^{N}R_i^{-1}(t)C_i(t)\}^T\sum_{i=1}^{N}R_i^{-1}(t)C_i(t)$$

从上述融合规则可知，若 $R_i(k)$ 及 $C_i(k)$ 的矩阵行数、列数不同，该融合规则无法实现，所以该算法不适合 $R_i(k)$ 及 $C_i(k)$ 的矩阵行数、列数不同的异类传感器系统。

算例 9.1 假设两个传感器的测量方程分别为 $y_i(k)=C_i(k)x(k)+v_i(k)$ $i=1,2$，$y_i(k)\in R^m$ 是第 i 个传感器的测量向量，$C_i(k)$ 是相应的测量矩阵，$v_i(k)\in R^m$ 为测量噪声，其方差为 $R_i(k)$，其中，$C_1=\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$，$C_2=\begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix}$，$R_1=2$，$R_2=5$。请设计测量融合的算法，并计算稳态估计方差，比较其大小。

两种测量融合方法的性能分析

当相同的初始状态$P^{(I)}(0|0)=P^{(II)}(0|0)$，$\hat{x}^{(I)}(0|0)=\hat{x}^{(II)}(0|0)$，且$C_1=C_2=...C_N$，两种测量融合方法功能等价，且方法 II 的计算量小。这个结果可以推广到 N 个传感器。

如果$C_1 \neq C_2 \neq ...C_N$，方法 I 利用所有的原始测量信息，所以能提供更好的估计。另外，如果传感器不同，方法 II 可能根本无效（如果C_i C_j大小不同）。基于以上理论，当$C_1=C_2=...C_N$应该选择方法 II，否则选择方法 I 更好。

下面通过两个测量融合方法对比试验得到仿真结果，我们采用广泛使用的如下运动目标与传感器模型：

$$x(k)=\begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(k-1)+\begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix} v(k)$$

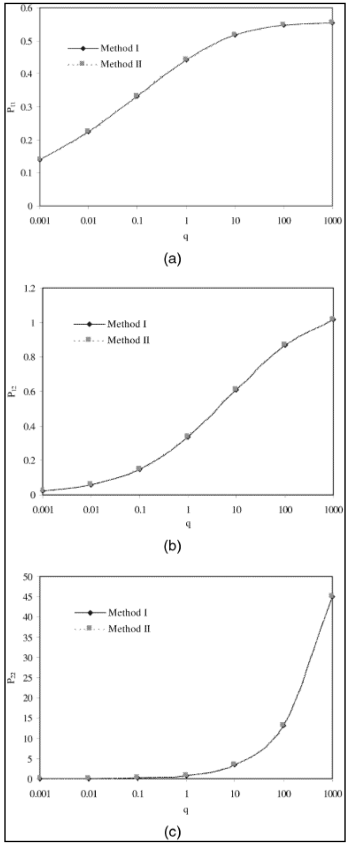
$$y_j(t)=\mathrm{C}_j x(t)+w_j(t) \qquad \text{j=1, 2}$$

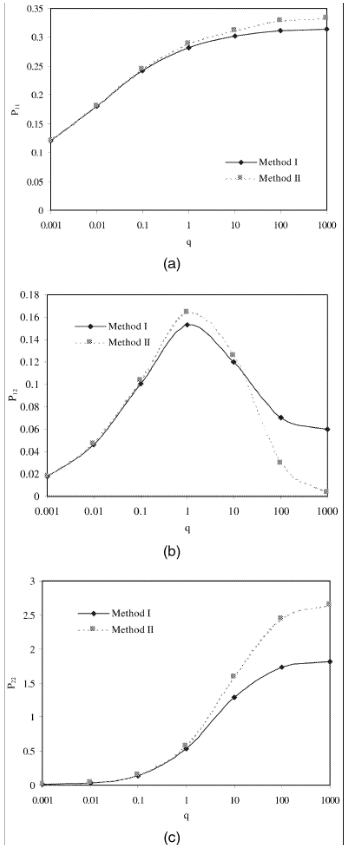
采样时间 T=1， $v(t)=N(0,\ q)$， $w_j(t)=N(0,R_j)$。考虑两种情况。

情况 1，两个传感器有相同的测量矩阵 $C_1=C_2=[1\ \ 0]$。

情况 2，两个传感器测量矩阵不同，$C_1=[1\ 0]$ $C_2=[1\ 0.5]$。两个情况分别考虑 $R_1=R_2$

和 $R_1 \neq R_2$。





$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix}$$

Track-to-Track 融合算法

（1）基于各传感器的测量 $y_i(k)$，用 Kalman 滤波器估计状态 $\hat{x}_i(k|k)$：

$$\hat{x}_i(k|k)=\hat{x}_i(k|k-1)+K_i(k)[y_i(k)-C_i(k)\hat{x}_i(k|k-1)]$$

其中：
$$\hat{x}_i(k+1|k)=A(k-1)\hat{x}_i(k-1|k-1)$$

$$K_i(k)=P_i(k|k)C_i^T(k)R_i^{-1}(k)$$

$$P_i(k|k-1)=A(k-1)P_i(k-1|k-1)A^T(k-1)+B(k-1)Q(k-1)B^T(k-1)$$

$$P_i^{-1}(k|k)=P_i^{-1}(k|k-1)+C_i^T(k)R_i^{-1}(k)C_i(k)$$

（2）下面推导基于线性估计原理将$\hat{x}_i(k|k)$进行融合的方法

$$\hat{x}_f = \hat{x}_i + (P_i - P_{ij})(P_i + P_j - P_{ij} - P_{ji})^{-1}(\hat{x}_j - \hat{x}_i)$$

估计方差为：

$$P_f = P_i - (P_i - P_{ij})(P_i + P_j - P_{ij} - P_{ji})^{-1}(P_i - P_{ji})$$

这里，为书写方便，将$\hat{x}_i(k|k)$及$\hat{x}_j(k|k)$简写成$\hat{x}_i$及$\hat{x}_j$，假设$i \neq j$。$P_{ij}(k|k)$按如下两式递推：

$$P_{ij}(k|k-1) = A(k-1)P_{ij}(k-1|k-1)A^T(k-1) + B(k-1)Q(k-1)B^T(k-1)$$

$$P_{ij}(k|k) = [I - K_i(k)C_i(k)]P_{ij}(k|k-1)[I - K_j(k)C_j(k)]^T$$

分布式最优融合算法

（1）同分布式次优融合算法求出 $\hat{x}_i(k|k)$。

（2）进行融合。

$$\hat{x}(k|k)=P(k|k)\{P^{-1}(k|k-1)\hat{x}(k|k-1)+\sum_{i=1}^{N}[P_i^{-1}(k|k)\hat{x}_i(k|k)-P_i^{-1}(k|k-1)\hat{x}_i(k|k-1)]\}$$

其中估计方差为：

$$P^{-1}(k|k)=P^{-1}(k|k-1)+\sum_{i=1}^{N}[P_i^{-1}(k|k)-P_i^{-1}(k|k-1)]$$

$P_i(k|k)$及$P_i(k|k-1)$为第 i 个传感器的估计方差，同上。

总结：

集中式

$$y(k)=y^{(I)}(k)=[y_1^T(k),y_2^T(k),\cdots,y_N^T(k)]^T \quad \hat{x}(k|k)=\hat{x}(k|k-1)+\sum_{i=1}^{N}K_i(k)[y_i(k)-C_i(k)\hat{x}(k|k-1)]$$

$$y(k)=y^{(II)}(k)=[\sum_{i=1}^{N}R_i^{-1}(k)]^{-1}\sum_{i=1}^{N}R_i^{-1}(k)y_i(k) \quad \hat{x}(k|k)=\hat{x}(k|k-1)+K(k)[\sum_{i=1}^{N}R_i^{-1}(t)]^{-1}\sum_{i=1}^{N}R_i^{-1}(t)[y_i(k)-C_i(k)\hat{x}(k|k-1)]$$

分布式

$$\hat{x}_f=\hat{x}_i+(P_i-P_{ij})(P_i+P_j-P_{ij}-P_{ji})^{-1}(\hat{x}_j-\hat{x}_i)$$

$$\hat{x}(k|k)=P(k|k)\{P^{-1}(k|k-1)\hat{x}(k|k-1)+\sum_{i=1}^{N}[P_i^{-1}(k|k)\hat{x}_i(k|k)-P_i^{-1}(k|k-1)\hat{x}_i(k|k-1)]\}$$

假设我们在某一地点安置了两个传感器，测量模型分别为

$$z_1(k) = x(k) + v_1(k)\text{，}\quad v_1(k) \sim (0,1)$$

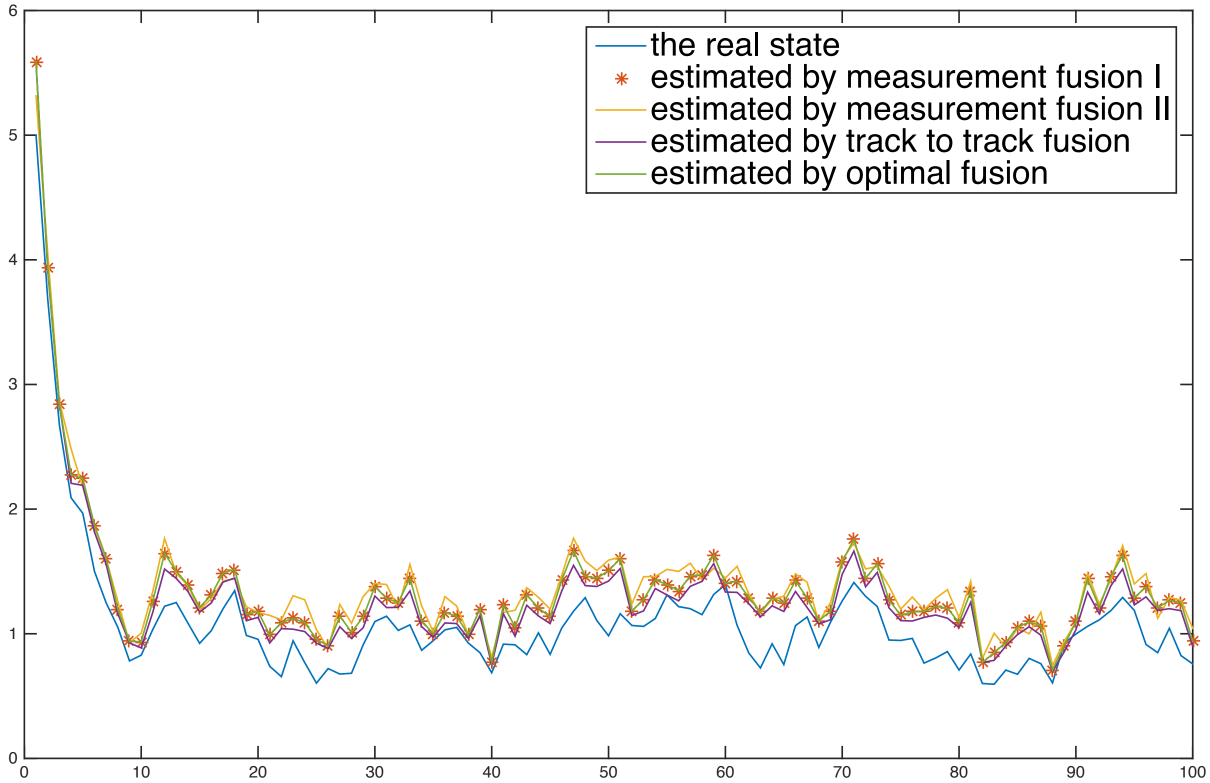
以及

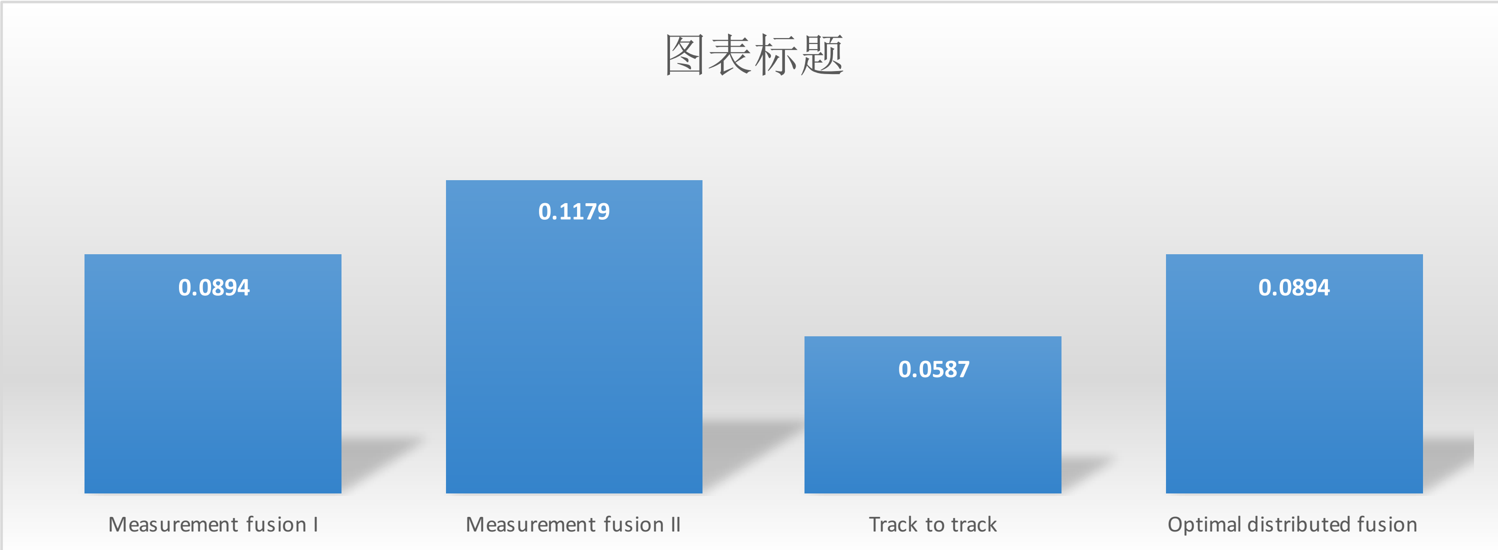
$$z_2(k) = 3x(k) + v_2(k)\text{，}\quad v_2(k) \sim (0,3)$$

待估计量满足如下游走模型

$$x(k+1) = 0.7x(k) + w(k)\text{，}\quad w(k) \sim (0,1)$$

设计融合方法，使用两个传感器的数据得到状态估计 $\hat{x}(k)$。


the real state
estimated by measurement fusion I
estimated by measurement fusion II
estimated by track to track fusion
estimated by optimal fusion
0
1
2
3
4
5
6
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100



性能分析

- 测量融合方法 I 和最优分布式融合性能一样，都是最小二乘最优的。
- Track to track 方法在本题中获得了最小的估计方差，很适合于两个传感器的应用。