实验：从物种增长的 Malthus 模型到混沌

学院：电子信息与电气工程学院　　姓名：王煌基　　学号：519030910100

一、实验目的

通过混沌理论的应用来加深自身数学建模的能力以及 MATLAB 熟练度的提升。

二、实验内容

任务一：

对 Logistic 映射$f(x)=\alpha x(1-x)$，取α依次属于区间$(c_k,c_{k+1}),k=1,2,3,4,$然后取值在 3.6 附近和接近 4；任给一个初始值x_0，用数值迭代方法求序列$\{x_n\}$来考察其趋向；进而在周期 3 窗口取α值为 3.83 到 3.84 之间，考察由x_0出发所得$\{x_n\}$的趋向，再通过适当增加α的值，得到分叉到周期 6 的情况；能否再得到分叉到周期 12 的情况？对于上述结果可以在$n-x_n$平面上作图考察，不过注意n应该取得足够大，才能有足够多的点（数百个或更多些）看出变化趋势.

【解】根据题意，容易得到下面的核心 m 文件(Logistic.m)

```
function Logistic(a, x0)
    x(1) = x0;
    y(1) = 1;
    % i 的范围可以操控，这里通过数组的方式从 2->N，N 取 1000
    for i = 2:1000
        x(i) = a*x(i-1)*(1-x(i-1));
        y(i) = i;
    end
    plot(y,x,'r.');
```

将本题分解成以下几个小题：

①任给一个初始值x_0，用数值迭代方法求序列$\{x_n\}$来考察其趋向；

②进而在周期 3 窗口取α值为 3.83 到 3.84 之间，考察由x_0出发所得$\{x_n\}$的趋向

③再通过适当增加α的值，得到分叉到周期 6 的情况；

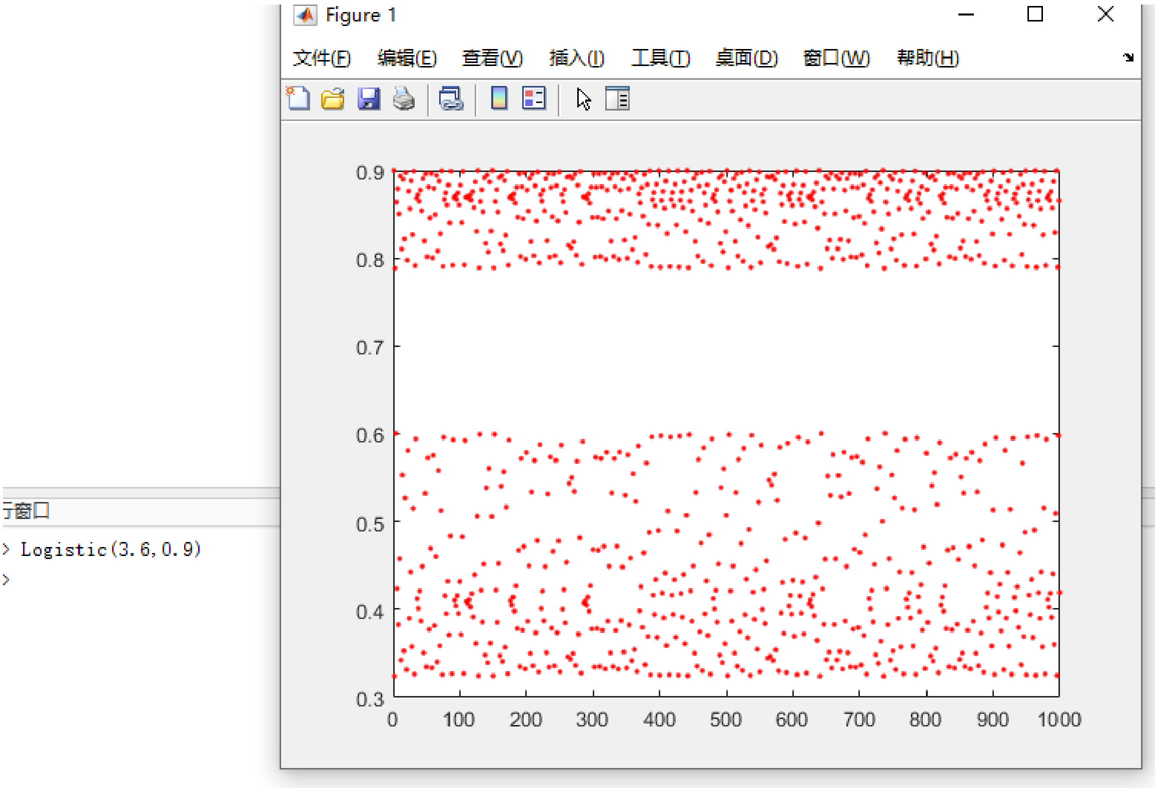
④能否再得到分叉到周期 12 的情况？

⑤对于上述结果可以在$n-x_n$平面上作图考察，看出变化趋势（该题为方便，直接完成在每个具体的小题中）。

将题目细分好后，就可以相对有条理地进行问题的求解过程，这里我们进行解题。

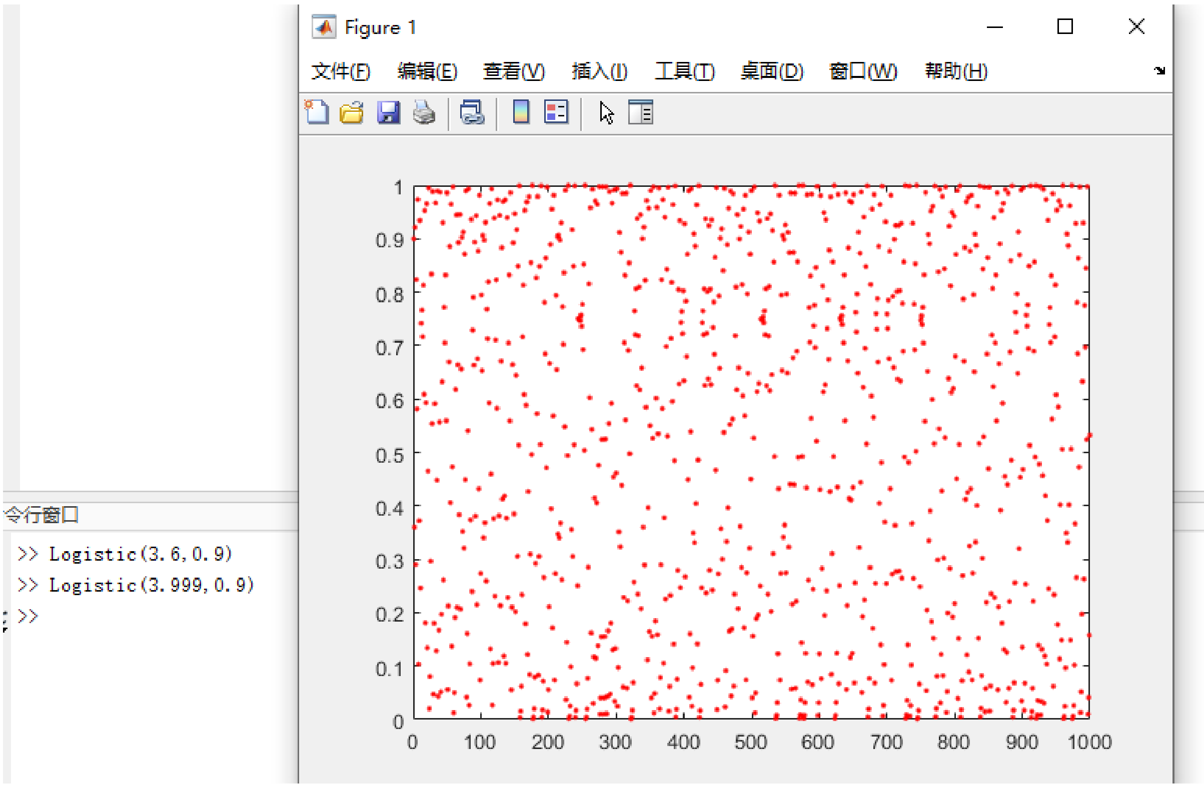
①任给一个初始值x_0，用数值迭代方法求序列$\{x_n\}$来考察其趋向；

这里我们给定初值为$x_0 = 0.9$且$a = 3.6$的情况可以得到如下的结果：



可以发现这个时候得到的图是混沌状态，杂乱无章没有周期性。

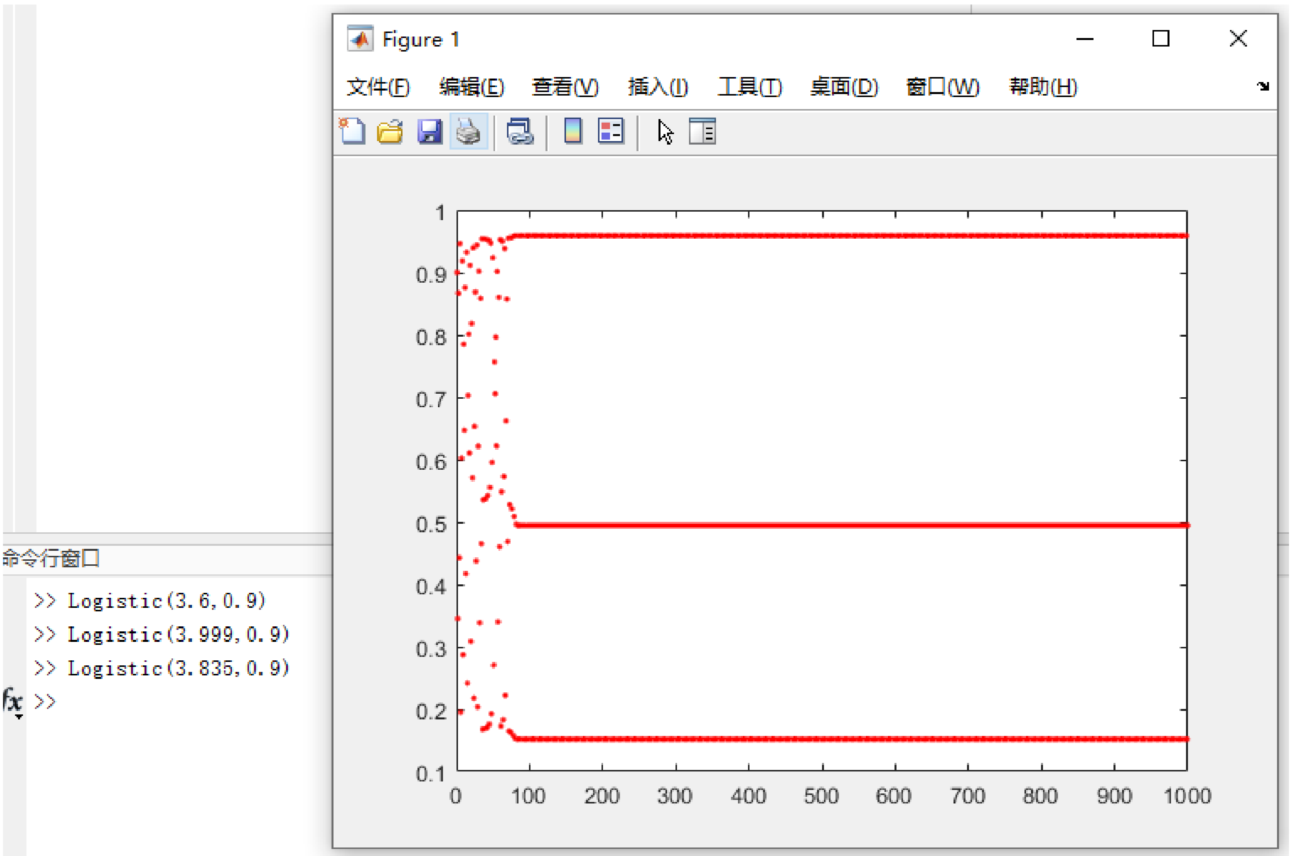
然后我们给定初值为$x_0 = 0.9$且$\alpha = 3.999$的情况，可以得到如下的结果：



可以发现这个时候得到的图是混沌状态，杂乱无章没有周期性。

②进而在周期 3 窗口取α值为 3. 83 到 3. 84 之间考察由x_0出发$\{x_n\}$的趋向

这里我们给定初值为$x_0 = 0.9$且$\alpha = 3.835$的情况，可以得到如下的结果：



存在明显的周期现象，而具体将 x 矩阵显示出来了我们可以发现：

列 991 至 1000

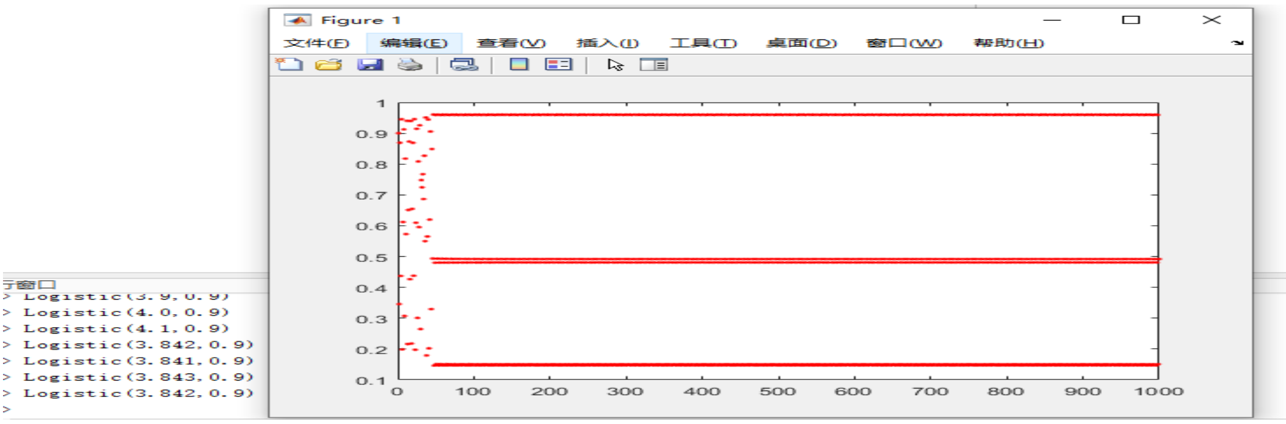
0.4945　0.9586　0.1521　0.4945　0.9586　0.1521　0.4945　0.9586　0.1521　0.4945

很明显存在着周期 3 轨道（此时得到的为周期 3 点）

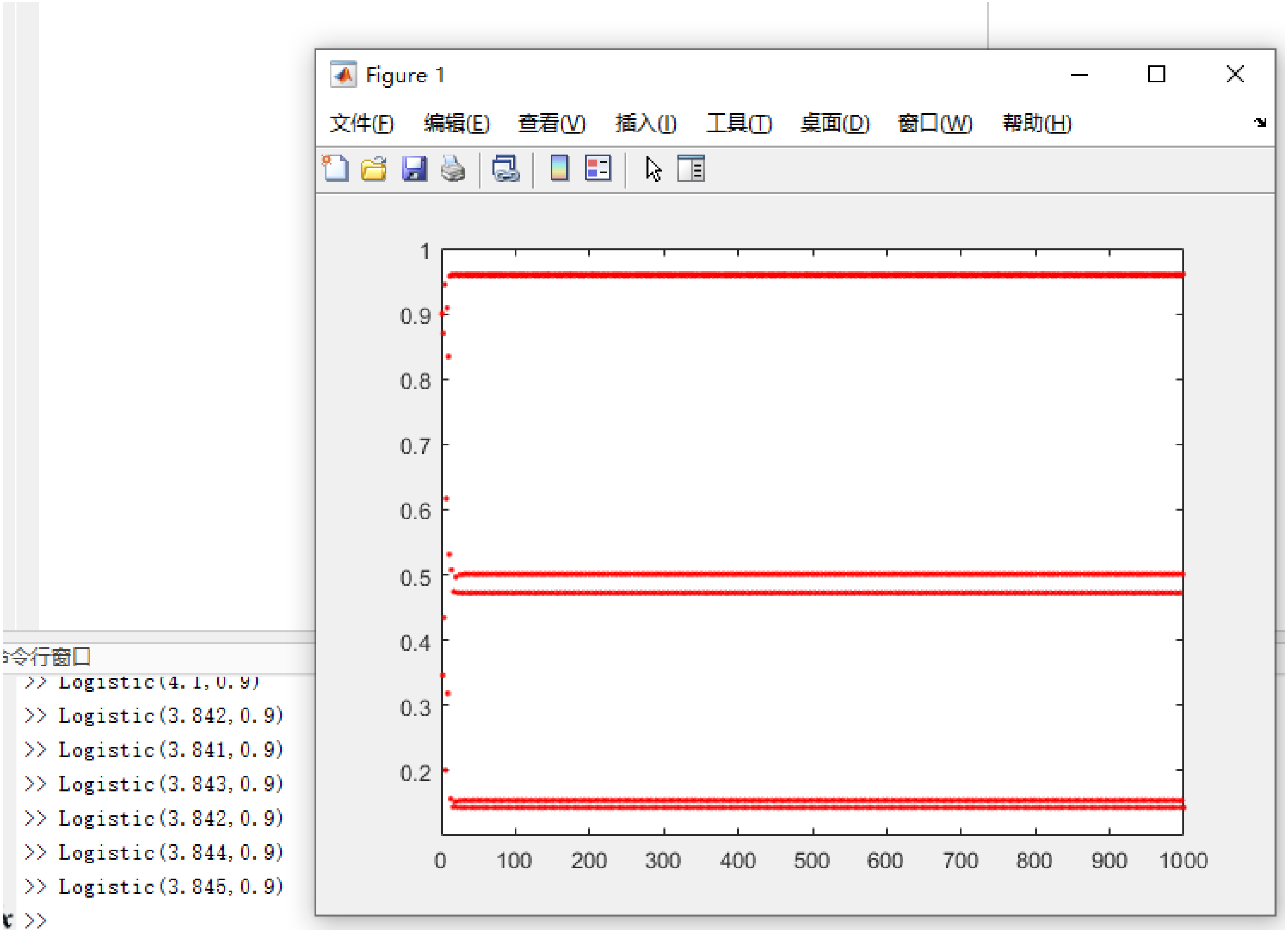
通过多组数据的测验（取$\alpha = 3.832, 3.833, 3.835$都能出现明显的 3 周期现象）

③再通过适当增加α的值，得到分叉到周期 6 的情况；

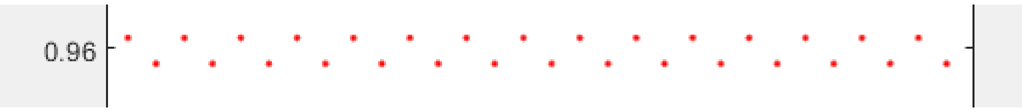
在适当增加的过程中，注意到当$\alpha = 3.842$的时候出现了 4 周期的现象：



因此，此时我认为，α适当增大一点点应该会逐渐出现 6 周期的情况。



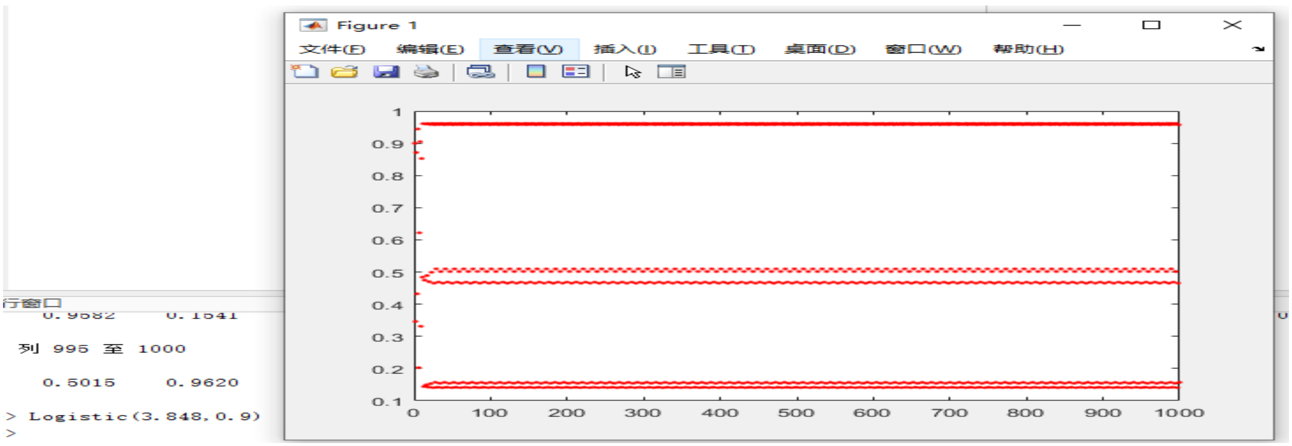
果不其然，在$\alpha = 3.845$的时候出现了细微的周期 6 的情况，得到判断的原因是最顶上的线明显更粗，放大后才证实我的想法。



可以发现，放大后是不在同一条直线上的。

④能否再得到分叉到周期 12 的情况？

同样的方法继续放大α来查找，可以发现当$\alpha = 3.848$的时候出现了周期 12 的情况。



但是值得一提的是，在周期 12 这里我的查找差点错过了这个情况，因为此时最顶上的线展开后是非常像三条平行线的情况，如图所示：

而　直到我在扩大α至这条线变成 5 周期情况的时候我就怀疑缺少了相应的 4 周期情况，故我认真观看后才发现顶上是有两条平行线的，而非仅一条构成，这是一个小坑。

⑤对于上述结果可以在$n-x_n$平面上作图考察，看出变化趋势

这里为了任务之间的流畅衔接，故直接应用$n-x_n$平面图来进行题目的作答。

任务二：

对任务 1 中的初值x_0作一点增加，例如增加 0.0001 或更小，然后对不同的α取值，比较$x_{100}, x_{500}, x_{1000}$和更后的一些项与对应的原来这些序号的项的差距，这说明什么？

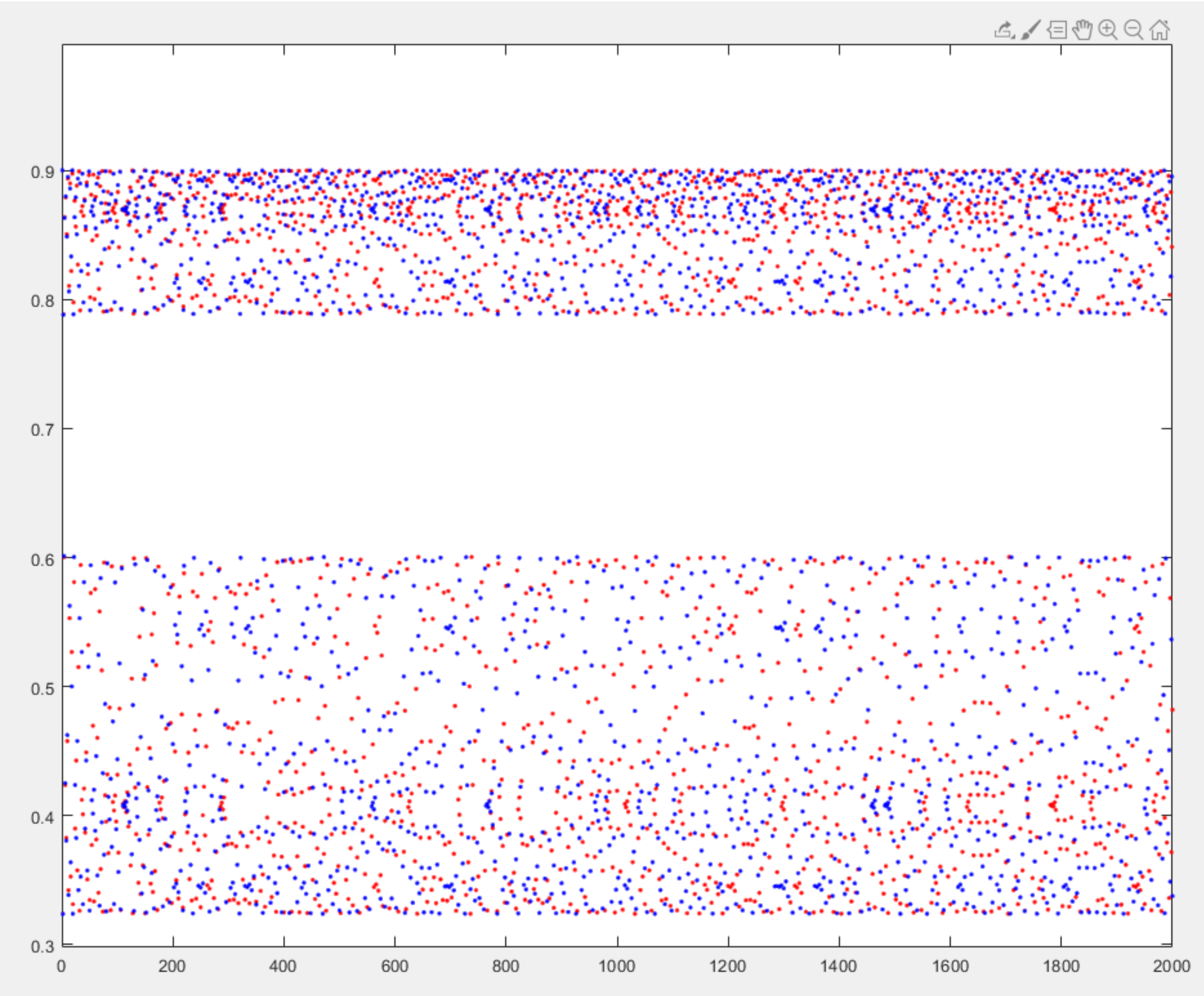
【解】

这里只需要将原本的代码进行一定的改动，可以比较容易地发现变化（同样用$n-x_n$平面图来进行直观的观察），可以得到相应的 m 文件（N_Logistic.m）。

```
function N_Logistic(a,x0)
    x1(1) = x0;
    x2(1) = x0+0.0001;
    y1(1) = 1;
    % i 的范围可以操控，这里通过数组的方式从 2->N，N 取 1000
    for i = 2:1000
        x2(i) = a*x2(i-1)*(1-x2(i-1));
        x1(i) = a*x1(i-1)*(1-x1(i-1));
        y1(i) = i;
    end
    plot(y1,x1,'r.');
    hold on
    plot(y1,x2,'b.');
    x2(100)-x1(100)
    x2(500)-x1(500)
    x2(1000)-x1(1000)
    x2(1500)-x1(1500)
    x2(2000)-x1(2000)
```

这里其实在实践过程刚开始有一点问题就在于：plot 函数在使用过程中会每次都重新在 Figure1 的窗口里面绘制自己所需要的图形，那么就会导致我前面通过 plot 函数得到的图像被后面的 plot 函数给覆盖了，从而打不到要求。

经过相关的资料查询，我找到了 hold on 函数，可以使得 plot 的图像短暂保存在原来的图像上，这对于本题非常有帮助，通过输入运行代码 N_Logistic(3.6,0.9)得到：



是一种混沌现象。

然后具体进行x_{100},x_{500},x_{1000}和更后的一些项与对应的原来这些序号的项的差距比较：

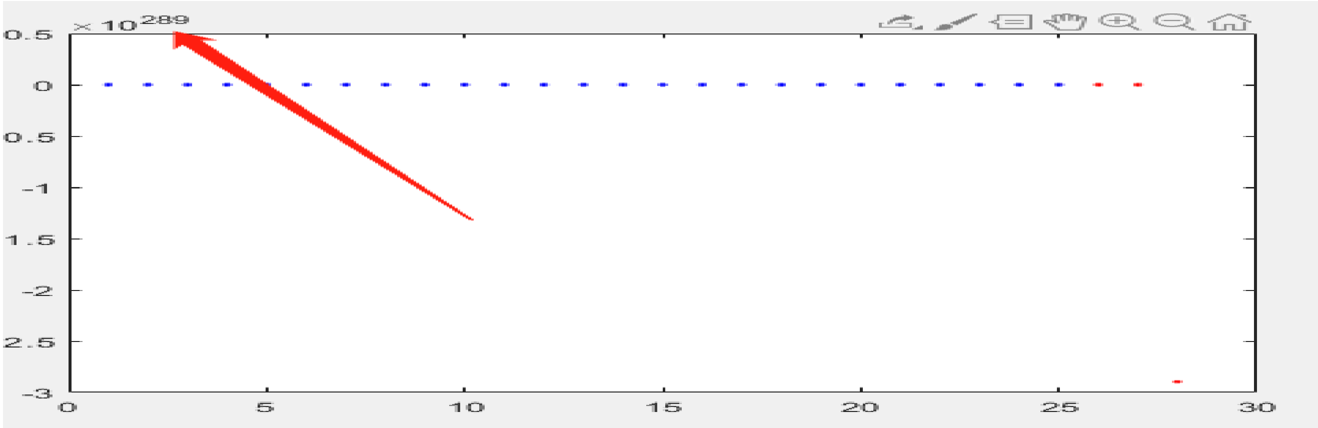
	x_{100}	x_{500}	x_{1000}	x_{1500}	x_{2000}
差值	0.0120	-0.1806	0.1329	-0.0702	-0.1443

由于这里仍旧看不出什么变化，故把原本的循环体扩大至 10000 的情况。

	x_{4000}	x_{5000}	x_{8000}	x_{9000}	x_{10000}
差值	0.0354	-0.0053	0.0041	-0.1008	0.1603

差值也是处于混沌的现象中，且整张图都处于混沌状态。

然而当我将式子中的x_0扩大的时候 N_Logistic(4.1,0.9)，惊奇的现象出现了：



可以注意到，坐标轴上面的数值已经达到了10^{289}的情况，这是非常可怕的现象，而且得到的差值情况均为 NaN（已经溢出）。

联系到上课时候曾讲过的蝴蝶效应，我们可以联想到这个实验其实就是在说明蝴蝶效应的情况：极其微小的扰动都容易造成最终结果的极大偏差！这个实验任务可以用来间接地说明一个微小的变化能影响事物的发展，而且存在造成极大影响的可能性。

任务三：

对任务 1 中的α取值，用蛛网迭代的方法利用 MATLAB 或自己编程进行计算机作图，考察由x_0出发的轨道情况.

【解】

根据题意，得到相应的 m 文件（Iteration.m），其中首先画出原函数的图像，然后画出 y=x 的图像，最后进行正常的蛛网迭代过程。

```
function Iteration(a,x0)
    x1 = 0:0.0001:1;
    plot(x1,a*x1.*(1-x1),'k','linewidth',1);
    hold on
    plot(x1,x1,'k','linewidth',1);
    hold on
    x(1) = x0;
    y(1) = 1;
    for i = 2:1000
        x(i) = a*x(i-1)*(1-x(i-1));
        y(i) = i;
        plot([x(i-1),x(i-1)],[x(i-1),x(i)],'r','linewidth',1);
        hold on
        plot([x(i-1),x(i)],[x(i),x(i)],'r','linewidth',1);
        hold on
    end
```

这里通过任务一的数据进行蛛网迭代：Iteration(3.6,0.9)和 Iteration(3.999,0.9)。

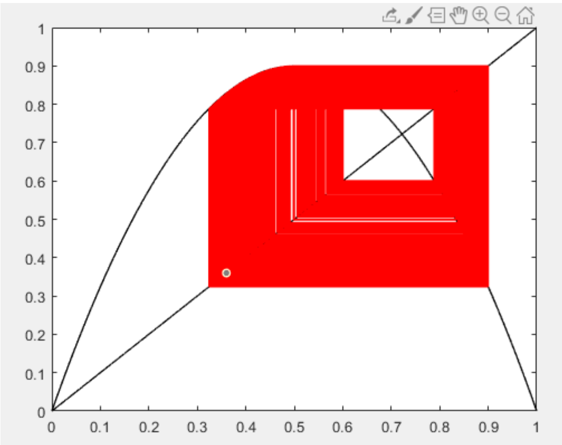


Figure 1 Iteration(3.6,0.9)

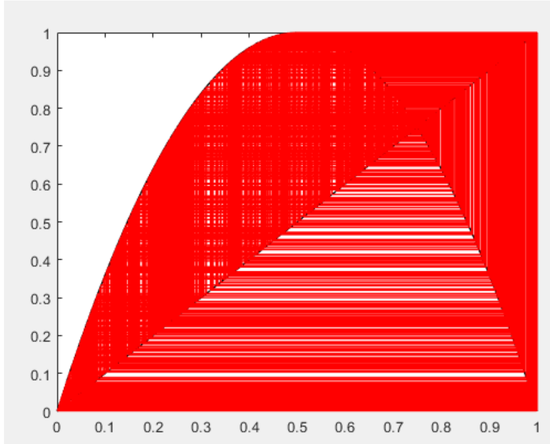


Figure 2 Iteration(3.999,0.9)

可以发现，图中的蛛网迭代是一种明显的混沌现象。

同样的，对于有周期分叉的数据来进行操作，我们也应该能够得到相应的周期图像：

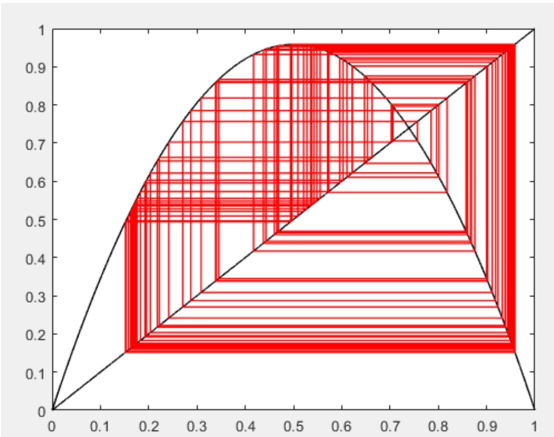


Figure 3 Iteration(3.835,0.9)

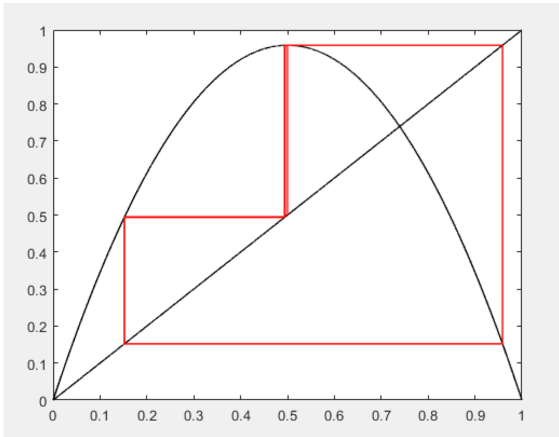


Figure 4 Iteration(3.835,0.5)

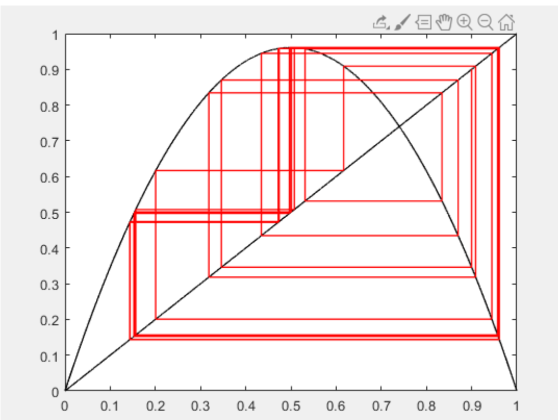


Figure 5 Iteration(3.845,0.9)

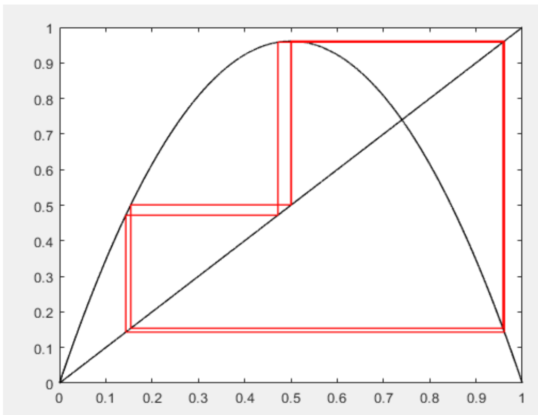


Figure 6 Iteration(3.845,0.5)

起初我在观察的时候感到疑惑，明明是周期 3、周期 6、周期 12 等的情况，为什么实际操作的线反而相当的多呢？后来我注意到，由于刚开始的初值x_0不同的情况下，达到周期所需要的步数是不同的，而$x_0 = 0.9$是相对比较遥远的，故我取$x_0 = 0.5$可以发现，这种额外线的情况减少了很多。

任务四：

对任务 1 中的α取值，用密度图的方法利用 MATLAB 或自己编程进行计算机作图($N =$ 1000)，考察由x_0出发的$\{x_n\}$的分布.

【解】

在这里，需要思考的是怎样构建出密度图的方式。构建密度图，就是将该值的出现比例构建竖图，然后遍历一遍即可得到相应的密度图，从而得到 m 文件（density.m）。

```
function density(a,x0)
    x(1) = x0;
    den = zeros(1000);
    %区间长度 d
    d = 0.001;
    for i = 2:1000
        x(i) = a*x(i-1)*(1-x(i-1));
        for j = 1:1000
            if abs(x(i)-j*d)<d
                den(j) = den(j) + 1;
                break;
            end
        end
    end
    bar(den)
```

通过运行代码 density(3.6,0.9)可以得到下图的柱状图情况：

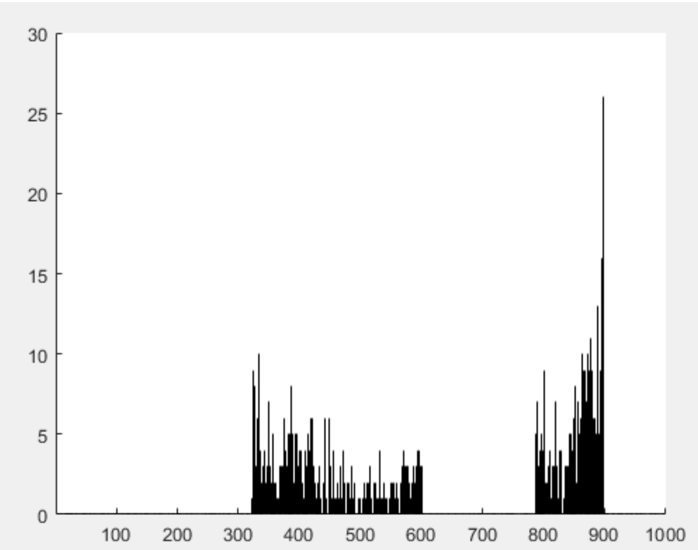


Figure 7 density(3.6,0.9)

同样的，对于存在周期现象的密度分布也可以用类似的方法进行探究

运行代码 density(3.845,0.9)可以得到下图的柱状图情况：

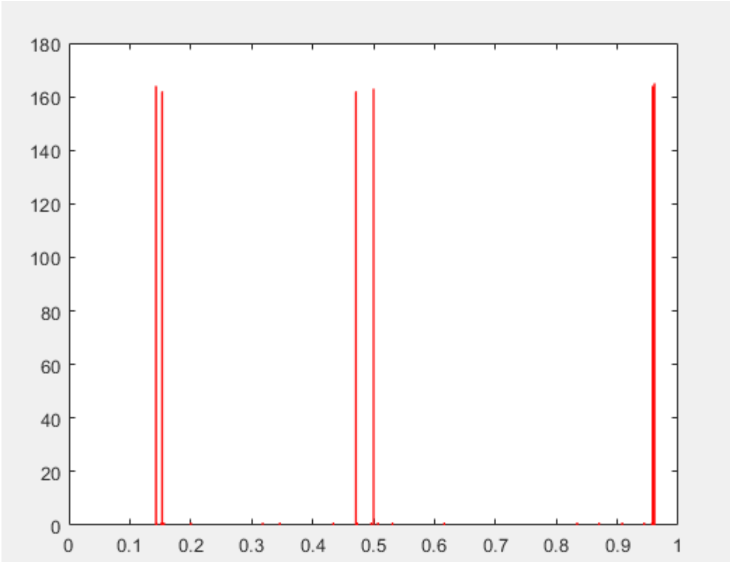


Figure 8 density(3.845,0.9)

这里要特别说明的是，当数据过大的时候，可以很明显的发现，bar 函数的运行速度变得相当的慢，故我这里是直接利用 plot 函数并调整一定的宽度得到了相应的密度图，这样的运行速度会更快！修改后的画图代码如下：

```
for i = 1:1000
    plot([i*d,i*d],[0,den(i)],'r','linewidth',1);
    hold on;
end
```

任务五：

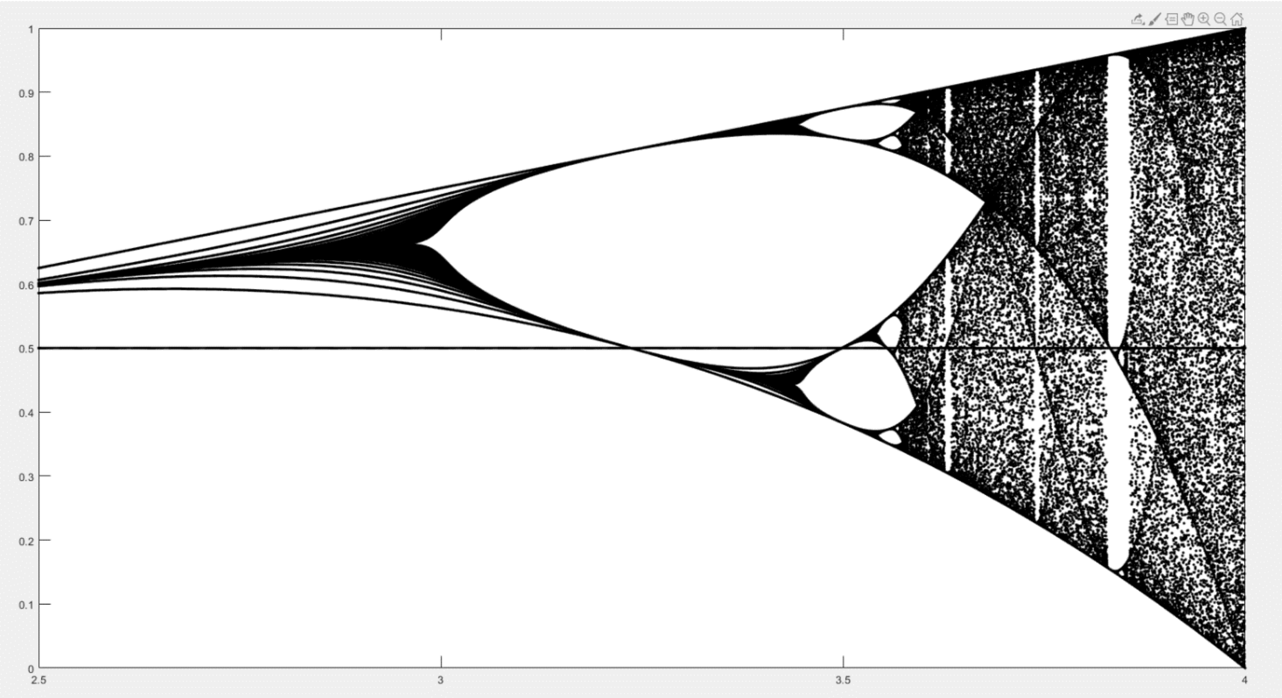
编出计算程序，在$\alpha - x$平面上画出模型的分叉图（其中x是稳定的周期点）.

【解】

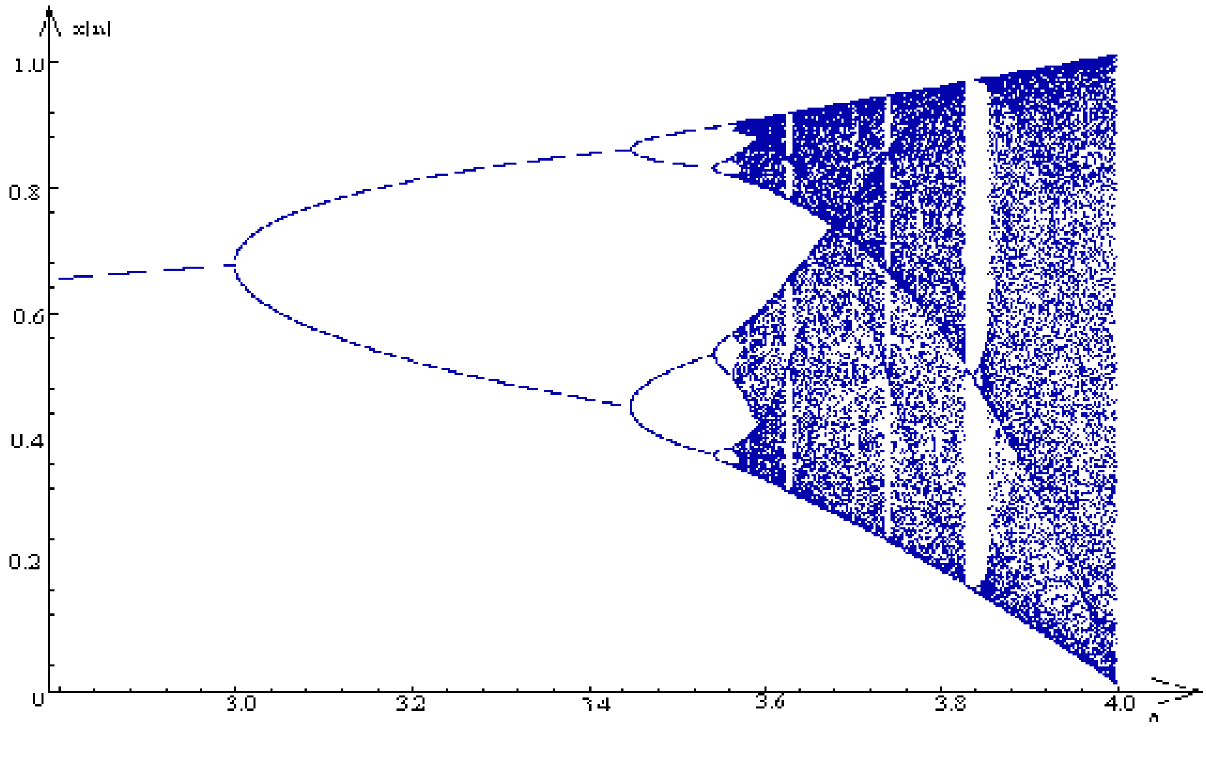
这里本质上就是将我们任务一里面得到的程序进行多个值的情况的判断讨论，所以本质上与任务一是相似的，只需简单修改一下大致程序框架即可。

```
function Logistic5(x0)
    n = 1;
    for a = 2.5:0.001:4.0
        x(n,1) = x0;
        for i = 2:100
            x(n,i) = a*x(n,i-1)*(1-x(n,i-1));
        end
        n = n + 1;
    end
    tmp = 2.5:0.001:4.0;
    plot(tmp, x,'k.','linewidth',0.01);
```

运行程序 Logistic5(0.5)后可以得到相应的图像：



与课件上锁提供的图像大致相似，也均可以看出周期性和混沌现象的点。



任务六：

对映射

$$f(x) = \lambda \sin \pi x, \lambda \in (0,1]$$

试考察当λ逐渐增大时，有没有倍周期分叉的情况出现？求出第一个分叉值和第二个分叉值，利用 Feigenbaum 常数估计第三个分叉值和混沌可能在何时出现，验证第三个分叉值.

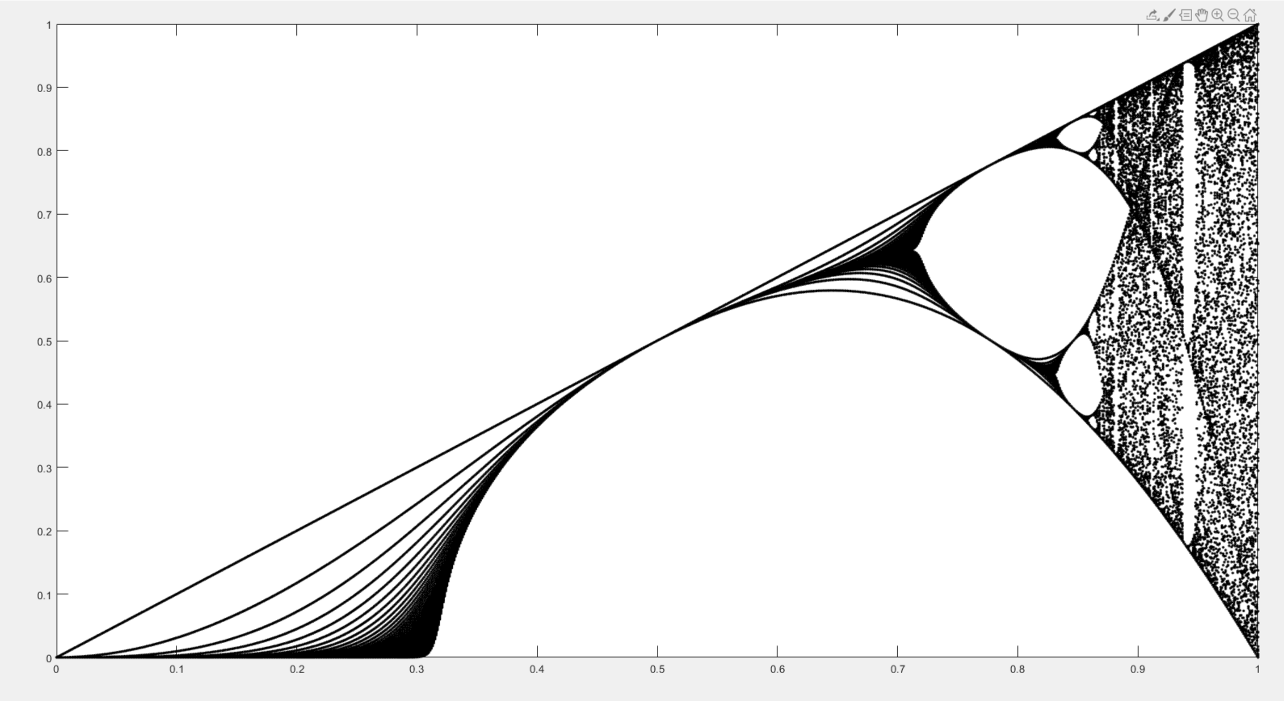
【解】

任务六可以通过先做出模型的分叉图找到大致的点位后，再详细查找分叉值。

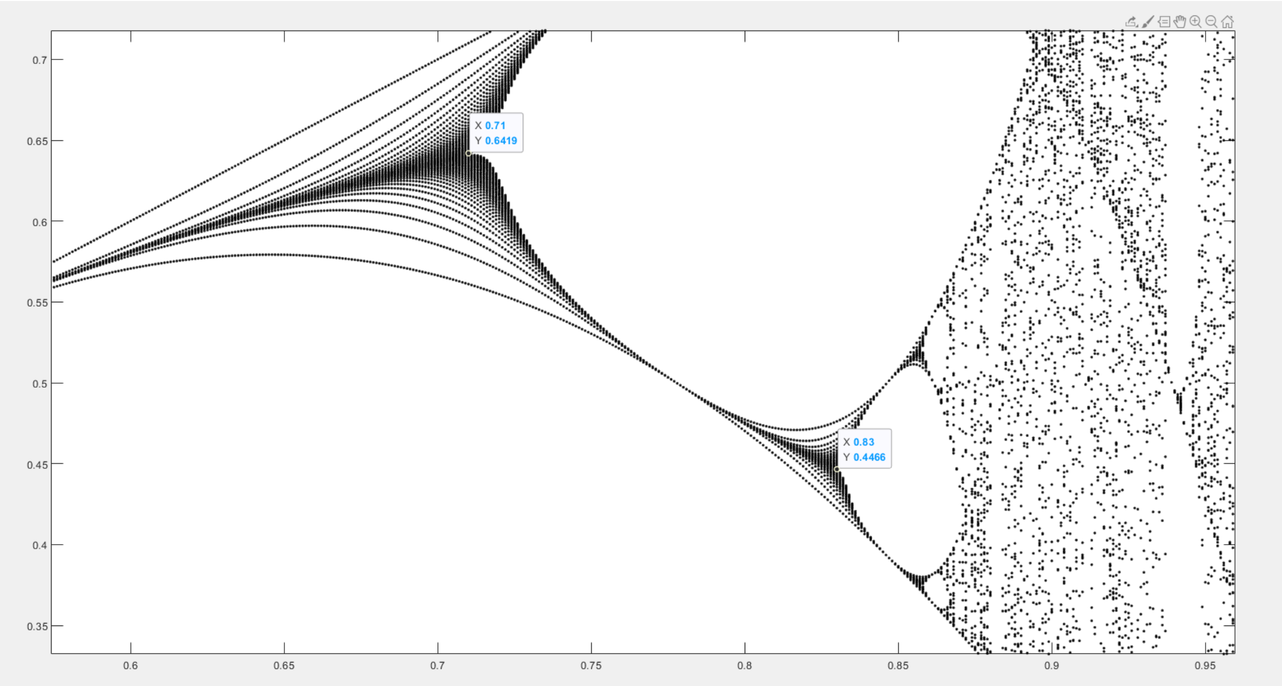
故提供 m 文件如下（sinpix.m）

```
function sinpix(x0)
    n = 1;
    for a = 0:0.001:1
        x(n,1) = a*sin(pi*x0);
        for i = 2:100
            x(n,i) = a*sin(pi*x(n,i-1));
        end
        n = n + 1;
    end
    tmp = 0:0.001:1;
    plot(tmp, x,'k.','linewidth',0.01);
```

通过运行 sinpix(0.5)后可以得到相应的图像：



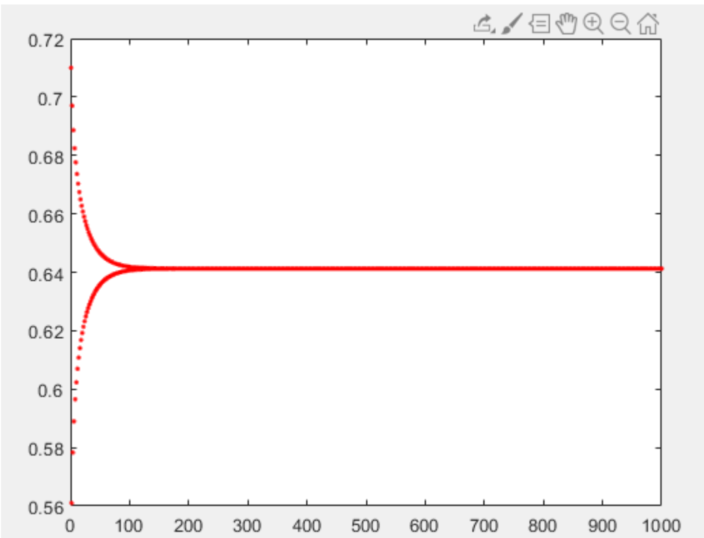
可以大致确定前两个分叉值为$\lambda_1 = 0.71$且$\lambda_2 = 0.83$（如下图所示）



下面的任务就是来对得到的结果进行验证，验证的 m 文件如下（check.m）。

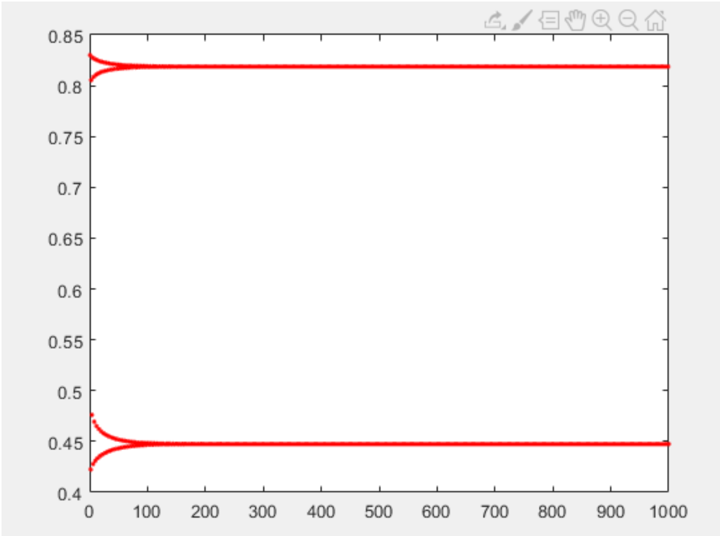
```
function check(a,x0)
    x(1) = a*sin(pi*x0);
    y(1) = 1;
    for i = 2:1000
        x(i) = a*sin(pi*x(i-1));
        y(i) = i;
    end
    plot(y,x,'r.');
```

运行程序代码 check(0.71,0.5)可以得到：



这里的图像已经成了明显的一条直线，故$\lambda_1 = 0.71$是确实正确的一个分叉点。

同样的，我们运行程序代码 check(0.83,0.5)可以得到：

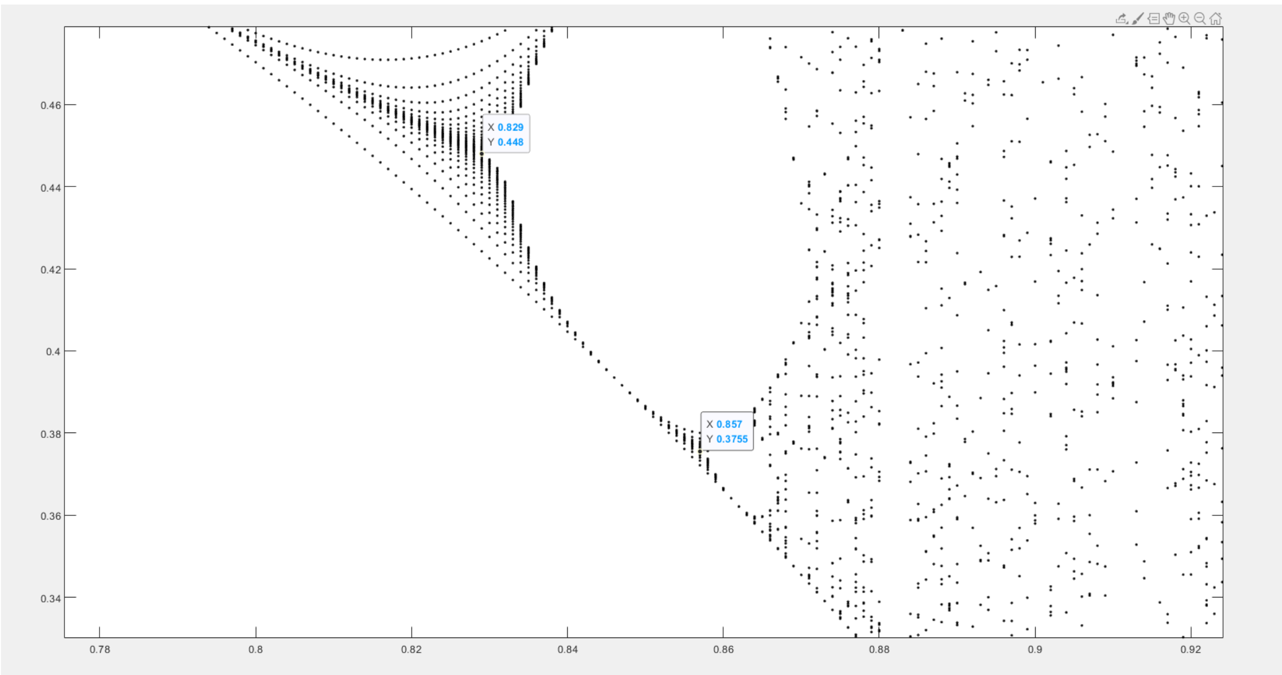


这里的图像已经成了明显的两条平行直线，故$\lambda_2 = 0.83$是确实正确的一个分叉点。

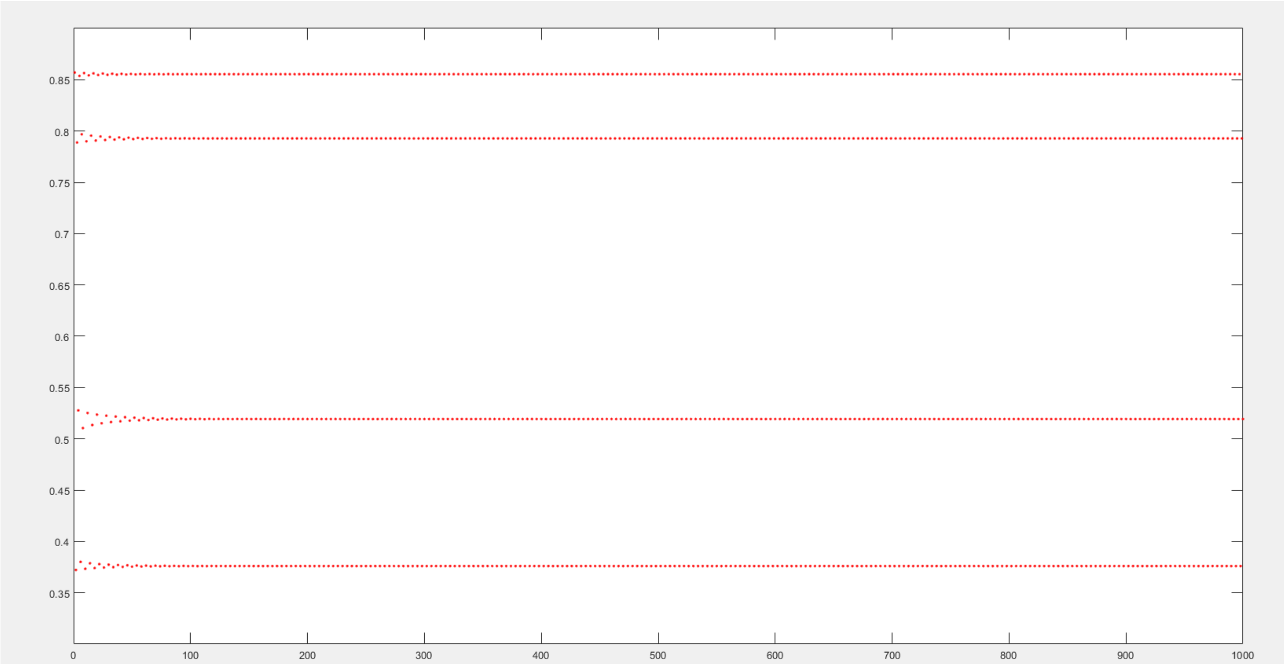
然后通过 Feigenbaum 常数来预测λ_3的取值为：

$$\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_2} = q = 4.6692016 \Leftrightarrow \lambda_3 = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{q} + \lambda_2 \approx 0.8557$$

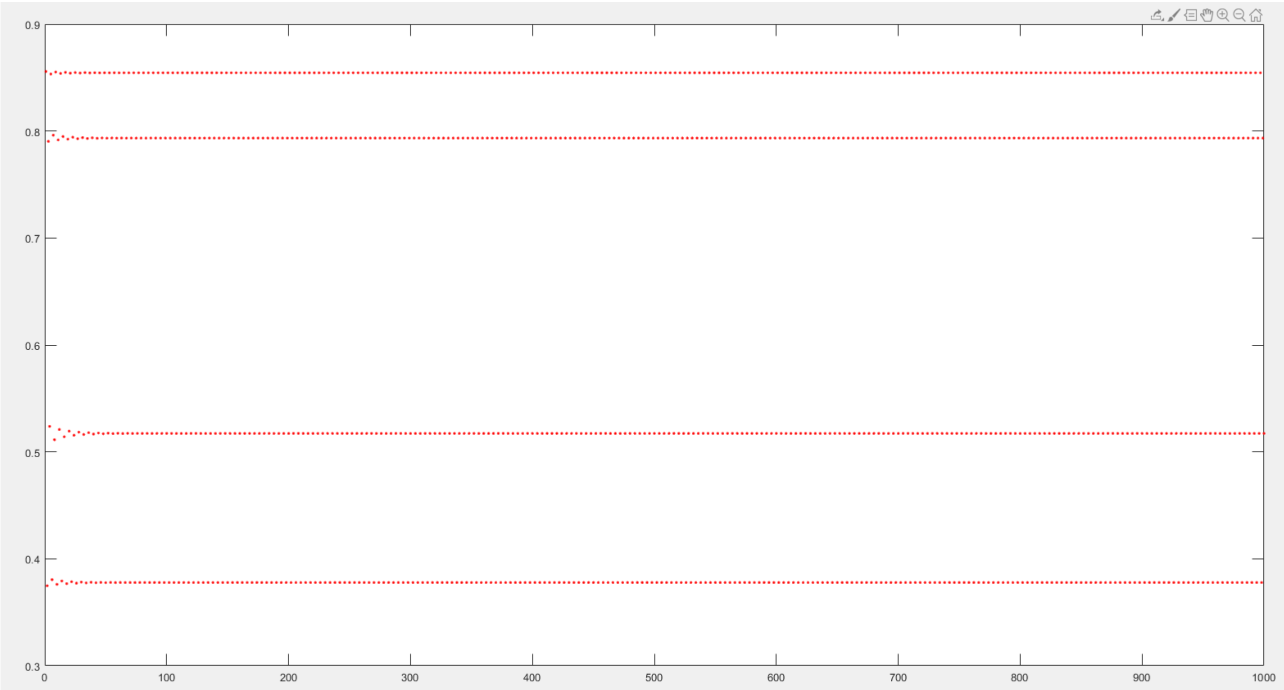
我们通过简单的图像预估可以看到$\lambda_3' = 0.857$，与我们的预估值是非常相似的。



分别运行程序代码 check(0.857,0.5)和 check(0.8557,0.5)可以得到两图：



check(0.857,0.5)



check(0.8557,0.5)

可以发现，两图本质上是非常相似的，而具体的细微之处与 MATLAB 的精度又离不开关系，故这里就近似地认为二者是相同的。

对于混沌现象，根据图像的大致估计，可以认为当$\lambda \geq 0.939$的时候图像进入混沌状态。

任务七：

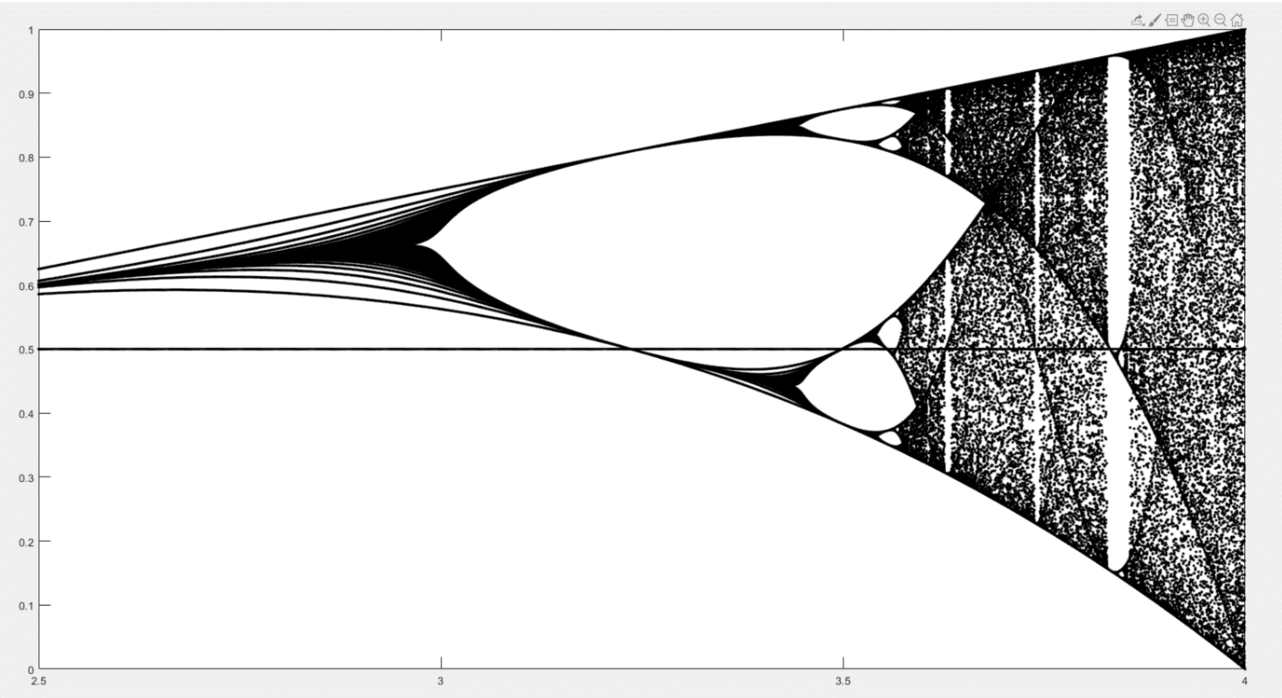
对映射

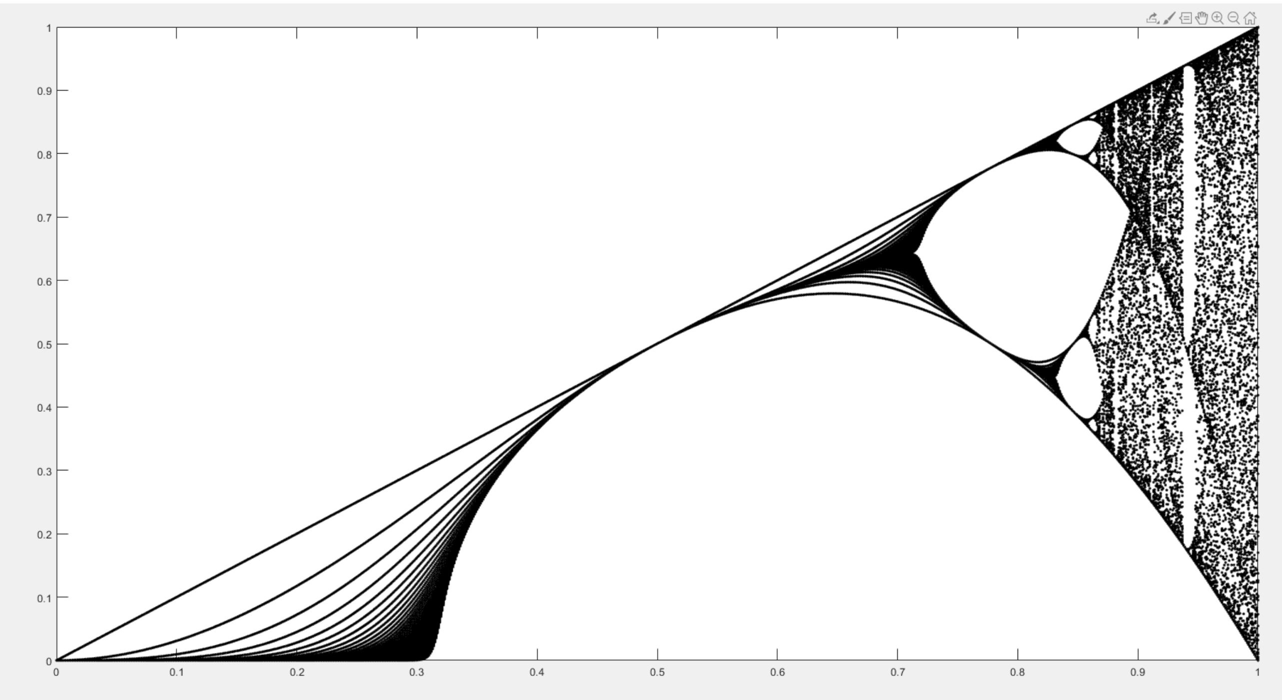
$$f(x)=\lambda\sin\pi x\,,\lambda\in(0,1]$$

试在$\lambda-x$平面上画出该映射的分叉图，将它与 Logistic 映射的分叉图比较.

【解】

任务六最先采用的就是分叉图的解法，这里只需简单地采用前面实验任务中得到的结果直观比较即可。





宏观看过去，两个图像有着相似之处，但是实际操作中可以发现，二者的分叉程度和宽度均有一定的不同，这与实际过程中迭代的函数有很大的关系。

任务八：

对帐篷映射

$$x_{n+1} = \alpha\left(1 - 2\left|x_n - \frac{1}{2}\right|\right), \alpha \in (0,1]$$

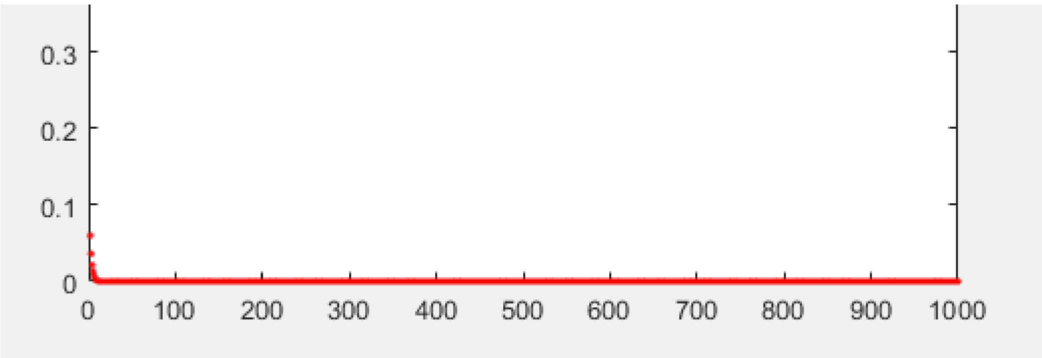
先取$\alpha \in (0,\frac{1}{2})$，然后逐渐由$\frac{1}{2}$开始慢慢地增加$\alpha$的值，用数值方法和用密度图的方法考察由初始值$x_0$出发的轨道$\{x_n\}$，能否看到倍周期分叉的情况？或者说有没有稳定的周期 2 点，周期 4 点，... ....

【解】

首先根据题意，实际上也是构造类似的 Logistic 模型来进行求解，故容易得到相应的 m 文件（tent.m）：

```
function tent(a,x0)
    x(1) = x0;
    y(1) = 1;
    % i 的范围可以操控，这里通过数组的方式从 2->N，N 取 1000
    for i = 2:1000
        x(i) = a*(1-2*abs(x(i-1)-1/2));
        y(i) = i;
    end
    plot(y,x,'r.');
```

运行 tent(0.3,0.9)可以得到下列的结果：



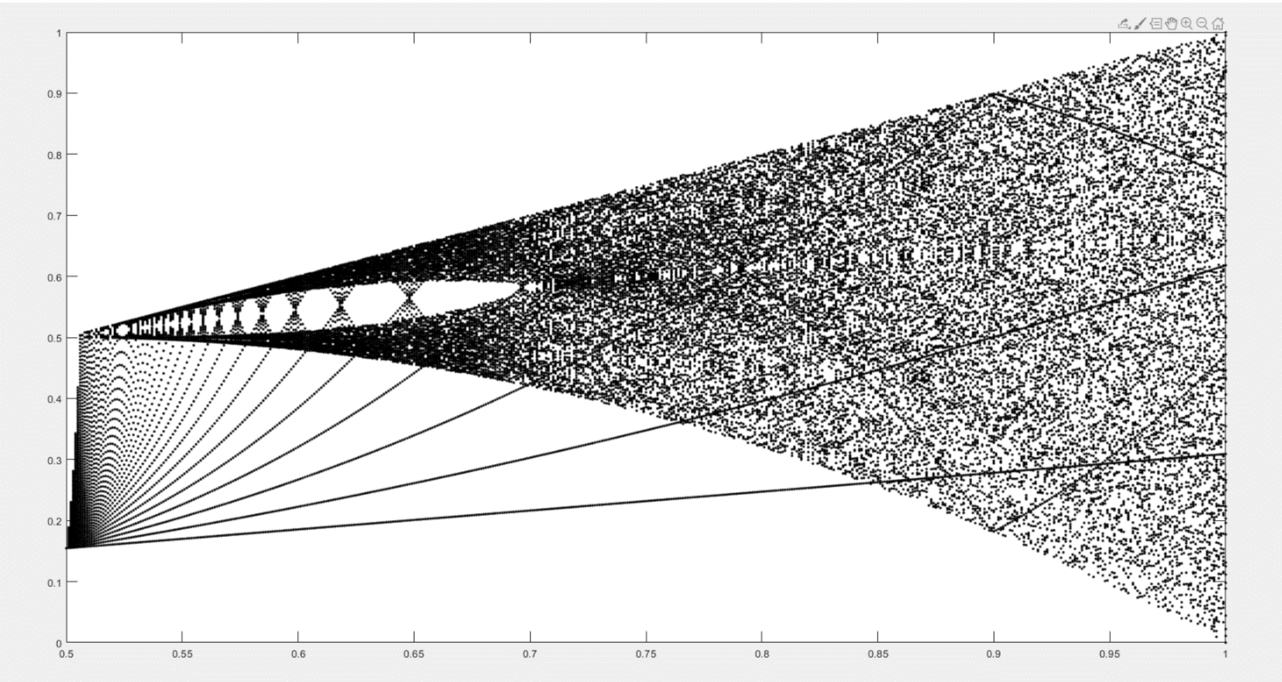
可以看到，到后期是一条非常平稳的直线（多次测试均同样情况）

当α从$\frac{1}{2}$开始缓慢增加的时候，这里为了简便观察，故直接使用数值方法来判断轨道$\{x_n\}$是否有倍周期分叉的出现（与任务六类似），故可以得到相应 m 文件（absxn.m）：

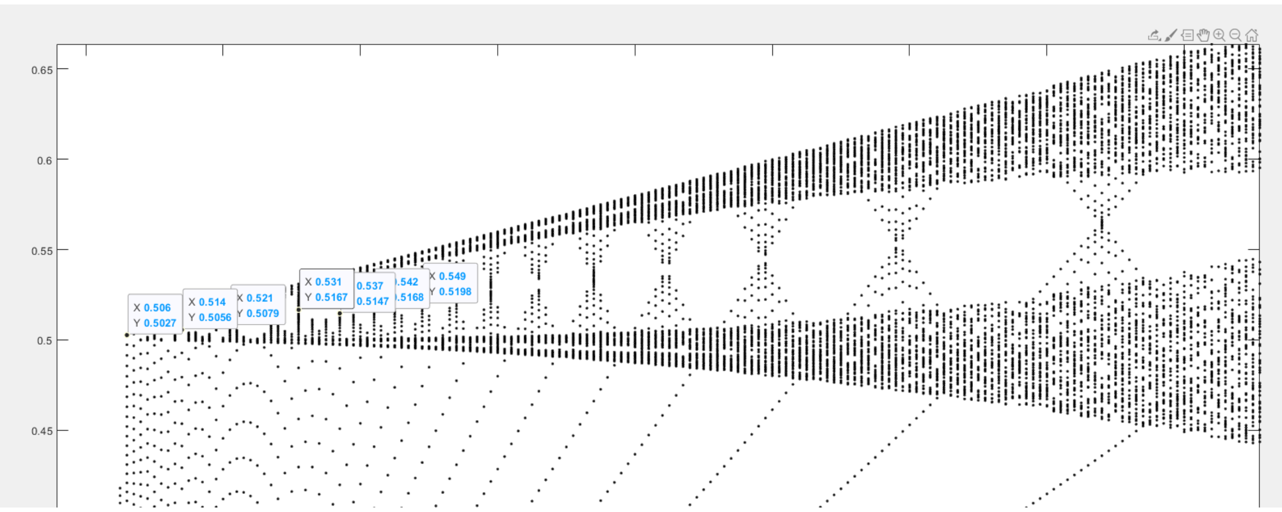
```
function absxn(x0)
    n = 1;
    for a = 0.5:0.001:1
        x(n,1) = a*sin(pi*x0);
        for i = 2:100
```

```
            x(n,i) = a*(1-2*abs(x(n,i-1)-1/2));
        end
        n = n + 1;
    end
    tmp = 0.5:0.001:1;
    plot(tmp, x,'k.','linewidth',0.01);
```

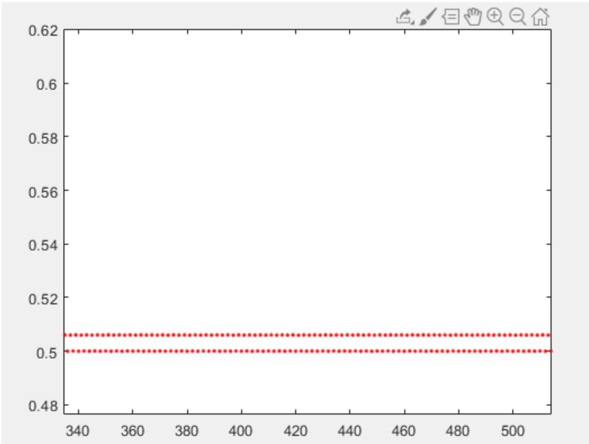
执行程序代码 absxn(0.9)可以得到下图结果：



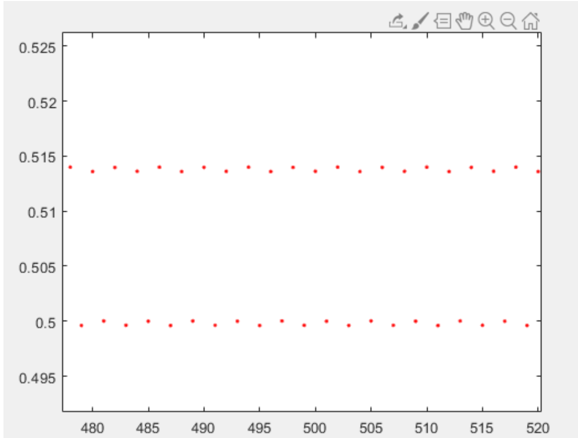
将前端展开后可以得到以下的几个点的情况（此处我认为是有存在分叉现象的，只是此处的分叉与之前的任务不同，此处的分叉是以中心分叉的）：



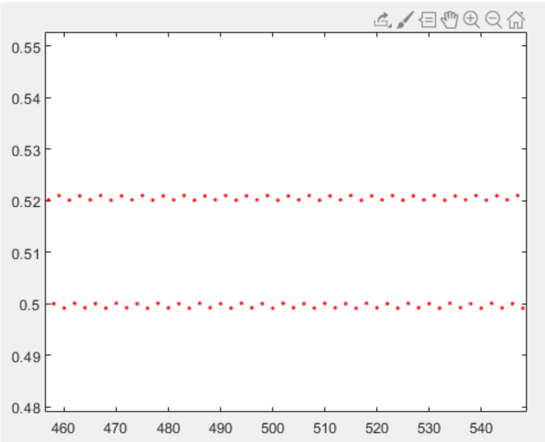
	x_0	x_1	x_2	x_3	x_5	x_6	x_7
值	0.506	0.514	0.521	0.531	0.537	0.542	0.549
分叉点	2	4	6	8	–	–	–



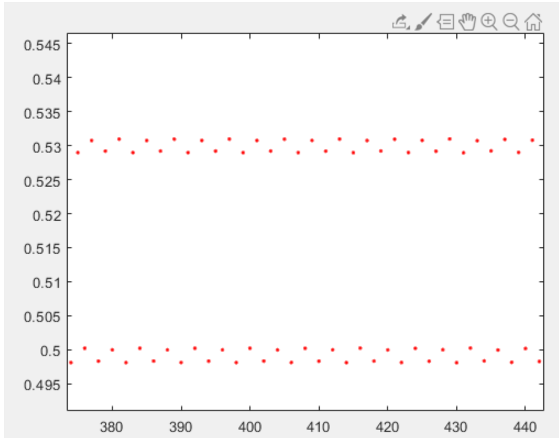
Graph 1 tent(0.506,0.9)



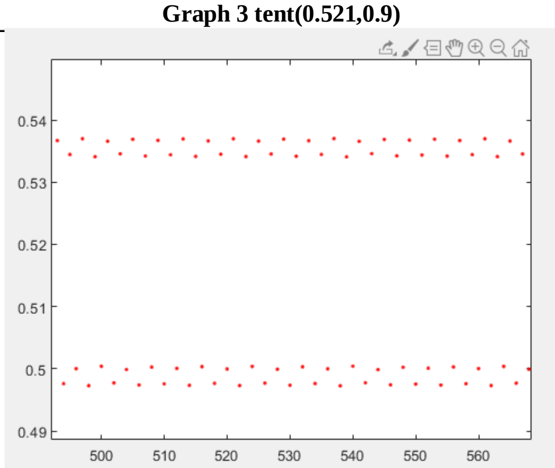
Graph 2 tent(0.514,0.9)



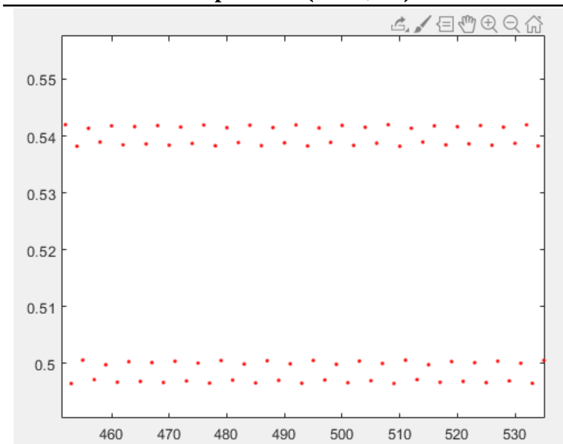
Graph 3 tent(0.521,0.9)



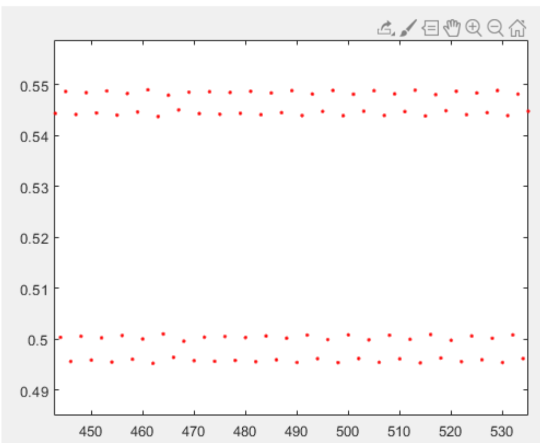
Graph 4 tent(0.531,0.9)



Graph 5 tent(0.537,0.9)



Graph 6 tent(0.542,0.9)



Graph 7 tent(0.549,0.9)

由于当寻找剩余几个的周期性的时候遇到一个难题，即不知道如何判断他们的周期情况，故从 5-7 的点的情况均防空（尝试着判断发现会造成非常多的情况）。或者可以这么认为，实际上当周期数的要求大一点的时候，很难找到稳定的周期 n 点（n=8, 16, …）。

三、问题思考

在本实验的实验任务过程中，用到了一个方法“看图法”，感觉是一个很不错的方法。如下图：

根据图像的结果大致判断实际结果的所在位置，进而只需要去检查该结果是否符合相应的任务要求即可，这个方法是有几个优势的：首先，观察方便，取值容易，很好求解；其次，可视化的效果很强，可读性很强；最后，相比于具体实现，简化了很多步骤，操作起来很方便。

但是不可否认的是，这个方法存在一定的问题，主要在于由于是用图观察，必然会存在一定的误差，具体表现于：我们图像的实现利用的是散点图，而不是实际情况下的光滑曲线图，那么必然导致可能存在那么几个点是非常必要却被舍去的情况，只能通过无限扩大细分规模来无限缩小误差，但是无法解决误差，而像本图中的细分规模是比较小的（1000），故存在的误差也是比较大的。

四、反思体会

这是本学期《数学实验》课程的最后一次报告，在短短几个月内，我已经能够初步掌握 MATLAB 语言的使用，掌握了一些全新的方法（如变分法、数值积分法等），并且了解了有趣的混沌现象和分形问题，初步接触了数学建模的相关知识领域。

此外，在实验的探究过程中，我能够自己独立地发现一些特殊的方法以及《数学实验》这门课程与我的所学学科的融合方法，这无疑为我的基础学科打好基础，而且对于我之后的问题思考等方面都很有好处。

再者，对于不懂的地方，我优先自己去查找相关的知识，那么这样就提升了我自己的学习独立性，我能够做到自己解决自己遇到的问题，自己查找相关资料，对于我未来的学习、科研也有很大的好处！

最后，感谢班级的同学的知识分享以及老师的认真授课，在同学的分享中我学到了或者加深了一些方法（如矩阵快速幂）的使用技巧，这对于我接下来可能会学到的知识有很大的帮助！

有点可惜的是，本学期的最后一门报告中，本来打算好好学一学小程序怎么制作，但是由于到了期末季，时间实在过于紧迫，只能草草了之，之后如有机会，可以继续研究。