H2.1

b) $\mathcal{F}[f(x-a)](v) = e^{-i2\pi va}\,\mathcal{F}[f](v)$

$$\mathcal{F}[f(x-a)](v) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-a)\, e^{-i2\pi vx}\, dx \qquad b = x-a,\quad db = dx,\quad x = b+a$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(b)\, e^{-2i\pi v(b+a)}\, db$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(b)\, e^{-2i\pi vb}\, e^{-2i\pi va}\, db$$

$$= e^{-2i\pi va} \int_{-\infty}^{\infty} f(b)\, e^{-2i\pi vb}\, db$$

$$= e^{-2i\pi va}\,\mathcal{F}[f](v) \qquad \square$$

c) $\mathcal{F}\left[f(x)\cdot e^{-i2\pi v_0 x}\right](v) = \mathcal{F}[f](v+v_0)$

$$\mathcal{F}\left[f(x)\cdot e^{-i2\pi v_0 x}\right](v) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i2\pi v_0 x}\cdot e^{-i2\pi vx}\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i2\pi(v_0+v)x}\, dx = \mathcal{F}[f](v+v_0)$$

$\square$