

第 3 章 最小二乘估计

最小二乘估计方法是一种利用观测数据估计线性模型中未知参数的方法，其基本思路是，选择合适的估计参数使模型输出与传感器实测输出数据之差的平方和最小。这种求误差平方和的方式可以避免正负误差相抵，便于数学求导计算（用误差的绝对值计算不便）。最小二乘法是应用最广泛参数估计方法之一，在理论研究和工程应用中具有重要的作用，也是许多其它更复杂估计方法的基础。

先介绍一下最小二乘方法试图解决的问题。在实际问题中，经常会有这样的情况：有些量不能观测，或不容易观测，我们将其用 (O_1, \dots, O_m) 表示，而另外的一些量 $(\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_m)$ 容易观测，它们之间经常有线性关系

$$\Omega_0 + \Omega_1 O_1 + \Omega_2 O_2 + \dots + \Omega_m O_m = 0 \quad (3-1)$$

对可观测量 $(\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_m)$ 观测若干次，得观测数据 $(\Omega_{i0}, \Omega_{i1}, \dots, \Omega_{im})$ ，其中 $i = 1, \dots, n$ 现在的问题是要根据这 n 次观测数据去估计 (O_1, \dots, O_m) 。考虑到在观测过程中存在的影响与干扰，使得 $(\Omega_0, \Omega_1, \dots, \Omega_m)$ 的每次观测总会产生误差，同时模型的选择形式并非完全确切。所以合理的模型为

$$\Omega_{i0} + \Omega_{i1} O_1 + \Omega_{i2} O_2 + \dots + \Omega_{im} O_m = \varepsilon_i \quad (3-2)$$

其中 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ 是 n 次观测中的随机误差，这里要求 $n \geq m$ ，即观测的次数不少于未知参数，否则无法估计。

作为一种应用非常广泛的估计方法，它的归属权还在科学界引起过争议。法国数学家兼天文学家勒让德 19 世纪初（1805 年）在研究天文学计算慧星的轨道时设法构造 m 个方程去求其解 (O_1, \dots, O_m) ，他打破了前人在思想上囿于解方程这一思维定势，他认识到寻找的

$(\hat{O}_1, \hat{O}_2, \dots, \hat{O}_m)$ 应该使各次观测所产生的误差 ε_i ， $i = 1, \dots, n$ 的平方和最小，即

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (\Omega_{i0} + \Omega_{i1} \hat{O}_1 + \dots + \Omega_{im} \hat{O}_m)^2 \text{ 达到最小。他在估计巴黎子午线的时候就使用过这种方法。}$$

法。

几乎是与此同时，另一个伟大的数学家德国高斯在解决行星轨道猜测问题时也使用了这个方法。当时在 1801 年，意大利天文学家朱赛普·皮亚齐发现了第一颗小行星——谷神星。经过 40 天的跟踪观测后，由于谷神星运行至太阳背后，皮亚齐失去了谷神星的位置。

随后全世界的科学家利用皮亚齐的观测数据开始寻找谷神星,但是根据大多数人计算的结果来寻找谷神星都没有结果。时年 24 岁的高斯也计算了谷神星的轨道,奥地利天文学家海因里希·奥尔伯斯根据高斯计算出来的轨道重新发现了谷神星。高斯使用的最小二乘法的方法发表于 1809 年他的著作《天体运动论》中。现在科学界普遍认可的是两位科学家独立发明的最小二乘方法。

在介绍最小二乘法之前先明确一个现象,即传感器的测量数据和实际的真实值通常不是完全一致的。那么什么是传感器?广义上讲,传感器是能够感觉外界信息,并按一定规律将这些信息转换成可用输出信号的器件或装置。这一概念具有以下 3 个含义:

(1) 传感器能够提取外界信息。

(2) 传感器的输入量通常是非电量,如物理量、化学量、生物量等;而输出量是便于传输、转换、处理、显示的物理量,主要是电信号。例如,电容传感器的输入量可以是压力、位移、速度等非电物理量,输出则是电压信号。

(3) 传感器的输出量与输入量之间满足一种测量关系。

传感器一般由敏感元件、转换元件和转换电路 3 部分组成,如图 3.1 所示。

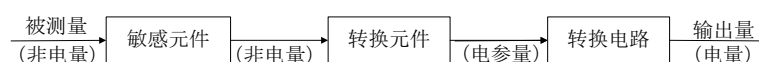


图 3.1 传感器的组成

其中敏感元件是传感器中能够感受被测量物体物理量的部分,例如,弹力敏感器件可以将压力转换为位移,并且压力与位移之间保持一定的函数关系。转换元件将敏感元件输出量转换为合适的电信号。例如,压变式压力传感器将应变力转换成变化的电阻。转换电路则将电量参数转换成电压、电流、频率等电量信号。

测量时,由于各种因素的影响,会对测量造成误差,导致物理量的测量数据和真实值不一样,这就是通常所说的“测得不准”。这种误差主要是系统误差和随机误差,系统误差包括一系列的错误:误读、误算、视差、刻度误差、磨损误差、接触力误差等。系统误差在测量过程中是不变的,可以用计算或实验的方法求得,这表明系统误差是可以预测的,并且可以通过修正或调整的方式变小。

随机误差和系统误差的情况刚好相反,随机误差在测量过程中是改变的,因此不能预测某时刻随机误差的值到底是多少,也无法进行修正和调整。随机误差主要表现为误差数据符合某一随机分布,例如均匀分布、高斯分布或瑞利分布等。这种带有随机分布的测量误差,通常称为测量噪声。

现在总结一下传感器测量数据的特点，由于传感器的系统组成、人员操作等原因，传感器的测量数据通常存在一定的误差，其中一部分误差是称为随机噪声（或测量噪声），这部分误差无法从根本上消除，只能在研究传感器测量数据时充分考虑。幸运的是，研究者们给出了很多关于随机噪声的理论和方法，比如用均值和方差描述其大小，采用这些方法可以分析传感器的随机误差，在利用传感器数据时，要充分考虑这些随机误差的影响，利用带有随机误差的测量数据尽量准确地估计实际物理量。

回顾一下图 2.1、图 2.2 和图 2.3 关于传感器测量室温的数据。假设并不清楚实际温度，但可以通过温度传感器进行测量，现在的任务是利用这些测量数据来估计室内的实际温度，并且预测以后某个时间点的温度值。由于传感器随机测量噪声的存在，导致图 2.1 和图 2.2 每个数据点的值并不相同，但从整体而言，数据会在其均值上下波动。如果实际的真实温度用 θ 表示，在每一个采样点的测量噪声用 $N(k)$ 表示，则每一个采样点测量的温度数据 $Z(k)$ 就是实际的真实温度 θ 与测量噪声 $N(k)$ 之和，即 $Z(k) = H(k)\theta + N(k)$ 。对于图 2.1 和图 2.2 中的数据，首先会想到可以利用求取均值的方式进行代替，从而消除噪声的影响。MATLAB 中求取均值的函数是 `mean`，可以使用语句 `mean(s1)` 获得室内温度数据的平均值，20.0387（根据图 2.1 数据的均值得到）。同样，图 2.2 数据获得的室内平均温度为 20.0864。可以发现噪声越大，平均值的结果与真实室内温度相差越大。

但是对于图 2.3 的数据，不能再使用求平均值的方法获得室内温度了，因为室内温度不再是一个恒值，而是一个变量，仔细观察发现，图 2.3 中数据变化的方式可以描述为一条具有一定斜率的直线，如 $\theta_1 t(k) + \theta_2$ ，当然测量数据中还包括测量噪声 $N(k)$ ，也就是图 2.3 的测量数据可以表示为 $\theta_1 t(k) + \theta_2 + N(k)$ ，如果能够估计该直线的斜率 θ_1 及其与纵轴的交点 θ_2 ，就可以获得温度的变化规律。接下来要介绍的最小二乘估计方法就可以完成这个任务。

3.1 最小二乘估计方法

用 θ 表示待估计量， $Z(k)$ ， $N(k)$ 分别表示第 k 次观测数据和观测噪声， $H(k)$ 为观测矩阵，线性观测方程可以用如下方程描述：

$$Z(k) = H(k)\theta + N(k) \quad (3-3)$$

再来看一下数据变化符合一次曲线的温度测量问题，将测量方差设为 $Z(k) = \theta_1 t(k) + \theta_2 + N(k)$ ，写成状态方程的形式

$$Z(k) = \begin{bmatrix} t(k) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} + N(k) \quad (3-4)$$

要想得到温度的变化规律，需要很多数据，对于 k 个观测数据的向量，将这 k 个观测数据写成如下向量形式：

$$Z_k = \begin{pmatrix} Z(1) \\ Z(2) \\ \dots \\ Z(k) \end{pmatrix} \quad H_k = \begin{pmatrix} H(1) \\ H(2) \\ \dots \\ H(k) \end{pmatrix} \quad N_k = \begin{pmatrix} N(1) \\ N(2) \\ \dots \\ N(k) \end{pmatrix} \quad (3-5)$$

则 k 个观测数据满足如下方程

$$Z_k = H_k \theta + N_k \quad (3-6)$$

例 3.1 讨论先前提到的温度测量问题。回顾例题 2.3 中，室温在上升，变化曲线是 $2*t+20$ ，利用模拟得到的 1000 个室温数据，如图 2.3 所示。现在想要得到温度的变化规律，我们需要估计直线的斜率 θ_1 及其截距 θ_2 两个参数。

根据 (3-6) 式， Z_{1000} 为 1000 个测量数据排成一个列向量， N_{1000} 为每个测量数据的测量噪声，是未知量。观测矩阵是这样得到的：(3-4) 决定了测量矩阵每一行数据的组成， H_{1000} 的第一列是从 0 到 9.99 秒每隔 0.01 秒的测量时刻，第二列是全 1 的数据，它是 1000 行 2 列的矩阵，即

$$H_{1000} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.01 & 1 \\ \dots & \dots \\ 9.99 & 1 \end{pmatrix} \quad (3-7)$$

下面讨论一下，如何根据测量得到的 1000 个数据估计描述温度变化规律，即 θ_1 、 θ_2 的值。前面已经说过，最小二乘估计方法要求测量模型输出 $H_k \hat{\theta}$ 与实际测量数据输出之差 $Z(k)$ 的平方和达到最小，并且，所有的测量都满足这个要求，即 $\sum (Z(k) - H(k)\theta)^2$ 达到最小。将求和性能指标写成下面矩阵形式，以便于求导运算：

$$J(\hat{\theta}) = (Z_k - H_k \hat{\theta})^T (Z_k - H_k \hat{\theta}) \quad (3-8)$$

其中上标 T 表示矩阵转置，先来看一下 (3-8) 中待估计量 $\hat{\theta}$ 与实际真实值 θ 之间的关系。将 (3-6) 代入 (3-8) 后，可以得到

$$J(\hat{\theta}) = (H_k \theta + V_k - H_k \hat{\theta})^T (H_k \theta + V_k - H_k \hat{\theta})$$

如果真实的参数 θ 和估计 $\hat{\theta}$ 与测量噪声 V_k 无关，上式两边取期望可以得到

$$J(\hat{\theta}) = E((\theta - \hat{\theta})^T H_k^T H_k (\theta - \hat{\theta})) + E(V_k^T V_k) \quad (3-9)$$

仔细观察 (3-9)，发现该式由两项为正的子式加和组成，后一项表明测量噪声的方差和估计参数无关。对于前一项来说，真实的参数 θ 和估计 $\hat{\theta}$ 接近，该项的数值就会越小，因此，只要对性能指标函数 $J(\hat{\theta})$ 求极小值，找到的 $\hat{\theta}$ 就是所求的估计参数。

求极值问题可以利用微分公式，令 $\frac{\partial J(\hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}} = 0$ ，再通过求解方程得到 $\hat{\theta}$ 。将 (3-8) 式代入微分公式 $\frac{\partial J(\hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}}$ ，利用补充知识 1 中的矩阵求导相关知识可得

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\theta}} [(Z_k - H_k \hat{\theta})^T (Z_k - H_k \hat{\theta})] = -2H_k^T (Z_k - H_k \hat{\theta}) \quad (3-10)$$

令上式等于 0，可得：

$$H_k^T Z_k - H_k^T H_k \hat{\theta} = 0 \quad (3-11)$$

进一步推导得到

$$H_k^T Z_k = H_k^T H_k \hat{\theta} \quad (3-12)$$

假设 $H_k^T H_k$ 是满秩的，上式两边同时左乘 $H_k^T H_k$ 的逆，可以获得估计参数 $\hat{\theta}$ 的计算方法如下

$$\hat{\theta} = (H_k^T H_k)^{-1} H_k^T Z_k \quad (3-13)$$

下面利用上述估计方法估计图 2.3 所示室内温度的变化。已知 1000 个测量数据如图 2.3 所示， H_k 如式 (3-7) 所示，在例 2.3 程序 C2-2 的后面增加如下语句 $Hk = [t; \text{ones}(1, 1000)]'$ ；
 $\text{estim} = \text{inv}(Hk' * Hk) * Hk' * s3'$ ；

程序中上标“'”表示矩阵的转置，ones(1,1000)产生1行1000列的全1矩阵，t是前面程序所产生的从0到9.99秒，并且间隔0.01秒的测量时间向量0, 0.01, 0.02, ……共1000个，Hk是测量矩阵 H_k ，inv(Hk'*Hk)表示 $(H_k^T H_k)^{-1}$ 。

运行程序后，获得估计参数 $\hat{\theta}$ 的结果为

```
estim =  
    1.9808  
   20.0125
```

看到这个结果，读者会发现结果和真实值(根据第二章的数据模拟真实值 $\theta_1 = 2, \theta_2 = 20$) 并不相同，的确如此，估计理论会接受估计结果和实际真值略有偏差。此时，一方面承认估计结果可能会有一定偏差，另一方面要想办法使偏差尽量小。研究者们给出了很多估计方法，有些方法的估计偏差可以随着数据量的增多而逐渐趋于零，有些则不会，而是收敛到某一恒值。前者通常称为无偏估计，后者称为有偏估计，即有偏差的意思。相关书籍还会介绍很多其他的估计方法，本书则继续介绍最小二乘估计，以期通过最小二乘估计来改进这种有偏估计方法，获得更小的偏差。为了更好地让读者掌握最小二乘估计方法的基本原理和应用，给出一道题目进行练习，并提供相关 MATLAB 程序及结果图，供读者参考。

例 3.2 美国在 1946 年至 1956 年的钢产量分别为 66.6, 84.9, 88.6, 78.0, 96.8, 105.2, 93.2, 111.6, 88.3, 117.0, 115.2 百万吨，请分别用一次线性曲线、二次曲线、三次曲线以及四次曲线来拟合这些数据，并预测 1957 年至 1960 年的钢产量。

解：如图 3.2 所示，展示了从 1946 年到 1956 年的钢产量的离散数据，用“o”表示，为了说明每一年的前后关系，使用虚线把每年的数据按照前后关系连接起来。

```
clc  
clear  
z=[66.6, 84.9, 88.6, 78.0, 96.8, 105.2, 93.2, 111.6, 88.3, 117.0, 115.2]';  
plot(z, 'o--')  
ylabel('钢产量（百万吨）')
```

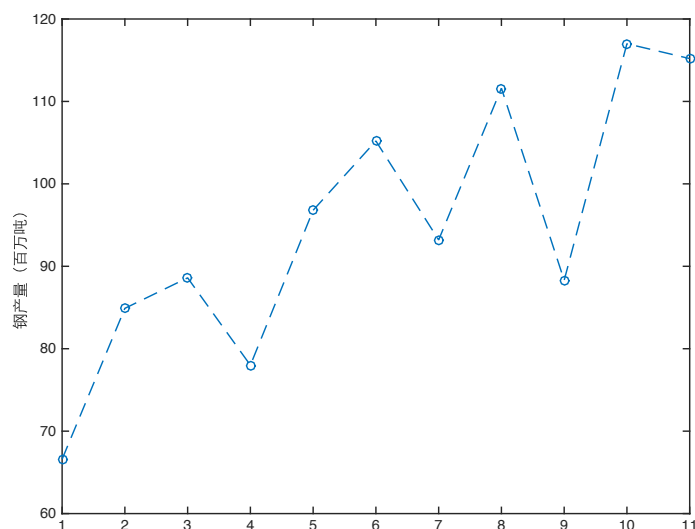


图 3.2 美国 1946 年至 1956 年的钢产量

1) 先来考虑使用一次曲线拟合这些数据，一次曲线方程为：

$$z(k) = a_1 k + a_0 + w(k) \quad (3-14)$$

写成具有矩阵形式的测量方程为

$$Z(k) = \begin{bmatrix} k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} + w(k) \quad (3-15)$$

这里用 a_i 表示 N 次曲线的待估计参数将 1946 年取为第 1 个点，则 k 的取值为 1, 2, ..., 11。式

(3-2) 中的 H_k 和待估计参数 θ 分别为

$$H_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 11 & 1 \end{bmatrix}, \quad \theta = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} \quad (3-16)$$

利用最小二乘方法实现估计的程序如 C3-1 所示。程序中 H_k 表示上式的测量矩阵 H_k ，利用最小二乘方法得到的估计结果用 estim 表示，得到了 estim 后，设 $k=1,2,3,\dots,11$ 利用测量方程再次重构从 1946 年到 1956 年的钢产量数据 $ze(1:11)$ ，又设 $k=12,13,14,15$ 使用循环语句预测后面 4 年，也就是从 1957 年到 1960 年的数据，程序中也用 ze 表示。最后程序使用 hold on 语句及画图语句 plot ，将拟合出的线性一次曲线画在刚才的结果图，也就是图 3.2 的上面。横坐标是从 1 到 15，其中包含了后面预测的四个数据点，如图 3.3 所示。

%C3-1

```

k=1:11;
Hk=[k;ones(1,11)]';           %计算(3.2)中的Hk
estim=inv(Hk'*Hk)*Hk'*z;       %计算最小二乘估计方法(3.4)
ze=estim(1)*k+estim(2);        %利用估计的结果重新计算1946年至1956年的钢产
量,

                                %来评价使用一次曲线的拟合结果

for i=1:4
ze(11+i)=estim(1)*(11+i)+estim(2); %计算1957年至1960年的钢产量
end

hold on
plot(ze)

```

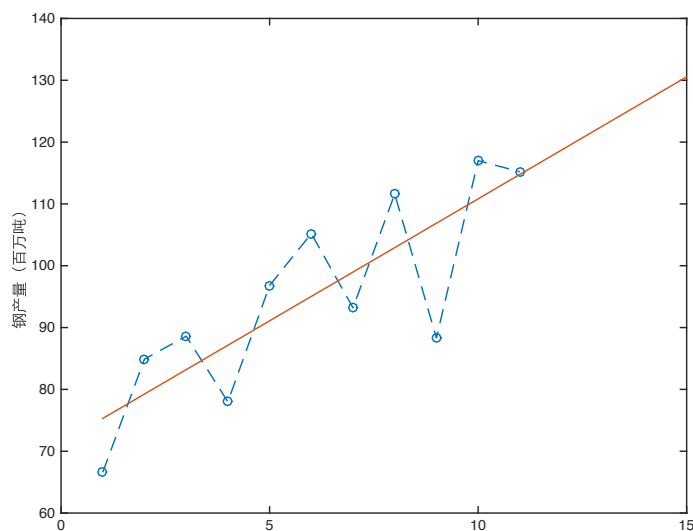


图 3.3 一次曲线拟合钢产量的结果

利用一次曲线拟合钢产量的结果得出估计参数 $a_1 = 3.9464$, $a_0 = 71.3582$ 。首先发现, 从 $k = 1, 2, 3 \dots 11$ 得到的曲线拟合结果和原来的数据是有差别的, 这说明原来的数据在测量时存在噪声。如果不考虑噪声 $w(k)$ 的影响, 利用估计出的线性一次曲线可以预测 1957 年至 1960 年的钢产量分别为: 118.7145, 122.6609, 126.6073, 130.5536, 这些数据点都落在图 3.3 的直线上。

2) 下面看一下若使用二次曲线进行拟合, 结果会有什么不同, 如果钢产量的数据满足二次曲线, 则测量方程为:

$$z(k) = a_2 k^2 + a_1 k + a_0 + w(k)$$

$$= \begin{bmatrix} k^2 & k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} + w(k)$$

和前面类似，将 1946 年取为第 1 个点，则 k 为 $1, 2, \dots$ 。式 (3-3) 中的 H_k 和待估计参数 θ 分别为

$$H_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2^2 & 2 & 1 \\ 3^2 & 3 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 11^2 & 11 & 1 \end{bmatrix}$$

本例程序与 C3-1 程序相似 $\theta = \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix}$ ，只是 H_k 有所不同。

```

k=1:11;
Hk=[k.^2;k;ones(1,11)]';
estim=inv(Hk'*Hk)*Hk'*z;
ze=estim(1)*k.^2+estim(2)*k+estim(3);

for i=1:4
ze(11+i)=estim(1)*((11+i).^2)+estim(2)*(11+i)+estim(3)
end

hold on
plot(ze)

```

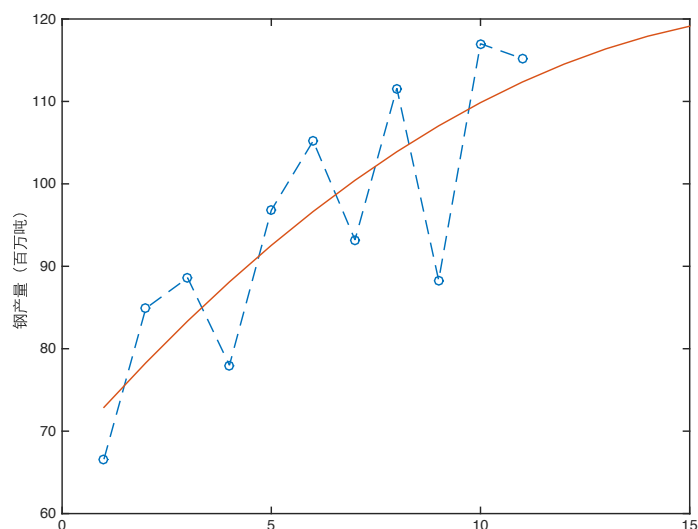


图 3.4 二次曲线拟合钢产量的结果

运行该程序，则二次曲线拟合钢产量的结果如图 3.4 所示，可以推断出 1957 年至 1960 年的钢产量分别为：114.5297，116.3836，117.9157，119.1258。

3) 若使用三次曲线进行拟合，则测量方程和相应参数为：

$$\begin{aligned}
 z(k) &= a_3 k^3 + a_2 k^2 + a_1 k + a_0 + w(k) \\
 &= \begin{bmatrix} k^3 & k^2 & k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} + w(k)
 \end{aligned} \tag{3-17}$$

式 (3-8) - (3-9) 中的 H_k 和待估计参数 θ 分别为

$$H_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2^3 & 2^2 & 2 & 1 \\ 3^3 & 3^2 & 3 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 11^3 & 11^2 & 11 & 1 \end{bmatrix} \quad \theta = \begin{bmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} \tag{3-18}$$

对应程序如下，结果图如图 3.5 所示。

```

k=1:11;
Hk=[k.^3;k.^2;k;ones(1,11)]';
estim=inv(Hk'*Hk)*Hk'*z;
ze=estim(1)*k.^3+estim(2)*k.^2+estim(3)*k+estim(4);

for i=1:4
ze(11+i)=estim(1)*((11+i).^3)+estim(2)*((11+i).^2)+estim(3)*(11+i)+estim(4);

```

end

hold on

plot(ze)

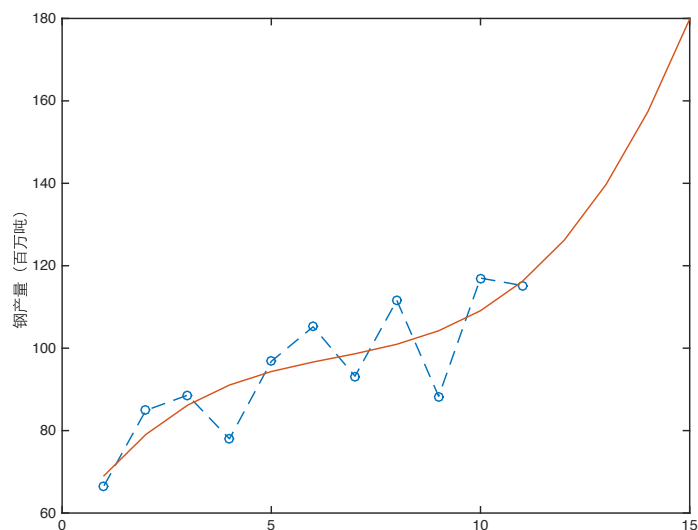


图 3.5 三次曲线拟合钢产量的结果

利用三次曲线拟合钢产量的结果可以推断出 1957 年至 1960 年的钢产量分别为：126.1879, 139.7000, 157.3741, 179.8508。

4) 若使用四次曲线进行拟合，则测量方程及相关参数为：

$$\begin{aligned}
 z(k) &= a_4 k^4 + a_3 k^3 + a_2 k^2 + a_1 k + a_0 + w(k) \\
 &= \begin{bmatrix} k^4 & k^3 & k^2 & k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_4 \\ a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} + w(k)
 \end{aligned} \tag{3-19}$$

式 (3-3) 中的 H_k 和待估计参数 θ 分别为

$$H_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2^4 & 2^3 & 2^2 & 2 & 1 \\ 3^4 & 3^3 & 3^2 & 3 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 11^4 & 11^3 & 11^2 & 11 & 1 \end{bmatrix} \quad \theta = \begin{bmatrix} a_4 \\ a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} \tag{3-20}$$

对应程序如下，结果图如图 3.6 所示。

k=1:11;

Hk=[k.^4;k.^3;k.^2;k;ones(1,11)]';

```

estim=inv(Hk'*Hk)*Hk'*z;
ze=estim(1)*k.^4+estim(2)*k.^3+estim(3)*k.^2+estim(4)*k+estim(5);

for i=1:4
ze(11+i)=estim(1)*((11+i).^4)+estim(2)*((11+i).^3)+estim(3)*((11+i).^2)+estim(4)
)*(11+i)+estim(5);
end

hold on
plot(ze)

```

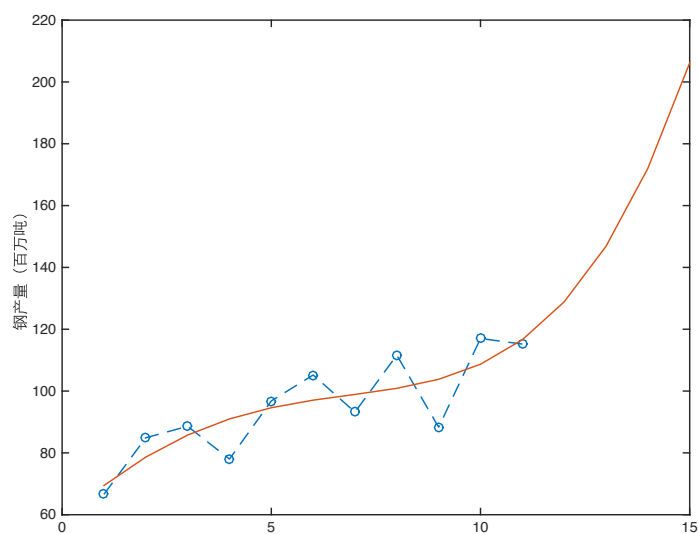


图 3.6 四次曲线拟合钢产量的结果

可以推断出 1957 至 1960 年的钢产量分别为: 128.8606, 146.8273, 172.0399, 206.1669。

依次运行上面四段程序, 可以将 4 条拟合曲线画在一张图上, 如图 3.7 所示:

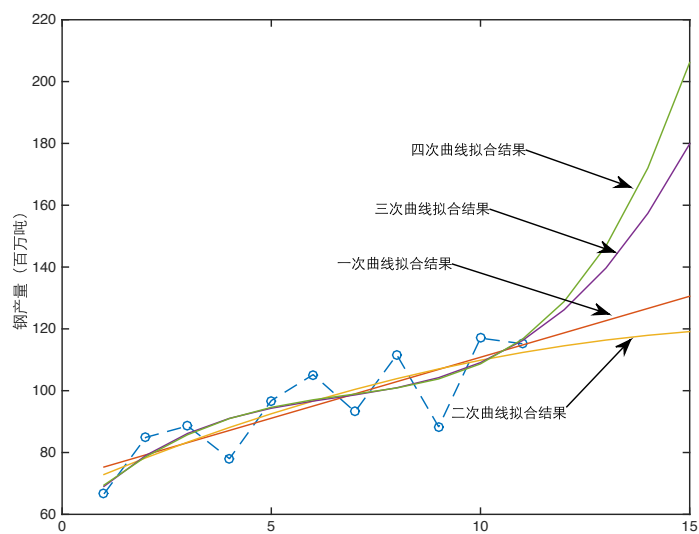


图 3.7 一、二、三、四次曲线拟合结果的比较

可以看到，这几组曲线拟合的结果并不相同，在图上我们分别用箭头做了标注。结果表明，二次曲线拟合的结果偏低，而一、三、四次曲线拟合结果依次递增。

那么，这四种曲线哪种更为准确呢？当然不能凭感觉而论，这需要定量指标进行评价。可以使用曲线的拟合度计算哪一条曲线拟合的更准确来评价拟合效果。

给出这道题主要是想让读者学会使用 MATLAB 语言和最小二乘法进行曲线拟合。关于曲线拟合其实有很多软件，这些软件也基本采用刚才给出的方法，先假设拟合曲线的阶次，然后利用最小二乘法估计待估计参数。

3.2 最小二乘加权估计

下面思考这样的问题，3.1 节给出的最小二乘方法并没有使用测量噪声方差。如果熟悉所使用的传感器，厂家也提供了传感器的测量性能，那么，经过实际测量能否得到传感器的测量噪声方差，进而减小估计结果的偏差呢？从直觉上来讲应该是可以的。那么如何利用这个数值呢？可以将测量数据分别对待，如果测量传感器的噪声方差比较小，说明测量数据相对准确，可以利用这些数据来进行估计；如果测量传感器的噪声方差比较大，则可以减小这些数据在估计中的作用。也就是对测量数据进行加权处理，而不再“一视同仁”。最小二乘加权估计方法就是从这个基本思想发展的。

加权的依据来源于测量的准确性。假设测量噪声为高斯白噪声 N_k ，其均值和协方差分别为 $E(N_k)=0, E(N_k N_k^T)=R_k$ ，若每次测量噪声不相关，则 R_k 为对角阵，即

$$R_k = \begin{bmatrix} R(1) & & & \\ & R(2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & R(k) \end{bmatrix} \quad (3-21)$$

其中 $R(1), R(2) \cdots R(k)$ 是测量噪声在 1, 2, ……k 时刻的方差。若 N_k 相关，则 R_k 为方阵，此时比较复杂。设权值用 W 表示，可取 $W = R_k^{-1}$ 。这样做的原因在于当数据测量方差大时，其权重应设置小些。当然，也可以使用其它函数实现这种关系，但是一般情况下都将测量噪声方差的“逆”取为权值。

考虑每个测量时刻的测量噪声方差，设线性最小二乘加权估计的性能指标为

$$J(\hat{\theta}) = (Z_k - H_k \hat{\theta})^T W (Z_k - H_k \hat{\theta}) \quad (3-22)$$

接下来的任务是选择 $\hat{\theta}$ 使之达到最小。

与上一节相似，我们还是使用就极值的方式来解决。令 $\frac{\partial J_w(\hat{\theta})}{\partial \hat{\theta}} = 0$ ，则

$$\frac{\partial}{\partial \hat{\theta}} [(Z_k - H_k \hat{\theta})^T W (Z_k - H_k \hat{\theta})] = -2H_k^T W (Z_k - H_k \hat{\theta}) = 0 \quad (3-23)$$

解上述方程得到

$$\hat{\theta} = (H_k^T W H_k)^{-1} H_k^T W Z_k \quad (3-24)$$

例 3.3: 还是继续例 3.1 的题目，现在假设知道测量噪声的方差为 2，且测量噪声为平稳过程，可以认为在每次测量中方差都相同。利用同样的测量数据，能否得到更为准确的估计？

可以试图利用测量噪声方差来构造具有加权最小二乘估计的方法，首先讨论一下权重的取法，如果测量噪声方差保持恒定不变，可以得到权值矩阵为

$$W = \text{diag} \left[\begin{array}{cccc} 1/2 & 1/2 & \cdots & 1/2 \end{array} \right] \quad (3-25)$$

这是一个 1000 行、1000 列的对角矩阵，可以用 MATLAB 语句 `0.5*eye(1000)` 来实现。

在例 2.3 程序后面加上以下语句，利用 MATLAB 程序实现加权最小二乘估计方法如下：

```
Hk=[t;ones(1,1000)]';
W=0.5*eye(1000);
estim=inv(Hk'*W*Hk)*Hk'*W*s3'; %与前面的差别在于此处使用了权重 W
```

运行程序后得到了和原来相同的结果

```
estim =
    1.9808
   20.0125
```

这是为什么呢？原来的设想是通过加权减小估计的偏差，而得到的这两个值却和原来完全相同，仔细分析发现：当权值为对角阵且所有的对角元素都相同时，矩阵运算中对角阵的作用与标量相同，用小写 w 表示公式 (3-24) 中的标量权值，根据加权最小二乘估计方法可以得到：

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{LSW} &= (H_k^T w H_k)^{-1} H_k^T w Z_k \\ &= w^{-1} (H_k^T H_k)^{-1} H_k^T w Z_k \\ &= (H_k^T H_k)^{-1} H_k^T Z_k \end{aligned} \quad (3-26)$$

标量的计算使得求逆后运算 w^{-1} 与 w 抵消，所以最小二乘加权估计和最小二乘的结果是相同的。

但是，如果权值矩阵对角线上的数据不相同，也就是并不是每次测量的测量噪声方差都相同时，最小二乘加权估计就能够获得更准确的估计结果。从另一方面也可以看到，最小二乘估计在并不清楚测量噪声具体数值的时候，也能获得较好的估计结果，即，如果传感器的测量噪声方差不随时间的变化而变化，考虑测量噪声方差的最小二乘加权方法和不考虑测量噪声方差的最小二乘方法可以获得相同的结果。但测量数据中的测量噪声方差不变是一种特殊情况，更普遍的情况是测量噪声方差 $R(k)$ 是一个时变量，这时候考虑噪声的方差，利用加权最小二乘法还是很有意义的。

3.3 线性最小二乘递推估计

本书的核心内容是 Kalman 滤波器，如前面所述，Kalman 滤波器的基本特点是可以随着时间向前递推处理测量数据，实现所谓的“实时处理测量数据”。但是目前讲述的最小二乘估计方法、加权最小二乘估计方法都必须等到所有的数据全部收集好之后一次处理完成，在前面的例题中需要构建一个 1000×1 的矩阵 Z_{1000} ，在实际操作的时候也意味着，需要等待这 1000 个测量数据全部测完之后才能进行估计，这样就不能在线地处理测量数据。还可以这样考虑，如果想获得比较准确的估计，是不是一定要等到 1000 次测量结束之后才可以呢？还是获得几百个数据就可以得到比较好的估计结果呢？如果回答是后者，就不需要测 1000 个数据了。可见，在线处理会更高效，这就是接下来要介绍的递推估计方法。

递推估计的核心思想是，在获得测量数据以后及时地进行处理，而不必等到所有测量数据都获得后再进行估计，而且在估计当前时刻的参数时，可以利用前一次得到的结果，而不必将数据全部重新计算一遍。也就是说，线性最小二乘递推估计方法关注的是：如果已经得到第 $k-1$ 步的估计 $\hat{\theta}(k-1)$ ，当第 k 步的测量 $Z(k)$ 到达后，在 $H(k)$ 已知情况下，如何利用 $\hat{\theta}(k-1)$ 、 $Z(k)$ 和 $H(k)$ 构造估计量 $\hat{\theta}(k)$ 使估计结果越来越接近估计量的真实值。

根据前面的假设，前 $k-1$ 步的估计 $\hat{\theta}(k-1)$ 已经得到，下面先看看这个估计是如何得

到的。设加权矩阵为 $W_{k-1} = \text{diag} \begin{pmatrix} W(1) \\ W(2) \\ \dots \\ W(k-1) \end{pmatrix}$ ，根据线性最小二乘加权估计方法 (3-24)，

可知估计矢量的计算方法 $\hat{\theta}(k-1)$ 为

$$\hat{\theta}(k-1) = [H_{k-1}^T W_{k-1} H_{k-1}]^{-1} H_{k-1}^T W_{k-1} Z_{k-1} \quad (3-27)$$

其中测量数据 Z_{k-1} 、测量矩阵 H_{k-1} 以及相应地测量噪声 N_{k-1} 分别为

$$Z_{k-1} = \begin{pmatrix} z(1) \\ z(2) \\ \dots \\ z(k-1) \end{pmatrix}, \quad H_{k-1} = \begin{pmatrix} H(1) \\ H(2) \\ \dots \\ H(k-1) \end{pmatrix}, \quad N_{k-1} = \begin{pmatrix} N(1) \\ N(2) \\ \dots \\ N(k-1) \end{pmatrix} \quad (3-28)$$

用 M_{k-1} 表示(3-27)式右边的前一部分, 即 $M_{k-1} = [H_{k-1}^T W_{k-1} H_{k-1}]^{-1}$, 重写上式为

$$\hat{\theta}(k-1) = M_{k-1} H_{k-1}^T W_{k-1} Z_{k-1} \quad (3-29)$$

接下来就是推导的关键了, 在 $H(k)$ 已知的情况下, 当得到第 $k-1$ 步的估计 $\hat{\theta}(k-1)$,

并且测量 $Z(k)$ 到达后, 根据最小二乘加权估计方法 (3-24), 可以得到 $\hat{\theta}(k)$

$$\hat{\theta}(k) = [H_k^T W_k H_k]^{-1} H_k^T W_k Z_k \quad (3-30)$$

前面提到过, 测量数据 Z_k 、测量矩阵 H_k 以及相应地测量噪声 N_k 分别为

$$Z_k = \begin{pmatrix} z(1) \\ z(2) \\ \dots \\ z(k) \end{pmatrix}, \quad H_k = \begin{pmatrix} H(1) \\ H(2) \\ \dots \\ H(k) \end{pmatrix}, \quad N_k = \begin{pmatrix} N(1) \\ N(2) \\ \dots \\ N(k) \end{pmatrix} \quad (3-31)$$

同样设 $M_k = [H_k^T W_k H_k]^{-1}$, 将其代入上式(3-30), 得

$$\hat{\theta}(k) = M_k H_k^T W_k Z_k \quad (3-32)$$

因为(3-27)和(3-29)式是待估计量 $\hat{\theta}(k-1)$ 的求解方法, 而(3-30)和(3-32)

式是 $\hat{\theta}(k)$ 的求解方法, 前面提到估计 $\hat{\theta}(k)$ 时想利用 $\hat{\theta}(k-1)$ 的值, 那就需要先弄清楚两者

之间的关系, 要发现相同的部分, 然后利用 $\hat{\theta}(k-1)$ 替代这些相同部分, 就可以建立 $\hat{\theta}(k)$ 和

$\hat{\theta}(k-1)$ 之间的关系了。

接下来看看(3-29)和(3-32)中各个量之间的关系。将前面 $k-1$ 次的所有测量写成

向量的形式为 $Z_{k-1} = \begin{pmatrix} z(1) \\ z(2) \\ \dots \\ z(k-1) \end{pmatrix}$, 而前 k 次所有的测量数据也写成向量形式, Z_k 和 Z_{k-1} 具

有关系 $Z_k = \begin{pmatrix} Z_{k-1} \\ Z(k) \end{pmatrix}$, 同样道理, H_{k-1} 和 H_k 也具有类似的关系矩阵 $H_k = \begin{pmatrix} H_{k-1} \\ H(k) \end{pmatrix}$ 。对

于测量噪声来说，噪声的关系矩阵 $N_k = \begin{pmatrix} N_{k-1} \\ N(k) \end{pmatrix}$ 意味着噪声方差的关系满足

$W_k = \begin{pmatrix} W_{k-1} & 0 \\ 0 & W(k) \end{pmatrix}$ ，其中 $W(k) = R^{-1}(k)$ ， $W(k)$ 是第 k 次测量的噪声方差值。很显然，

M_k 与 M_{k-1} 也是有关系的，将 H_k ， W_k 代入 M_k 得

$$M_k = \left\{ \begin{pmatrix} H_{k-1}^T & H^T(k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_{k-1} & 0 \\ 0 & W(k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{k-1} \\ H(k) \end{pmatrix} \right\}^{-1} \quad (3-33)$$

进行矩阵相乘运算得到

$$M_k = \left\{ H_{k-1}^T W_{k-1} H_{k-1} + H^T(k) W(k) H(k) \right\}^{-1} \quad (3-34)$$

观察上式右边和式中的第一项，再考虑前面定义 M_k 时提到的

$M_{k-1} = [H_{k-1}^T W_{k-1} H_{k-1}]^{-1}$ ，将上式中右边和式中的第一项用 M_{k-1} 代替后得到

$$M_k = \left\{ M_{k-1}^{-1} + H^T(k) W(k) H(k) \right\}^{-1}$$

两边取逆后得到 M_k 和 M_{k-1} 的关系如下

$$M_{k-1}^{-1} = M_k^{-1} - H^T(k) W(k) H(k) \quad (3-35)$$

可以看到，在已知 M_{k-1} 时，可以根据测量矩阵 $H(k)$ 与权值矩阵 $W(k)$ 可以求得 M_k 。

到目前为止，确定了 Z_k 和 Z_{k-1} 、 H_k 和 H_{k-1} 、 W_k 和 W_{k-1} 、 M_k 和 M_{k-1} 的关系，下面继续

推导第 k 步估计 $\hat{\theta}(k)$ 和前一步的估计 $\hat{\theta}(k-1)$ 的关系，方法是将 Z_k 、 H_k 、 W_k 、 M_k 代入

(3-32) 公式，然后再利用其中的 Z_{k-1} 、 H_{k-1} 、 W_{k-1} 、 M_{k-1} 找出 $\hat{\theta}(k-1)$ 的关系式，具体过程如下：

由 (3-32) 得到

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(k) &= M_k H_k^T W_k Z_k = M_k \begin{pmatrix} H_{k-1}^T & H^T(k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_{k-1} & 0 \\ 0 & W(k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{k-1} \\ Z(k) \end{pmatrix} \\ &= M_k \left(H_{k-1}^T W_{k-1} Z_{k-1} + H^T(k) W(k) Z(k) \right) \end{aligned} \quad (3-36)$$

观察上一个式子，等式右边括号里 $H_{k-1}^T W_{k-1} Z_{k-1}$ 和 $\hat{\theta}(k-1)$ 有关系。先由 (3-27) - (3-29)

式可以得到 $H_{k-1}^T W_{k-1} Z_{k-1}$ 与 $\hat{\theta}(k-1)$ 的关系如下：

$$H_{k-1}^T W_{k-1} Z_{k-1} = M_{k-1}^{-1} \hat{\theta}(k-1)$$

将上式代入 (3-36) 式可以得到

$$\hat{\theta}(k) = M_k \left(M_{k-1}^{-1} \hat{\theta}(k-1) + H^T(k) W(k) Z(k) \right) \quad (3-37)$$

进一步我们需要保留 $\hat{\theta}(k-1)$ ，但消去 M_k 或 M_{k-1}^{-1} 。我们选择消去后者，将 (3-35) 式代入 (3-37) 得到

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(k) &= M_k \left((M_k^{-1} - H^T(k) W(k) H(k)) \hat{\theta}(k-1) + H^T(k) W(k) Z(k) \right) \\ &= \hat{\theta}(k-1) - M_k H^T(k) W(k) H(k) \hat{\theta}(k-1) + M_k H^T(k) W(k) Z(k) \\ &= \hat{\theta}(k-1) + M_k H^T(k) W(k) (Z(k) - H(k) \hat{\theta}(k-1)) \end{aligned}$$

现将递推最小二乘估计总结如下：

设 M_0 ， $\hat{\theta}(0)$ 为迭代初始值，一般 $\hat{\theta}(0)$ 为一合适的数， M_0 为一大的正数或正定矩阵，

其维数与 $H^T(k) W(k) H(k)$ 相同，递推最小二乘方法由以下两个递推公式组成，

$$M_k^{-1} = M_{k-1}^{-1} + H^T(k) W(k) H(k) \quad (3-38)$$

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + M_k H^T(k) W(k) (Z(k) - H(k) \hat{\theta}(k-1)) \quad (3-39)$$

其中 $M_k H^T(k) W(k)$ 为滤波增益，描述的是在当前测量 $Z(k)$ 及前一个估计的基础上，修正估计误差的力度。 $Z(k) - H(k) \hat{\theta}(k-1)$ 为新息，指的是“新”的信息，是指在当前测量数据到来后，给估计“引入”新的修正量。

下面用程序实现 (3-38)、(3-39) 的递推最小二乘估计方法。把这段程序加在前面产生图2.3的温度测量数据程序C2-2后面，就可以利用递推最小二乘方法得到估计结果图。为节约篇幅，这里将前一段程序省略。

用ea表示待估计变量，其初值设为全0矩阵，因为此时待估计变量为两个，将其写成一个2*1的向量，用M表示 M_k ，其初值 M_0 设为对角元素为1000的2*2维矩阵。使用estimate存储所有估计的结果，先设为空矩阵，然后使用 (3-38)、(3-39) 式进行迭代递推，最后给出 θ_1 、 θ_2 的递推估计结果 $\hat{\theta}_1(k)$ 、 $\hat{\theta}_2(k)$ 。

%C3-2

%拷贝前面C2-3程序到这里，如果没有前面的程序，就没有测量数据s3，程序会提示有错误

```
ea=[0;0];           %设置初值  $\hat{\theta}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ 
```

```

M=diag(1)*1000;    %设  $M_0 = \begin{bmatrix} 1000 & 0 \\ 0 & 1000 \end{bmatrix}$ 

estiamte=[];        %存储估计结果，将要保存为向量的形式
W=0.5;

for i=1:1000        %因为有1000个测量数据，所以循环设置1000次
h=[t(i) 1];
M=inv(inv(M)+h'*W*h);    %计算 (3.11a)
ea=ea+M*h'*W*(s3(i)-h*ea); %计算 (3.11b)，s3(i)为测量数据

estiamte=[estiamte,ea]; %保存估计结果
end

plot(estiamte(1,:));figure
plot(estiamte(2,:));

```

在递推估计的过程中，每一次的估计都用到前一次的估计结果，这样能够实现所谓的在线估计。程序的最后两个语句画出了两张结果图，分别如图 3.8 和图 3.9 所示。结果图的曲线具有递推算法结果的典型特征：从初值开始，经过一段震荡之后，逐渐收敛到一稳定值。可以看到，这个稳定值和前面介绍最小二乘法的结果其实是一样的，不过图上可以看出在递推的过程中估计值是在不断变化得。

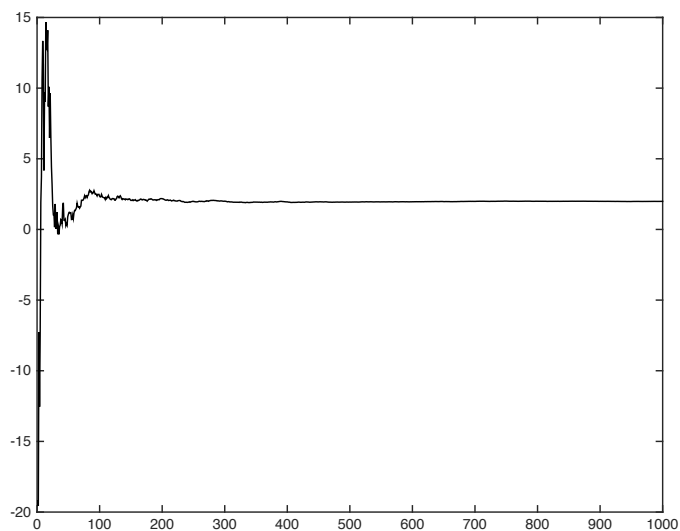
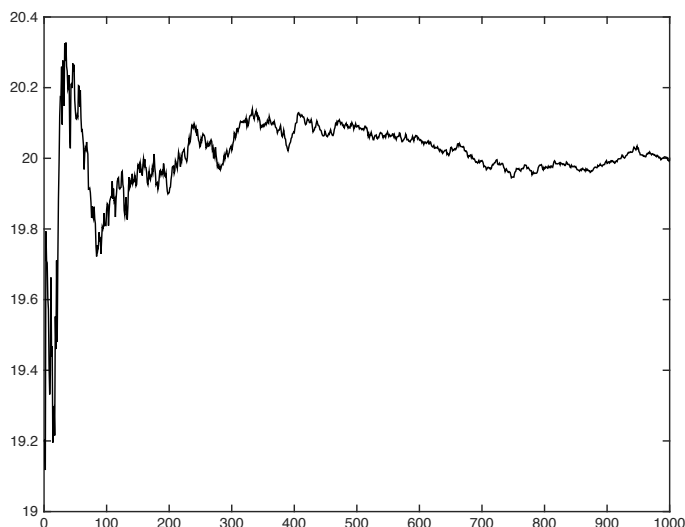


图 3.8 $\theta_1(k)$ 的估计结果

图 3.9 $\theta_2(k)$ 的估计结果

3.4 最小二乘的性能——估计方差

评价一种估计方法的好坏是很有必要的。估计结果和实际真实值不一样，无论是研究者还是应用者都能接受这个现象。只不过态度可能会不一样，研究者们或心安理得、或摩拳擦掌，而应用者们则处于不得不、很被动的状态，但不管怎样，估计的结果和实际真值不一样，估计误差的存在还是可以被接受的。定量描述估计的误差，在众多估计方法“大比拼”之中，估计方差是一个很关键的评价指标。本小节给出几种最小二乘方法滤波增益和估计方差的求解方法，这些也是第4章Kalman滤波器的理论基础。

估计方差的定义为：

$$P(k) = E[(\theta - \hat{\theta}(k))(\theta - \hat{\theta}(k))^T]$$

式中 θ 为待估计参数的真值， $\hat{\theta}(k)$ 为第 k 步的估计值， $E(\cdot)$ 表示求均值。以此类推前一步的

估计方差为 $P(k-1) = E[(\theta - \hat{\theta}(k-1))(\theta - \hat{\theta}(k-1))^T]$ 。一般可以认为，所得的估计方差越小，估计方法就越好。估计方差最小的，估计方法就是最好的了，这就是所谓的最优估计。

接下来以递推最小二乘方法为例，研究一下最小二乘方法的估计方差。前面已经讲过，权值 $W(k)$ 一般取为测量噪声方差 $R(k)$ 的倒数，如果权值 $W(k)$ 为一个矩阵的话，则取为

$R(k)$ 的逆。从现在开始都用 $R^{-1}(k)$ 来代替 $W(k)$ ，(3-38)、(3-39) 中的滤波增益 $K(k)$ 就变为 $K(k) = M_k H^T(k) R^{-1}(k)$ ，将递推最小二乘估计方法估计

$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + K(k)(Z(k) - H(k)\hat{\theta}(k-1))$ 代入估计方差的定义，可以得到：

$$P(k) = E[(\theta - \hat{\theta}(k))(\theta - \hat{\theta}(k))^T] \\ = E[(\theta - \hat{\theta}(k-1) - K(k)(Z(k) - H(k)\hat{\theta}(k-1)))(\theta - \hat{\theta}(k-1) - K(k)(Z(k) - H(k)\hat{\theta}(k-1)))^T]$$

再将测量方程 $Z(k) = H(k)\theta + N(k)$ 代入上式，考虑到待估计值 θ 与 $N(k)$ 不相关，经整理后可以得到：

$$P(k) = (I - K(k)H(k))P(k-1)(I - K(k)H(k))^T + K(k)R(k)K^T(k) \quad (3-40)$$

接下来讨论递推最小二乘方法的估计性能问题，其估计结果是最优的吗？或者，(3-38)、(3-39) 给出的估计能够使估计方差 (3-40) 最小吗？要是能使估计方差 (3-40) 最小，那最小二乘方法就是最优的。

反过来，能使估计方差 (3-40) 最小的滤波增益 $K(k)$ 又是什么呢？是

$K(k) = M_k H^T(k) R^{-1}(k)$ 吗？如果是的话，也说明最小二乘方法是最优的。下面来求解使

(3-40) 中的 $P(k)$ 得到最小值的滤波增益 $K(k)$ ，如果与 (3-38)、(3-39) 中的 $K(k)$ 相同就回答了这个问题。

令 (3-40) 式 $P(k)$ 求偏导得到的式子等于 0，即

$$\frac{\partial P(k)}{\partial K(k)} = 2(I - K(k)H(k))P(k-1)(-H^T(k)) + 2K(k)R(k) = 0$$

经整理后得到关于 $K(k)$ 的公式如下

$$K(k) = P(k-1)H^T(k)(R(k) + H(k)P(k-1)H^T(k))^{-1} \quad (3-41)$$

这个答案初看起来另人惊讶，和已经得到的滤波增益 $K(k) = M_k H^T(k) R^{-1}(k)$ 是不同的，仔细观察 (3-38) 和 (3-41) 就会发现，这两个公式看起来是不可能一样的，因为 (3-38) 有 M_k ，但 (3-41) 中包含了另一个量——前一步估计方差 $P(k-1)$ 。但下面 2 个结论（证明方法见附录）却表明这两个公式是等价的：

1. 如果考虑 $W(k) = R^{-1}(k)$ ，则 (3-38) 中的 M_k 实际上是估计方差 $P(k)$ ，按照式 (3-38)，估计方差也满足 $P^{-1}(k) = P^{-1}(k-1) + H^T(k)R^{-1}(k)H(k)$ 。

2. 如果用 $P(k)$ 来代替 (3-38) 中的 M_k ，则

$K(k) = P(k-1)H^T(k)(R(k) + H(k)P(k-1)H^T(k))^{-1}$ 与 (3-41) 所表达的滤波增益是等价的。

我们知道，(3-41) 所表达的滤波增益是能够使估计方差 (3-40) 最小的滤波增益，也就是最优估计的滤波器增益。而 $K(k) = P(k)H^T(k)R^{-1}(k)$ 是最小二乘方法的滤波器增益，

若这两者是等价，就可以得出这样的结论：最小二乘方法（3-38）、（3-39）是最优的。

到这里，可以得到如下结论，利用最小二乘性能指标得到的估计方法

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + K(k)(Z(k) - H(k)\hat{\theta}(k-1)) \quad (3-42)$$

可以得到最小的估计方差 $P(k)$ ，其中滤波增益 $K(k)$ 有以下两种不同的计算方法：

$$K(k) = P(k)H^T(k)R^{-1}(k) \quad (3-43)$$

$$K(k) = P(k-1)H^T(k)(R(k) + H(k)P(k-1)H^T(k))^{-1} \quad (3-44)$$

估计方差 $P(k)$ 可以使用如下两种求法来计算：

$$P(k) = (P^{-1}(k-1) + H^T(k)R^{-1}(k)H(k))^{-1} \quad (3-45)$$

$$P(k) = [I - K(k)H(k)]P(k-1)[I - K(k)H(k)]^T + K(k)R(k)K^T(k) \quad (3-46)$$

在附录中（3-52）还提到下面的估计方差 $P(k)$ 计算方法，

$$P(k) = (I - K(k)H(k))P(k-1) \quad (3-47)$$

在上面的三个计算 $P(k)$ 的公式中，（3-47）是一个比较简单的表达式，但是数值计算问题可

能导致 $P(k)$ 不是正定的，即使 $P(k-1)$ 和 $R(k)$ 都是正定的。（3-46）虽然复杂，但是却可

以保证 $P(k)$ 是正定的，与理论解一致，而（3-45）需要三次矩阵求逆计算，因此计算复杂，

需要占用更多的计算资源，但在多传感器状态融合估计中可以使融合公式具有统一形式，所以经常状态融合估计方法中使用。

3.5 小结

本章介绍了最小二乘估计方法，包括已知测量噪声方差的加权最小二乘方法和递推的最小二乘方法。通过仿真实例我们发现，已知系统的测量模型很重要，当系统的待估计值是恒值时，最小二乘方法可以得到很好的效果。

我们还证明了最小二乘估计可以得到最优的估计结果，并且给出了两种滤波增益 $K(k)$ 及三种估计方差 $P(k)$ 的计算方法，不同的方法虽然形式上看起来不同，但在理论上是完全相同的。然而，有时候计算机“骗”我们，它的舍入误差可能会导致数值解与理论解不同。

补充知识：

1. 矩阵相关公式：

设 $x \in F^{n \times n}$ 为常矩阵，我们有 $f = x^T A x$ ，则 $\frac{df}{dx} = (A + A^T)x$

证明：根据乘法公式：

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(x^T Ax) = \frac{dx^T}{dx} Ax + \frac{d(Ax)^T}{dx} x = Ax + A^T x = (A + A^T)x$$

2. 矩阵逆运算的求法

$$\begin{aligned}(A - BD^{-1}C)^{-1} &= A^{-1} + A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} \\ (A + BD^{-1}C)^{-1} &= A^{-1} - A^{-1}B(D + CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}\end{aligned}\quad (3-48)$$

3. 矩阵转置运算计算

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

$$(AB)^T = B^T A^T$$

附录证明:

1. 如果考虑 $W(k) = R^{-1}(k)$, (3-38) 中的 M_k 实际上是估计方差 $P(k)$ 。

证明:

先设

$$S(k) = R(k) + H(k)P(k-1)H^T(k) \quad (3-49)$$

则 (3-41) 中的滤波增益变为

$$K(k) = P(k-1)H^T(k)S^{-1}(k) \quad (3-50)$$

将其代入 (3-40) 式并展开, 得:

$$\begin{aligned}P(k) &= P(k-1) - P(k-1)H^T(k)S^{-1}(k)H(k)P(k-1) - P(k-1)H^T(k)S^{-1}(k)H(k)P(k-1) \\ &\quad + P(k-1)H^T(k)S^{-1}(k)H(k)P(k-1)H^T(k)S^{-1}(k)H(k)P(k-1) \\ &\quad + P(k-1)H^T(k)S^{-1}(k)R(k)S^{-1}(k)H(k)P(k-1)\end{aligned}$$

将上式第 2、3 两项合并, 第 4、5 两项合并后, 得到

$$\begin{aligned}P(k) &= P(k-1) - 2P(k-1)H^T(k)S^{-1}(k)H(k)P(k-1) \\ &\quad + \underline{P(k-1)H^T(k)S^{-1}(k)H(k)P(k-1)H^T(k)S^{-1}(k)H(k)P(k-1)} \\ &\quad + \underline{P(k-1)H^T(k)S^{-1}(k)R(k)S^{-1}(k)H(k)P(k-1)}\end{aligned}$$

我们发现最后一项中间的求逆部分即为 $S(k)$ (用横线标出), 它和 $S(k)$ 前后两个 $S^{-1}(k)$ 中的一个相乘, 从而消去其中一个, 进一步化解最后一项得:

$$\begin{aligned}P(k) &= P(k-1) - 2P(k-1)H^T(k)S^{-1}(k)H(k)P(k-1) \\ &\quad + \underline{P(k-1)H^T(k)S^{-1}(k)S(k)S^{-1}(k)H(k)P(k-1)} \\ &= P(k-1) - 2P(k-1)H^T(k)S^{-1}(k)H(k)P(k-1) \\ &\quad + P(k-1)H^T(k)S^{-1}(k)H(k)P(k-1)\end{aligned}$$

再合并后两项, 得到:

$$P(k) = P(k-1) - \underline{P(k-1)H^T(k)S^{-1}(k)H(k)P(k-1)} \quad (3-51)$$

现在注意到 (3-50) 中的 $K(k)$ 表达式 (用横线标出), $K(k)$ 隐藏在上式中, 所以可以把上

式重新写一下，为

$$\begin{aligned} P(k) &= P(k-1) - K(k)H(k)P(k-1) \\ &= (I - K(k)H(k))P(k-1) \end{aligned} \quad (3-52)$$

它是 $P(k)$ 的另一个表达式，形式上相对简单，但是因为含有相减的运算，在使用计算机进行数值计算时可能会由于计算机的舍入误差而导致 $P(k)$ 不是正定的，这与理论解是矛盾的，因为从方差的定义式 (3-40) 可知， $P(k)$ 一定是非负定的。

其实 $P(k)$ 还有第三种表达式，它需要三次求逆矩阵运算，在实际估计时计算较复杂，但会发现要证明的结果。

将 $S(k) = R(k) + H(k)P(k-1)H^T(k)$ 代入 (3-51)，得到

$P(k) = P(k-1) - P(k-1)H^T(k)(R(k) + H(k)P(k-1)H^T(k))^{-1}H(k)P(k-1)$ 对上式两边求逆，利用补充知识 2 中矩阵的求法 (3-48)

$$(A - BD^{-1}C)^{-1} = A^{-1} + A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1}$$

先弄清楚式子中 A, B, C, D 所代表的矩阵：

$$\begin{aligned} A &= P(k-1) \\ B &= P(k-1)H^T(k) \\ C &= R(k) + H(k)P(k-1)H^T(k) \\ D &= H(k)P(k-1) \end{aligned}$$

再利用补充知识 (3-48) 所述的矩阵求逆的方法，得到：

$$\begin{aligned} P^{-1}(k) &= P^{-1}(k-1) + P^{-1}(k-1)P(k-1)H^T(k) \\ &\quad \times [R(k) + H(k)P(k-1)H^T(k) - H(k)P(k-1)P^{-1}(k-1)P(k-1)H^T(k)]^{-1} \\ &\quad \times H(k)P(k-1)P^{-1}(k-1) \end{aligned}$$

即

$$P^{-1}(k) = P^{-1}(k-1) + H^T(k)R^{-1}(k)H(k) \quad (3-53)$$

比较 (3-38) 和 (3-53) 发现，若考虑 $W(k) = R^{-1}(k)$ ，在初值 M_0 和 $P(0)$ 相同的条件下， M_k 和 $P(k)$ 在每一个 k 值的迭代结果都是相同的，因此二者是等价的，也就是 M_k 和 $P(k)$ 是相同的。

2. 如果用 $P(k)$ 来代替 (3-38) 中的 M_k ，则 (3-41) 所表达的滤波增益

$K(k) = P(k-1)H^T(k)(R(k) + H(k)P(k-1)H^T(k))^{-1}$ 和 $K(k) = P(k)H^T(k)R^{-1}(k)$ 是等价的。

证明：

首先利用 $P(k)P^{-1}(k) = I$ 左乘 (3-41) 式等号右边多项式，得到：

$$K(k) = P(k)P^{-1}(k)P(k-1)H^T(k)(R(k) + H(k)P(k-1)H^T(k))^{-1}$$

将 (3-45) 式代入上式后，可以得到下面的式子：

$$K(k) = P(k)(P^{-1}(k-1) + H^T(k)R^{-1}(k)H(k)) \\ \times P(k-1)H^T(k)(R(k) + H(k)P(k-1)H^T(k))^{-1}$$

注意到 $P(k-1)H^T(k)$ 在第一个具有加和关系小括号的右边，可以将它乘入第一个小括号 $(P^{-1}(k-1) + H^T(k)R^{-1}(k)H(k))$ 内，得到

$$K(k) = P(k)(H^T(k) + H^T(k)R^{-1}(k)H(k)P(k-1)H^T(k)) \\ \times (R(k) + H(k)P(k-1)H^T(k))^{-1}$$

现在把第一个加和关系括号里面的 $H^T(k)$ 向左提出来，得到

$$K(k) = P(k)H^T(k)(I + R^{-1}(k)H(k)P(k-1)H^T(k)) \\ \times (R(k) + H(k)P(k-1)H^T(k))^{-1}$$

再在第一个加和关系括号里面的 $R^{-1}(k)$ 向左提出来，得到：

$$K(k) = P(k)H^T(k)R^{-1}(k)(R(k) + H(k)P(k-1)H^T(k)) \\ \times (R(k) + H(k)P(k-1)H^T(k))^{-1}$$

由于后两个括号是求逆的关系，则最终得到：

$$K(k) = P(k)H^T(k)R^{-1}(k) \quad (3-54)$$

可见，考虑到 M_k 和 $P(k)$ 是相同的，(3-41) 所表达的滤波增益

$$K(k) = P(k-1)H^T(k)(R(k) + H(k)P(k-1)H^T(k))^{-1} \text{ 和 } K(k) = P(k)H^T(k)R^{-1}(k)$$

是等价的。