

BÖLÜM 6

6. REGRESYON MODELİNİN TEMEL KONTROLÜ

Bu bölümde regresyon modeli üzerinde gerçekleştirilecek temel kontrol yöntemleri incelenecektir. Bu kısımda açıklanacak olan teknikler sadece doğrusal regresyon için değil doğrusal olmayan regresyon ve varyans analizi modelleri için de geçerlidir. Gerçek modelin fonksiyonel yapısı bilinmediği ve hatalar gözlemlenemediği için mevcut modelin ve varsayımların kontrolü için kullanılabilecek tek bilgi uygulanan regresyondan elde edilen artıklardır. Modelin doğru bir model olması durumunda artıkların hataların tahminleri olduğu kabul edilebilir. Bu nedenle varsayımların kontrolü gerçekleştirilmeden önce modelin uygunluğu incelenmelidir. Kontrol yöntemleri iki konu başlığında incelenebilir:

- a) Varsayılan modelin fonksiyonel yapısının uygunluğunun kontrolü,
- b) EKK varsayımlarının geçerliliğinin kontrolü.

Varsayımların kontrolünde kullanılan iki temel yaklaşım ise; artıkların grafiksel analizleri ve test istatistikleridir.

Modelin fonksiyonel yapısının kontrolü [Kısım 6.1](#) de incelenecektir. Bir modelin daha ileri analizinde kullanılabilecek yöntemler ise [Bölüm 11](#) açıklanacaktır.

6.1 UYUM YETERSİZLİĞİ VE SAF HATA

Regresyon doğrusunun uyumu modelin doğru olduğu varsayımı dikkate alınarak yapılır. Belirli durumlarda modelin doğru olup olmadığı kontrol edilebilir. İlk olarak yanlış bir modelin sonuçları incelenebilir. Hatırlanacağı gibi $e_i = Y_i - \hat{Y}_i$ değeri X_i noktasındaki artık idi. Bu terim gerçek gözlenmiş Y_i değeri ile uyumu yapılmış \hat{Y}_i değeri arasındaki fark miktarıdır. Daha önce belirtildiği gibi $\sum e_i = 0$ 'dır. Hata terimi uyumu yapılmış model ile bağımlı değişken Y deki gözlenmiş değişkenliğin açıklanamayan kısmındaki tüm mevcut bilgiyi içerir. $X = X_i$ noktasında gerçek modelin değeri $\mu_i = E(Y_i)$ ile belirtilsin. Buna uygun olarak,

$$\begin{aligned} (Y_i - \hat{Y}_i) &= (Y_i - \hat{Y}_i) - E(Y_i - \hat{Y}_i) + E(Y_i - \hat{Y}_i) \\ &= \left\{ (Y_i - \hat{Y}_i) - [\mu_i - E(\hat{Y}_i)] \right\} + [\mu_i - E(\hat{Y}_i)] \\ &= q_i + B_i \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu ifade de q_i ve B_i ,

$$q_i = \left\{ (Y_i - \hat{Y}_i) - [\mu_i - E(\hat{Y}_i)] \right\}, \quad B_i = [\mu_i - E(\hat{Y}_i)]$$

şeklinde. B_i değeri $X = X_i$ noktasındaki sapma hatasıdır. Eğer model doğru ise $E(\hat{Y}_i) = \mu_i$ olacağından sapma sıfır olacaktır. Model yanlış ise $E(\hat{Y}_i) \neq \mu_i$ olacağından sıfırdan farklı bir değer alacaktır ve alacağı bu değer X_i ve gerçek modele bağımlı olacaktır. q_i değeri ise bir şans değişkenidir ve

$$E(q_i) = E(Y_i - \hat{Y}_i) - (\mu_i - E(\hat{Y}_i)) = \mu_i - E(\hat{Y}_i) - \mu_i + E(\hat{Y}_i) = 0$$

olduğundan beklenen değeri sıfırdır. Bu durumun gerçekleşmesi modelin doğru ya da yanlış başka bir deyişle $E(\hat{Y}_i) = \mu_i$ olup olmamasına bağlı değildir. $E(q_i) = 0$ ifadesi her iki durumda da geçerlidir. Tanımlanan q_i değerlerinin ilişkili olduğu gösterilebilir. Hata varyansı $V(\varepsilon_i) = V(Y_i) = \sigma^2$ olarak verildiğinde $q_1^2 + q_2^2 + \dots + q_n^2$ değerinin beklenen değeri $(n-2)\sigma^2$ 'dir. Buna göre artık kareler ortalamasını veren,

$$\frac{1}{(n-2)} \left\{ \sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2 \right\} \quad (6.1)$$

ifadesinin beklenen değeri, kabul edilen model doğru olduğunda σ^2 , yanlış olduğunda ise $\sigma^2 \sum B_i^2 / (n-2)$ şeklinde olacaktır. Eğer model doğru ise artıklar, ilişkili şans sapmaları q_i 'ler olacaktır ve artık kareler ortalaması, hata varyansının bir tahminleyicisi olarak kullanılabilir. Bununla birlikte model doğru olmadığında $B_i \neq 0$ 'dır ve artıklar q_i şansa bağlı ve B_i sistematik hata bileşenlerini içermektedir. Bu bileşenler sırasıyla varyans hatası ve sapma hatası olarak isimlendirilebilir. Bu durumda artık kareler ortalaması büyüme eğilimi gösterecek ve bu nedenle gözlemlerdeki mevcut şansa bağlı değişkenliğin yeterli bir ölçümünü sağlayamayacaktır. Bununla birlikte, artık kareler ortalaması bir şans değişkeni olduğu için, sapma mevcut olsa bile büyük bir değer alamayabileceği unutulmamalıdır.

Basit doğrusal modelin uygulamasında sapma hatası verilerin grafiklerinin incelenmesi sonucu ortaya çıkarılabilir, (bkz. [Şekil 6.1](#)). Model çok karmaşık bir yapıda olduğunda ya da çok sayıda değişken kullanıldığında sapma hatasının grafikler yardımı ile ortaya çıkarılması mümkün olmayabilir. Eğer σ^2 'nin bir ön tahmini varsa (burada ön tahminden, üzerinde çalışılan konuda ya da benzer olarak diğer konularda daha önceki tecrübelerden yararlanarak elde edilen tahmin kastedilmektedir), artık kareler ortalamasının bu ön tahminden önemli ölçüde büyük olup olmadığı test edilebilir. Önemli ölçüde büyük olduğunda ise uyum yetersizliğinin varlığından söz edilebilir. Bu durumda modelin mevcut formu yetersiz olabileceği için yeniden ele alınabilecektir. Eğer σ^2 'nin bir ön tahmini mevcut değilse, tekrarlı gözlemler alınarak (yani aynı X_i değeri için birden çok Y_i gözlemi elde edilerek) bu tekrarlı gözlemler σ^2 'nin bir tahminini elde etmek amacı ile kullanılabilir. Elde edilen tahmine saf hata adı verilir. Çünkü aynı X_i değerine set edilmiş birden çok Y_i gözlemi mevcuttur. Tekrarlanan gözlemlerde yalnızca şansa bağlı değişkenliğin ortaya çıkacağı açıktır. Bu yöntemle elde edilen σ^2 'nin tahmini diğer yollarla elde edilenlerden daha güvenilir olacaktır. Bu nedenle araştırmaları ya da deneyleri tekrarlamalı gözlemleri içerecek şekilde düzenlemek daha uygun bir yaklaşımdır.

Burada belirtilen tekrarlı gözlemler gerçek tekrarlar olmak zorundadır. Başka bir deyişle aynı birimin tekrarlanmış gözlemleri olmamalıdır. Örneğin boy ile kilo arasındaki ilişki incelendiğinde, 1.75 m boyundaki bir kişinin kilosunu tekrar tekrar ölçmek değil, 1.75 boyundaki birden çok bireyin kilolarının ölçülmesidir. Aynı bireyin tekrarlı gözlemleri, ölçüm hatalarını ve bu

hataların değişkenliğini verebilir. Fakat burada ilgilenilen, aynı boya sahip bireylerin ağırlıklarındaki değişkenlik ile ilgili bilginin sağlanmasıdır. Bu nedenle aynı boyda birden fazla bireyin kilosu ölçümlenerek σ^2 'nin bir tahmini elde edilmeye çalışılır.

Verilerde tekrarlı gözlemler mevcut olduğunda aynı X değerindeki Y gözlemlerini ifade edebilecek ek gösterime ihtiyaç vardır. X 'in m adet farklı değeri olduğu kabul edilerek $j=1,2,\dots,m$ olmak üzere X_j ile belirtilebilir. Bu m adet X değerinde alınan tekrar sayıları da n_j ile belirtilerek,

$Y_{11}, Y_{12}, \dots, Y_{1n_1}$ ifadesi X_1 değerinde n_1 adet tekrar

⋮

$Y_{m1}, Y_{m2}, \dots, Y_{mn_m}$ ifadesi X_m değerinde n_m adet tekrar

alındığını belirtir. Toplam gözlem sayısı

$$n = \sum_{j=1}^m \sum_{u=1}^{n_j} 1 = \sum_{j=1}^m n_j$$

şeklinde elde edilir. X_1 noktasında n_1 adet gözlemden elde edilen saf hata kareler toplamı, Y_{1u} 'nun kendi ortalaması \bar{Y}_1 etrafındaki içsel kareler toplamı olup,

$$\begin{aligned} \sum_{u=1}^{n_1} (Y_{1u} - \bar{Y}_1)^2 &= \sum_{u=1}^{n_1} Y_{1u}^2 - n_1 \bar{Y}_1^2 \\ &= \sum_{u=1}^{n_1} Y_{1u}^2 - \left(\sum_{u=1}^{n_1} Y_{1u} \right)^2 / n_1 \end{aligned}$$

ifadesi ile hesaplanır. Tekrarlı Y_{ij} gözlemlerinin alındığı noktaların her biri için hesaplanan içsel kareler toplamının birleştirilmesi ile toplam saf hata kareler toplamı elde edilir.

$$\sum_{j=1}^m \sum_{u=1}^{n_j} (Y_{ju} - \bar{Y}_j)^2 \quad (6.2)$$

bu toplamın serbestlik derecesi

$$n_e = \sum_{j=1}^m (n_j - 1) = \sum_{j=1}^m n_j - m \quad (6.3)$$

şeklinde dir. Buna göre ortalama karesel saf hata,

$$s_e^2 = \frac{\sum_{j=1}^m \sum_{u=1}^{n_j} (Y_{ju} - \bar{Y}_j)^2}{\sum_{j=1}^m n_j - m} \quad (6.4)$$

eşitliği ile verilebilir. Bu değer model doğru olsun veya olmasın σ^2 'nin bir tahminini verir. Gerçekte saf hata kareler toplamı artık kareler toplamının bir parçasını oluşturur. X_j noktasındaki u -uncu gözlem için artık,

$$Y_{ju} - \hat{Y}_j = (Y_{ju} - \bar{Y}_j) - (\hat{Y}_j - \bar{Y}_j) \quad (6.5)$$

şeklinde verilebilir. Gerçekte herhangi X_j noktasındaki tüm tekrarlar kullanılarak \hat{Y}_j kestirilmiş değeri elde edilir. (6.5) eşitliğinin her iki tarafının karesi alınır, daha sonrada u ve j üzerinden toplanırsa,

$$\sum_{j=1}^m \sum_{u=1}^{n_j} (Y_{ju} - \hat{Y}_j)^2 = \sum_{j=1}^m \sum_{u=1}^{n_j} (Y_{ju} - \bar{Y}_j)^2 - \sum_{j=1}^m n_j (\hat{Y}_j - \bar{Y}_j)^2 \quad (6.6)$$

eşitliği elde edilir. Çapraz çarpan terimi her bir j için u üzerinden yapılan toplam sonucu sıfır değerini alır. (6.5) eşitliğinin sol tarafı artık kareler toplamıdır. Sağ taraftaki birinci terim saf hata kareler toplamıdır. İkinci terim ise uyum yetersizliği kareler toplamı olarak isimlendirilir. Saf hata kareler toplamı [Tablo 6.1](#)'de gösterildiği gibi varyans analiz tablosuna ilave edilebilir. Genel prosedür, $F = KO(UY)/KO(SH)$ oranını $\%(1-\alpha)$ 'lık bir F -kritik değeri ile test etmektir. Bu F -değerinin serbestlik dereceleri $(n_r - n_e)$ ile n_e 'dir.

1) Eğer test sonucu önemli çıkarsa; başka bir deyişle elde edilen test istatistiği kritik F -değerinden büyük çıkarsa; iki varyansın birbirine eşit olduğu hipotezi reddedilir. Buda uyum yetersizliği varyansının saf hata varyansından istatistiksel olarak büyük olduğu anlamına gelir. Sonuç olarak kullanılan regresyon modelinin yetersiz olduğu söylenebilir. Yetersizliğin nerede ve nasıl oluştuğunun anlaşılması için hataların incelenmesi gerekecektir.

2) Eğer test sonucu önemsiz çıkarsa; F -hesap değerinin teorik değerden küçük olması, bu durumda kullanılan modelin olayı açıklamakta yeterli olduğu sonucuna ulaşılır. Başka bir deyişle kullanılan model, gerçek modele yeterli bir yaklaşım göstermektedir. Bu nedenle gerek saf hata kareler ortalaması gerekse uyum yetersizliği kareler ortalaması σ^2 'nin bir tahmini olarak kullanılabilir. s^2 'yi elde etmek için σ^2 'nin birleştirilmiş bir tahmini, artık kareler toplamını oluşturan saf hata ve uyum yetersizliği kareler toplamının yeniden birleştirilip artık serbestlik derecesine bölünmesi ile elde edilebilir, $s^2 = (\text{artık kareler toplamı}) / n_r$, bkz. [Alistırma 2.15](#).

Daha önce belirtildiği gibi, tekrarlı gözlemler, gerçek tekrarlardan oluşmaktadır. Aksi takdirde, $KO(SH)$ olduğundan küçük tahminlenebilecek ve bu durumda uyum yetersizliği F -testi gerçekte mevcut olmayan uyum yetersizliğini mevcut olarak gösterebilecektir.

Eldeki verinin tekrarlı gözlemleri içermesi durumunda izlenebilecek adımlar aşağıda özetlenmiştir.

1) Modelin uyumu yapılır, basit varyans analizi tablosu hazırlanır. Bu aşamada kapsamlı bir F -testi yapılmaz.

2) Saf hata kareler toplamı oluşturulur ve artıklar [Tablo 6.1](#) de verildiği şekilde ayrıştırılır.

3) Uyum yetersizliği için F -testi uygulanır. Eğer test uyum yetersizliğinin önemli olduğunu belirtirse $4a$ 'ya git. Test sonucu uyum yetersizliğinin önemsiz olduğunu gösterirse, $4b$ 'ye git.

4a) Uyum yetersizliği önemlidir. Bu durumda uyumu yapılmış modelin analizi durdurulur ve artıklar incelenerek modeli geliştirmenin yolları araştırılır. Kapsamlı regresyon için F -testi

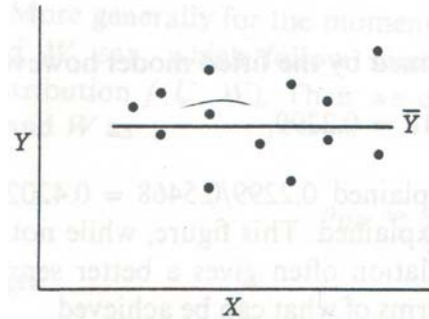
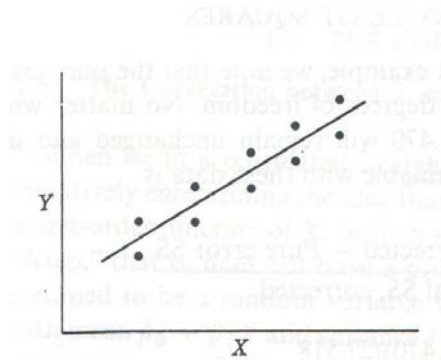
uygulanmaz ve güven aralıkları oluşturulmaz. Çünkü bu hesaplamaların üzerine kurulu oldukları varsayımlar, modelde uyum yetersizliğinin mevcut olduğu durumlarda geçerliliklerini yitirirler.

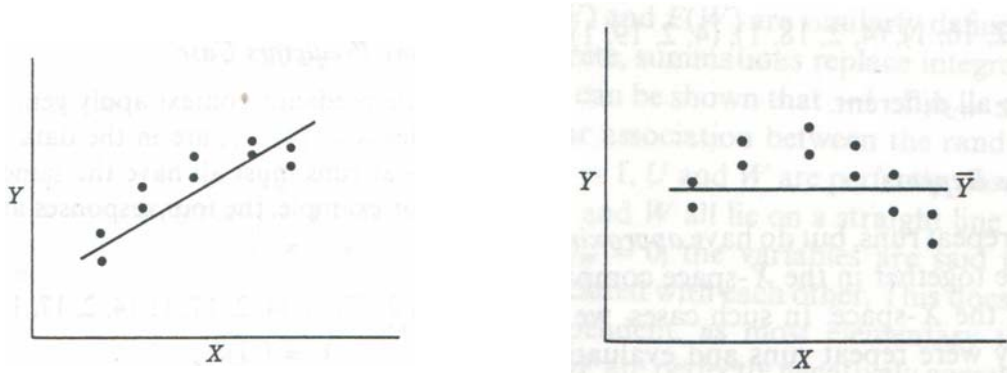
Tablo 6.1 Artık kareler toplamının, uyum yetersizliği ve saf hata kareler toplamı şeklinde bölünmesi

Değişkenlik Kaynağı	Kareler Toplamları	Serbestlik Derecesi	Kareler Ortalaması	F-Testi
Regresyona Bağlı Değişkenlik	$\sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2$	1	$KO(R) = \frac{\sum (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2}{1}$	$F = \frac{KO(R)}{KO(e)}$
Artığa Bağlı Değişkenlik	$\sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2$	$n_r = n - 2$	$KO(e) = \frac{\sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n - 2}$	
Uyum Yetersizliği	$\sum_{j=1}^m n_j (\bar{Y}_j - \hat{Y}_j)^2$	$n_u = n_r - n_e$	$KO(UY) = \frac{\sum_{j=1}^m n_j (\bar{Y}_j - \hat{Y}_j)^2}{n_u}$	$F = \frac{KO(UY)}{KO(SH)}$
Saf Hata	$\sum_{j=1}^m \sum_{u=1}^{n_j} (Y_{ju} - \bar{Y}_j)^2$	$n_e = \sum_{j=1}^m n_j - m$	$KO(SH) = \frac{\sum_{j=1}^m \sum_{u=1}^{n_j} (Y_{ju} - \bar{Y}_j)^2}{n_e}$	
Toplam Düzeltilmiş Değişkenlik	$\sum (Y_i - \bar{Y})^2$	$n - 1$		

4b) Uyum yetersizliği önemsizdir. Bu durumda artıklar, saf hata ve uyum yetersizliği olarak birleştirilir ve $V(Y) = \sigma^2$ 'nin bir tahmini olarak artık kareler ortalaması s^2 kullanılır. Kapsamlı bir F-testi uygulanır, Y 'nin gerçek ortalama değeri için güven aralığı oluşturulur, r^2 değerlendirilir. Bu durumda bile artıkların incelenmesi faydalı bilgiler verebilecektir.

Modelin tüm bu aşamalardan geçmesi modelin doğru olduğu anlamına gelmez. Çünkü bu çalışma veriler yardımı ile yapılmaktadır ve veriler modelin uygunsuzluğunu ortaya çıkarabilecek yeterlilikte olamayabilir. Eğer uyum yetersizliği mevcut ise farklı bir modele ihtiyaç olacaktır. Karşılaşılabilecek bazı durumlar [Şekil 6.1](#)'de verilmiştir.





Şekil 6.1 Tipik regresyon doğrusu durumları

Durum 1. İlgilenilen model, $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$, Uyum yetersizliği yok, Doğrusal regresyon önemli

$Y = b_0 + b_1 X$ modelini kullan

Durum 2. İlgilenilen model, $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$, Uyum yetersizliği yok, Doğrusal regresyon anlamsız.

$\hat{Y} = \bar{Y}$ modelini kullan

Durum 3. İlgilenilen model, $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$, Uyum yetersizliği önemli, $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_{11} X^2 + \varepsilon$ modelini kullan

Durum 4. İlgilenilen model, $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$, Uyum yetersizliği önemli, $Y = \beta_0 + \beta_1 X + \beta_{11} X^2 + \varepsilon$ modelini kullan

Uyum yetersizliğinde modelin yanlış belirlenmesi ile belirtilmek istenen basit regresyon için modele x bağımsız değişkeninin kuvvetlerinin alınması ya da çok değişkenli regresyon için x_j bağımsız değişkenlerinin kuvvetlerinin ya da çapraz çarpanlarının $x_j x_k$ alınmamasıdır. Basit regresyon için yukarıda incelenen Durum 4 ele alındığında uyum yetersizliği kareler ortalamasının beklenen değeri,

$$E[KO(UY)] = \sigma^2 + \frac{\sum_{i=1}^m n_i [\beta_{11} x_i^2]^2}{m-2}$$

şeklinde olup, F -testi ile araştırılan boş hipotez $\beta_{11} \neq 0$ dır ve boş hipotezin doğru olduğu durumlarda $E[KO(UY)] = \sigma^2$ olacaktır.

Modeldeki bağımsız değişken sayısının birden fazla olması durumunda uyum yetersizliği testi matris gösteriminde ele alınır. Çok değişkenli durum için uyum yetersizliği gerçekte [Kısım 4.11.2](#) de verilen Durum 4 ün test edilmesine benzer fakat aşağıda açıklanacak önemli bir fark vardır. Konuyu daha iyi açıklamak için [Kısım 4.4](#) de tanımlanan [\(4.21\)](#) ve [\(4.22\)](#) modelleri, varsayılan model,

$$y = \mathbf{X}_1 \beta_1 + \varepsilon^* \quad (6.7a)$$

ve gerçek model,

$$y = \mathbf{X}_1\boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2 + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (6.7b)$$

şeklinde yeniden tanımlansın. Burada \mathbf{X}_1 boyutu $n \times p$ ve \mathbf{X}_2 ise boyutu $n \times (r-p)$ olan matrislerdir. [Kısım 4.11.2](#) den farklı olarak \mathbf{X}_2 matrisi sadece \mathbf{X}_1 matrisinde tanımlanan değişkenlerin kuvvetlerini ve çapraz çarpanlarını içerir. Sonuç olarak eğer $\boldsymbol{\beta}_2 \neq 0$ ise $E(\boldsymbol{\varepsilon}^*) \neq 0$ olduğu görülmektedir. Eğer $\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ ihmal edilirse yanlış belirlenmiş model için $\boldsymbol{\beta}_1$ in EKK tahminleri $b_1 = (\mathbf{X}_1^T \mathbf{X}_1)^{-1} \mathbf{X}_1^T \mathbf{y}$ ve artık kareler toplamı $KT(e) = (\mathbf{y} - \mathbf{X}_1\boldsymbol{\beta}_1)^T (\mathbf{y} - \mathbf{X}_1\boldsymbol{\beta}_1)$ olacaktır. Bu durumda model (6.7a) için hata kareler ortalamasının tahmini eşitlik (4.46c) kullanılarak,

$$s_p^2 = \frac{1}{n-p} \left\{ \mathbf{y}^T \left[\mathbf{I} - \mathbf{X}_1 (\mathbf{X}_1^T \mathbf{X}_1)^{-1} \mathbf{X}_1^T \right] \mathbf{y} \right\}$$

ve model (6.7b) için $E(\mathbf{y}) = \mathbf{X}_1\boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2$ olduğundan artık kareler ortalamasının beklenen değeri eşitlik (4.47a) kullanılarak,

$$\begin{aligned} E(s_p^2) &= \frac{1}{n-p} \left\{ \sigma^2 (n-p) + [E(\mathbf{y})]^T \left[\mathbf{I} - \mathbf{X}_1 (\mathbf{X}_1^T \mathbf{X}_1)^{-1} \mathbf{X}_1^T \right] [E(\mathbf{y})] \right\} \\ E(s_p^2) &= \frac{1}{n-p} \left\{ \sigma^2 (n-p) + [\mathbf{X}_1\boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2]^T \left[\mathbf{I} - \mathbf{X}_1 (\mathbf{X}_1^T \mathbf{X}_1)^{-1} \mathbf{X}_1^T \right] [\mathbf{X}_1\boldsymbol{\beta}_1 + \mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2] \right\} \\ E(s_p^2) &= \frac{1}{n-p} \left\{ \sigma^2 (n-p) + [\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2]^T \left[\mathbf{I} - \mathbf{X}_1 (\mathbf{X}_1^T \mathbf{X}_1)^{-1} \mathbf{X}_1^T \right] [\mathbf{X}_2\boldsymbol{\beta}_2] \right\} \\ E(s_p^2) &= \sigma^2 + \frac{\boldsymbol{\beta}_2^T [\mathbf{X}_2^T \mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_2^T \mathbf{X}_1 (\mathbf{X}_1^T \mathbf{X}_1)^{-1} \mathbf{X}_1^T \mathbf{X}_2] \boldsymbol{\beta}_2}{n-p} \end{aligned} \quad (6.8a)$$

ve artık kareler toplamının beklenen değeri,

$$E[KT(e)] = \sigma^2 (n-p) + \boldsymbol{\beta}_2^T [\mathbf{X}_2^T \mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_2^T \mathbf{X}_1 (\mathbf{X}_1^T \mathbf{X}_1)^{-1} \mathbf{X}_1^T \mathbf{X}_2] \boldsymbol{\beta}_2 \quad (6.8b)$$

bulunur. Saf hata için kareler toplamının beklenen değeri,

$$E[KT(SH)] = \sigma^2 \left[\sum_{i=1}^m (n_i - 1) \right] = \sigma^2 (n-m) \quad (6.9a)$$

ve uyum yetersizliğinin kareler ortalamasının beklenen değeri,

$$\begin{aligned} E[KO(UY)] &= \frac{E[KT(e)] - E[KT(SH)]}{m-p} \\ E[KO(UY)] &= \frac{\sigma^2 (m-p) + \boldsymbol{\beta}_2^T [\mathbf{X}_2^T \mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_2^T \mathbf{X}_1 (\mathbf{X}_1^T \mathbf{X}_1)^{-1} \mathbf{X}_1^T \mathbf{X}_2] \boldsymbol{\beta}_2}{m-p} \\ E[KO(UY)] &= \sigma^2 + \frac{\boldsymbol{\beta}_2^T [\mathbf{X}_2^T \mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_2^T \mathbf{X}_1 (\mathbf{X}_1^T \mathbf{X}_1)^{-1} \mathbf{X}_1^T \mathbf{X}_2] \boldsymbol{\beta}_2}{m-p} \end{aligned} \quad (6.9b)$$

elde edilir. Uyum yetersizliği için F -testi (6.9b) eşitliğinin ikinci bileşenindeki pozitif tanımlı,

$$\beta_2^T \left[X_2^T X_2 - X_2^T X_1 (X_1^T X_1)^{-1} X_1^T X_2 \right] \beta_2$$

karesel formunun modele yaptığı katkıyı belirlemek için tasarlanmıştır. Görüldüğü gibi uyum yetersizliği testi doğrudan bu karesel formun değerine bağlıdır. Diğer bir deyişle X_1 , X_2 matrislerine ve β_2 vektörüne bağlıdır.

Uyum yetersizliğinin saf hataya dayanan testinin gerçekleştirilebilmesi için tekrarlı gözlemlere gereksinim vardır. Bununla birlikte tekrarlı gözlemlerin mevcut olmadığı araştırmalarda model yetersizlikleri aşağıda açıklanacak yöntemler kullanılarak belirlenmeye çalışılır.

6.2 ARTIKLARIN ANALİZ NEDENLERİ

Regresyon analizinde problem, ε_i 'nin gözlemlenemediği gibi aynı zamanda tahminlenememesinden kaynaklanmaktadır. Hatalar eşitlik (4.4) ile verilen modeldeki β vektörü bilinmediği için gözlemlenemezler. Bununla birlikte e_i artığı, bir anlamda şans hatası ε_i 'yi ölçmektedir. Bölüm 2 de belirtildiği gibi artıklar, gözlenmiş değerler ile regresyon modelinden elde edilen uyumu yapılmış değerler arasındaki farktır. Tanımdan da anlaşılacağı gibi artıklar regresyon modelinin açıklayamadığı miktardır. Modelin doğru olduğu durumlarda artıkları gözlenmiş hatalar olarak değerlendirmek yanlış olmaz. Regresyon analizinin uygulanmasında hatalar üzerine, sıfır ortalamalı, birbirinden bağımsız, sabit varyanslı ve normal dağıldıklarını belirten varsayımlar yapılmıştır. Uyumu yapılan modelin doğru olması durumunda artıkların davranışı varsayımların geçerli olduğunu belirtir nitelikte olmalıdır ya da en azından varsayımların ret edilemeyeceğini göstermelidir. Artıkların varsayımların ret edilemeyeceğini belirtmesi varsayımların doğru olduğu anlamına gelmez sadece kullanılan veri seti ve model için problem olmadığını açıklar.

Uyumu yapılan model doğru değilse, gözlemlenemeyen hataların ε_i ve buna bağlı olarak artıkların e_i dağılımı değişecektir. Artıkların analizinde amaç e_i değerlerinin incelenerek ε_i ile ilgili varsayımlarda ortaya çıkan eksikliklerin yorumlanmasıdır. Bazı problemlerde, modelin yanlış kurulması, ε_i değerleri ile e_i değerleri arasında uygun bir ilişki kurulabilmesini engeller. Bu gibi durumlarda artıklarda gözlemlenen bazı belirtiler, modelin uygun olmadığını ve/veya varsayımların gerçekleşmediğinin belirtisi olabilir.

Artıkların oluşturdukları şekillerin düzeni, büyüklüklerinden çok daha fazla bilgi taşır. Bu nedenle artıkların grafiksel gösterimlerinin incelenmesi oldukça faydalı olacaktır. Araştırma için gerekli bilginin elde edilebilmesi için genellikle birden fazla farklı grafiğin analizinin gerekli olabileceği unutulmamalıdır.

Aşağıdaki kısımlarda varsayımların ve model yetersizliklerinin artıkların grafiksel analizi ve test istatistikleri ile nasıl kontrol edileceği açıklanacaktır. Bununla birlikte ilk varsayım olan hataların sıfır ortalamalı dağılıma sahip oldukları konusu oldukça basit olduğundan burada incelenecektir. Daha karmaşık grafik teknikleri ise Bölüm 11 de incelenecektir. Araştırma için gerekli bilginin elde edilebilmesi için genellikle birden fazla farklı grafiğin analizinin gerekli olabileceği unutulmamalıdır.

Sabit terimi içeren bir model için [Bölüm 2](#) ve [Bölüm 4](#) de belirtildiği gibi ilk normal denklemin sonucu olarak $\sum e_i = 0$ elde edilmişti. Bunun sonucu olarak artıkların ortalaması, $\bar{e} = (\sum e_i / n) = 0$ olacaktır. Diğer bir deyişle ilk varsayımı EKK tahminleme yöntemi garanti altına almaktadır.

6.3 ARTIKLARIN ANALİZLERİ İLE NORMAL DAĞILIMIN KONTROLÜ

Hataların birbirinden bağımsız dağıldıkları varsayılmaktadır. Bununla birlikte artıklar birbirinden bağımsız olamazlar. Bunun nedeni mevcut n adet denklemde tahminleme önceliğinin p adet parametreye verilmesidir. Bu öncelik normal denklemlerde artıklar üzerinde p adet kısıt oluşturur ve sonuç olarak artıkların tahminlenmesine kalan serbestlik derecesi $n-p$ dir. Fakat tahminlenmesi gereken artık sayısı n adettir. Sonuç olarak tüm artıkların birbirinden bağımsız olması mümkün değildir. Eğer p değeri n ile kıyaslandığında çok büyük değilse ortaya çıkan bu durumun normal dağılımın kontrolleri üzerindeki olumsuz etkisi fazla olmayacaktır.

Normal dağılımın kontrolünde kullanılabilecek temel grafiksel yöntemler:

1. Artıkların frekans dağılımı; histogramlar, nokta grafikler vb.
2. Artıkların normal ya da yarı normal plotları.

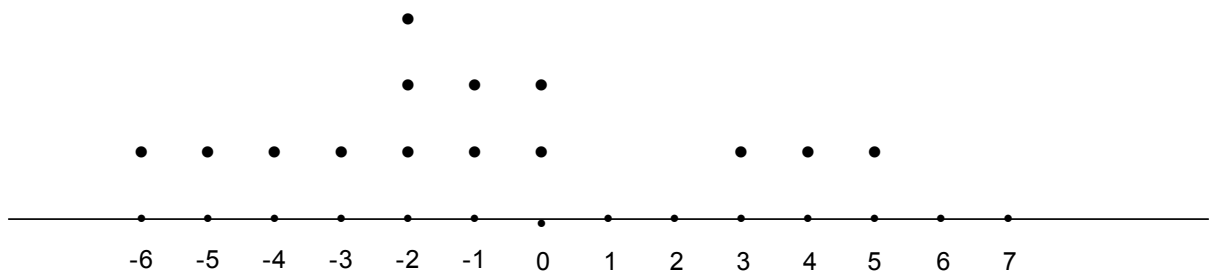
olup aşağıda açıklanmışlardır.

6.3.1 Artıkların Frekans Dağılımı

Bir boyutlu verilerin grafiksel gösterimleri (histogramlar, nokta grafikler) artıkların, normal bir ana kütleden gelen örnek olup olmadığını belirlemek için kullanılan kolay ve hızlı bir araştırma yöntemidir. Artıkların basit bir frekans dağılımı, çarpıklık, birden fazla mod, normal dağılıma göre daha kalın uç vb. gibi normallik varsayımını geçersiz kılacak durumların ortaya çıkarılmasında oldukça faydalıdır. Bununla birlikte normallik varsayımının kontrolü için bu tip plotların kullanımında sonuçların güvenilir olabilmesi için örnek hacminin büyük olması gereklidir. Gözlem sayısının az olması durumunda nokta grafikler kullanılabilir. Bu durumda artıklar sıfır ortalamalı bir normal dağılıma benzeyecektir. Bir regresyon analizinde aşağıda verilen artıkların elde edildiği kabul edilerek,

$$e_i = 5, -2, -4, 4, 0, -6, 3, -2, -5, -3, -2, -1, 0, -1$$

[Şekil 6.2](#)'de verilen nokta grafiği elde edilebilir. İşaretlemelerin önemsiz düzensizlikler göstermesi normal dağılımdan alınan bu ondört adet örneklemin normal dağılımdan farklılık gösterdiğini belirtmez. Örneklem hacminin az olması durumunda normal ve yarı normal plotların kullanılması daha uygun bir yaklaşımdır.



Şekil 6.2 Nokta grafiği

6.3.2 Normal Olasılık Plotları

Normal olasılık plotu, örneğin normal dağılış gösteren ana kütleden gelip gelmediğini araştırılmasında kullanılmak üzere tasarlanmıştır. Uygun örnek hacmi için normal sıra (order) istatistiklerine karşı sıralanmış artıkların plotudur. Normal sıra istatistikleri, ortalaması sıfır varyansı bir olan normal dağılımdan gelen dizine sokulmuş gözlemlerin beklenen değeridir.

Bir sürekli y şans değişkenini temsil eden y_1, y_2, \dots, y_n , n hacimli örnek alınmış olsun. Bu şans değişkeni standart normal değişkene dönüştürülerek, n adet gözlemin, z_1, z_2, \dots, z_n şeklinde düzenlenmesi örnek sıra istatistiklerini verir. Tekrarlı örneklerden her bir z_i için elde edilen ortalama, örnekleme yapılan olasılık dağılımı için i -inci sıra istatistiğini verir. Eğer bu olasılık dağılımı sıfır ortalamalı birim varyanslı bir normal dağılımdan örneklenmiş ise elde edilen sıra istatistikleri, normal sıra istatistikleri olacaktır. Örneğin $n=5$ hacimli bir örnek için normal sıra istatistikleri -1.163 ; -0.495 ; 0 ; 0.495 ; 1.163 olarak verilebilir. Bir standart normal değişken için $n=5$ olmak üzere en küçük gözlemin beklenen değeri -1.163 dır. Normal sıra istatistikleri $n=20$ ye kadar tablolaştırılmıştır, Pearson ve Hartley (1966).

Sıra istatistikleri için kolay bir yaklaşım, kümülatif normal dağılımın ters fonksiyonunu veren herhangi bir bilgisayar programı ile sağlanabilir. Bu ters fonksiyon, $z_i = \Phi^{-1}(k)$, şeklinde tanımlanır. k değeri artık dizinin bir fonksiyonu şeklinde seçilir. k değerini seçmek için tavsiye edilen bir kaç formül aşağıda verilmiştir.

$$k = \frac{i - 3/8}{n + 1/4} \quad (6.10a)$$

$$k = \frac{i - 1/3}{n + 1/3} \quad (6.10b)$$

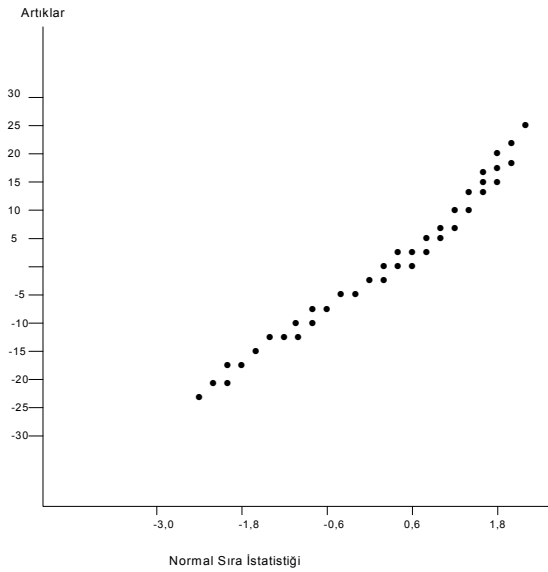
Eşitliklerde i , artığın dizindeki yerini belirten sıra sayısı, n ise örnek hacmini belirtmektedir. Eşitlik [\(6.10a\)](#), $n \geq 5$ için çok iyi bir yaklaşım sağlamakta olup Minitab programında, eşitlik [\(6.10b\)](#) ise BMDP programında kullanılmaktadır.

Gözlenmiş ve küçükten büyüğe düzenlenmiş artıkların normal sıra istatistiklerine karşı plot edilmesi normal plotları verir. Eğer artıklar normal dağılımdan alınan bir örneği temsil ediyorsa normal plotun beklenen sonucu, orijinden geçen ve eğimi artıkların standart sapmasına bağlı olan düz bir doğru şeklinde olmasıdır, (bkz. [Şekil 6.3a](#)). Örnek sıra istatistiklerinin örnekleme değişkenliğine bağlı olarak düz doğrudan rassal bazı sapmalar olabilecektir. Bu sapmaların miktarlarını değerlendirme kriterlerine de ihtiyaç vardır. Daniel ve Wood (1980) normal dağılımından alınan örneklerin normal olasılık plotlarındaki değişkenlik miktarını açıklamışlardır. Örneklemedeki değişkenlik nedeniyle, normal dağılımdan farklılık büyük olmadıkça, küçük örnekler için normal olasılık plotları fazla bilgilendirici olmayabilir.

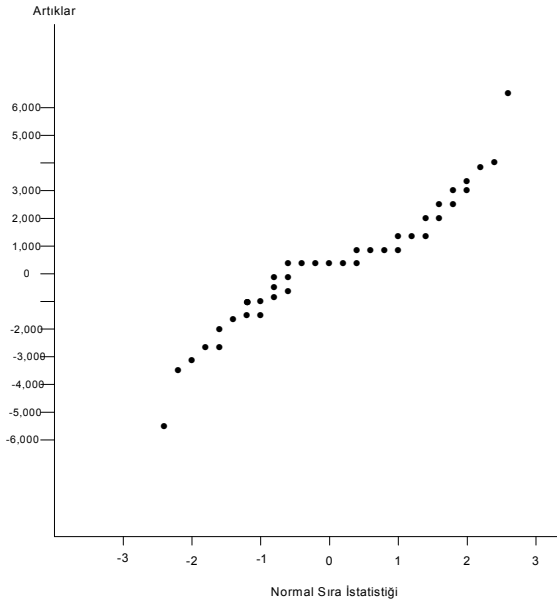
Bir normal plotta beklenen düz doğrudan ayrılıklar normal dağılımdan farklılığı belirtir. Bir çarpık dağılım, normal plotun bir eğri şeklinde oluşmasına neden olur. Bu eğrinin yönü çarpıklığın yönüne bağlıdır. S-şeklindeki bir eğri, eğrinin yönüne bağlı kalın veya ince kuyruklu bir dağılımı belirtir, (bkz. [Şekil 6.3b](#)). Kalın kuyruklu dağılımlar, normal dağılıma göre daha fazla ekstrem gözlemlere sahiptir. İnce kuyruklu dağılımlar ise daha az ekstrem gözlem içerir. Bu arada dikkat edilmesi gereken bir konu da, modelde mevcut bazı kusurlarında normal dağılıştan farklılık etkisine benzer durumlar gösterebileceğidir. Örneğin, farklı varyanslılık veya sapan artıklar ince kuyruklu bir dağılım görüntüsü verebilir.

Karşılaşılan bir başka soru da iyi bir yaklaşım için yeterli örnek hacminin ne olması gerektiğidir. Gerekli örnek hacmi büyüklüğü parametre sayısına p ve izdüşüm matrisine \mathbf{H} bağlıdır. Bağımsız değişken sayısına göre alınması gereken örnek miktarı ile ilgili simülasyon çalışmaları White ve Mac Donald (1980) ile Pierce ve Gray (1982) tarafından gerçekleştirilmiştir.

Artıklar aynı değerde fakat farklı işaretlere sahip ise yarı normal plot tekniğinin kullanılması daha uygundur. Bu durumda sıralama $|y_1|, |y_2|, \dots, |y_n|$, için yine z_1, z_2, \dots, z_n , şeklinde yapılır (bkz. Sparks 1970).



Şekil 6.3a Normal Dağılıma Uyum Gösteren Artıkların Normal Olasılık Plotu



Şekil 6.3b *İnce Uçlu Bir Dağılımı Temsil Eden Normal Olasılık Plotu. S-Eğrisi Verilerdeki Farklı Varyanslılıktan Kaynaklanmaktadır.*

Bir veri setinin normal dağılıma sahip olmadığını test etmek için kullanılan pek çok test mevcuttur ve iyi bilinmektedirler. Bu nedenle konu ile ilgili testler burada tanıtılmayacaktır.

6.4 ZAMAN ETKİSİ SABİT OLMAYAN VARYANS TRANSFORMASYON GEREKSİNİMİ VE EĞRİSELLİK İÇİN KONTROLLER

Zaman etkisi, sabit olmayan varyans, transformasyon ihtiyacı ya da modelin eğriselliğinin kontrolü amacıyla kullanılabilecek artık grafikleri,

- Artıkların uyumu yapılmış değerlere karşı grafikleri
- Artıkların bağımsız değişkene göre grafikleri, (regresyondaki her bir bağımsız değişken için ayrı ayrı)
- Verilerin zaman sırasına göre grafikleri, (eğer zaman sırası biliniyor ise).

Yukarıda belirtilen grafiklerin tümünde artıkler dikey ekseninde yer alır. Artıkların uyumu yapılmış değerlere ya da **X** matrisinin elemanlarına karşı oluşturulan grafikleri tam ortogonaldir. Bu grafikler doğrusalsızlığı ve sabit olmayan hata varyansını teşhis etmek amacıyla oldukça yaygın olarak kullanılmaktadırlar. Basit regresyonda artıklerin uyumu yapılmış değerlere karşı plotu, modelin uyumu ile ilgili bilgiyi, gözlemlerin zamana göre ya da küçükten büyüğe sıralanmasına gerek kalmadan sağlar. Bu grafiklerin tümünde karşılaşılabilecek dört temel grafik yapısı [Şekil 6.4](#) de gösterilmiş ve özet yorumları [Tablo 6.2](#) de açıklanmıştır.

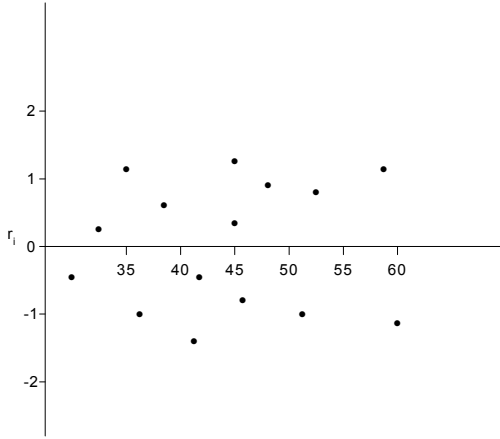
Eğer Bölüm 2 de tanımlanan varsayımlar doğru ise $e=0$ doğrusunun çevresinde dağılan artıklerin yaklaşık olarak $e=\pm 2$ sınırlarının içinde olması beklenir, ([Şekil 6.4a](#)).

Sıfır etrafındaki artıklerin giderek genişleyen bir yapı göstermesi farklı varyanslılığın belirtisidir. Bu tip bir yapı [Şekil 6.4b](#)'de gösterilmiştir. Eğer bağımlı değişken bir poisson, binom ya da log-normal dağılım gösteriyor ise (daha genel olarak varyansı ortalamasının bir fonksiyonu $\sigma^2=f(\mu)$ ise) bu tip

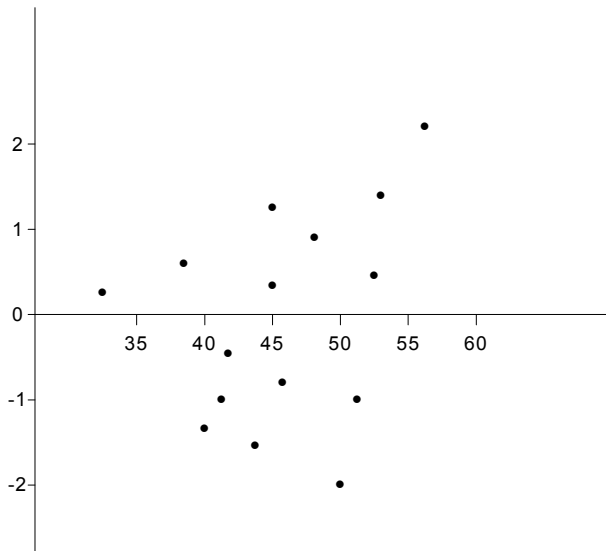
durumlarla karşılaştırılması beklenir. Ayrıca hatalar eklenebilir değilse (örneğin çarpımsal ise), [Şekil 6.4b](#)'de gösterilen durumla karşılaştırılabilir.

Sıfır çevresindeki artıkların dağılımındaki herhangi bir asimetri modelde ya da temel varsayımlarda bir problem olduğunu belirtir. Örneğin, negatif artıkların değer olarak küçük fakat sayıca fazla, pozitif artıkların değer olarak büyük fakat sayıca daha az olması, simetrik bir dağılışı göstermesi gereken artıkların pozitif yönde çarpık dağılım gösterdiklerinin göstergesidir. Çarpık dağılımın bu tip bir grafik ile teşhis edilmesi, artıkların normal plotu ya da histogramına göre daha basittir.

Grafığın bazı bölgelerinde negatif diğer bölgelerinde ise pozitif artıkların fazla olması verilerdeki sistematik bir hatayı ya da modelde önemli bir değişkenin ihmal edildiğini ya da mevcut değişkenlerden birisinin karesel formunun modele ilave edilmesi gerektiğini belirtir. Bu durum [Şekil 6.4c](#)'de gösterilmiştir. Artıkların büyük bir çoğunluğunun içinde bulunduğu bandın dışında bulunan artık (veya artıklar) *sapan gözlem* olarak nitelendirilir.

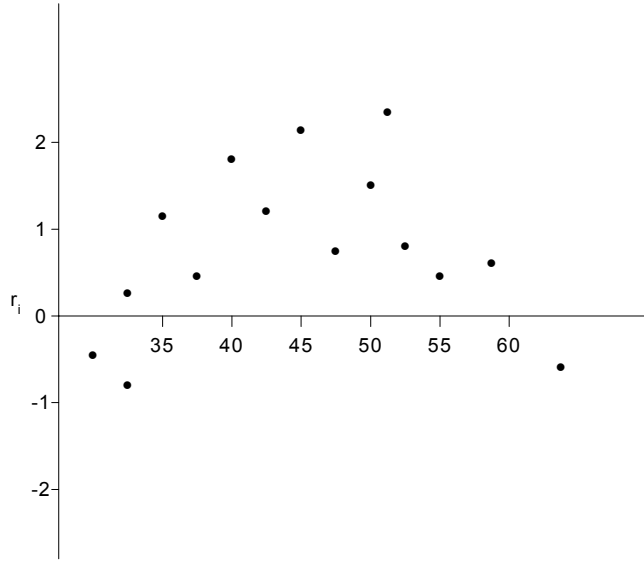


Şekil 6.4a Varsayımların karşılandığı Durumlar İçin y_i 'ye Karşı e 'nin Plotu

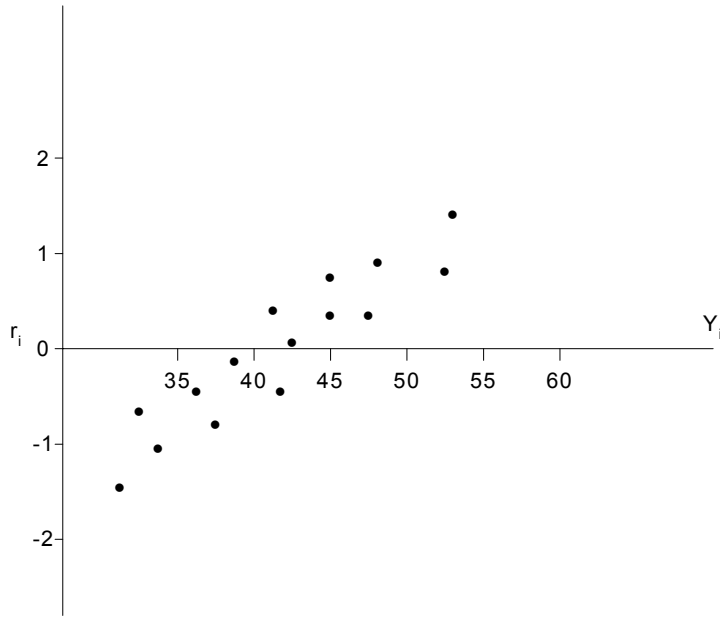


Şekil 6.4b Farklı Varyanslılığın Mevcut Olduğu Durumlar İçin y_i 'ye Karşı e 'nin Plotu

Artıkların grafiklerinde karşılaşılabilecek diğer bir durum da [Şekil 6.4d](#)'de gösterilmiştir. Artıklar yükselen veya aşağıya inen bir düz bant şeklinde görüntü çizebilirler. Bu tip durumlarla genellikle sabit terimin modelde bulunmaması (unutulması) halinde karşılaşılır.



Şekil 6.4c \hat{y}_i 'e Karşı Plot Edilen Artıklar İçin Eğrisel (Asimetrik) Bir Örnek



Şekil 6.4d Sabit Terimi Unutulan Bir Model İçin Plot Örneği

[Şekil 6.4](#) ile verilen plotların incelenmesi sezgisel olarak yapılmaktadır. Bu grafiksel gösterimler için geliştirilen istatistikler, grafik gösterimlerini sayısal ifadelerle dönüştürmektedir. Örnek olarak \hat{y}_i kestirim değerine karşılık e_i artıklarının grafiği ele alınsın. [Şekil 6.4](#) için geliştirilen istatistiklerin genel tanımı,

$$T_{pq} = \sum_{i=1}^n e_i^p \hat{y}_i^q \quad (6.11a)$$

özdeşliği ile verilebilir. [Şekil 6.4b](#)'deki durumun sayısal ölçümü,

$$T_{21} = \sum_{i=1}^n e_i^2 \hat{y}_i \quad (6.11b)$$

[Şekil 6.4c](#)'deki durumun sayısal ölçümü,

$$T_{12} = \sum_{i=1}^n e_i \hat{y}_i^2 \quad (6.11c)$$

ve [Şekil 6.4d](#)'deki durumun sayısal ölçümü,

$$T_{11} = \sum_{i=1}^n e_i \hat{y}_i \quad (6.11d)$$

eşitlikleri ile hesaplanabilir. Eşitlik [\(6.11d\)](#) nin sonucunun sıfır olması beklenir, (Draper ve Smith, 1981).

Tablo 6.2 Uygunsuzluk belirten grafikler için mümkün çözüm yöntemleri

Şekil 6.4	Zaman sırası	\hat{y}_i grafiği	x_j garfiği
(b) Maske yapısı	AEKK kullan	AEKK kullan ya da y_i için transformasyon	AEKK kullan ya da y_i için transformasyon
(c) Eğrisel bant	Zamanın birinci ve ikinci dereceden terimini modele ekle	Modele karesel ya da çarpaz çarpan terimlerini ya da yeni bir değişkeni al ya da y_i için transformasyon	Modele karesel ya da çarpaz çarpan terimlerini ya da yeni bir değişkeni al ya da y_i için transformasyon
(d) Artan ya da azalan bant	Zamanın birinci dereceden terimini modele ekle	Analizde hata var ya da β_0 terimini modele al	Analizde hata var ya da x_j nin birinci dereceden terimini modele al

Artıkların y_i değerleri yerine, \hat{y}_i değerlerine karşı plotlarının kullanılmasının nedeni e ve \hat{y} vektörlerinin ortogonal, başka bir değişle aralarındaki kovaryansın dolayısı ile korelasyonun sıfır olmasıdır. Oysa e ve y vektörleri arasındaki kovaryans ve buna bağlı olarak da korelasyon değeri sıfırdan farklıdır, bkz [Aıştırma 6.1](#).

Artıkların uyumu yapılmış değerlere karşı grafiği eğimi -1 olan bir düz doğruyu tanımlar bu özellik genellikle açık olmamakla birlikte daima mevcuttur. Örneğin aynı $y=a$ değerine sahip m adet nokta olsun. Artıkların bu veri seti için grafiği,

$$\begin{array}{cccc} a - \hat{y}_1 & a - \hat{y}_2 & \dots & a - \hat{y}_m \\ \hat{y}_1 & \hat{y}_2 & \dots & \hat{y}_m \end{array}$$

nokta çiftleri kullanılarak gerçekleştirilir. Bu m adet noktanın hepsi; $(\hat{y}, e) = (a, 0) = (0, a)$ noktalarından geçen ve eğimi -1 olan bir düz doğru üzerindedir. Eğer \hat{y} lerin ortalaması \bar{y} ise EKK kullanılarak bu doğrunun eğimi,

$$\frac{S_{e\tilde{y}}}{S_{\tilde{y}\tilde{y}}} = \frac{\sum [a - \hat{y}_i - (a - \tilde{y})](\hat{y}_i - \tilde{y})}{\sum (\hat{y}_i - \tilde{y})^2} = -1$$

ve kesişim terimi,

$$(a - \hat{y}_i) - (-1)\tilde{y} = a$$

bulunur. Sınırlı sayıda gözlemin bulunduğu veri setlerinde bu özellik oldukça açık bir şekilde görülebilir. Daha önce belirtildiği gibi bu özellik daima mevcuttur. Tekrarlı gözlemlerin olmadığı durumlarda her bir doğru üzerinde sadece bir nokta bulunur. Bu doğruların oluşmasının kurulan modelin yapısı ile bir ilgisi yoktur. Doğrusal, doğrusal olmayan ya da genelleştirilmiş doğrusal model tahminleme yöntemleri kullanılsa da ortaya çıkar.

Daha önce belirtildiği gibi hatalardan farklı olarak artıklar arasında bağımlılık mevcuttur. Bu bağımlılık grafikleri etkiler fakat pek çok durum için onları geçersiz hale getirmez. Anscombe ve Tukey (1963) iki yönlü varyans analizini incelerken, korelasyonların ve artıklar üzerinde oluşturulan kısıtların, artıkların fonksiyonlarının dağılımını etkilediğini fakat grafiksel yaklaşımlar üzerinde bu etkinin ihmal edilebileceğini belirtmişlerdir. Sonuç olarak genel regresyon durumları için de hazırlanan grafikler üzerinde artıkların korelasyonunun etkisinin önemsiz olduğu kabul edilebilir. Bu kabul için istisna bir durum $(n-p)/n$ değerinin çok küçük olmasıdır.

6.4.1 Farklı Varyanslılık

Farklı varyanslı hatalara sahip model için, her bir hata teriminin normal dağıldığı, varyanslarının ise σ_i^2 olup sabit olmadığı kabul edilir. Matris gösteriminde farklı varyanslılık, $V(\epsilon) = V\sigma^2$ ile ifade edilir. Farklı varyanslılığın mevcut olduğu durumda sıradan EKK tahminleme yöntemi büyük varyansa sahip gözlemlere daha fazla ağırlık verir. Çünkü bu yöntemde hata kareler toplamı minimize edilmek istenmektedir. Bu gizli ağırlıklandırma nedeniyle sıradan EKK tahminleyicileri hala sapmasız ve tutarlı olmakla birlikte,

$$\mathbf{b} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T (\mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon})$$

$$E(\mathbf{b}) = \boldsymbol{\beta} + E(\boldsymbol{\epsilon}) = \boldsymbol{\beta}$$

etkin (yani minimum varyanslı),

$$V(\mathbf{b}) = V[(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y}] = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T V(\mathbf{y}) \mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}$$

$$V(\mathbf{b}) = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{V} \mathbf{X} (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \sigma^2 \quad (6.12)$$

değildirler. Sıradan EKK için tahminleyici,

$$V(\mathbf{b}) = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \sigma^2$$

idi. Görüldüğü gibi iki tahminleyici birbirinden farklıdır ve sıradan EKK tahminleyicisi sapmalıdır.

Diğer bir deyişle parametre tahminlerinin varyansları, parametre tahminlerinin gerçek varyansının sapmalı bir tahminleyicisidir. Parametre tahminlerinin varyansları sapmasız olsa bile etkin

olmayacaktır. Bu durumda, EKK ile elde edilen varyanslar alternatif bir doğrusal sapmasız tahminciye ait varyansın daha büyük olacaktır.

6.4.2 Farklı Varyanslılık İçin Testler

Farklı varyanslılık testlerinde amaç

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \dots = \sigma_n^2 \quad (6.13)$$

şeklinde tanımlanan bir boş hipotezin testini gerçekleştirmektir. Alternatif hipotez ise, farklı varyanslılığı gidermek için kullanılan tahminleme prosedürüne bağlıdır. Farklı varyanslılığın testi için:

- Goldfeld-Quandt testi
- Breusch-Pagan testi
- White testi
- Bartlett testi

kullanılabilecek testlerdir.

Goldfeld-Quandt Testi: Alternatif hipotezi $H_0 : \sigma_i^2 = c x_{ij}^2$ şeklinde olup bağımsız değişkenlerden birinin büyüklüklerini dikkate alarak gözlemleri sıralar ve iki regresyon doğrusu hesaplar. Genellikle ortadaki d adet gözlemi ihmal eder(burada d yaklaşık $n/2$ 'dir.) eğer her bir regresyon doğrusuna ait varyanslar yaklaşık olarak eşit ise eşit varyanslılık varsayımı ret edilemez.

Burada F -testini uygulamak için hataların normal dağıldığı ve otokorelasyonun olmadığı varsayılır. Gerçekleştirilen F -testi için serbestlik dereceleri hem pay hem de payda için $[(n-d)/2]-p$ şeklindedir.

Bu testin zayıf noktası, uygulanan her iki regresyondaki parametreler ile ilgili kısıtlamaların yapılmamasıdır. Daha kuvvetli (2. Tip hatası daha küçük) bir test ise, her iki veri kümesi için parametrelerin eşit olduğu bilgisini kullanan sadece hata terimlerinin değiştiğini varsayan bir testtir.

Bu test bağımsız değişken yerine sadece y gözlemleri büyüklük sırasına dikkat edilerek de gerçekleştirilebilir.

Breusch-Pagan Testi: Bir bağımsız değişken seti \mathbf{Z} ile gerçek hata varyansı arasında bir ilişki $\sigma^2 = f(\mathbf{Z}\boldsymbol{\delta})$ olduğunu varsayarak $\mathbf{y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ modelini ele alır. Burada \mathbf{Z} açıklayıcı değişken matrisi olup içindeki değişkenler \mathbf{X} matrisinden farklı olabilir.

Farklı varyanslılığı test etmek için ilk olarak genel modelin EKK tahminleri ve e_i değerleri elde edilir.

Bu artıklar,

$$s^2 = \frac{\sum e_i^2}{n}$$

değerini tahminlemek için kullanılır ve daha sonra,

$$a_i = \frac{e_i^2}{s^2}$$

bulunarak,

$$\mathbf{a} = \mathbf{Z}\boldsymbol{\delta} + \mathbf{v}$$

modeline regresyon uygulanır. Eğer orijinal modelin hataları normal dağılmış ve farklı varyanslılık yok ise yukarıdaki modelin regresyon kareler ortalaması,

$$\frac{KT(R)}{2} \sim \chi_k^2$$

sabit varyanslılık boş hipotezi için uygun bir test istatistiği tanımlar. Burada k , \mathbf{Z} matrisindeki açıklayıcı değişken sayısıdır. Regresyon kareler toplamı değerinin artması \mathbf{Z} 'deki değişkenlerle hata varyansı arasında yüksek ilişki olduğu diğer bir deyişle farklı varyanslılığın ortaya çıktığını belirtir.

Eğer \mathbf{Z} tek bir değişkenden oluşuyorsa farklı varyanslılığı düzeltmek için \mathbf{Z} 'deki değişken x_i olarak kullanılır ve AEKK kullanılır. Bununla birlikte z birden fazla açıklayıcı değişken içeriyorsa bu genel yapı kullanılarak bir düzeltme yapılmaz.

White Testi: Breusch-Pagan testi normal dağılış varsayımına bağımlıdır. White testi, Breusch-Pagan testi ile ilişkili olup normal dağılıma bağımlı değildir. Artıkları değil artıkların karesini modeller.

$$e_i^2 = \mathbf{z}_i^T \boldsymbol{\delta} + v_i$$

Bu modelin R^2 değeri hesaplanır. White testi eşit varyanslılık üzerine oluşturulmuş olup bu durum geçerli ise, $nR^2 \sim \chi_k^2$ k serbestlik dereceli ki-kare dağılır. Burada k , \mathbf{Z} matrisindeki değişken sayısıdır.

Her iki test için de önemli nokta, \mathbf{Z} matrisindeki değişkenlerin seçilmesidir. White bir z değişkeninin farklı varyanslılığı oluşturduğundan şüphelenilmesi durumunda \mathbf{Z} matrisinde hem z değişkeninin hem de eğriselliğin araştırılması için z^2 'nin bulunmasını, z_1 ve z_2 gibi iki değişkenden şüphelenildiğinde z_1^2 , z_2^2 ve $z_1 z_2$ nin matrise alınmasını tavsiye etmiştir.

6.5 OTOKORELASYON İÇİN KONTROLLER

Zaman sırası dikkatle alınarak belirli periyotlarda alınan gözlemler genelde otokorelasyonlu artıklara sahip olabilirler. Bu tür gözlemlerin artıkları önceki artıkların polinomları olarak ifade edilebilir. Bazı sürekli proseslerin izlenmesi ile elde edilen zaman serisi verilerine ait artıkların (dizisel) korelasyonlu oldukları kabul edilebilir. Zaman serisi modelleri ve analizleri bu otokorelasyonları dikkate almaktadır. Otokorelasyon, artıkların birbirini takip edecek şekilde sıfır etrafında sistematik yapı oluşturmasıdır. Bir araştırmadaki verilerin kayıt edilmesi birkaç gün alabilecektir. Bunun sonucu olarak da bu tip durumların tamamında zaman deneysel gözlemler üzerinde etkili olabilecektir.

Zaman etkisi artıkların [Şekil 6.5](#)'de gösterilen tipte bir eğilim göstermesine neden olabilecektir. Burada zaman kavramı, deneylerin uygulandığı, ya da ölçümlerin alındığı gözlem sıralamasını tanımlamaktadır.

Şüphesiz hataların ilişkili olabileceği farklı yapılar mevcuttur. Bununla birlikte en sık karşılaşılan durum dizisel korelasyondur. Dizisel korelasyonda hatalar arasında her s adımda aynı davranış yapısı ile karşılaşılır. Dizisel korelasyon için kullanılan gösterim genellikle ρ_s şeklindedir.

Otokorelasyon EKK tahminleyicilerinin sapmasızlık ve tutarlılığını etkilemez, etkinliğini (minimum varyanslılığını) etkiler. Pozitif otokorelasyon durumunda bu etkinlik kaybı, EKK ile elde edilen

standart hataların tahminleri gerçek standart hata değerinden küçük olmaları nedeniyle maskelenecektir.

6.5.1 İşaret Testi

Otokorelasyonun belirlenmesi için en çok kullanılan yöntemlerden biri işaret (run) testidir. Bu test birbirini takip eden pozitif ve negatif artıklardaki dizin sayısını dikkate almaktadır. Daha sonra bu dizin sayısı, artıkların birbirinden bağımsız olduğu sıfır hipotezi altında ortaya çıkması beklenen dizin sayısı ile karşılaştırılır. [Şekil 6.5](#)'de verilen r_i değerleri zamana göre sıralandığında pozitif ve negatif artıklar, ++--- +++ -----++, şeklinde sıralanacaktır. Toplam 16 gözlemde $n_1=7$ adet pozitif $n_2=9$ adet negatif artık mevcut olup dizin sayısı $u=5$ 'tir. Draper ve Smith (1981), $n_1+n_2 \leq 20$ için (n_1, n_2) örnek hacmindeki dizin sayısının kümülatif olasılığını vermiştir. Bu örnekte $(n_1, n_2)=(7, 9)$ için $u \leq 5$ olma olasılığı 0,035 olarak verilmiştir. Dizin sayısının beş ve beşten küçük olma olasılığının bu kadar küçük olması, artıkların birbirinden bağımsız oldukları varsayımını istatistiksel olarak önemli ölçüde geçersiz bırakmaktadır. Daha az dizin sayısı pozitif otokorelasyondan ileri gelebilirken artıklardaki çok sayıdaki dizin sayısı negatif otokorelasyonun bir göstergesi olabilir. Eğer n_1 ve n_2 gözlem sayıları 10'dan fazla ise dizin dağılımı için normal dağılışa yaklaşım kullanılabilir. Dağılım ortalaması,

$$\mu = \frac{2n_1n_2}{n_1 + n_2} \quad (6.14a)$$

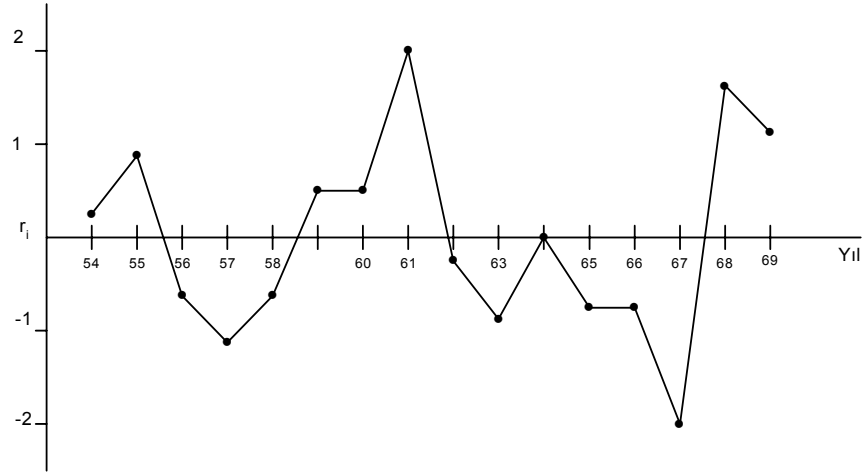
varyansı,

$$\sigma^2 = \frac{2n_1n_2(2n_1n_2 - n_1 - n_2)}{(n_1 + n_2)^2(n_1 + n_2 - 1)} \quad (6.14b)$$

ve standart normal sapması,

$$z = \frac{(u - \mu + 1/2)}{\sigma} \quad (6.14c)$$

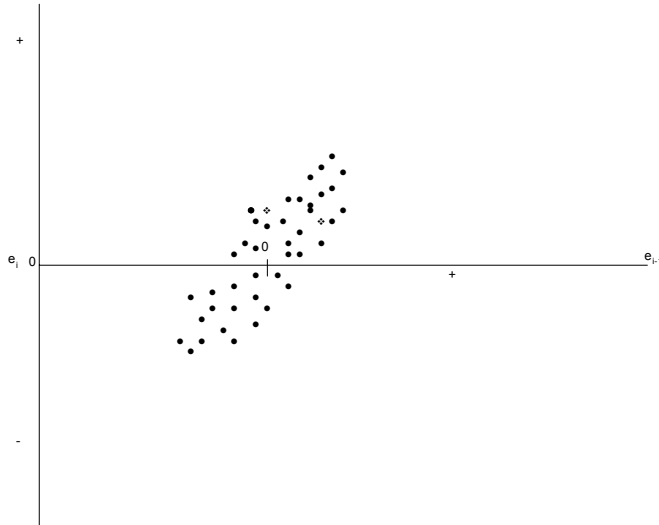
eşitlikleri ile elde edilebilir. Eşitlik (6.14c)'deki (1/2) değeri süreklilik için düzeltme faktörü olarak kullanılmaktadır. Verilen örnekte n_1 ve n_2 değerleri 10'dan küçüktür. Buna rağmen normal dağılım yaklaşımı kullanıldığında $\mu=8.875$ elde edilir. Bunun sonucunda $z=-1.78$ bulunur. z 'nin -1.78 'den küçük olma olasılığı 0,0375'dir. Bu değer Draper ve Smith (1981)'in verdiği 0,035 değerine çok yakındır.



Şekil 6.5 r_i 'lerin zamana karşı plotu

6.5.2 Artıkların Bir Gecikmeli Plotu

Zaman serisi verilerindeki otokorelasyon, her bir artığın kendinden bir önceki artığa karşı plotu oluşturarak daha açık bir şekilde ortaya çıkabilir. Verilerdeki bir pozitif otokorelasyon, [Şekil 6.6](#)'da olduğu gibi pozitif eğimli bir noktalar seti oluşturur.



Şekil 6.6 Ardışık artıklar arasındaki pozitif otokorelasyonu gösteren, e_{i-1} 'e karşı e_i plotu

Karşılaşılabilecek diğer durumlar olan negatif korelasyon ve sıfır korelasyon [Şekil 2.6](#) da gösterilmiştir.

6.5.3 Durbin-Watson Testi

Artıklarda mevcut olan otokorelasyon Durbin-Watson testi ile de belirlenebilir. Durbin-Watson test istatistiği,

$$d = \frac{\sum_{i=2}^n (e_i - e_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^n e_i^2} \quad (6.15)$$

eşitliği ile verilir. Test istatistiği d küçüldükçe pozitif otokorelasyon ρ artacaktır. Tek taraflı Durbin-Watson testinin artıkların birbirinden bağımsız olduğunu belirten boş hipotezi ve alternatif hipotezi;

$$H_0: \rho=0$$

$$H_1: \rho>0$$

iki kritik değeri d_v ve d_L kullanır. Bu değerler n , p ve α 'nın seçimine bağlıdır. Durbin-Watson test istatistiği için kritik değerler Draper ve Smith (1981)'de verilmiştir. Eğer $d < d_L$ ise test prosedürüne göre sıfır hipotez reddedilecektir. Buna karşın $d > d_v$ olması durumunda sıfır hipotez reddedilmeyecektir. Eğer test istatistiği iki kritik değer arasında $d_L < d < d_v$ ise herhangi bir karar verilmez, bu bölge kararsızlık bölgesidir. Negatif otokorelasyon için tek taraflı testin alternatif hipotezi $H_a: \rho < 0$ şeklinde olup, karar için yine aynı kritik değerler d_v ve d_L kullanılır. Fakat karar bölgeleri $4-d_v$ ve $4-d_L$ olarak oluşturularak, kararlar pozitif otokorelasyondakine benzer şekilde verilir. Durbin-Watson testi kullanılırken anlamlı bir sonuç elde edilmesi için verilerin zamana göre düzenlenmesi (eğer zaman serisi verisi değilse) gereklidir. Zaman serisi verileri ise zamana göre düzenlenmelidir.

Durbin-Watson testinin alternatif hipotezi,

$$\varepsilon_i = \rho \varepsilon_{i-1} + z_i \quad (6.16)$$

İlişisini tanımlar. Burada $z_i \sim N(0; \sigma^2)$ olup ε_i lerden bağımsızdır. Ayrıca ε_i ler $N[0; \sigma^2/(1-\rho^2)]$ şeklinde sabit ortalama ve varyansa sahiptirler. Eğer H_0 doğru ise $\varepsilon_i \sim N(0; \sigma^2)$ olacaktır.

Artıkların ve modelin daha ileri analiz teknikleri [Bölüm 11](#) de açıklanacaktır.