КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Факультет комп'ютерних наук та кібернетики
Кафедра моделювання складних систем

«До захисту допущено»
Завідувач кафедри
Д. І. Черній _________
(підпис)

«___» ____________20__ р.

Дипломна робота

на здобуття ступеня бакалавра

за спеціальністю Прикладна математика

на тему:

ДОСЛІДЖЕННЯ РУХУ ТЕЧІЇ НАВКОЛО НЕРУХОМОЇ ПЕРЕШКОДИ. МОДЕЛЮВАННЯ ПОТЕНЦІАЛУ ТЕЧІЇ ТА РОЗПОДІЛУ ТИСКУ

Виконала студентка 4 курсу
Деренюк Анна Михайлівна __________
(підпис)

Науковий керівник:
доцент, кандидат фіз.-мат. наук
Черній Дмитро Іванович _________
(підпис)

Засвідчую, що в цій дипломній роботі немає запозичень з праць інших авторів без відповідних посилань.

Студент __________
(підпис)

Київ – 2020

РЕФЕРАТ

Обсяг роботи * сторінок, * ілюстрацій, * джерел посилань.

Об'єктом роботи є процес моделювання процесу обтікання течією деякого контуру за допопмогою програмного комплексу. Предметом роботи є програмний комплекс для розв'язування задач пов'язаних з цим процесом.

Метою роботи є розробка навчального програмного комплексу який дозволить досить точно відносно реальних процесів змоделювати процес обтікання контуру течією.

Методи розробки: комп'ютерне моделювання, методи обчислення, розробка програмного продукту на основі математичної моделі.

Використані інструменти: безкоштовне інтегроване середовище розробки, яке вільно поширюється, Visual Studio Code з розширенням для мови програмування Python, використані бібліотеки: matplotlib, numpy та система контролю версій – Git для коректного редагування коду програми.

Результати роботи: виконано огляд двох підходів, які дозволяють розв'язувати задачі аерогідродинаміки, розроблено програмний комплекс, який дозволяє наочно демонструвати обтікання тіла течією, обчислювати значення таких величин, як швидкість течії в точці, тиск та потенціал.

Створений програмний комплекс може застосовуватися в навчальному процесі під час вивчення фізичних процесів пов'язаних з обтіканням тіла рідиною або під час дослідження таких процесів.

ВСТУП

Зміст

1 ОПИС ПРОЦЕСУ

Процес відбувається на площині. Розглядаємо деяку деяку перешкоду, яка має фіксований контур. Також він є непроникним. Течія є розривною, циркуляційною та потенційною.

2 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Маємо перешкоду, контур якої нагадує літеру «Л» (рисунок1). Необхідно змоделювати зображення значень тиску на площині, ліній течії та потенціалу.

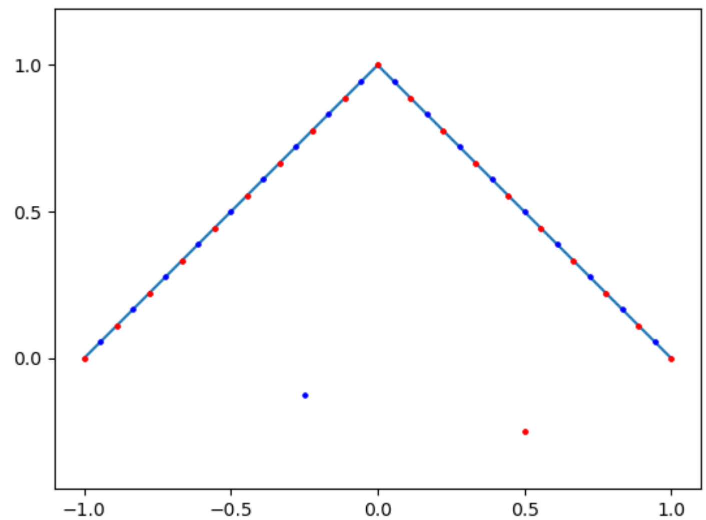

Рисунок 1 - Заданий контур

3 МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ

Оскільки течія потенційна, – існує потенціал:

$$\exists\phi = \phi(\mathrm{x}, \mathrm{y})$$

Швидкість течії в кожній точці поля позначимо так:

$$\bar{V}(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$$

Також для швидкості течії та потенціалу є співвідношення:

$$\nabla\phi = \bar{V}$$

Так, швидкість та потенціал задовольняють таким граничним умовам:

1. $\Delta\phi = 0$ для усіх точок, окрім границь

2. $\left.\frac{\partial\phi}{\partial n}\right|_{L_d} = 0$ – на контурі швидкість рівна нулю

3. $\lim\limits_{|R-R_L|\to\infty} \nabla\phi = \overline{V_\infty}$ - маємо деяке значення швидкості в нескінченно віддаленій від контура точці

4. $\oint \bar{V} d\bar{r} = \Gamma_0$

Функція, що задає лінії течії, та потенціал пов'язані умовами Коші-Рімана:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\phi}{\partial \mathrm{x}} = \dfrac{\partial\psi}{\partial \mathrm{y}} \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial \mathrm{y}} = -\dfrac{\partial\psi}{\partial \mathrm{x}} \end{cases}$$

де φ - функція, що задає лінії течії, а Ф – потенціал.

Для розв'язку поставленої задачі будемо використовувати аналітичні функції:

$$\mathbb{C}: z = x + iy$$

$$\Phi(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$$

Розв'язок будемо розглядати для $|\partial\Phi| < \infty$ на $L(t)$.

4 ДИСКРЕТНА МОДЕЛЬ

4.1 Метод дискретних особливостей

4.1.1 Основні положення

Цей метод простий, алгоритмічний, а тому і широко застосовується в аерогідродинамічних задачах. Він базується на заміні неперервного вихрового шару, який моделює поверхню тіла, його дискретним аналогом. При цьому, інтегральне рівняння, яке відповідає даній крайові задачі, виконується в скінченій кількості контрольних точок. Так, ми можемо звести його до системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно інтенсивності дискретних вихорів.

Точність методу залежить від кількості дискретних вихорів (особливостей) і вибором розміщення вихорів та контрольних точок (точок коалокації).

Поле швидкостец, що індукується вихорами, розраховуєтсья за законом Біо-Савара. Цей закон говорить наступне: в точці M_0, яка знаходиться на відстані $\bar{r}$ від елемента вихрової лінії $d\bar{s}$, цей елемент індукує таку швидкість:

$$d\bar{V} = \frac{\Gamma}{4\pi}\frac{d\bar{s} \times \bar{r}}{r^3}$$

де Γ – інтенсивність вихрової лінії.

Отримане поле швидкостей у всьому просторі задовольняє умову нерозривності, не враховуючи самі дискретні вихори.

На нескінченно віддаленій відстані від вихорів швидкості затухають

4.1.2 Чисельний алгоритм

Розіб'ємо наш контур точками дискретних вихорів (дискретних особливостей): їх буде M

$$M_j = (x_j, y_j),\ \text{j}= \overline{1, M}$$

Між кожними двома вихорами розташуємо точку колокації:

$$(x_k, y_k)$$

$$\begin{cases} x_k = \dfrac{x_{k+1,0} + x_{k,0}}{2} \\ y_k = \dfrac{y_{k+1,0} + y_{k,0}}{2} \end{cases}$$

де $k = \overline{1, M-1}$

Далі будуємо вектор $\overline{\tau_k}$:

$$\overline{\tau_k} = \left(\frac{x_{k+1} - x_k}{\sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2}}, \frac{y_{k+1} - y_k}{\sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2}}\right)$$

За його допомогою будуємо нормалі в кожній точці колокацій (рисунок 2):

$$\bar{n}_k = \bar{n}_k(x_k, y_k) = \overline{\tau_k}(-y_k, x_k)$$

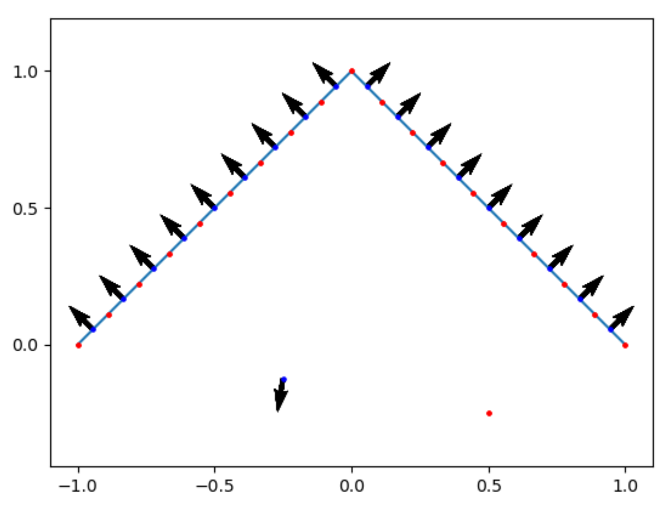

Рисунок 2 – Нормалі в точках колокацій

Потенціал шукається у такому вигляді:

$$\phi(x,y) = (x,y)\cdot\overline{V_\infty} + \sum_{j=0}^{n}\Gamma_j\phi_j\left(x,y,x_{0j},y_{0j}\right)$$

Відповідні функції у цій формулі визначаються таким чином:

$$\phi(x,y) = (x,y)\overline{V_\infty} + \sum_{j=0}^{n}\frac{\Gamma_j}{2\pi}\operatorname{arctg}\left(\frac{y-y_{0j}}{x-x_{0j}}\right)$$

Далі введемо такі функції:

$$u_j(x,y) = \frac{y_{0j}-y}{(x-\ x_j)^2+(y-y_j)^2}$$

$$v_j(x,y) = \frac{x-\ x_{0j}}{(x-\ x_j)^2+(y-y_j)^2}$$

Оскільки маємо співвідношення

$$\nabla\phi = \bar{V}\ \ => \nabla\phi_j = \bar{V}_j,$$

То для швидкості справедливі формули

$$\bar{V}_j\left(x,y,x_{0j},y_{0j}\right) = \frac{1}{2\pi}(u_j(x,y),v_j(x,y))$$

$$\bar{V}(x,y) = \overline{V_\infty} + \sum_{j=0}^{n}\Gamma_j\bar{V}_j\left(x,y,x_{0j},y_{0j}\right)$$

Після того, як ми знайшли швидкість течії в точці, можемо перейти до знаходження значення тиску в цій точці. Для цього маємо наступну формулу:

$$C_p(x,y) = 1 - \frac{V^2(x,y)}{V_\infty^2}$$

Наступний крок – шукаємо лінії течії:

$$\psi(x,y) = ln\left\{\exp\left(u_\infty x - v_\infty y\right)\prod_{j=1}^{M} R_{oj}^{\frac{-\Gamma_j}{2\pi}}\right\}$$

Тут

$$R_0 = \begin{cases}(x-x_j)^2+(y-y_j)^2, (x-x_j)^2+(y-y_j)^2 > \delta_j^2\\ \delta_j^2, \quad (x-x_j)^2+(y-y_j)^2 \le \delta_j^2\end{cases}$$

де δ – дельта-окіл або ж характеристика вихору Ренкінса і обчислюється за наступною формулою:

$$\delta = \frac{1}{2}\sqrt{(x_{j+1}-x_j)^2+(y_{j+1}-y_j)^2}$$

Тоді маємо наступне рівняння для кожної точки колокації:

$$\bar{V}(x_k,y_k)\times\bar{n}(x_k,y_k) = 0$$

де $k = \overline{1, M-1}$

І нарешті маємо систему:

$$\sum_{i=0}^{n-1}\Gamma_i(\bar{V}_i(x_k,y_k)\bar{n}(x_k,y_k) = -(\overline{V_\infty}\bar{n}(x_k,y_k))$$

Тут $M-1$ рівняння та M змінних. Доповнимо систему рівнянь ще одним рівнянням:

$$\Gamma_0 = \sum_{i=0}^{n-1}\Gamma_i = 0$$

Так, наша задача зводиться до роз’вязання наступної системи відносно вектору інтенсивностей Г:

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^{n-1} \Gamma_i(\bar{V}_i(x_k, y_k)\bar{n}(x_k, y_k) = -(\overline{V_\infty}\bar{n}(x_k, y_k)) \\ \Gamma_0 = \sum_{i=0}^{n-1} \Gamma_i = 0 \end{cases}$$

4.2 Метод дипольного представлення

4.2.1 Основні положення

Диполі – це так звані вихрові пари. В методі дискретних вихорів, незалежно від кількості дискретних вихорів, яку ми вибираємо, отримується система розривів значень функції, в більшості в зовнішній від контуру частині. Тому переходять до представлення у вигляді системи диполів та сумарного вихору. Умовно вважається, що лінія розрізу така, що співпадає з контуром перешкоди, формується з умовних розрізів між вихорами кожної пари.

4.2.2 Чисельний алгоритм

Отже, застосуємо дипольний підхід: розмістимо на контурі вихрові пари та пустимо між їх елементами розріз.

Варто зазначити, що інтенсивності кінців кожного із диполів будуть розприділятися таким чином:

$\Gamma_1, -\Gamma_1$ відповідно для першого диполя,

$\Gamma_1 + \Gamma_2, -\Gamma_1 - \Gamma_2$ для другого,

І так далі; тому для j-го будемо мати:

$$\sum_{i=1}^{j} \Gamma_i \,, -\sum_{i=1}^{j} \Gamma_i$$

І для останньої дискретної особливості будемо мати:

$$\sum_{i=1}^{M} \Gamma_i$$

Розглянемо дискретні особливості z_1, z_2. Нехай вони в одній вихровій парі. Тоді матимемо:

$$\Phi(z) = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(z - z_1) - \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(z - z_2)$$

$$\Phi(z) = \frac{\Gamma}{2\pi} (\ln(z - z_1 - z_2 + z_2) - \ln(z - z_1)) \cdot \frac{-z_1 + z_2}{-z_1 + z_2}$$

Позначимо $z^* = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)$

$$\Phi(z) = \frac{\Gamma}{2\pi} (z_2 - z_1) \cdot \frac{1}{z - z^*}$$

Наступним кроком буде виділення уявної та дійсної частини і перехід до апроксимації інтегрального представлення у вигляді системи диполів та сумарного вихору:

$$\Phi(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y)$$

$$\Phi(z) = \bar{V}z + \frac{1}{2\pi i}\int_{L_{ab}} f(w)\ln(z - w)\,dw$$

$$\Phi(z) = \overline{V_\infty}z + \sum_{j=1}^{M-1} \frac{\sum_{k=1}^{j}\Gamma_k}{2\pi i}\left\{\ln\left(z - z_{0j}\right) - \ln\left(z - z_{0j+1}\right)\right\} + \frac{\sum_{k=1}^{M}\Gamma_k}{2\pi i}\ln\left(z - z_{0M}\right)$$

$$\Phi(z) = \overline{V_\infty}z + \sum_{j=1}^{M-1} \frac{\sum_{k=1}^{j}\Gamma_k(z - z_{0j})}{2\pi i(z - z^*{}_{0j})} + \frac{\Gamma_0}{2\pi i}\ln\left(z - z_{0M}\right)$$

Бачимо, що дійсна частина представляється сумою однозначних функцій з особливостями і одним багатозначним арктангенсом, що залежить від точки (x_{0M}, y_{0M}):

$$\begin{aligned}\phi(x, y) = Re\Phi(z) = {} & u_\infty x + v_\infty y \\ & + \sum_{j=1}^{M-1} \frac{\sum_{k=1}^{j}\Gamma_k}{2\pi i} \frac{\left(x - x_{0j}^*\right)\left(y_{0j+1} - y_{0j}\right) - \left(y - y_{0j}^*\right)\left(x_{0j+1} - x_{0j}\right)}{\left(x - x_{0j}^*\right)^2 + \left(y - y_{0j}^*\right)^2} \\ & + \frac{\sum_{k=1}^{M}\Gamma_k}{2\pi i}\,\mathrm{arctg}\,\frac{(y - y_{0M})}{(x - x_{0M})}\end{aligned}$$

Уявна ж частина представлена сумою вихрових пар та логарифму, також в точці (x_{0M}, y_{0M}):

$$
\begin{aligned}
\psi(x,y) = Im\Phi(z) \\
&= -u_\infty x + v_\infty y \\
&+ \sum_{j=1}^{M-1} \frac{\sum_{k=1}^{j} \Gamma_k}{2\pi i} \frac{(x_{0j+1} - x_{0j})\left(x - x_{0j}^*\right) + \left(y_{0j+1} - y_{0j}\right)(y - y_{0j}^*)}{(x - x_{0j}^*)^2 + (y - y_{0j}^*)^2} \\
&- \frac{\sum_{k=1}^{M} \Gamma_k}{2\pi i} \ln((x - x_{0M})^2 + (y - y_{0M})^2\ )^{1\backslash 2}
\end{aligned}
$$

5 РЕЗУЛЬТАТИ МОДЕЛЮВАННЯ

5.1 Моделювання векторного поля швидкостей

Для нашої задачі поле швидкостей матиме такий вигляд (рисунок 3):

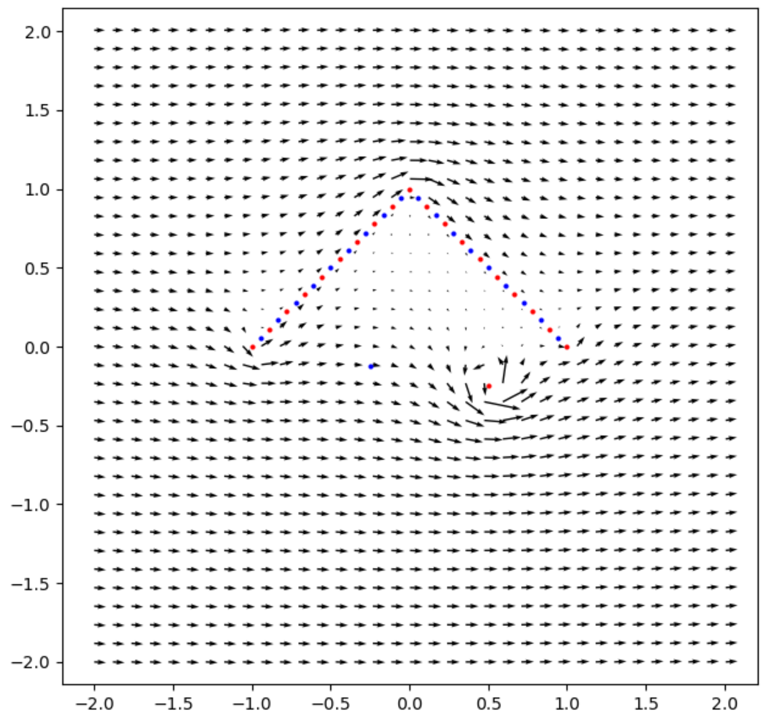

Рисунок 3 - Поле швидкостей для заданого контуру

5.2 Моделювання потенціалу течії

Вихровий підхід при $\Gamma_0 = 1$:

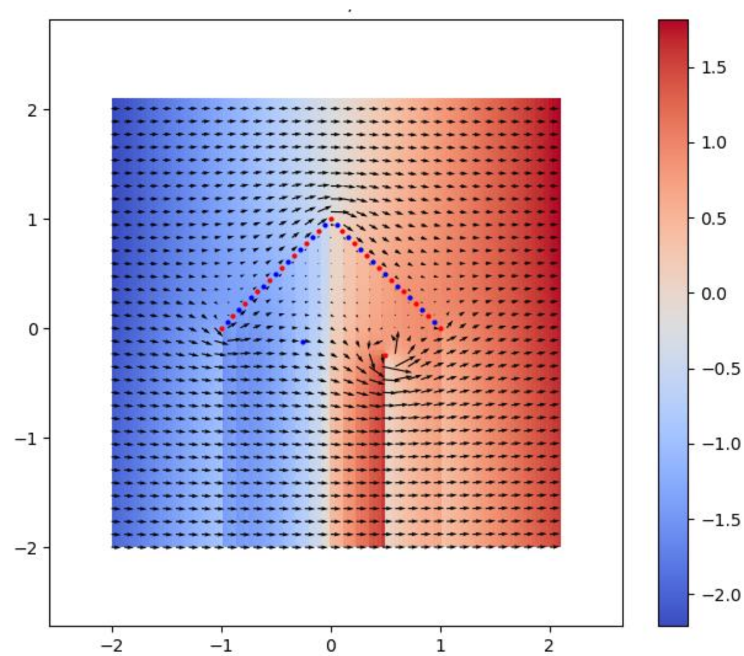

Рисунок 4 - Потенціал за допомогою вихрового підходу

Дипольне представлення при $\Gamma_0 = 1$:

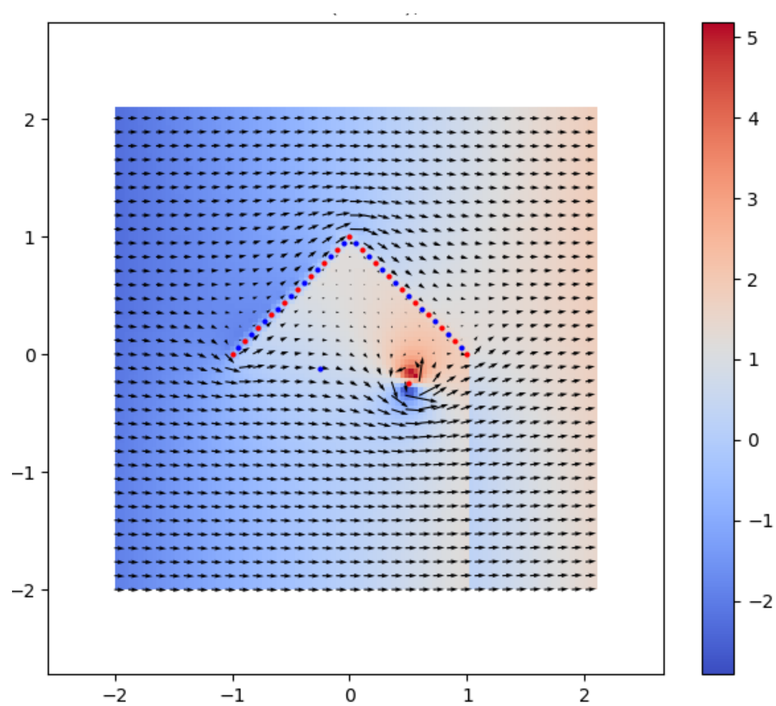

Рисунок 5 - Потенціал за допомогою дипольного підходу

Вихровий підхід при $\Gamma_0 = 5$:

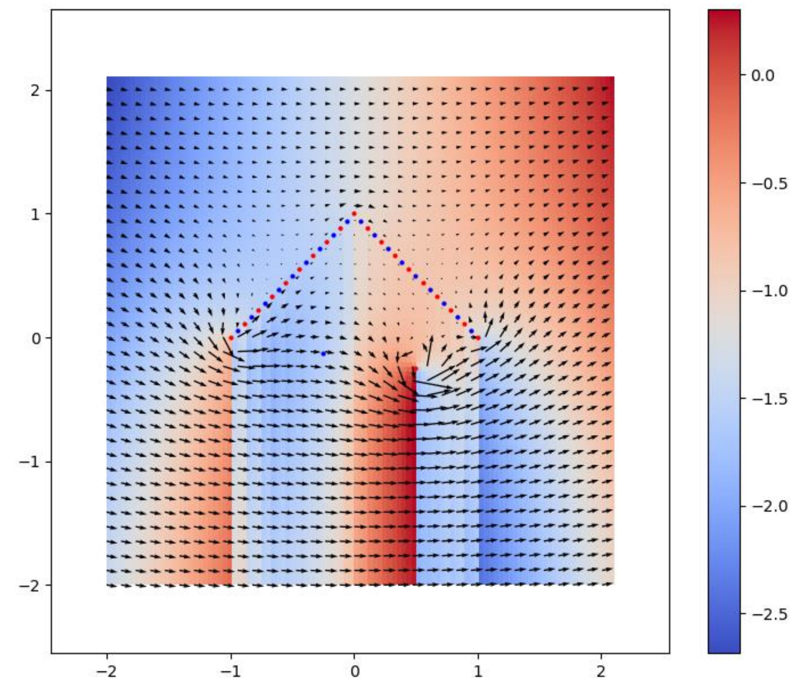

Рисунок 6 - Потенціал за допомогою вихрового підходу

Дипольне представлення при $\Gamma_0 = 5$:

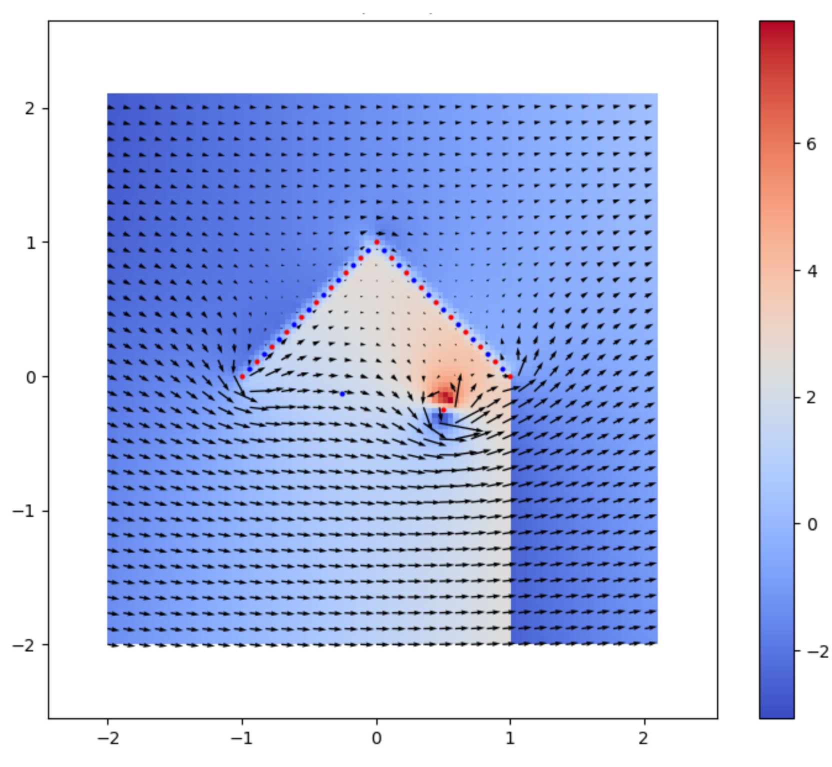

Рисунок 7- Потенціал за допомогою дипольного підходу

5.2 Моделювання ліній течії

$\Gamma_0 = 1$:

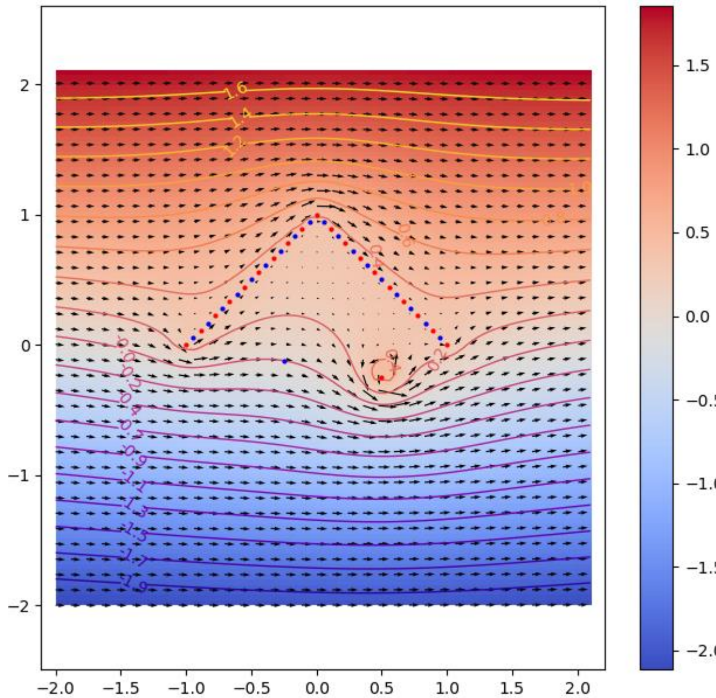

Рисунок 8 - Лінії течії

$\Gamma_0 = 5$:

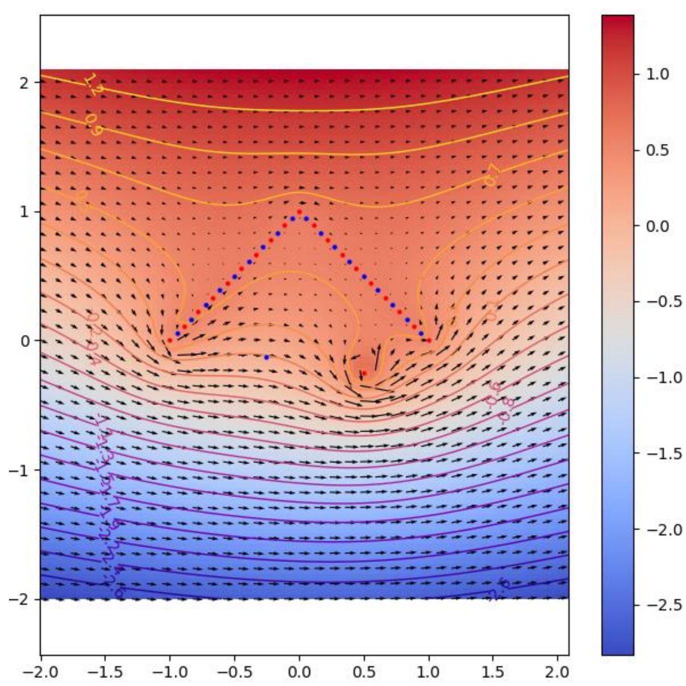

Рисунок 9 - Лінії течії

5.4 Зображення тиску

$\Gamma_0 = 1$:

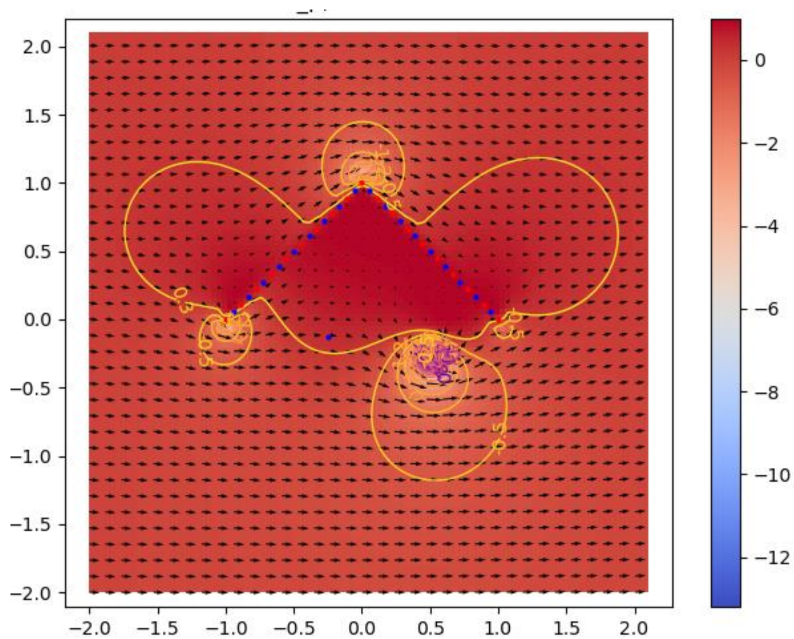

Рисунок 10 - Тиск

$\Gamma_0 = 5$:

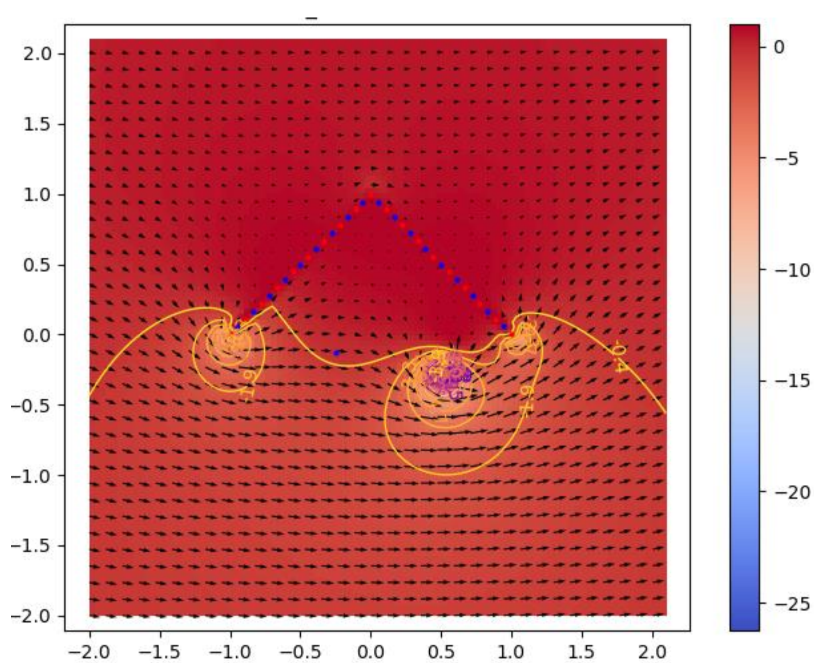

Рисунок 11- Тиск

ВИСНОВОК

ДЖЕРЕЛА