Filtre de Kalman

AnotherBrain

November 18, 2019

1 Définition

Le filtre de Kalman est un filtre à réponse impulsionnelle infinie qui estime les états d'un système dynamique à partir d'une série de mesures incomplètes ou bruitées.

Le filtre de Kalman en contexte discret est un estimateur récursif. Cela signifie que pour estimer l'état courant, seules l'estimation de l'état précédent et les mesures actuelles sont nécessaires. L'historique des observations et des estimations n'est ainsi pas requis.

Il se définit à l'aide de deux équations:

$$x(t+1) = F.x(t) + b(t)$$

$$z(t) = H.x(t) + r(t)$$

Avec:

- $x(t)$ est appelé vecteur d'état, c'est l'inconnue que l'on veut estimer.
- $z(t)$ est appelé vecteur observations, ce sont les mesures que l'on possède.
- F est la matrice d'évolution de notre modèle, connue.
- H est la matrice d'observation de notre modèle, connue.
- $b(t)$ et $r(t)$ sont des réalisations de bruits blancs gaussiens.
- . est une multiplication matricielle.

Pour mettre en place un filtre de Kalman, il faut connaitre l'évolution de notre vecteur d'état et sont modèle d'observation. La résolution du filtre se fait à l'aide de 7 équations. Les deux premières forment la prédiction:

$$x_{k|k-1} = F.x_{k-1|k-1}$$

$$P_{k|k-1} = F.P_{k-1|k-1}.F^t + B$$

Avec:

- $x_{k|k-1}$ est la prédiction de $x(k)$ à l'itération k
- B est la matrice de covariance du bruit du modèle
- $P_{k|k-1}$ est la matrice d'estimation à priori de la covariance de l'erreur

Et les cinqs autres sont une mise à jour de l'estimation à priori avec l'observation à l'instant k:

$$y_k = z_k - H.x_{k|k-1}$$

$$S_k = H.P_{k|k-1}H^t + R$$

$$K_k = P_{k|k-1}.H^t.S_k^{-1}$$

$$x_{k|k} = x_{k|k-1} + K_k.y_k$$

$$Pk|k = (I_n - K_k.H).P_{k|k-1}$$

Avec:

- z_k est la mesure à l'instant k
- $P_{k|k}$ est la matrice d'estimation à posteriori de la covariance de l'erreur
- R est la matrice de covariance du bruit d'observation
- I_n est une matrice identit de rang n

Et l'on prend souvent comme initialisation:

$$x_{0|0} = (0)_n$$

$$P_{0|0} = 1000 * I_n$$

2 Exemple

Prenons un point immobile sur un axe. Un capteur nous donne une estimation bruité de sa position. Nous voulons estimer sa position relle. Si nous notons sa position p_0, on peut alors dfinir notre modèle de Kalman comme:

$$x(t) = p_0$$

$$z(t) = x(t) + r(t)$$

On initialise ensuite le filtre avec:

$$x_{0|0} = 0$$

$$P_{0|0} = 1000$$

$$F = 1$$

$$H = 1$$

$$B = 0$$

$$R = 1000$$

Le bruit du modèle est nul dans cet exemple, et le bruit d'observation est pris grand pour ne pas introduire d'à priori dans le filtre.

Une fois que le filtre aura convergé, $x_{t|t}$ sera une bonne estimation de p_0

3 Problème 1

Un véhicule se déplace à vitesse constante en ligne droite. On dispose d'une approximation de sa position z à chaque instant et on ignore sa vitesse. Estimer sa position et sa vitesse à l'aide du filtre de Kalman.

Les observations sont dans le fichier pb1.csv, et le bruit de observation est moindre en comparaison de la vitesse mais non négligeable.

4 Problème 2

Ce problème est le même que le premier, mais le système traque maintenant plusieurs cibles les unes après les autres.

Sans pré-traiter les données, trouvez les vitesses et positions des cibles en utilisant un seul filtre de Kalman et sans le réinitialiser. Le filtre doit donc tourner sur les données en une seule passe, sans interférence extérieure.

Les observations sont dans le fichier pb2.csv, et le bruit de observation est moindre en comparaison de la vitesse mais non négligeable.