第 4 章 Kalman 滤波器

跟其他著名的理论（例如傅立叶变换，泰勒级数等等）一样，Kalman（卡尔曼）滤波器也是以一个人的名字命名的，即 匈牙利数学家 Rudolf Emil Kalman。现在要学习的 Kalman 滤波器，源于 Rudolf Emil Kalman 的博士论文以及 1960 年左右发表的论文[13,14]。简单来说，Kalman 滤波器是一个“optimal recursive data processing algorithm(最优自回归数据处理算法)”。对于很多问题，Kalman 滤波器都可以得到最优的（最小均方差）估计结果，效率最高甚至是最有用的。目前，Kalman 滤波器在许多领域具有广泛应用，包括机器人导航与控制、雷达跟踪系统等。近年来还被应用于计算机图像处理，如视频图像跟踪等。

Kalman 滤波器的推导有很多方法，采用最小二乘估计方法进行推导，先给出系统模型，再考虑由待估计状态变化引起的向前一步状态预测问题，进而给出 Kalman 滤波器五个著名的递推公式。

例 4.1 下面来看一下如果实际测量数据发生突变，利用最小二乘方法得到的结果如何呢？真实值在第 501 个点处由 20 跳变至 30，如图 4.1 所示，噪声方差不变，仍为 2。

测量方程为 $Z(k)=\theta+N(k)$，测量矩阵为 $H(k)=1$，测量噪声方差为 $R(k)=2$，因为测量矩阵是一个标量，权值也是一个标量，取为测量噪声方差的倒数 0.5，$H^T(k)W(k)H(k)$ 计算后也是一个标量，所以 M_k 也是一个标量，其初始值设为 1000。

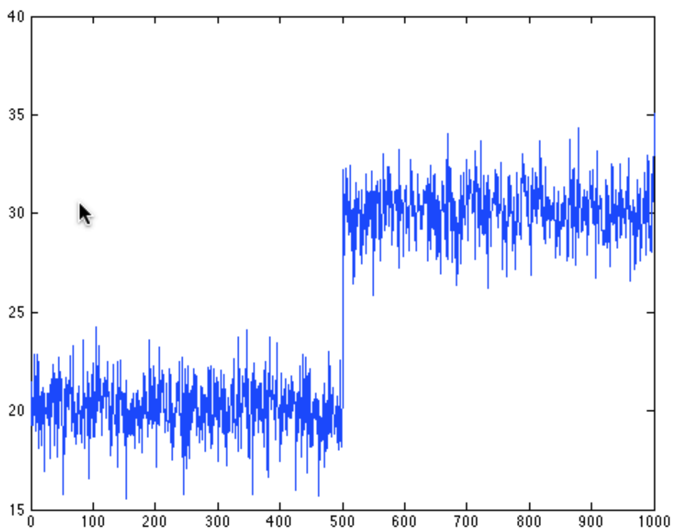

图 3.10 传感器得到的具有突变特征的数据

首先需要用模拟的方法产生具有突变特征的传感器数据,前500个数据的真值为20，后500个数据的真值为30，传感器测量噪声的方差为2，程序如下

```
clc
clear
t=0.01:0.01:10;
za=[20+sqrt(2)*randn(500,1);30+sqrt(2)*randn(500,1)];
```

接下来利用递推最小二乘方法估计具有突变特征的数据真值，程序中h表示 $H(k)$ ，w表示 $W(k)$ ，M表示 M_k ，ea0为待估计量的初值，在实现递推估计的循环中第i次的估计结果用ea(i)表示，程序如下：

```
h=1;
w=0.5;
M=1000;
ea0=0;
for i=1:1000
M=inv(inv(M)+h'*w*h);
ea(i)=ea0+M*h'*w*(za(i)-h*ea0);
ea0=ea(i);
end
plot(ea)
```

可以看到，具有递推效果的最小二乘估计方法能够发现真实值的变化，并将这种变化反映在估计值中。但经过后 500 个递推估计，还是没有得到较为准确的估计（真实值是 30)。

如果真实值的变化再复杂一些，如很多信号的变化都满足一阶马尔科夫过程 $\theta(k+1)=p*\theta(k)+w(k)$ ，可以推断其估计的结果会更差。为什么会这样呢？回忆一下，最小二乘估计所研究的问题只给出了测量方程,描述的是测量数据和待估计量的真值之间的线性关系，而且，由于认为被估计量 θ 恒定不变，那么使用递推最小二乘估计方法，其实也是默认待估计量并不改变，只是在这个过程中估计结果随着时间的变化不断向真值靠近。所以在实际应用的时候，如果待估计量发生了改变，不考虑这种变化就不会得到很好的结果。那么如何来解决这个问题呢？本章 Kalman 滤波器的内容表明，该方法就是研究待估计量随着时间而改变情况下的估计。

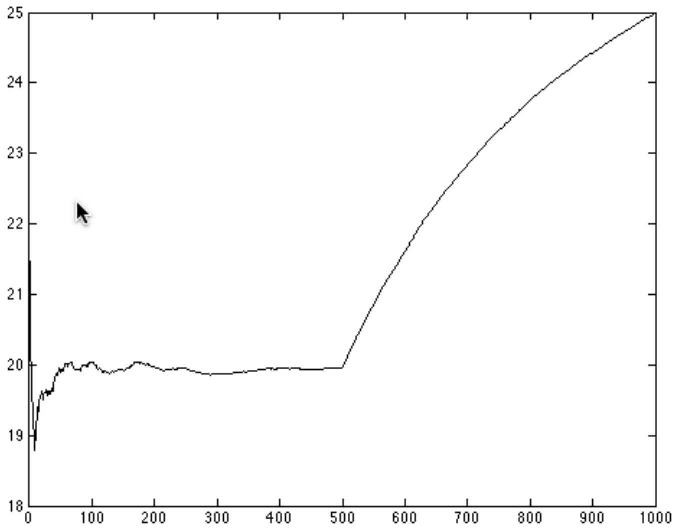

图 4.1 具有突变特征变量的估计结果

4.1 系统模型描述

上一章假设待估计变量θ不变，与之不同的是，本章将认为待估计量x随着时间发生变化。为与前一章待估计量θ相区别，本章使用x表示待估计量，写成离散形式是$x(k)$，并且，$x(k)$含有不确定的变化。估计含有噪声变量的方法叫做贝叶斯估计，Kalman 滤波器也可以通过贝叶斯估计推导得到，本书使用第 3 章最小二乘估计的结果来推导 Kalman 滤波器，这样更简洁，更易于理解。

假设有线性离散系统的过程模型及测量模型如下:

$$x(k+1)=A(k)x(k)+w(k) \tag{4-1}$$

$$z(k)=C(k)x(k)+v(k) \tag{4-2}$$

其中$x(k)$是待估计量，$z(k)$是通过传感器得到的测量数据。一般将（4-1）称为系统过程模型，指的是系统中待估计状态随时间变化的规律。前一时刻k的状态$x(k)$，在下一时刻即$k+1$时刻会变成$x(k+1)$，称$A(k)$为过程矩阵，表示状态变换的关系。$w(k)$叫做过程噪声，表示$x(k)$变成$x(k+1)$过程中的不确定程度。（4-2）称为测量模型，$C(k)$ 为测量矩阵，$v(k)$为测量噪声。假设$w(k)$和$v(k)$是零均值、不相关白噪声，并且协方差矩阵已知，分别用$Q(k)$和$R(k)$表示，即

$$\begin{aligned}
&w(k) \sim (0, Q(k)) \\
&v(k) \sim (0, R(k)) \\
&E[w(k)w^T(j)] = Q(k)\delta(k-j) \\
&E[v(k)v^T(j)] = R(k)\delta(k-j) \\
&E[w(k)v^T(j)] = 0
\end{aligned} \tag{4-3}$$

其中，$\delta(k-j)$ 是 Kronecker-δ 函数，即如果 $k=j$ 那么 $\delta(k-j)=1$，如果 $k \neq j$ 那么 $\delta(k-j)=0$。这样做的目的是，在已知系统方程（4-1）、（4-2）和含噪声的测量 $z(k), k=1,2,3\cdots$ 基础上估计状态 $x(k)$。状态量的具体物理含义取决于要研究的问题，如果关注的是跟踪目标问题，状态量一般取位移、速度和加速度等。

接下来介绍两个量的表示方法[15]，一个是后验估计 $\hat{x}(k|k)$，一个是先验估计 $\hat{x}(k|k-1)$，二者的区别在于测量与待估计量之间的时间关系。$\hat{x}(k|k)$ 是使用 k 时刻及其以前各个时刻的测量值 $z(k)$ 估计 k 时刻的状态 $x(k)$ 期望值，即 $\hat{x}(k|k) = E[x(k)|z(1), z(2), \cdots z(k)]$，而 $\hat{x}(k|k-1)$ 是使用 k 时刻以前的各个时刻（注意：不包括 k 时刻）的测量值，来估计 k 时刻的状态 $x(k)$ 期望值，即 $\hat{x}(k|k-1) = E[x(k)|z(1), z(2), \cdots z(k-1)]$，注意到，先验估计 $\hat{x}(k|k-1)$ 和后验估计 $\hat{x}(k|k)$ 都是同一个量的 $x(k)$ 估计，然而 $\hat{x}(k|k-1)$ 考虑的是测量值 $z(k)$ 之前的估计，也称之为向前一步预测估计，而 $\hat{x}(k|k)$ 考虑的是测量值 $z(k)$ 之后的估计。可见需要用更多地信息计算 $\hat{x}(k|k)$，所以自然希望 $\hat{x}(k|k)$ 比 $\hat{x}(k|k-1)$ 更好。那么应该设计什么估计方法来得到 $\hat{x}(k|k)$ 和 $\hat{x}(k|k-1)$ 呢？ $\hat{x}(k|k)$ 的估计是不是比 $\hat{x}(k|k-1)$ 更好呢？下面就来回答这两个问题。

4.2 向前一步预测估计 $\hat{x}(k|k-1)$ 的求法

重新考虑上一章最小二乘估计的问题，已知含有噪声测量，使用（3-42）-（3-46）可以得到最优估计。但上一章假设待估计量不随时间而改变，而本章研究的待估计量 $x(k)$ 随着时间的推移按照（4-1）而改变，也就是说，在 k 时刻的测量 $z(k)$ 到来之前，状态 $x(k)$ 在 $k-1$ 时刻的估计值 $\hat{x}(k-1|k-1)$ 会随着时间的推移而改变，在 $z(k)$ 到来时，$\hat{x}(k-1|k-1)$ 已经变化为 $\hat{x}(k|k-1)$，改变遵循（4.1）系统状态转移方程：

$$\hat{x}(k|k-1) = A(k-1)\hat{x}(k-1|k-1) \tag{4-4}$$

如果已知 $\hat{x}(k-1|k-1)$ 的估计方差

$$P(k-1|k-1) = E[(x(k-1) - \hat{x}(k-1|k-1))(x(k-1) - \hat{x}(k-1|k-1))^T] \tag{4-5}$$

那么 $\hat{x}(k|k-1)$ 的估计方差 $P(k|k-1)$ 是多少呢？$P(k|k-1)$ 的定义式应为：

$$P(k|k-1)=E[(x(k)-\hat{x}(k|k-1))(x(k)-\hat{x}(k|k-1))^T] \tag{4-6}$$

将（4-1）和（4-4）代入（4-6），得到：

$$\begin{aligned}P(k|k-1)&=E[(A(k-1)x(k-1)+w(k-1)-A(k-1)\hat{x}(k-1|k-1))\\&\quad\times(A(k-1)x(k-1)+w(k-1)-A(k-1)\hat{x}(k-1|k-1))^T]\\&=E[(A(k-1)(x(k-1)-\hat{x}(k-1|k-1))+w(k-1))(A(k-1)(x(k-1)-\hat{x}(k-1|k-1))+w(k-1))^T]\end{aligned}$$

考虑到状态与过程噪声不相关，将上式两个括号相乘，得到：

$$\begin{aligned}P(k|k-1)&=A(k-1)E[(x(k-1)-\hat{x}(k-1|k-1))(x(k-1)-\hat{x}(k-1|k-1))^T]A^T(k-1)\\&+E[w(k-1))w^T(k-1))]\end{aligned}$$

注意到上式中第一项的中间项为 $\hat{x}(k-1|k-1)$ 的估计方差 $P(k-1|k-1)$，并利用（4-3）中过程噪声的方差项，可以得到

$$P(k|k-1)=A(k-1)P(k-1|k-1)A^T(k-1)+Q(k-1) \tag{4-7}$$

总结一下，在 $z(k)$ 到来时，$\hat{x}(k-1|k-1)$ 已经变化为 $\hat{x}(k|k-1)$，其估计方差也由 $P(k-1|k-1)$ 转变为 $P(k|k-1)$，为读者阅读方便，将其转换公式重写如下：

$$\hat{x}(k|k-1)=A(k-1)\hat{x}(k-1|k-1) \tag{4-8}$$

$$P(k|k-1)=A(k-1)P(k-1|k-1)A^T(k-1)+Q(k-1) \tag{4-9}$$

4.3 更新估计 $\hat{x}(k|k)$ 的求法

继续考虑在 $\hat{x}(k|k-1)$ 的情况下，如果又得到了 k 时刻的测量 $z(k)$，如何利用新到的测量值来得到更准确的估计 $\hat{x}(k|k)$ 呢？这时候，就可以很方便的利用上一章中学习到的最小二乘估计方法了，在（3-42）-（3-47）中，用 $\hat{x}(k|k-1)$ 代替 $\hat{\theta}(k-1)$，$\hat{x}(k|k)$ 代替 $\hat{\theta}(k)$，用 $P(k|k-1)$ 代替 $P(k-1)$，$P(k|k)$ 代替 $P(k)$，对（3-42）、（3-44）、（3-47）按如下形式重写，其余的公式变换与之相似。

$$\hat{x}(k|k)=\hat{x}(k|k-1)+K(k)\big(z(k)-C(k)\hat{x}(k|k-1)\big) \tag{4-10}$$

$$K(k)=P(k|k-1)C^T(k)\Big(C(k)P(k|k-1)C^T(k)+R(k)\Big)^{-1} \tag{4-11}$$

$$P(k|k)=\big(I-K(k)C(k)\big)P(k|k-1) \tag{4-12}$$

下面，来仔细分析一下滤波增益 $K(k)$。用下式表示预测的测量：

$$z(k|k-1)=C(k)\hat{x}(k|k-1) \tag{4-13}$$

虽然预测的测量与真实测量会有不同，但这个量还是反映了预测状态的结果。设 P_{xz} 定义为状态预测与测量预测的协方差，则：

$$P_{xz} = E\left[\left((x(k) - \hat{x}(k|k-1)\right)\left(z(k) - z(k|k-1)\right)^T\right] \qquad (4\text{-}14)$$

将（4-2）和（4-13）代入（4-14），得：

$$\begin{aligned} P_{xz} &= E\left[\left(x(k) - \hat{x}(k|k-1)\right)\left(C(k)x(k) + v(k) - C(k)\hat{x}(k|k-1)\right)^T\right] \\ &= E\left[\left(x(k) - \hat{x}(k|k-1)\right)\left(C(k)\left(x(k) - \hat{x}(k|k-1)\right) + v(k)\right)^T\right] \end{aligned}$$

因为 $x(k)$ 与 $v(k)$ 之间不相关，则：

$$P_{xz} = P(k|k-1)C^T(k) \qquad (4\text{-}15)$$

再定义预测测量的方差为：

$$P_{zz} = E\left[\left(z(k) - z(k|k-1)\right)\left(z(k) - z(k|k-1)\right)^T\right] \qquad (4\text{-}16)$$

同样，将（4-2）和（4-13）代入（4-16）经整理后得：

$$P_{zz} = C^T(k)P(k|k-1)C(k) + R(k) \qquad (4\text{-}17)$$

因此，滤波增益也可以表示为：

$$K(k) = P_{xz}P_{zz}^{-1} \qquad (4\text{-}18)$$

再来看一下（4-12），将右边等式展开得：

$$\begin{aligned} P(k|k) &= P(k|k-1) - K(k)C(k)P(k|k-1) \\ &= P(k|k-1) - K(k)P_{xz}^{\ T} \end{aligned} \qquad (4\text{-}19)$$

上式考虑到 $P(k|k-1) = P^T(k|k-1)$，即 $P(k|k-1)$ 为对称矩阵。又在（4-18）等式两边右乘 P_{zz} 得：

$$P_{xz} = K(k)P_{zz} \qquad (4\text{-}20)$$

将（4-20）代入（4-19），还可以得到 $P(k|k)$ 的另一个表达式

$$P(k|k) = P(k|k-1) - K(k)P_{zz}K^T(k) \qquad (4\text{-}21)$$

（4-18）、（4-19）、（4-21）是利用 P_{xz}、P_{zz} 求增益 $K(k)$ 及状态估计方差 $P(k|k)$ 的方法。有时通过贝叶斯估计的方法获得 P_{xz}, P_{zz} 后，就可以利用（4.18）式滤波增益 $K(k)$，而相应的估计方差即为（4-21）或（4-19）。这个方法在第 5 章的非线性滤波器中会使用。

4.4 离散 Kalman 滤波器

现将离散 Kalman 滤波器总结如下：

1. 系统方程为

$$x(k+1)=A(k)x(k)+w(k)$$
$$z(k)=C(k)x(k)+v(k)$$
$$E[w(k)w^T(j)]=Q(k)\delta(k-j)$$
$$E[v(k)v^T(j)]=R(k)\delta(k-j)$$
$$E[w(k)v^T(j)]=0 \tag{4-22}$$

2. Kalman 滤波器初始化

$$\hat{x}(0|0)=E[x(0)]$$
$$P(0|0)=E[(x(0)-\hat{x}(0|0))(x(0)-\hat{x}(0|0))^T] \tag{4-23}$$

3. Kalman 滤波器每一步计算如下，其中 $k=1,2,3,\cdots$

$$\hat{x}(k|k)=\hat{x}(k|k-1)+K(k)\big(z(k)-C(k)\hat{x}(k|k-1)\big) \tag{4-24}$$
$$\hat{x}(k|k-1)=A(k-1)\hat{x}(k-1|k-1) \tag{4-25}$$
$$K(k)=P(k|k-1)C^T(k)\Big(C(k)P(k|k-1)C^T(k)+R(k)\Big)^{-1} \tag{4-26}$$
$$P(k|k-1)=A(k-1)P(k-1|k-1)A^T(k-1)+Q(k-1) \tag{4-27}$$
$$P(k|k)=(I-K(k)C(k))P(k|k-1) \tag{4-28}$$

使用下面的 MATLAB 函数实现 Kalman 滤波器，函数输入为系统矩阵的参数，其中 A 表示过程矩阵 $A(k-1)$，C 表示测量矩阵 $C(k)$，Q 表示过程噪声方差 $Q(k-1)$，R 表示测量噪声方差 $R(k)$。函数的变量 xe 表示前一步的状态估计值 $\hat{x}(k-1|k-1)$，p 表示前一步的状态估计方差 $P(k-1|k-1)$，z 表示当前测量值 $z(k)$。函数的输出包括三个量，分别是当前步的状态估计值 $\hat{x}(k|k)$、向前一步的递推状态估计方差 $P(k|k-1)$ 以及当前步的状态估计方差 $P(k|k)$，分别用 xe、p1、pk 表示。另外，使用函数 inv 实现矩阵求逆。

```
function [xe,pk,p1]=kalmanfun(A,C,Q,R,xe,z,p)
%This function is to calculate the estimation state by Kalman filter.
   xe=A*xe;              %根据（4-25）计算向前一步预测 x̂(k|k-1)
   P1=A*p*A'+Q;          %根据（4-27）计算向前一步估计 P(k|k-1)
   K=p1*C'*inv(C*p1*C'+R); %根据（4-26）计算估计增益 K(k)
   xe=xe+K*(z-C*xe);       % 根据（4-25）计算估计 x̂(k|k)
   pk=(eye(size(p1))-1*C)*p1;   % 根据（4-28）计算估计方差 P(k|k)
```

第 3 章在推导递推最小二乘法时，增益的方差还有另外两种形式，所以 Kalman 滤波器的增益和估计方差也还有另外两种形式：

$$K(k)=P(k|k)\mathrm{C}^{\mathrm{T}}(k)R^{-1}(k) \tag{4-29}$$

和

$$P^{-1}(k|k)=P^{-1}(k|k-1)+C^T(k)R^{-1}(k)C(k) \tag{4-30}$$

计算表明，估计方差$P(k|k)$是一个对称矩阵。从(4-26)-(4-28)还可以看出，$P(k|k)$、$K(k)$和$P(k|k-1)$的计算不依赖于测量$z(k)$，仅依赖于系统参数，因此当系统参数已知时，可以在系统测量到达并估计之前离线地计算。在系统运行时仅计算$\hat{x}(k|k)$和$\hat{x}(k|k-1)$，如果 Kalman 滤波器在计算量有严格要求的嵌入式系统中运行，这一点决定系统是否能够实时运行。此外，Kalman 滤波器的工作性能可以在实施运行前评估，这是因为代表滤波器的估计的准确度$P(k|k)$也不取决于测量值，可以脱机计算。

当$k\to\infty$时，$P(\mathrm{k}|k)$的收敛值$P(\infty|\infty)$表示系统的稳态估计方差。先来看一下当$k\to\infty$时，$P(k|k-1)$的稳态值，将（4-27）式中的k变为$k+1$，再将式（4-28）代入，并利用（4-28）式的滤波器增益得到：

$$\begin{aligned}
&P(k+1|k)=A(k)P(k|k)A^T(k)+Q(k)\\
&=A(k)(I-K(k)C(k))P(k|k-1)A^T(k)+Q(k)\\
&=A(k)P(k|k-1)A^T(k)-A(k)K(k)C(k)P(k|k-1)A^T(k)+Q(k)\\
&=A(k)P(k|k-1)A^T(k)\\
&-A(k)P(k|k-1)C^T(k)(R(k)+C(k)P(k|k-1)C^T(k))^{-1}C(k)P(k|k-1)A^T(k)+Q(k)
\end{aligned} \tag{4-31}$$

如果协方差矩阵收敛，即$k\to\infty$，$P(k+1|k)=P(k|k-1)\to P_\infty$，上式变为:

$$P_\infty=A(k)P_\infty A^T(k)-A(k)P_\infty C^T(k)(R(k)+C(k)P_\infty C^T(k))^{-1}C(k)P_\infty A^T(k)+Q(k) \tag{4-32}$$

这是著名的离散 Riccati 方程，利用该式可以判断估计结果的好坏，还可以计算稳态的估计方差$P(\infty|\infty)$和稳态增益$K(\infty)$来简化 Kalman 滤波器的计算。

例 4.1 假设对于无噪声牛顿动力学系统，位置、速度、恒加速度分别为r、v、a。这个系统可以描述为：

$$\begin{bmatrix}\dot{r}\\ \dot{v}\\ \dot{a}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}r\\ v\\ a\end{bmatrix} \tag{4-33}$$

即

$$\dot{x}=Fx \tag{4-34}$$

该系统离散化（采样时间为 T）后可以写为

$$x(k+1)=Ax(k) \tag{4-35}$$

其中A为

$$A=\exp(FT)=I+FT+\frac{(FT)^2}{2!}+\cdots \tag{4-36}$$

得到：

$$A=\begin{bmatrix} 1 & T & T^2/2 \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4-37)$$

假设测量位置的噪声方差为σ^2，则系统的测量方程可写为：

$$\begin{aligned} z(k) &= C(k)x(k)+v(k) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(k)+v(k) \end{aligned} \quad (4-38)$$

其中，测量噪声为：

$$v(k) \sim (0, R(k)) \quad (4-39)$$

根据题意测量噪声方差为

$$R(k)=\sigma^2 \quad (4-40)$$

下面来研究一下估计方差的变化，假设向前一步预测估计方差为

$$P(k|k-1)=\begin{bmatrix} P_{11}(k|k-1) & P_{21}(k|k-1) & P_{31}(k|k-1) \\ P_{12}(k|k-1) & P_{22}(k|k-1) & P_{32}(k|k-1) \\ P_{13}(k|k-1) & P_{23}(k|k-1) & P_{33}(k|k-1) \end{bmatrix} \quad (4-41)$$

状态估计方差为

$$P(k|k)=\begin{bmatrix} P_{11}(k|k) & P_{21}(k|k) & P_{31}(k|k) \\ P_{12}(k|k) & P_{22}(k|k) & P_{32}(k|k) \\ P_{13}(k|k) & P_{23}(k|k) & P_{33}(k|k) \end{bmatrix} \quad (4-42)$$

先将$C(k)=[1\ 0\ 0]$代入滤波增益（4-26），得到

$$K(k)=\begin{bmatrix} P_{11}(k|k-1) \\ P_{12}(k|k-1) \\ P_{13}(k|k-1) \end{bmatrix} \frac{1}{P_{11}(k|k-1)+\sigma^2} \quad (4-43)$$

将上式代入（4-28），得到

$$P(k|k)=P(k|k-1)-\frac{1}{P_{11}(k|k-1)+\sigma^2}\begin{bmatrix} P_{11}(k|k-1) & 0 & 0 \\ P_{12}(k|k-1) & 0 & 0 \\ P_{13}(k|k-1) & 0 & 0 \end{bmatrix} P(k|k-1) \quad (4-44)$$

将上式的后两项相乘后得到

$$\begin{aligned} &P(k|k)=P(k|k-1) \\ &-\frac{1}{P_{11}(k|k-1)+\sigma^2}\begin{bmatrix} P_{11}^2(k|k-1) & P_{11}(k|k-1)P_{12}(k|k-1) & P_{11}(k|k-1)P_{13}(k|k-1) \\ P_{12}(k|k-1)P_{11}(k|k-1) & P_{22}^2(k|k-1) & P_{12}(k|k-1)P_{13}(k|k-1) \\ P_{13}(k|k-1)P_{11}(k|k-1) & P_{13}(k|k-1)P_{12}(k|k-1) & P_{33}^2(k|k-1) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.45)$$

用这个表达式说明估计方差从$P(k|k-1)$到$P(k|k)$的迹在减小。$P(k|k-1)$的迹为

$$Tr(P(k|k-1)) = P_{11}(k|k-1) + P_{22}(k|k-1) + P_{33}(k|k-1) \tag{4-46}$$

从方程（4-45）可以看出，$P(k|k)$ 的迹为

$$\begin{aligned} Tr(P(k|k)) &= P_{11}(k|k) + P_{22}(k|k) + P_{33}(k|k) \\ &= Tr(P(k|k-1)) - \frac{P_{11}^2(k|k-1) + P_{22}^2(k|k-1) + P_{33}^2(k|k-1)}{P_{11}(k|k-1) + \sigma^2} \end{aligned} \tag{4-47}$$

当得到一个新的观测值时，希望状态的估计值变得更为准确，即希望协方差减小，上述方程表明它的确减小了，即 $Tr(P(k|k)) < Tr(P(k|k-1))$。从 $P(k|k-1) = A(k-1)P(k-1|k-1)A^T(k-1) + Q(k-1)$ 还可以看出 $Tr(P(k-1|k)) > Tr(P(k-1|k-1))$，也就是说，在向前一步预测阶段，估计方差变大了，而进行测量后，估计方差又会减小。

例 4.2 考虑如下游走模型的标量系统

$$x(k+1) = x(k) + w(k)$$

$$z(k) = x(k) + v(k)$$

$$w(k) \sim (0,9)$$
$$v(k) \sim (0,4)$$

这是一个很简单但是在很多应用中会碰到的系统。例如，它可能代表直接测量的缓慢变量 $x(k)$，其变化由噪声项决定，测量误差由测量噪声项决定，问题是：求解滤波增益的稳态值 K_∞。

解： 由系统可知，$A = C = 1,\ Q = 9,\ R = 4$，代入（4-31），得到 $P_\infty = 12$，再将 P_∞ 代入（4-26）得到的 $K_\infty = \dfrac{12}{12+4} = 0.75$。

进一步还可以将 P_∞ 和 K_∞ 代入（4-28）得状态估计方差稳态值 $P(\infty|\infty)$，得：

$$P(\infty|\infty) = (I - K_\infty C)P_\infty = (1-0.75)\times 12 = 3$$

除了上述数值计算方法之外，使用程序进行仿真，通过迭代计算（4-27）和（4-28），也可以得到估计方差的稳态值。首先介绍一下下面的函数，其中 A，C，Q，R 分别是系统参数，I 是可以设置的循环次数，p0 是估计方差初值。将下面的函数保存为以 steadycov 命名的 m 文件，根据不同的系统进行参数设置就会得到向前一步预测估计方差、状态估计方差以及滤波器增益向稳态值收敛的过程，MATLAB 程序中函数的输出量 pp1，pp，KK。

```
function [pp1,pp,KK]=steadycov(A,C,Q,R,I,p0)
p=p0*ones(size(A));
pp1=[];pp=[];KK=[];
for i=1:I
p1=A*p*A'+Q;
```

```
K=p1*C'*inv(C'*p1*C+R);
p=(eye(size(A))-K*C)*p1;
pp1=[pp1 diag(p1)];
pp=[pp diag(p)];
KK=[KK K];
end
```

下一段程序是调用上面函数的主程序，根据例题 4.2 设置相应的参数，$A=1$，$C=1$，$Q=9$，$R=4$，循环次数 I 和估计方差的初值 P_0 都设置为 10，调用函数后，对计算结果画图并进行适当的标注，即可得到如图 4.1 所示的结果。

```
clc
clear
A=1;C=1;Q=9;R=4;I=10;p0=10;
[pp1,pp,KK]=steadycov(A,C,Q,R,I,p0);
subplot(3,1,1);plot(pp1);xlabel('k'),ylabel('向前一步预测估计方差')
subplot(3,1,2);plot(pp);xlabel('k'),ylabel('状态估计方差')
subplot(3,1,3);plot(KK);xlabel('k'),ylabel('滤波器增益')
```

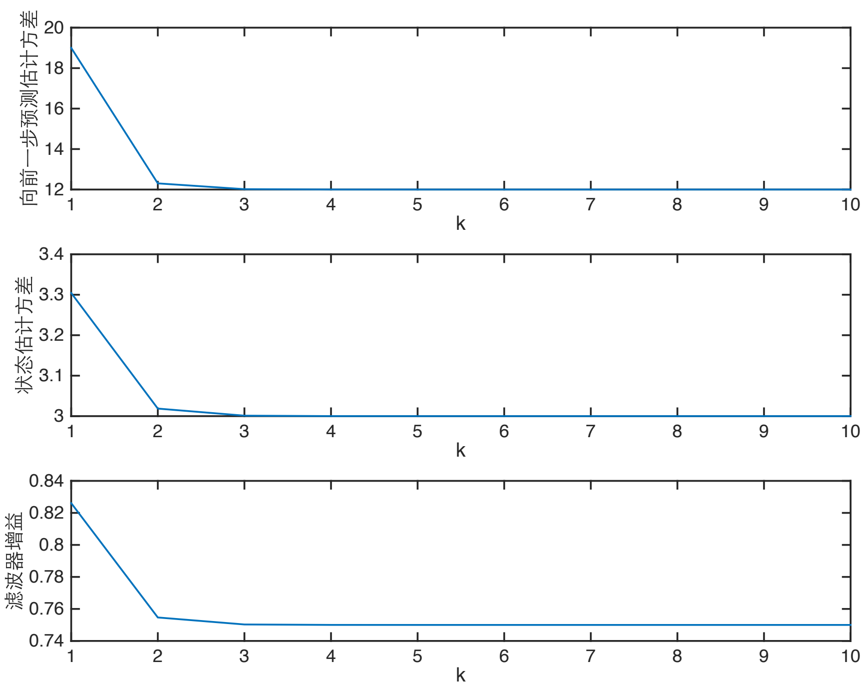

图 4.1 稳态估计结果图

可以看到结果收敛的非常快，只要经过 3、4 步的时间就可以收敛至稳态值。根据这些稳态值，就可以简化 Kalman 滤波器计算过程。利用滤波器增益的稳态值，将（4-24）、（4-25）

状态估计的过程简化如下

$$\hat{x}(k|k)=\hat{x}(k-1|k-1)+0.75\left(z(k)-\hat{x}(k-1|k-1)\right) \tag{4-48}$$

在每一步的测量到来之后，可以利用上式快速得到当前步的状态估计，计算非常简单，这也是 Kalman 可以在很多情况下都能够做到实时估计的原因。

4.5 小结

本章介绍了离散的 Kalman 滤波器，在过去的几十年里，这种估计方法几乎应用于工程的各个领域，比如跟踪、导航等。Kalman 的滤波方程可以写出不同的形式，但在功能上是等价的。

Kalman 滤波器要求系统参数是已知的，如果参数未知，或者参数的值有误差，Kalman 滤波器就不能得到最优估计，甚至无法得到状态的估计，即发散。但是，Kalman 滤波器对参数的误差还是有一定的容忍度的，虽然系统参数有误差时不能得到最优估计，但很多时候都能获得和真值还算相近的估计，再加上 Kalman 可以进行实时的估计，因此，在很多需要实时处理的应用中使用非常广泛。