МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Кафедра теории вероятностей и математической статистики

О.Н. Галажинская, С.П. Моисеева

Теория случайных процессов

Часть 1

Учебное пособие

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2015

УДК 519.22
ББК 22.172
Г15

Рецензент ***А.А. Назаров***, д-р техн. наук, проф.

Галажинская О.Н., Моисеева С.П.
Г15 Теория случайных процессов : учеб. пособие. – Томск : Издательский Дом Томского государственного университета, 2015. – Ч. 1. – 128 с.

Пособие предназначено для оказания помощи студентам при выполнении практических заданий в курсе «Теория случайных процессов». Предложены в большом количестве разнообразные задачи с разобранными решениями, а также задачи для самостоятельной работы студентов по каждой из тем. Приводятся все необходимые теоретические сведения из теории случайных процессов. Методическое пособие составлено так, чтобы студент смог выполнить задания без обращения к дополнительной литературе.

Для студентов 3-го курса бакалавриата ФПМК, изучающих курс «Теория вероятностей и случайные процессы».

УДК 519.22
ББК 22.172

Содержание

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

1. Определение и описание случайных процессов. Классификация случайных процессов

Одним из основных понятий теории вероятностей является понятие случайного испытания. Под ***случайным испытанием***, или ***случайным опытом***, понимается любое действие, которое можно повторить большое количество раз в приблизительно одинаковых условиях и результаты которого предсказать невозможно.
Исторически в самом начале теория вероятностей имела дело с такими случайными испытаниями как: подбрасывание кубика, подбрасывание монеты, раскладывание карт и пр. В результате проведения таких опытов появлялись случайные явления (события), наступление или не наступление которых и изучалось. Далее естественным образом появилось понятие случайной величины, которое позволило уже количественно описывать результаты случайных испытаний, например, число очков при подбрасывании кубика, размер выигрыша в казино, рост случайного выбранного человек, число детей в семье и т.д. И наконец, в случайные испытания был введен фактор времени t, т.е. появилась возможность строить и изучать модели, которые описывают динамику развития изучаемого случайного явления. Можно сказать, что случайная величина соответствует случайному явлению как бы в «статике» (в неизменных условиях опыта), а случайный процесс «в динамике» (в изменяющихся условиях опыта).

Наука, которая изучает закономерности случайных явлений в динамике их развития, называется ***теорией случайных процессов.***

Случайным (стохастическим) процессом $\xi(\omega,t)$ называется процесс, значение которого при любом фиксированном значении $t = t_0$ является случайной величиной $\xi(\omega,t_0)$.
Величину $\xi(\omega,t_0)$ называют ***сечением*** случайного процесса.

Так как случайный процесс может иметь бесконечное множество сечений, а в каждом из сечений мы получаем случайную величину, то случайный процесс можно рассматривать как *совокупность случайных величин* $\xi(t)$, или *бесконечномерный случайный вектор*. Т.е. понятие случайного процесса является обобщением такого понятия как *система случайных величин*, в том случае если этих величин бесконечное множество.

Например:

1. Число звонков, поступающих в единицу времени на телефонную станцию, являясь случайной величиной, зависит от времени суток.
2. Численность населения города меняется с течением времени случайным образом под влиянием различных факторов: рождаемость, смертность, миграция и т.д.
3. Расход электроэнергии в единицу времени – тоже функция времени со случайными значениями.
4. Координаты броуновской частицы меняются со временем и принимают случайные значения.
5. Курсы валют или акций меняются со временем и принимают случайные значения.
6. Выручка или прибыль организации случайная величина, изменяющаяся с течением времени.
7. Длина очереди в супермаркете – функция времени со случайными значениями.

Возможно и другое *истолкование случайного процесса*, не только как совокупности (системы) случайных величин, а и как *совокупности его возможных реализаций*.

Реализацией (траекторией) случайного процесса называют *неслучайную функцию* аргумента t, равной которой может оказаться случайный процесс в результате проведенного испытания.

Например, снимается кардиограмма сердца, в результате измерения получаем функцию (электрокардиограмму), которая является лишь одной из всех возможных реализаций случайного сердечного процесса. Если мы повторим измерение, получится уже другая кардиограмма, которая будет другой реализацией случайного процесса. Теоретически мы можем получить бесконечное множество таких реализаций.

Итак, случайный процесс можно рассматривать как *совокупность его возможных реализаций* или как *пучок траекторий.*

Замечание 1: Если в опыте наблюдают случайный процесс, то в действительности наблюдают одну из его возможных реализаций.

Дадим теперь ***строгое математическое определение*** случайного процесса.

Пусть задано вероятностное пространство $\{\Omega, F, P\}$, где Ω – пространство элементарных событий, F – σ-алгебра подмножеств множества Ω (σ-алгебра событий) и P – вероятностная мера, приписывающая каждому событию из F число из отрезка $[0,1]$.

Случайная величина – это функция $\xi = \xi(\omega)$ из Ω в R, которая является измеримой, что означает, что множество $\{\omega: \xi(\omega) \le x\}$ принадлежит σ-алгебре F при любом x, т.е. прообраз любого борелевского множества $\xi^{-1}(B) = \{\omega: \xi(\omega) \in B\}$ принадлежит σ-алгебре F событий.

Рассмотрим теперь функцию, зависящую от двух аргументов: $\xi(\omega, t)$, $\omega \in \Omega$, $t \in T$.

Замечание 2: ***Совокупностью*** значений $t \in T$ может быть:

1. Любой интервал на прямой.
2. Вся прямая R.
3. Множество целых точек $\{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$.
4. Множество целых положительных чисел $\{0, 1, 2, ...\}$.

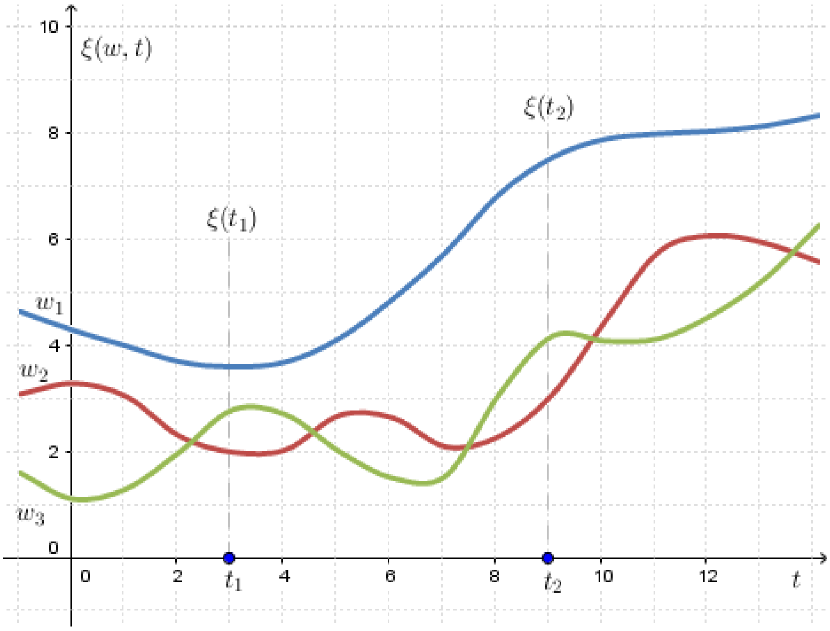
Определение 1. Функцию $\xi(\omega, t)$ называют ***случайным процессом***, если при $\forall t \in T$ она является измеримой функцией аргумента ω, то есть случайной величиной $\xi(\omega, t_\alpha) = \xi(\omega)$.

Зафиксируем некоторое элементарное событие ω_1. Это означает, что опыт, в ходе которого случайный процесс протекает, уже произведен и произошло элементарное событие $\omega_1 \in \Omega$. Случайный процесс уже не случаен, и зависимость его от t примет определенный вид: в результате получим неслучайную (детерминированную) функцию времени – $\xi(\omega_1, t) = \xi(t)$, которую будем называть ***реализацией случайного процесса***. Иногда говорят ***выборочной функцией,*** соответствующей элементарному событию $\omega_1 \in \Omega$.

Совокупность всех реализаций случайного процесса называется ансамблем ***реализаций***.

Можно сказать, что случайный процесс – это однопараметрическое семейство случайных величин $\xi(\omega,t)$, заданных на одном и том же пространстве элементарных событий Ω, зависящих от значений параметра t.

Замечание 3: Часто случайный процесс $\xi(\omega,t)$ обозначается как $\xi(t)$, т.е. зависимость от ω не указывается.



Классификация случайных процессов

Случайные процессы принято классифицировать по разным признакам, учитывая плавность или скачкообразность реализаций, фиксированность или случайность моментов, в которые происходят скачки, вид закона распределения отдельного сечения процесса или совокупности сечений и т.д. Мы рассмотрим ***элементарную классификацию*** случайных процессов *по времени* и *по состояниям*.

1. Случайный процесс $\xi(t)$ называется ***процессом с дискретным временем***, если система, в которой он протекает, может менять свои состояния только в моменты времени $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$, и множество значений t_i конечно или счетно, т.е. $T=\{t_i\}, \overline{i=1,n}$ – *дискретное множество.*

Примеры:

1.а. Будем считать системой какого-либо человека, данная система может находиться в двух состояниях: здоров, болен. Состояние системы можно фиксировать так: в 8.00 утра и в 20.00 вечера. Т.е. смена состояний системы может происходить в дискретные моменты времени $t_1, t_2, \ldots$

1.б. Процесс изменения роста человека, который может менять свои состояния в моменты времени $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$ определяемые, например, днем рождения человека.

2. Случайный процесс $\xi(t)$ называется ***процессом с непрерывным временем***, если переходы системы из состояния в состояние могут происходить в любой момент времени t наблюдаемого периода T, т.е. множество значений $t \in T$ *континуально*.

Примеры:

2.а. Случайный процесс: число покупателей пришедших от момента открытия магазина, до произвольного момента времени t.

2.б. Случайный процесс: число несданных предметов студентом задолжником, в течение года сдающего сессию и закрывающего долги. Состояние системы может измениться в любой произвольный момент времени $t \in T$, где T – время обучения в университете.

3. Случайный процесс $\xi(t)$ называется ***процессом с непрерывным множеством состояний***, если в любом сечении t получаем непрерывную случайную величину, множество значений которой бесконечно и несчетно.

Примеры:

3.а. Случайный процесс: регистрируется температура воздуха на горнолыжном курорте в фиксированные моменты времени. В любом сечении будем получать непрерывную случайную величину.

3.б. Изменение напряжения в сети в момент t.

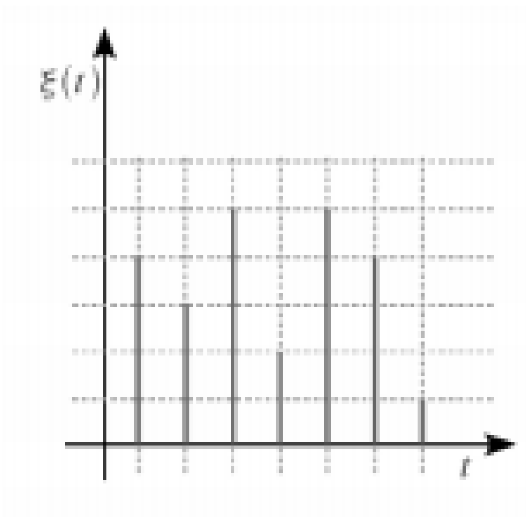
4. Случайный процесс $\xi(t)$ называется ***процессом с дискретным множеством состояний***, если любое его сечение характеризуется дискретной случайной величиной, множество значений которой конечно или бесконечно, но счетно.

Примеры:

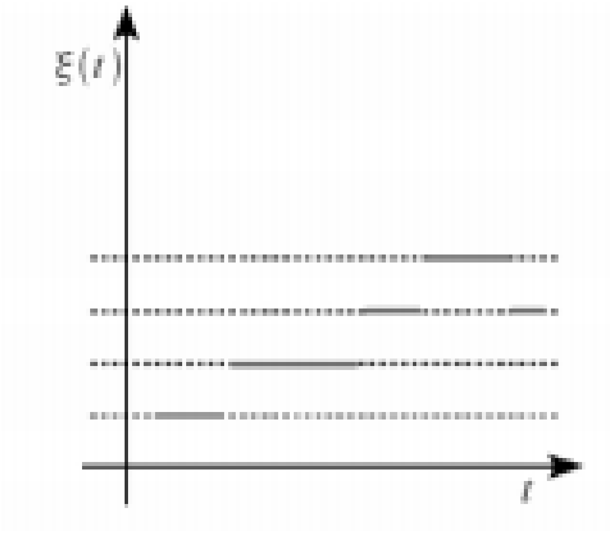
4.а. Случайный процесс: число покупателей пришедших от момента открытия магазина, до произвольного момента времени t. В любом сечении дискретная случайная величина.
4.б. Процесс изменения состояний человека: здоров, не здоров, если считать, что смена состояния человека может произойти в любой произвольный момент времени

Таким образом, в зависимости от природы множества T значений аргумента t, моментов времени, в которые возможны переходы системы из состояния в состояние, а также природы множества самих состояний, все случайные процессы делят на 4 основных класса:

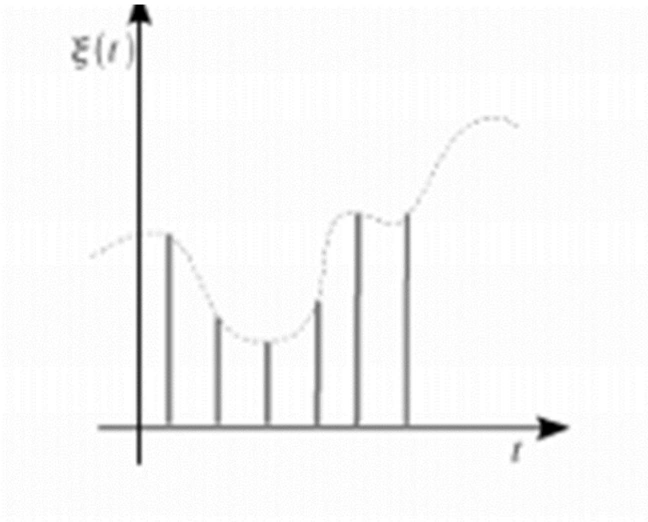
1. ***Процессы с дискретным множеством состояний и дискретным временем*** (пример ***1.а***).



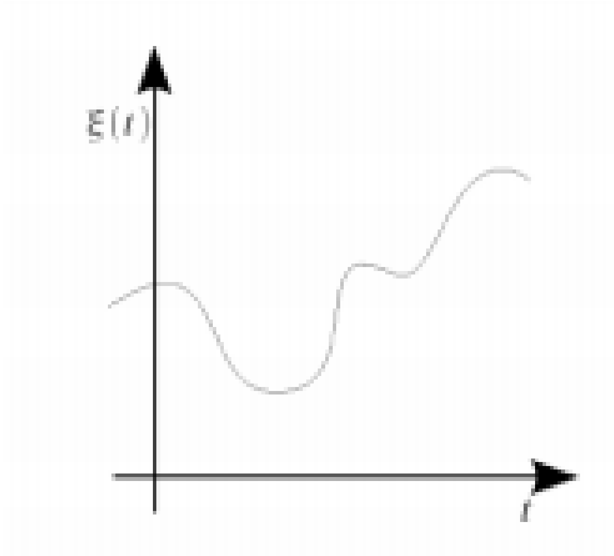
2. ***Процессы с дискретным множеством состояний и непрерывным временем*** (пример ***2.а***).



3. ***Процессы с непрерывным множеством состояний и дискретным временем*** (пример ***3.а***).



4. ***Процессы с непрерывным множеством состояний и непрерывным временем*** (пример ***3.б***).



Пример 1.1. *Пусть случайный процесс задается формулой* $\xi(t) = U \cdot \arcsin(t)$*, где* U *– случайная величина. Найти сечения, соответствующие фиксированным значениям аргумента* t*:* ***а)*** $t = 1$*;* ***б)*** $t = \frac{1}{2}$.

Решение. Сечением случайного процесса $\xi(\omega, t)$ является случайная величина $\xi(\omega, t_0)$, соответствующая фиксированному значению аргумента $t = t_0$, т.е.

a) при $t = 1$ получаем в сечении случайную величину:

$$\xi(\omega, t) = \xi(\omega, 1) = U \cdot \arcsin(1) = \frac{\pi}{2} \cdot U;$$

b) при $t = \frac{1}{2}$ получаем в сечении другую случайную величину:

$$\xi(\omega, t) = \xi(\omega, \frac{1}{2}) = U \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6} U .$$

Пусть, например, $U -$ дискретная случайная величина, заданная рядом распределения:

u_i	1	2
p_i	$1/2$	$1/2$

Тогда обозначим $V = \xi(\omega, 1) = U \cdot \arcsin(1) = \frac{\pi}{2} \cdot U$ – это случайная величина, функционально связанная с U и имеющая следующий закон распределения:

v_i	$\pi/2$	π
p_i	$1/2$	$1/2$

Или положим, что U – непрерывная случайная величина с плотностью вероятности:

$$p_U(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 4 \le x \le 6 \\ 0, & else \end{cases};$$

тогда т.к. $V = \frac{\pi}{2} \cdot U$ – случайная величина, связанная функциональной зависимостью с U, найдем плотность распределения вероятностей V. Пары точек $\left(U, V\right)$ лежат на прямой $y = \frac{\pi}{2} \cdot x = \varphi\left(x\right)$, данная функция монотонна в интервале $\left[4, 6\right]$, поэтому обратная функция, находится однозначно: $x = \frac{2}{\pi} y = \psi\left(y\right)$, тогда плотность случайной величины V можем найти по известной формуле: $p_V(y) = p_U(\psi(y)) \cdot \left|\psi'(y)\right|$, т.к. $\psi'\left(y\right) = \frac{2}{\pi}$, можем записать:

$p_V(y) = \frac{2}{\pi} \cdot p_U(\frac{2}{\pi} \cdot y) = \frac{1}{\pi}$, где $y \in \left[2\pi, 3\pi\right]$. Таким образом, V – непрерывная, равномерно распределенная случайная величина, для которой можем записать окончательно:

$$p_V(y) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, 2\pi \le y \le 3\pi \\ 0, \quad else \end{cases}.$$

Пример 1.2. *Случайный процесс задается формулой* $\xi(\omega, t) = \left(t^2 + 2t + 1\right) \cdot \eta$, *где* $t > 0$ *и* η *– случайная величина, возможные значения которой принадлежат интервалу* $\left[1,3\right]$.
Найти реализации случайного процесса $\xi(\omega, t)$, *полученных при проведении двух испытаний, в которых величина* η *приняла значения: а)* $\eta = 1$; *б)* $\eta = 2$.

Решение. Реализацией является неслучайная функция $\xi(\omega_0, t)$, которая получается при фиксированном значении случайной величины, в нашем случае η, т.е.

а) при $\eta = 1$ получаем такую реализацию: $\xi(1, t) = \left(t^2 + 2t + 1\right)$;

б) при $\eta = 2$ такую: $\xi(2, t) = 2t^2 + 4t + 2$.

Очевидно, что все возможные реализации представляют собой параболы, ветви которых направлены вверх и ось симметрии параллельна оси $O\xi(t)$. Параметр у каждой из парабол разный, поэтому они все будут различаться между собой размерами, точнее размахом ветвей.

Пример 1.3. *Пусть случайный процесс* $\xi(\omega, t) = U \cdot t + 5$, $t \in \left[0,2\right]$, *где* $U \sim R\left[0,1\right]$ *– случайная величина, равномерно распределенная на отрезке* $\left[0,1\right]$. *Описать множество сечений и реализаций случайного процесса* $\xi(\omega, t)$.

Решение:

1. Так как известно, что $U \sim R\left[0,1\right]$, можем записать ее плотность распределения:

$$p_U(\mathrm{x}) = \begin{cases} 1, \quad 0 \le x \le 1 \\ 0, \quad else \end{cases}.$$

Зафиксируем значение параметра $t = t_1 = 1$, получаем в сечении случайную величину $\xi(\omega, 1) = U(\omega) + 5$, найдем закон распределения полученной случайной величины $V = U + 5$.

Пары точек(U,V) лежат на прямой $y = x + 5 = \varphi(x)$, данная функция строго монотонна в интервале $[0,1]$, поэтому обратная функция, находится однозначно: $x = y - 5 = \psi(y)$, тогда плотность случайной величины V можем найти по известной формуле: $p_V(y) = p_U(\psi(y)) \cdot \left|\psi'(y)\right|$, т.к. $\psi'(y) = 1$, можем записать: $p_V(y) = 1 \cdot p_U(y - 5) = 1$, где $y \in [5,6]$.

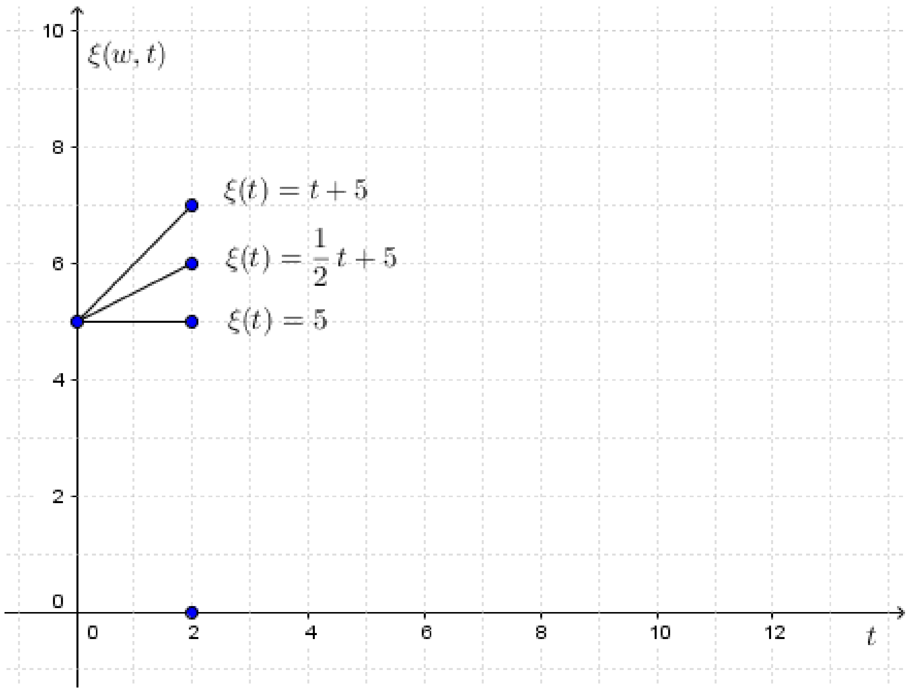
Возьмем другое значение параметра $t = t_2 = 2$, получаем в сечении случайную величину $\xi(\omega, 2) = V = 2 \cdot U + 5$, найдем ее закон распределения. Пары точек(U,V) лежат на прямой $y = 2 \cdot x + 5 = \varphi(x)$, данная функция строго монотонна в интервале $[0,1]$, обратная функция, находится однозначно: $x = \frac{y-5}{2} = \psi(y)$, поэтому плотность случайной величины V также находим по формуле: $p_V(y) = p_U(\psi(y)) \cdot \left|\psi'(y)\right|$, т.к. $\psi'(y) = \frac{1}{2}$, можем записать: $p_V(y) = \frac{1}{2} \cdot p_U(\frac{y-5}{2}) = \frac{1}{2}$, где $y \in [5,7]$.

Зафиксируем значении параметра $t = t_3 = \frac{1}{2}$, получаем в сечении случайную величину $\xi(\omega, \frac{1}{2}) = \frac{U}{2} + 5$, найдем закон распределения полученной случайной величины $V = \frac{U}{2} + 5$.

Пары точек(U,V) лежат на прямой $y = \frac{x}{2} + 5 = \varphi(x)$, функция также строго монотонна в интервале $[0,1]$, обратная функция: $x = 2y - 10 = \psi(y)$, тогда плотность случайной величины V : $p_V(y) = p_U(\psi(y)) \cdot \left|\psi'(y)\right|$, т.к. $\psi'(y) = 2$, можем записать: $p_V(y) = 2 \cdot p_U(2y - 10) = 2$, где $y \in \left[5, 5\frac{1}{2}\right]$.

Таким образом, путем нехитрых рассуждений приходим к выводу, что любая случайная величина, получающаяся в сечении процесса, при фиксации$t \in [0,2]$, будет иметь равномерное распределение в интервале $[5, 5 + t_\alpha]$, $t_\alpha \in [0,2]$. Т.е. преобразование $V = U \cdot t_\alpha + 5$ переводит отрезок $[0,1]$ в отрезок $[5, 5 + t_\alpha]$и $p_V(y) = \begin{cases} \frac{1}{t_\alpha}, & y \in [5, 5 + t_\alpha] \\ 0, & y \notin [5, 5 + t_\alpha] \end{cases}$.

2. Как указывалось выше, реализацией является детерминированная функция $\xi(\omega_0, t)$, которая получается при фиксированном значении случайной величины, в нашем случае U. Реализациями рассматриваемого процесса $\xi(\omega, t) = U \cdot t + 5,\ t \in [0,2]$ будут прямые (уравнение прямой с угловым коэффициентом выглядит так: $y = kx + b$, где k – угловой коэффициент, b – отрезок, отсекаемый прямой от оси Oy). Все реализации выходят из точки, с координатами $(0,5)$, и имеют случайный угловой коэффициент, равный $U(\omega)$. Сверху все реализации будут ограничены прямой $\xi(1,t) = t + 5$, снизу прямой, параллельной оси Ot: $\xi(0,t) = 5$.



Задачи по теме для самостоятельного решения

1. Описать семейство реализаций элементарного случайного процесса $\xi(\omega, t) = t + U,\ t \in [0,2]$, где U – случайная величина, принимающая только положительные значения.

2. Пусть случайный процесс задается формулой $\xi(t) = U \cdot \ln t,\ t \in [1, e^2]$, где U – дискретная случайная величина, принимающая значения 1 и 2 с вероятностью $\frac{1}{2}$. Найти законы распределения случайных величин, соответствующих фиксированным значениям аргумента t: ***а)*** $t = e$; ***б)*** $t = e^2$.

3. Пусть случайный процесс $\xi(\omega,t)=U\cdot t,\ t\in[0,2]$, где $U\sim R[0,2]$ – случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0,2]$. Описать множество сечений и реализаций случайного процесса $\xi(\omega,t)$.

4. Пусть случайный процесс $\xi(\omega,t)=U\cdot t,\ t\in[0,1]$, где U – случайная величина, имеющая экспоненциальное распределение с параметром $\lambda=1$. Описать семейство реализаций случайного процесса $\xi(\omega,t)$. Найти закон распределения случайной величины, соответствующей фиксированному значению аргумента t: ***а)*** $t=e$***; б)*** $t=e^2$.

5. Описать семейство реализаций элементарного случайного процесса $\xi(t)=e^{-t\cdot U}, t>0$, где U – случайная величина, имеющая экспоненциальное распределение с параметром $\lambda=1$. Найти закон распределения случайной величины, соответствующей фиксированному значению аргумента $t=1$.

6. Описать семейство реализаций элементарного случайного процесса $Y(\omega,t)=X(\omega)e^{-\alpha t}$, где X – равномерно распределенная на отрезке $[0,1]$ случайная величина, а α и t – положительные параметры.

7. Описать семейство реализаций элементарного случайного процесса $X(t)=U\cos at+V\sin at$, где (U,V) – система случайных величин, a – неслучайная величина.

8. Случайный процесс $\xi(t)$ формируется так: на оси Ot имеется простейший поток событий с интенсивностью λ. Случайный процесс попеременно принимает значения +1 и –1, при наступлении очередного события в простейшем потоке случайный процесс скачком меняет свое состояние с +1 на –1 или наоборот. Описать семейство реализаций данного случайного процесса.

9. Случайный процесс $\xi(t)$ формируется так: на оси Ot имеется простейший поток событий с интенсивностью λ. В момент наступления *i*-го события случайный процесс принимает случайное значение X_i, сохраняя его до следующего события в потоке. В начальный момент времени $t=0$: $X(0)=X_0$. Описать семейство реализаций данного случайного процесса.

2. Законы распределения случайных процессов

В теории вероятностей обсуждалось, что универсальной и полной характеристикой любой случайной величины является ее функция распределения $F_\xi(x) = P\{\xi<x\}$.

В предыдущем разделе 1 мы обсудили, что при фиксации аргумента t, получаем в сечении случайную величину, которая имеет свой закон распределения.

Рассмотрим сечение $\xi(\omega, t_1)$ случайного процесса $\xi(\omega, t)$ в момент времени t_1.

Определение 1. Функция вида: $F_\xi(x_1, t_1) = P\{\xi(t_1)< x_1\}$ называется ***одномерной функцией распределения случайного процесса.***

Замечание 1: Одномерная функция распределения это вероятность такой реализации случайного процесса, которая в момент времени t_1 принимает значение не превосходящее x_1.

Одномерный закон распределения, конечно, не является полной характеристикой случайного процесса. Одномерная функция распределения характеризует закон распределения каждого (одного) произвольно выбранного сечения случайного процесса, но не учитывает взаимную зависимость между различными сечениями. Поэтому определим двумерный закон распределения, являющийся совместным законом распределения двух случайных величин, полученных при фиксации соответственно двух моментов времени t.

Зафиксируем два произвольных значения t : t_1 и t_2.

Определение 2. Функция вида:

$$F_\xi(x_1, x_2, t_1, t_2) = P\{\xi(t_1) < x_1, \xi(t_2) < x_2\}$$

называется ***двумерной функцией распределения*** случайного процесса.

Двумерная функция распределения дает более полное представление о процессе, чем одномерная, но существо процесса все же не исчерпывает. Увеличивая число сечений, и рассматривая совместное распределение получающихся в сечениях случайных величин, мы все точнее и точнее будем характеризовать процесс.

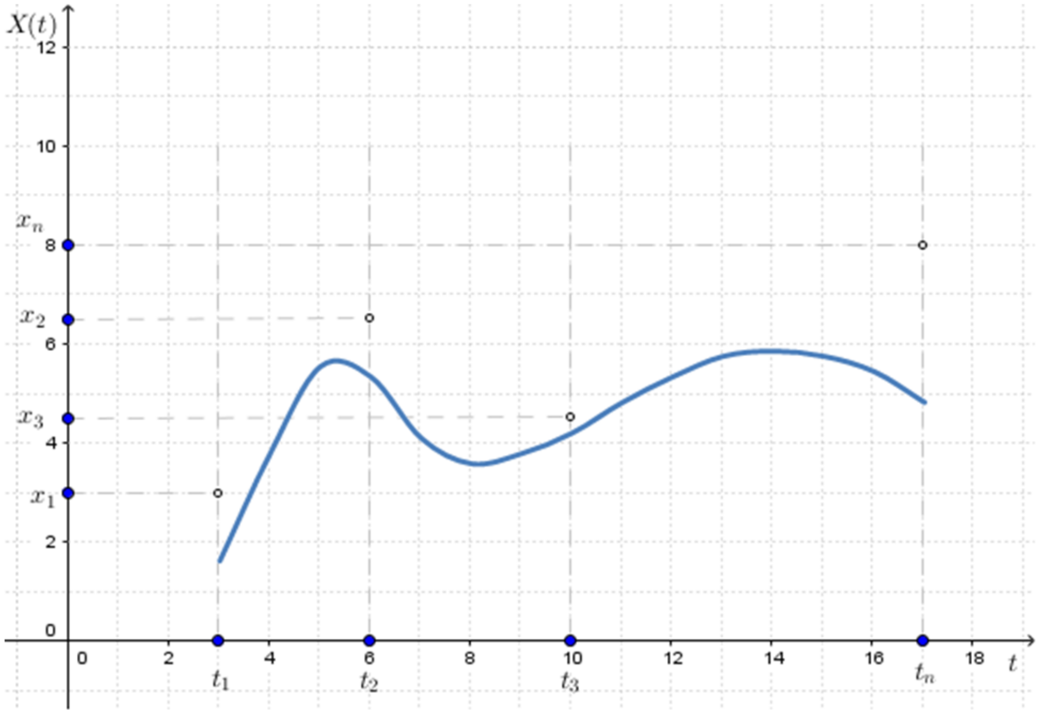
Для n сечений случайного процесса, полученных фиксацией n моментов времени t : $t_1, t_2, ..., t_n$.

Определение 3. Функция вида:

$$F_{\xi}(x_1,...,x_n,\cdots,t_1,....,t_n) = P\{\xi(t_1)<x_1,....,\xi(t_n)<x_n\} \tag{1.1}$$

называется n***-мерной функцией распределения*** случайного процесса $\xi(\omega,t)$.

Замечание 2: n-мерная функция распределения случайного процесса $\xi(\omega,t)$ это вероятность того, что любая из реализаций случайного процесса, в моменты времени $t_1,....,t_n$ принимает значения, которые не превосходят соответственно величин $x_1,...,x_n$.



Будем считать, что случайный процесс $\xi(\omega,t)$ задан, если задано семейство функций распределений (1.1) для $\forall n$.

Замечание 3: В общем случае случайный процесс не может быть полностью определенным, потому что совокупность сечений является несчетной, и поэтому совместный закон распределения всех сечений построить не представляется возможным. Но к счастью очень часто для задач практики достаточно знать конечномерный закон распределения случайного процесса, причем не очень высокого порядка, например, второго. Далее в последующих главах будут более подробно обсуждаться эти вопросы.

Функция $F_{\xi}(x_1,t_1,\cdots,x_n,t_n)$ должна удовлетворять очевидным соотношениям, которые называются ***условиями согласованности***:

$$F_\xi(x_1,t_1,\cdots,x_n,t_n) = F_\xi(x_1,t_1,\cdots,x_n,t_n,\infty,t_{n+1},\cdots,\infty,t_{n+p}), \tag{1.2}$$

$$F_\xi(x_1,t_1,\cdots,x_n,t_n) = F_\xi(x_{i_1},t_{i_1},\cdots,x_{i_n},t_{i_n}), \tag{1.3}$$

где $i_1,i_2,...i_n$ – любая перестановка индексов $1,2,...n$ для $\forall n$.

Сформулируем ещё одно определение случайного процесса.

Определение 4. Случайным процессом $\xi(\omega,t)$, заданным на множестве $T\,(t\in T)$ называется семейство распределений (1.1), удовлетворяющих ***условиям согласованности*** (1.2) и (1.3).

Набор функций $F_\xi(x_1,t_1,...,x_n,t_n)$ для $n=1,2,...$ называют ***конечномерным распределением случайного процесса*** $\xi(\omega,t)$.

Определение 5. Если функция $F_\xi(x_1,t_1,...,x_n,t_n)$ допускает такое представление:

$$F_\xi(x_1,t_1,...,x_n,t_n) = \int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_n} p_\xi(y_1,t_1,...,y_n,t_n)\,dy_1...dy_n;$$

где $p_\xi(y_1,t_1,...,y_n,t_n)$ – некоторая измеримая неотрицательная функция такая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} p_\xi(y_1,t_1,...,y_n,t_n)\;dy_1...dy_n = 1,$$

то $p_\xi(y_1,t_1,...,y_n,t_n)$ называется n***-мерной плотностью распределения случайного процесса*** $\xi(\omega,t)$.

Другими словами: Если существует смешанная частная производная от n-мерной функции распределения случайного процесса:

$$\frac{\partial^n F_\xi(x_1,...x_n,t_1,...,t_n)}{\partial x_1\partial x_2....\partial x_n} = p_\xi(x_1,...x_n,t_1,...,t_n)$$

То она называется n***-мерной плотностью распределения случайного процесса***.

При этом ***условия согласованности*** имеют вид:

$$p_\xi(x_1,t_1,...,x_n,t_n) = \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} p_\xi(y_1,t_1,...,y_n,t_n,y_{n+1},t_{n+1},...,y_{n+p},t_{n+p})\,dy_{n+1}...dy_{n+p},$$

$$p_\xi(x_1,t_1,...,x_n,t_n) = p_\xi(x_{i_1},t_{i_1},...,x_{i_n},t_{i_n}).$$

Замечание 4: ***Условия согласованности***, это по сути ***условия симметрии***, т.е. плотность распределения (равно как и функция распределения) должна быть одной и той же при любом выборе значений аргумента $t_1, t_2, ..., t_n$. Для любой перестановки $i_1, i_2, ... i_n$ из чисел $1, 2, ..., n$ должны выполняться соотношения $p_\xi(x_1, t_1, ..., x_n, t_n) = p_\xi(x_{i_1}, t_{i_1}, ..., x_{i_n}, t_{i_n})$.

Замечание 5: Из курса теории вероятностей известно, что вероятность попадания одномерной случайной величины Y в бесконечно малый интервал Δy пропорциональна произведению одномерной плотности $p_Y(y)$ на величину интервала Δy. Рассмотрим небольшой промежуток $\left[y, y + \Delta y\right]$. Вероятность того, что непрерывная случайная величина Y примет значение из этого промежутка, равна (используя свойство функции распределения):

$$P\left(y \le Y \le y + \Delta y\right) = F(y + \Delta y) - F(y)$$

Рассмотрим отношение этой вероятности к длине промежутка, т.е. среднюю вероятность, приходящуюся на единицу длины. Устремив $\Delta y \to 0$, в пределе получим производную от функции распределения:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{F\left(y + \Delta y\right) - F\left(y\right)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{P\left(y \le Y \le y + \Delta y\right)}{\Delta y} = F'(y) = p(y),$$

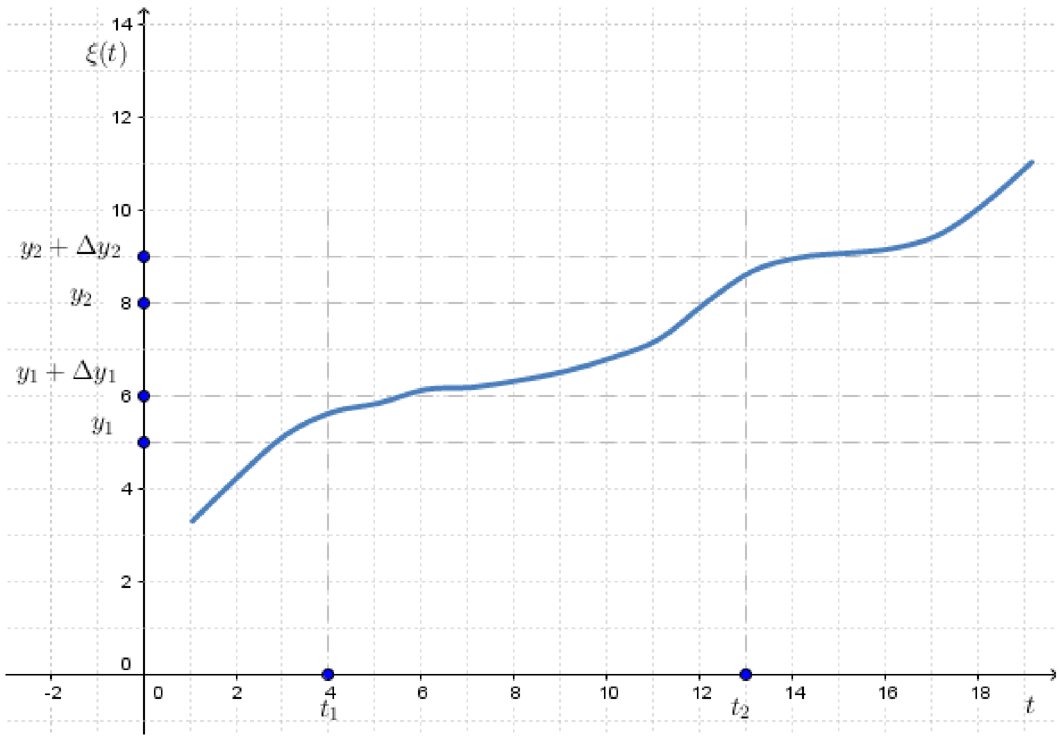
где $p(y) = F'(y)$ функция плотности распределения вероятностей случайной величины.

Отношение $\dfrac{P\left(y \le Y \le y + \Delta y\right)}{\Delta y}$ можно трактовать как количество вероятности, приходящееся на промежуток длиной Δy. А в пределе при $\Delta y \to 0$, как количество вероятности, приходящееся на бесконечно малый промежуток Δy. Используя известную теорему математического анализа, можем из выражения: $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{P\left(y \le Y \le y + \Delta y\right)}{\Delta y} = p_Y(y)$ записать: $\dfrac{P\left(y \le Y \le y + \Delta y\right)}{\Delta y} = p_Y(y) + \beta(y)$, где $\beta(y)$ – бесконечно малая функция, или $P\left(y \le Y \le y + \Delta y\right) \simeq p(y) \cdot \Delta y$.

Давайте разберемся, что описывает совместная ***n-мерная плотность распределения*** $p_\xi(y_1, t_1, ..., y_n, t_n)$ ***случайного процесса*** $\xi(\omega, t)$?

Эта функция пропорциональна вероятности попадания траектории случайного процесса в «малые ворота» Δy_1 около значения y_1 в момент времени t_1, в «малые ворота» Δy_2 около значения y_2 в момент времени t_2, и т.д. в «малые ворота» Δy_n около значения y_n в момент времени t_n, или математически:

$$P\left(y_1 \le \xi(t_1) < y_1 + \Delta y_1, ..., y_n \le \xi(t_n) < y_n + \Delta y_n\right) \simeq p_\xi(y_1, t_1, ..., y_n, t_n) \cdot \Delta y_1 \cdot \Delta y_2 \cdot .... \cdot \Delta y_n$$



В курсе теории вероятностей рассматривались ***характеристические функции***, которые являются удобным способом задания случайных величин. Описание на языке характеристических функций часто является более предпочтительным способом задания для случайных процессов.

Характеристическая функция конечномерного распределения вероятностей случайного процесса определяется также как для многомерных случайных величин:

$$g_\xi(u_1, t_1, ..., u_n, t_n) = M\left\{\exp\left(i\sum_{k=1}^{n}\xi(t_k)u_k\right)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{i\sum_{k=1}^{n}x_k u_k\right\}p_\xi(x_1, t_1, ..., x_n, t_n)\,dx_1...dx_n.$$

При решении многих задач приходится иметь дело с несколькими случайными процессами. Так, например, при изучении погоды приходится совместно рассматривать такие случайные процессы: изменение температуры воздуха, изменение влажности, изменение давления и т.д.

Для задания, например, двух случайных процессов $\xi(\omega,t)$ и $\eta(\omega,t)$ определяется $(n{+}m)$-***мерная функция распределения***:

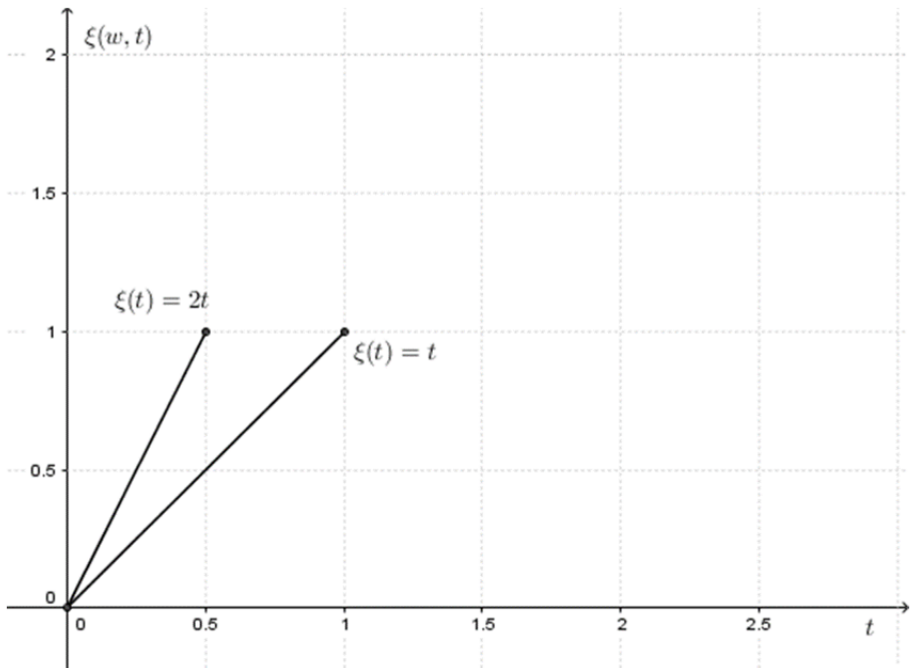
$$F_{\xi\eta}(x_1,t_1,\cdots,x_n,t_n,y_1,t'_1,\cdots,y_m,t'_m)=P\{\xi(t_1)<x_1,\cdots,\xi(t_n)<x_n,\eta(t'_1)<y_1,\cdots,\eta(t'_m)<y_m\}.$$

<u>Замечание 6</u>: $(n{+}m)$-***мерная функция распределения*** двух случайных процессов в общем случае не обладает свойством симметрии относительно всех перестановок аргументов.

Пример 2.1. *Пусть случайный процесс* $\xi(\omega,t)$ *задан на вероятностном пространстве* $\{\Omega,F,P\}$, *где:* $\Omega=\{1,2\}$, F *– множество всех подмножеств множества* Ω, P *приписывает вероятности, равные* $1/2$, *множествам* $\{1\}$ *и* $\{2\}$. *Пусть множество значений параметра* t *есть отрезок* $[0,1]$ *и* $\xi(\omega,t)=\omega\cdot t$. *Найти реализации случайного процесса* $\xi(\omega,t)$ *и его семейство конечномерных распределений.*

Решение.

1. Нам дан случайный процесс $\xi(\omega,t)=\omega\cdot t$, который определен на вероятностном пространстве $\{\Omega,F,P\}$, где $\Omega=\{1,2\}=\{\omega_1,\omega_2\}$. Зафиксируем значения $\omega_1=1$ и $\omega_2=2$. В результате получим реализации случайного процесса $\xi(\omega_1,t)=t$ и $\xi(\omega_2,t)=2t$, которые являются неслучайными функциями параметра t. Таким образом ансамбль реализаций состоит всего из двух прямых, выходящих из нуля.



2. Найдем семейство конечномерных распределений. Согласно определению, сформулированному выше, *n-**мерная функция распределения*** случайного процесса записывается так:

$$F_{\xi}(x_1,x_2,...x_n;t_1,t_2,....,t_n) = P\left\{\xi(t_1)<x_1,....,\xi(t_n)<x_n\right\}.$$

Подставим в выражение для функции распределения вместо $\xi(t_i)<x_i$, $i=\overrightarrow{1,n}$ заданное нам выражение процесса $X(\omega,t)=\omega\cdot t$, получим следующее:

$$F_{\xi}(x_1,x_2,...x_n;t_1,t_2,....,t_n) = P\left\{\omega\cdot t_1<x_1,....,\omega\cdot t_n<x_n\right\} = P\left\{\omega<\frac{x_1}{t_1},....,\omega<\frac{x_n}{t_n}\right\} = P\left\{\omega<\frac{x_i}{t_i}, i=\overrightarrow{1,n}\right\}.$$

$\left\{\omega<\dfrac{x_i}{t_i}\right\}$ – это событие, которое заключается в том, что ω меньше $\dfrac{x_i}{t_i}$, для всех $i=\overrightarrow{1,n}$, это событие эквивалентно событию $\left\{\omega<\min\limits_{i=\overrightarrow{1,n}}\dfrac{x_i}{t_i}\right\}$, поэтому окончательно:

$$F_{\xi}(x_1,x_2,...x_n;t_1,t_2,....,t_n) = P\left\{\omega<\min_{i=\overrightarrow{1,n}}\frac{x_i}{t_i}\right\}.$$

В каждом из сечений $t_i\in[0,1]$ мы имеем дискретную случайную величину, имеющую два значения $\omega_1\cdot t_i$ и $\omega_2\cdot t_i$, которые принимаются с равными вероятностями $\dfrac{1}{2}$.

В теории вероятностей мы записывали функцию распределения одномерной дискретной случайной величины так: $F_{\xi}(x)=P\{\omega:\xi(\omega)<x\}=\sum\limits_{\{k:x_k<x\}}p_k$, где x_k – это возможные значения случайной величины, а p_k – соответствующие им вероятности.

В аналогии можем записать:

$F_{\xi}(x_1,x_2,...x_n;t_1,t_2,....,t_n) = P\left\{\omega<\min\limits_{i=\overrightarrow{1,n}}\dfrac{x_i}{t_i}\right\} = \sum\limits_{\left\{k:\omega_k<\min\limits_{i=\overrightarrow{1,n}}\frac{x_i}{t_i}\right\}}p_k$, т.к. значения ω_k, $k=1,2$, у нас разные, но соответствующие им вероятности обе равны $\dfrac{1}{2}$, то окончательно:

$$F_{\xi}(x_1,x_2,...x_n;t_1,t_2,....,t_n) = P\left\{\omega<\min_{i=\overrightarrow{1,n}}\frac{x_i}{t_i}\right\} = \sum_{\left\{k:\omega_k<\min\limits_{i=\overrightarrow{1,n}}\frac{x_i}{t_i}\right\}}p_k = \sum_{\left\{k:\omega_k<\min\limits_{i=\overrightarrow{1,n}}\frac{x_i}{t_i}\right\}}\frac{1}{2}.$$

Запишем одномерную функцию распределения в привычном развернутом виде. При ее построении рассуждаем так: $F_\xi(x_1,t_1) = P\{\xi(t_1)<x_1\} = P\{\omega \cdot t_1 < x_1\} = P\left\{\omega < \frac{x_1}{t_1}\right\}$. Так как ω принимает всего два значения 1 и 2, то «барьерное значение» x_1/t_1 относительно которого мы будем оценивать вероятность попадания в тот или иной интервал, задаем так: $x_1/t_1 \in (-\infty,1]$, $x_1/t_1 \in (1,2]$, $x_1/t_1 \in (2,\infty)$ или окончательно:

$$F_\xi(x_1,t_1) = \sum_{\left\{k:\omega_k<\frac{x_1}{t_1}\right\}} \frac{1}{2} = \begin{cases} 0, & \frac{x_1}{t_1} \le 1 \\ \frac{1}{2}, & 1 < \frac{x_1}{t_1} \le 2 \\ 1, & \frac{x_1}{t_1} > 2 \end{cases};$$

Двумерная функция распределения будет выглядеть так:

$$F_\xi(x_1,t_1,x_2,t_2) = \sum_{\left\{k:\omega_k<\min\limits_{i=1,2}\frac{x_i}{t_i}\right\}} \frac{1}{2} = \begin{cases} 0, & \min\left(\frac{x_1}{t_1},\frac{x_2}{t_2}\right) \le 1 \\ \frac{1}{2}, & 1 < \min\left(\frac{x_1}{t_1},\frac{x_2}{t_2}\right) \le 2 \\ 1, & \min\left(\frac{x_1}{t_1},\frac{x_2}{t_2}\right) > 2 \end{cases}.$$

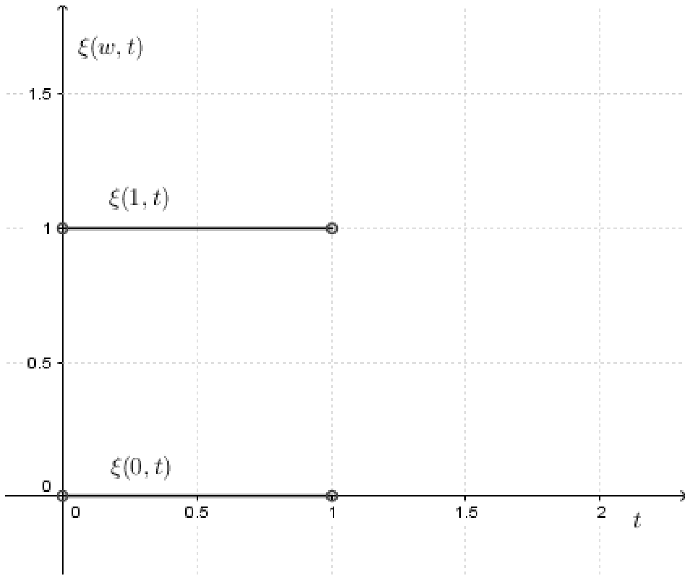
И для n-мерной функции распределения случайного процесса можем окончательно записать:

$$F_\xi(x_1,x_2,\ldots x_n;t_1,t_2,\ldots,t_n) = \sum_{\left\{k:\omega_k<\min\limits_{i=1,n}\frac{x_i}{t_i}\right\}} \frac{1}{2} = \begin{cases} 0, & \min\left(\frac{x_1}{t_1},\frac{x_2}{t_2},\ldots\frac{x_n}{t_n}\right) \le 1 \\ \frac{1}{2}, & 1 < \min\left(\frac{x_1}{t_1},\frac{x_2}{t_2},\ldots\frac{x_n}{t_n}\right) \le 2 \\ 1, & \min\left(\frac{x_1}{t_1},\frac{x_2}{t_2},\ldots\frac{x_n}{t_n}\right) > 2 \end{cases}.$$

Пример 2.2. *Пусть случайный процесс $\xi(\omega,t)$ определен на вероятностном пространстве $\{\Omega,F,P\}$, где $\Omega=\{0,1\}$, $P(\omega_1)=\frac{1}{3}$ и $P(\omega_2)=\frac{2}{3}$. Пусть $t\in(0,1)$ и $\xi(\omega,t)=1$ при $t\le\omega$, $\xi(\omega,t)=0$ при $t>\omega$. Найти реализации случайного процесса $\xi(\omega,t)$ и его семейство конечномерных распределений.*

Решение:

1. Аналогично как и в предыдущей задаче имеем две реализации, в случае если $\omega_1 = 0$, то любое значение параметра $t \in (0,1)$ будет больше ω_1 и в этом случае получаем реализацию $\xi(0,t) = 0$, в случае же если $\omega_2 = 1$, то опять же любое значение параметра $t \in (0,1)$ будет меньше ω и в этом случае получаем реализацию $\xi(1,t) = 1$. Таким образом ансамбль реализаций представляет собой две параллельные (оси Ot) прямые.



2. Найдем семейство конечномерных распределений. Для произвольного n и при $t_1 > 0,\ t_2 > 0, \ldots,\ t_n > 0$ для n***-мерной функции распределения*** случайного процесса можем записать:

$$F_\xi(x_1, x_2, \ldots x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n) = P\left\{\xi(t_1) < x_1, \ldots, \xi(t_n) < x_n\right\} = P\left\{\omega < x_1, \ldots, \omega < x_n\right\} = P\left\{\omega < x_i, \overline{i=1,n}\right\} =$$
$$= P\left\{\omega < \min x_i, \overline{i=1,n}\right\}.$$

И, используя рассмотренную форму записи для функции распределения в предыдущем примере, окончательно:

$$F_\xi(x_1, x_2, \ldots x_n; t_1, t_2, \ldots, t_n) = P\left\{\omega < \min x_i, \overline{i=1,n}\right\} = \sum_{\left\{k:\omega_k < \min\limits_{\overline{i=1,n}} x_i\right\}} p_k$$

В каждом из сечений мы имеем дискретную случайную величину, имеющую два значения $\omega_1 = 0$ и $\omega_2 = 1$, которые имеют соответствующие вероятности $p_1 = \dfrac{1}{3}$ и $p_2 = \dfrac{2}{3}$.

Запишем одномерный закон распределения случайного процесса $\xi(\omega, t)$:

$$F_\xi(x,t)=\sum_{\{k:\omega_k<x\}} p_k=\begin{cases}0, & x\le 0\\ \frac{1}{3}, & 0<x\le 1.\\ 1, & x>1\end{cases}$$

Двумерная функция распределения будет выглядеть так:

$$F_\xi(x_1,t_1,x_2,t_2)=\sum_{\left\{k:\omega_k<\min\limits_{i=1,2} x_i\right\}} p_k=\begin{cases}0, & \min(x_1,x_2)\le 0\\ \frac{1}{3}, & 0<\min(x_1,x_2)\le 1.\\ 1, & \min(x_1,x_2)>1\end{cases}$$

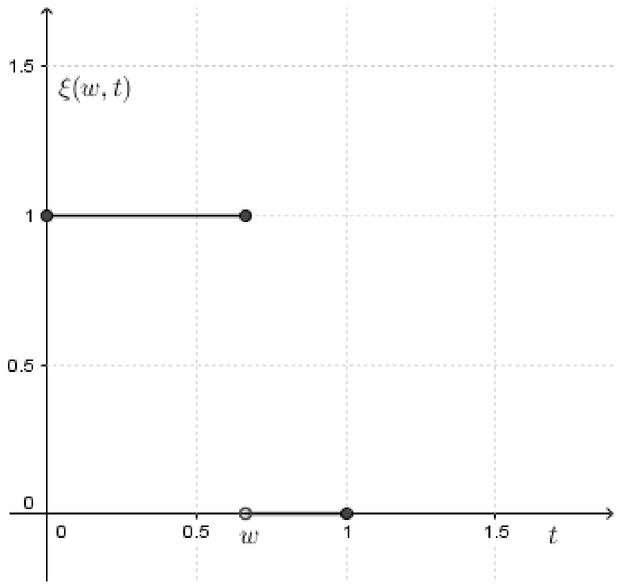
И для n-мерной функции распределения случайного процесса можем окончательно записать:

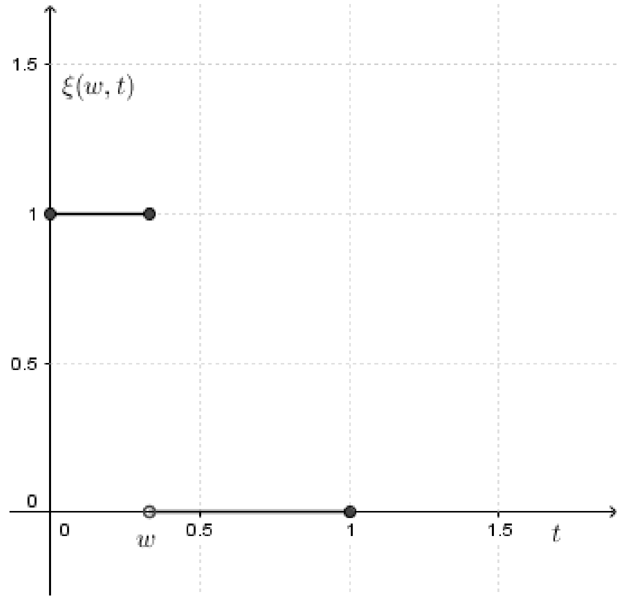
$$F_\xi(x_1,x_2,...x_n;t_1,t_2,....,t_n)=\sum_{\left\{k:\omega_k<\min\limits_{i=1,n} x_i\right\}} p_k=\begin{cases}0, & \min(x_1,x_2,...x_n)\le 0\\ \frac{1}{3}, & 0<\min(x_1,x_2,...x_n)\le 1.\\ 1, & \min\,(x_1,x_2,...x_n)>1\end{cases}$$

Пример 2.3. *Пусть случайный процесс $\xi(\omega,t)$ определен на вероятностном пространстве $\{\Omega,F,P\}$, где $\Omega=[0,1]$, F - σ – алгебра борелевских подмножеств, P – мера Лебега. Пусть $t\in[0,1]$, $\xi(\omega,t)=1$ при $t\le\omega$ и $\xi(\omega,t)=0$ при $t>\omega$. Найти реализации случайного процесса $\xi(\omega,t)$ и его семейство конечномерных распределений.*

Решение:

1. В силу того, что множества возможных значений ω и t лежат в интервале $[0,1]$, то возможные реализации процесса могут иметь следующий вид: реализации представляют собой ступеньки разной длины, но одинаковой высоты равной 1, подошва (под ней понимается собственно 2 нижняя ступенька) находится на оси Ot и тоже имеет разную длину. Например, при $\omega=\frac{1}{2}$, длина верхней ступеньки равна $\frac{1}{2}$, но и длина подошвы равна $\frac{1}{2}$. При $\omega=\frac{1}{3}$, длина верхней ступеньки равна $\frac{1}{3}$, длина подошвы равна $\frac{2}{3}$.





Можно легко представить ансамбль реализаций случайного процесса. При любом фиксированном t в сечении мы получаем дискретную случайную величину, значения которой 0 и 1.

2. Найдем семейство конечномерных распределений. Для произвольного n и при $t_1 > 0, t_2 > 0, ..., t_n > 0$ для n***-мерной функции распределения*** случайного процесса можем записать:

$$F_\xi(x_1, x_2, ...x_n; t_1, t_2, ..., t_n) = P\{\xi(t_1)<x_1, ..., \xi(t_n)<x_n\},$$

Найдем выражение для ***одномерной функции распределения***.

<u>Замечание 7:</u> В силу того, что пространство элементарных исходов $\Omega = [0,1]$, и P – мера Лебега, то вероятность попадания любой точки ω в какой либо интервал находим, используя геометрическое определение вероятности, то есть:

$$P\{\omega \in [0, t_1]\} = \frac{mes[0, t_1]}{mes\ \Omega} = \frac{|t_1 - 0|}{1} = t_1.$$

Нам нужно выражение для одномерной функция распределения. При ее построении рассуждаем так: $F_\xi(x, t_1) = P\,(\xi(t_1) < x)$, а это вероятность того, что любая из реализаций $\xi_i(t)$ случайного процесса, пересечет сечение t ниже уровня x. Положим $x \le 0$, очевидно, что при таком x событие $\xi(t_1) < x$ является невозможным и $P\,(\xi(t_1) < x) = 0$. При $x > 1$, событие $\xi(t_1) < x$ является достоверным, т.е. $P\,(\xi(t_1) < x) = 1$. И, наконец, оценим $P\,(\xi(t_1) < x)$ при

$0 < x \le 1$, представим прямую параллельную оси Ot и зададим себе вопрос: с какой вероятностью любая из реализаций случайного процесса пересечет сечение t_1 ниже такого уровня x. Пересечь сечение t_1, ***<u>строго</u>*** ниже уровня $0<x\le1$, может только эта часть ансамбля реализаций: $\xi\left(\omega,t\right)=0$. То есть ответ такой: $P\,(\xi(t_1) < x) = P\,(\xi(t_1) = 0) = P\,(\omega < t) = \{$ вероятности попадания случайной точки ω в интервал $\left[0,t_1\right)$ $\}$ и согласно сделанному выше замечанию, эта вероятность равна $P\left\{\omega \in \left[0,t_1\right]\right\} = t_1$, таким образом собираем все вместе и окончательно записываем:

$$F_\xi(x,t_1) = P\,(\xi(t_1) < x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ t_1, & 0<x\le1 \\ 1, & x>1 \end{cases}$$

Запишем ***двумерную функцию распределения.***

При построении функции рассуждаем так. Пусть $x_1 < 0, x_2 < 0$, нам нужно найти вероятность того, что и $\xi(t_1) < x_1$, и $\xi(t_2) < x_2$, поскольку каждое из этих событий является невозможным, то и произведение тоже невозможное событие. Поэтому значение функции распределения будет равно 0. Пусть наши $0 < x_1, x_2 \le 1$, нам нужно опять оценить вероятность произведения двух событий: наступили и $\xi(t_1) < x_1$, и $\xi(t_2) < x_2$. Если $t_1 < t_2$, то вероятность произведения $P\left\{\xi(t_1) < x_1, \xi(t_2) < x_2\right\}$ равна t_1, потому что равна вероятности попадания в меньший интервал (из двух), а его мера Лебега равна t_1. При $t_2 < t_1$, вероятность произведения равна t_2. Обобщая можем записать, что при $0 < x_1, x_2 \le 1$, вероятность $P(\xi(t_1) < x_1, \xi(t_2) < x_2)$ будет равна $\min\left(t_1,t_2\right)$.

Если $x_1 > 1, 0 < x_2 \le 1$, тогда нам нужно найти вероятность того, что и случайная величина $\xi(t_1) < x_1$ и случайная величина $\xi(t_2) < x_2$. При $x_1 > 1$, вероятность того, что $\xi(t_1) < x_1$ будет меньше такого x_1, равна 1, т.к. это достоверное событие, тогда нам остается найти вероятность произведения достоверного события и события $\xi(t_2) < x_2$. Это произведение очевидно равно событию $\xi(t_2) < x_2$. Чему равна вероятность этого события? Рассуждаем так: при $0 < x_2 \le 1$, вероятность того, что наша случайная величина $\xi(t_2)$ окажется ниже уровня x_2, равна вероятности попадания в интервал $\left(0,t_2\right)$, мера Лебега которого равна t_2. Аналогично рассуждая, для случая $x_2 > 1,\ 0 < x_1 \le 1$, получаем значение функции распределения t_1. При $\min(x_1, x_2) > 1$ наша функция распределения принимает значение равное 1. Так как событие $\{\xi(t_1) < x_1, \xi(t_2) < x_2\}$ в этом случае является достоверным.

$$F_\xi(x_1, t_1, x_2, t_2) = P(\xi(t_1) < x_1, \xi(t_2) < x_2) = \begin{cases} 0,\ \min(x_1, x_2) \le 0 \\ t_1,\ 0 < x_1 \le 1, x_2 > 1 \\ t_2,\ 0 < x_2 \le 1, x_1 > 1 \\ \min(t_1, t_2),\ 0 < x_1, x_2 \le 1 \\ 1,\ \min(x_1, x_2) > 1 \end{cases}.$$

На самом деле идея построения уже ясна, но можем продолжить и построим трехмерную функцию распределения.

$$F_\xi(x_1, t_1, x_2, t_2, x_3, t_3) = P(\xi(t_1) < x_1, \xi(t_2) < x_2, \xi(t_3) < x_3) = \begin{cases} 0, & \min(x_1, x_2, x_3) \le 0 \\ \min(t_1, t_2, t_3), & 0 < x_1, x_2, x_3 \le 1 \\ t_1, & 0 < x_1 \le 1,\ (x_2, x_3) > 1 \\ t_2, & 0 < x_2 \le 1,\ (x_1, x_3) > 1 \\ t_3, & 0 < x_3 \le 1,\ (x_1, x_2) > 1 \\ \min(t_1, t_2), & 0 < x_1, x_2 \le 1, x_3 > 1 \\ \min(t_1, t_3), & 0 < x_2, x_3 \le 1, x_2 > 1 \\ \min(t_2, t_3), & 0 < x_2, x_3 \le 1, x_1 > 1 \\ 1, & \min\{x_1, x_2, x_3\} > 1 \end{cases}.$$

Выражение для конечномерной функции распределения слишком громоздкое, но оно может быть получено аналогичными рассуждениями.

Пример 2.4. *Дан случайный процесс* $\xi(t) = X + t\cdot(Y + t)$, *где* (X, Y) *система случайных величин, заданная законом распределения:*

$Y \backslash X$	***1***	***2***	***3***
–1	1/4	1/8	1/8
1	1/8	1/4	1/8

Найти реализации случайного процесса $\xi(t)$ *и вероятность того, что они при* $t \ge 0$ *возрастают.*

Решение:

1. Перепишем случайный процесс в виде $\xi(t) = X + t\cdot(Y+t) = t^2 + t\cdot Y + X$. Очевидно, что каждая из реализаций процесса, проходит через случайную точку с координатами $(0, X)$. Т.е. каждая из реализаций пересекает ось $\xi(t)$, либо в точке $(0,1)$, либо в точке $(0,2)$, либо в $(0,3)$.

Преобразуем вид случайного процесса. Выделим полный квадрат в выражении:

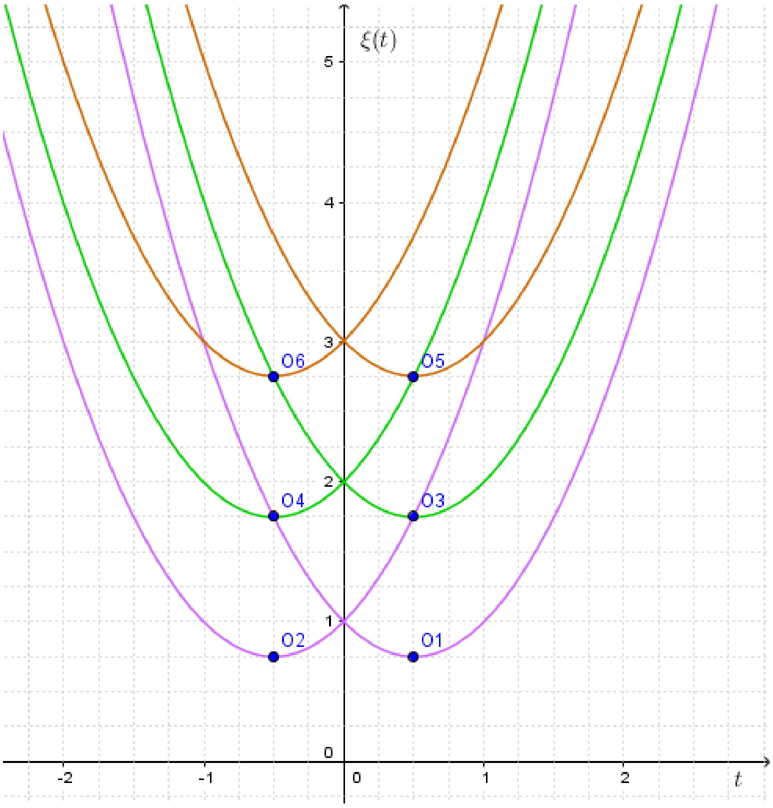
$$\xi(t) = t^2 + t\cdot Y + X = t^2 + 2\cdot\frac{Y}{2}\cdot t + \left(\frac{Y}{2}\right)^2 - \left(\frac{Y}{2}\right)^2 + X = \left(t + \frac{Y}{2}\right)^2 + X - \frac{Y^2}{4}.$$

Тогда можем записать: $\xi(t) - \left(X - \frac{Y^2}{4}\right) = \left(t + \frac{Y}{2}\right)^2$.

Или иначе:

$$\left(t + \frac{Y}{2}\right)^2 = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\xi(t) - \left(X - \frac{Y^2}{4}\right)\right)$$
$$(x - x_0)^2 = 2\cdot p\cdot(y - y_0)$$

Внизу к полученному выражению приписано уравнение параболы, записанное в каноническом виде, с координатами вершины $O(x_0, y_0)$ и параметром параболы p . Из полученного выражения видно, что у нас координаты вершины параболы $O(x_0, y_0) = O\left(-\frac{Y}{2}, X - \frac{Y^2}{4}\right)$ и параметр $p = \frac{1}{2} > 0$. Так как $p = \frac{1}{2} > 0$, то заключаем, что ветви параболы направлены вверх. Таким образом делаем первый вывод, что ансамбль реализаций представляет собой семейство парабол, ось симметрии каждой из которых параллельна оси $O\xi(t)$, координата вершины случайна: $O\left(-\frac{Y}{2}, X - \frac{Y^2}{4}\right)$. Уравнение семейства директрис: $\xi(t) = y_0 - \frac{p}{2} = X - \frac{Y^2}{4} - \frac{1}{4}$, каждая из директрис представляет собой прямую параллельную оси Ot. Координата фокусов: $F\left(x_0, y_0 + \frac{p}{2}\right) = F\left(x_0, y_0 + \frac{1}{4}\right) = F\left(-\frac{Y}{2}, X - \frac{Y^2}{4} + \frac{1}{4}\right)$. Форма параболы, определяется только параметром p , в нашем случае она будет у всех реализаций одинакова.



Координаты вершин семейства парабол:

$$O_1=\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right);\ O_2=\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right);\ O_3=\left(\frac{1}{2},1\frac{3}{4}\right);\ O_4=\left(-\frac{1}{2},1\frac{3}{4}\right);\ O_5=\left(\frac{1}{2},\,2\frac{3}{4}\right);\ O_6=\left(-\frac{1}{2},\,2\frac{3}{4}\right).$$

2. Введем обозначение. Пусть событие $G=\{\xi(t)$ возрастают при $t\geq 0\}$. Так как каждая из реализаций случайного процесса дифференцируема по аргументу t, то используя критерий возрастания функции на интервале, (для того, чтобы дифференцируемая функция $f(t)$ на интервале (a,b) была возрастающей, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $t\in(a,b)$, $f'(t)>0$). То есть для нашей случайной функции можем записать: $\xi'(t)>0$ или $\xi'(t)=2\cdot t+Y>0$. А для этого необходимо и достаточно, чтобы случайная величина Y была неотрицательной, т.е. $Y\geq 0$, потому что если значение случайной величины $Y<0$, то можно подобрать такое значение параметра t при котором $\xi'(t)=2\cdot t+Y<0$. Другими словами, условие $\xi'(t)>0$ должно выполняться для всех t из указанного интервала, но при $Y<0$ оно выполняется не для всех $t\in[0,\infty)$.

И теперь найдем вероятность события $P(G) = P\{\xi(t)$ возрастают при $t \geq 0\} = P\{Y \geq 0\}$. Используя одномерный закон распределения случайной величины Y:

Y_i	***–1***	***1***
p_i	1/2	1/2

Можем окончательно записать: $P\{Y \geq 0\} = P\{Y = 1\} = \dfrac{1}{2}$.

<u>Замечание 8:</u> Так как понятие дифференцируемости для случайных функций определяется особым образом. Далее в разделе, где будут рассматриваться вопросы сходимости, непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости случайных процессов будет показано, что $\xi'(t) = 2 \cdot t + Y$ действительно является производной случайного процесса $\xi(t) = t^2 + t \cdot Y + X$ в среднем квадратическом.

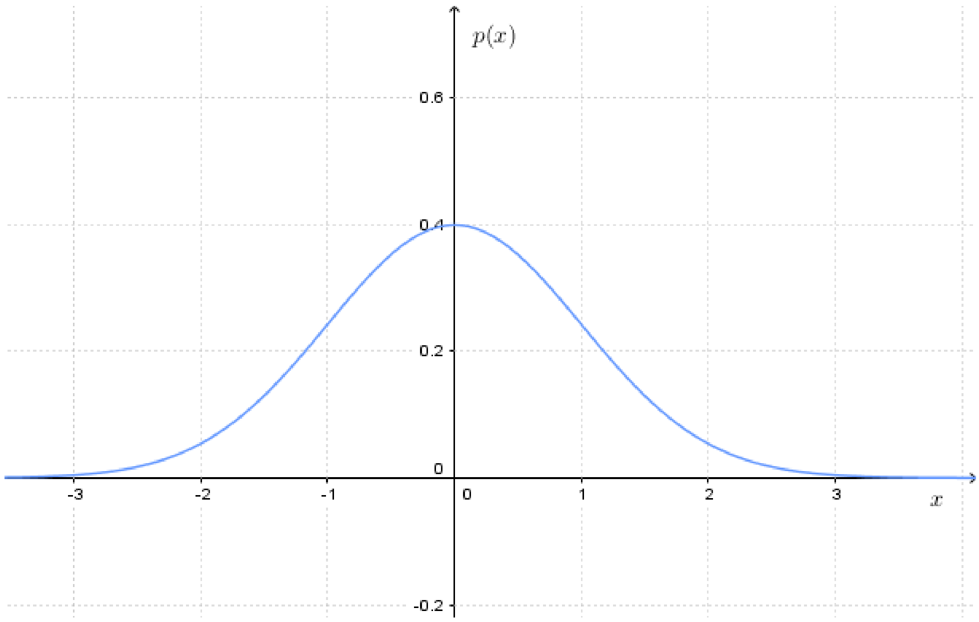
Пример 2.5. *Дан случайный процесс $\xi(t) = X + t \cdot (Y + t)$, где X и Y – случайные величины. Причем Y имеет симметричное относительно нуля распределение и $P(Y = 0) = 0$. Найти вероятность того, что реализации случайного процесса при $t \geq 0$ возрастают.*

Решение:

1. Введем обозначение, пусть событие $G = \{\xi(t)$ возрастают при $t \geq 0\}$. Так как каждая из реализаций случайного процесса дифференцируема по аргументу t, то используя критерий возрастания функции на интервале, (для того, чтобы дифференцируемая функция $f(t)$ на интервале (a, b) была возрастающей, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $t \in (a, b)$, $f'(t) > 0$).

То есть для нашей случайной функции можем записать: $\xi'(t) > 0$ или $\xi'(t) = 2 \cdot t + Y > 0 \;\Rightarrow\; Y > -2 \cdot t$. А для этого необходимо и достаточно, чтобы случайная величина Y была неотрицательной, т.е. $Y \geq 0$, потому что если Y могла бы быть отрицательной, то можно подобрать такое значение параметра t при котором $\xi'(t) = 2 \cdot t + Y < 0$. Другими словами, условие $\xi'(t) > 0$ должно выполняться для всех t из указанного интервала, но при $Y < 0$ оно выполняется не для всех $t \in [0, \infty)$.

И теперь найдем вероятность события $P(G) = P\{\xi(t)$ возрастают при $t \geq 0\}$. Из условия задачи известно, что Y имеет симметричное относительно нуля распределение (например, таковым является стандартное нормальное распределение с параметрами $a = 0, \sigma = 1$)



и также известно, что значение вероятности $P(Y = 0) = 0$, поэтому окончательно можем записать: $P\{Y \geq 0\} = P\{Y > 0\} + P\{Y = 0\} = \dfrac{1}{2}$.

<u>2 вариант решения</u>: (решение взято из сборника задач авторы: Прохоров, Ушаков)

В математическом анализе было дано следующее определение возрастающей функции на некотором промежутке:

Если для любых значений x_1, x_2 из некоторого промежутка, таких, что $x_1 > x_2$, выполняется неравенство: $f(x_1) > f(x_2)$ то функция $y = f(x)$ называется ***возрастающей*** функцией на данном промежутке.

Используем это определение. Рассмотрим события $\left\{\xi_{t_1} > \xi_{t_2}\right\}$ для любых $t_1 > t_2 \geq 0$ и $\left\{Y \geq 0\right\}$. Покажем, что событие случайная величина Y – неотрицательна $\left\{Y \geq 0\right\}$, эквивалентно событию $\bigcup\limits_{t_1 > t_2 \geq 0} \xi_{t_1} > \xi_{t_2}$.

$$\left\{\xi_{t_1} > \xi_{t_2}\right\} = \left\{t_1^2 + t_1 \cdot Y + X > t_2^2 + t_2 \cdot Y + X\right\} = \left\{t_1^2 + t_1 \cdot Y + X - t_2^2 - t_2 \cdot Y - X > 0\right\} =$$
$$= \left\{t_1^2 + t_1 \cdot Y - t_2^2 - t_2 \cdot Y > 0\right\} = \left\{\left(t_1^2 - t_2^2\right) + Y \cdot \left(t_1 - t_2\right) > 0\right\} =$$
$$= \left\{\left(t_1 - t_2\right)\left(t_1 + t_2\right) + Y \cdot \left(t_1 - t_2\right) > 0\right\} = \left\{\left(t_1 - t_2\right)\left(Y + t_1 + t_2\right) > 0\right\}$$

Когда $\left(t_1 - t_2\right)\left(t_1 + t_2 + Y\right) > 0$? Если $\left(t_1 + t_2 + Y\right) > 0$, т.к. $\left(t_1 - t_2\right) > 0$ всегда при $t_1 > t_2$.

Рассмотрим событие $\left\{Y + t_1 + t_2 > 0\right\} = \left\{Y > -\left(t_1 + t_2\right)\right\}$, это должно выполняться для <u>***любых***</u> пар точек $t_1 > t_2 \geq 0$. Т.е. если мы объединим по всем таким $t_1 > t_2 \geq 0$, то получим событие $\bigcup\limits_{t_1 > t_2 \geq 0} \xi_{t_1} > \xi_{t_2}$, которое эквивалентно событию, что $\left\{Y \geq 0\right\}$.

Реализации процесса возрастают при всех $t_1 > t_2 \geq 0$ только те, у которых в уравнении $\xi_i\left(t\right) = X_i + t \cdot \left(Y_i + t\right)$ значение Y неотрицательно.

Окончательно можем записать:

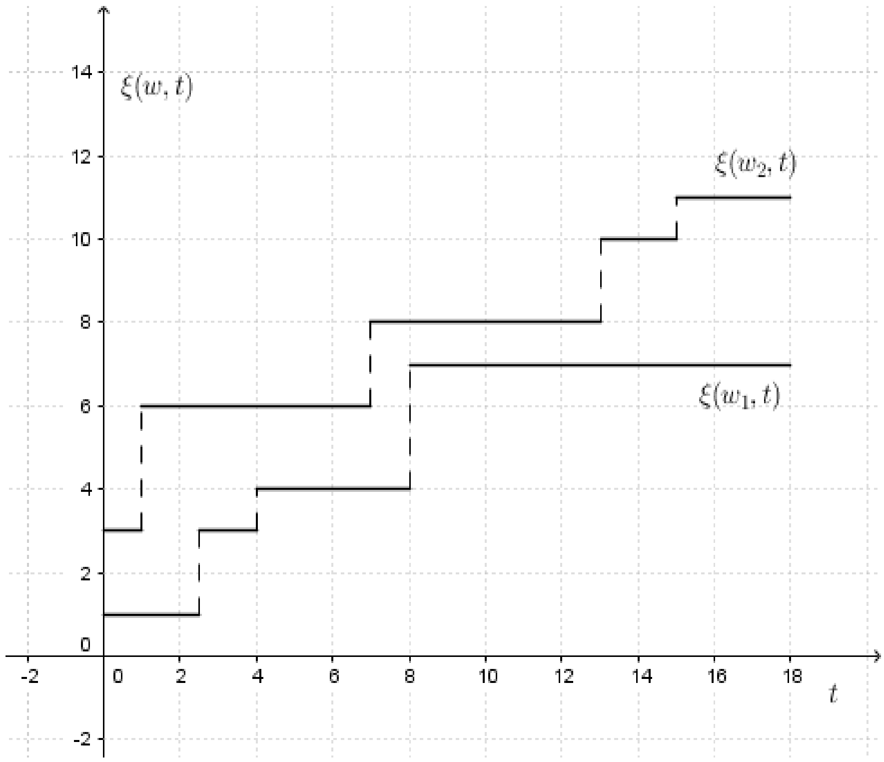
$$\left\{Y \geq 0\right\} = \bigcup\limits_{t_1 > t_2 \geq 0} \xi_{t_1} > \xi_{t_2} .$$

Так как известно, что Y имеет симметричное относительно нуля распределение и $P\left(Y = 0\right) = 0$. Вероятность $P\left\{Y \geq 0\right\} = \dfrac{1}{2}$.

Пример 2.6. *Поток покупателей является простейшим потоком с параметром λ. Для данного потока вероятность того, что за время τ появится ровно k покупателей, определяется формулой Пуассона $P_k\left(\tau\right) = \dfrac{\left(\lambda \cdot \tau\right)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda \cdot \tau}$.*

Процесс $\xi\left(t\right)$ представляет собой число покупателей пришедших от 0 до t (например, от начала рабочего дня и до момента времени t). Найти одномерную функцию распределения этого процесса.

Решение: Реализации процесса $\eta(t)$ с дискретным множеством состояний и непрерывным временем, могут выглядеть так:



Любое из сечений такого процесса дискретная случайная величина, множество значений которой $\{0,1,2,3,..,n\}$. У нас дан пуассоновский процесс, у которого в любой момент времени может быть скачок реализации равный ***<u>единице</u>***.

Найдем одномерную функцию распределения. Согласно определению: $F_{\xi}(x,t_1) = P(\xi(t_1) < x)$, а это на самом деле вероятность того, что любая из реализаций $\xi_i(t)$ случайного процесса $\xi(t)$, пересечет сечение t_1, ниже уровня x. Т.е. нам нужно найти вероятность тех значений, дискретной случайной величины, получающейся в сечении случайного процесса, которые лежат ниже какого-то наперед заданного x. И очевидно, эта вероятность может быть найдена так:

$$F_{\xi}(x,t_1) = P(\xi(t_1) < x) = \sum_{i<x,} P_i = \sum_{i<x} P\{\xi(t_1)=i\} = P\left\{\xi(t_1) = 0\right\} + P\left\{\xi(t_1) = 1\right\} + ... = \sum_{i=0}^{[x]} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}$$

Пример 2.7. *Случайный процесс задан соотношением* $\xi(t) = X + \alpha \cdot t, t > 0$*, где* X *– случайная величина с непрерывной функцией распределения, а* $\alpha > 1$ *– детерминированная постоянная. Найти вероятность события:* $P\{\xi(t) = 0$ *хотя бы для одного* $t \in [0,1]\}$.

Решение: Введем обозначение. Пусть $A = \{\omega : \xi(\omega, t) = 0$ хотя бы для одного $t \in [0,1]\}$. Это событие заключается в том, что функция $\xi(\omega, t)$ имеет на интервале $[0,1]$ по крайней мере один корень, т.е. можем записать: $A = \{X + \alpha t = 0$ хотя бы для одного $t \in [0,1]\}$.

Так как $X + \alpha t = 0$, когда $\alpha t = -X$, или $t = -\dfrac{X}{\alpha}$. Поскольку $0 \le t \le 1$, следовательно должно выполняться $0 \le -\dfrac{X}{\alpha} \le 1$, или $0 \le -X \le \alpha$, что очевидно выполняется только в случае, если случайная величина X: и $X \le 0$, и $X \ge -\alpha$. Т.е. вероятность нашего события равна вероятности попадания случайной величины X в интервал $[-\alpha, 0]$. Теперь можем найти искомую вероятность: $P\{A\} = P\{-\alpha \le X \le 0\}$. Из условия известно, что X – случайная величина с непрерывной функцией распределения $F_X(x)$, тогда

$$P\{A\} = P\{-\alpha \le X \le 0\} = \int_{-\alpha}^{0} dF_X(x).$$

Пример 2.8. *Случайный процесс представляет собой* $\xi(t) = V$*, где* V *– непрерывная случайная величина с плотностью* $p_V(x)$*. Найти одномерную и двумерную плотности распределения процесса* $\xi(t)$.

Решение:

1. Найдем одномерную функцию распределения случайного процесса и его одномерную плотность. Согласно определению $F_\xi(x,t) = P(\xi(t) < x) = P(V < x) = F_V(x)$, т.е. функция распределения случайного процесса $\xi(t)$ совпадает с функцией распределения случайной величины V. Очевидно, что и плотности распределения случайного процесса $\xi(t)$: $p_\xi(x,t)$ и случайной величины V: $p_V(x)$ будут совпадать. По определению плотности $p_V(x) = \dfrac{dF_V(x)}{dx}$, где $F_V(x) = \int_{-\infty}^{x} p_V(y)dy$, т.к. $F_\xi(x,t) = F_V(x)$, то и $p_\xi(x,t) = p_V(x) = \dfrac{dF_V(x)}{dx}$.

2. Попробуем найти двумерную плотность случайного процесса. Запишем по определению функцию распределения:

$$F_\xi(x_1,x_2,t_1,t_2)=P(\xi(t_1)<x_1,\xi(t_2)<x_2)=P(V<x_1,V<x_2)=P(V<\min(x_1,x_2))=F_V\left(\min(x_1,x_2)\right)$$

По определению двумерной плотности:

$$p_\xi(x_1,x_2,t_1,t_2)=\frac{\partial^2 F_\xi(x_1,x_2,t_1,t_2)}{\partial x_1 \partial x_2}=\frac{\partial^2 F_V(\min(x_1,x_2))}{\partial x_1 \partial x_2}$$

Найдем первую частную производную:

$$\frac{\partial F_V(\min(x_1,x_2))}{\partial x_1}=p_V(\min(x_1,x_2))\cdot\frac{\partial(\min(x_1,x_2))}{\partial x_1}=p_V(\min(x_1,x_2))\cdot\begin{cases}0, & x_1>x_2\\ 1, & x_1\le x_2\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}0, & x_1>x_2\\ p_V(\min(x_1,x_2)), & x_1\le x_2\end{cases}=\begin{cases}0, & x_1>x_2\\ p_V(x_1), & x_1\le x_2\end{cases}$$

Запишем полученное выражение в более компактном виде, используя функцию Хэвисайда, которая определяется так:

$$\Theta(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & x\ge 0\end{cases}\ \text{или}\ \Theta(x_2-x_1)=\begin{cases}0, & x_2-x_1<0\\ 1, & x_2-x_1\ge 0\end{cases}=\begin{cases}0, & x_1>x_2\\ 1, & x_1\le x_2\end{cases}$$

Т.е. можем переписать: $\dfrac{\partial F(\min(x_1,x_2))}{\partial x_1}=\begin{cases}0, & x_1>x_2\\ p_V(x_1), & x_1\le x_2\end{cases}=p_V(x_1)\cdot\Theta(x_2-x_1);$

Теперь можем найти: $\dfrac{\partial^2 F(x_1,x_2,t_1,t_2)}{\partial x_1\partial x_2}=\dfrac{\partial\left(p_V(x_1)\cdot\Theta(x_2-x_1)\right)}{\partial x_2}=p_V(x_1)\cdot\dfrac{\partial\Theta(x_2-x_1)}{\partial x_2};$

Т.к. производной от функции Хэвисайда является дельта функция, определяющаяся так:

$$\delta(x_2-x_1)=\begin{cases}\infty, & x_2=x_1\\ 0, & x_2\ne x_1\end{cases};$$

То можем переписать окончательно выражение для двумерной плотности:

$$p_\xi(x_1,x_2,t_1,t_2)=\frac{\partial^2 F(x_1,x_2,t_1,t_2)}{\partial x_1\partial x_2}=p_V(x_1)\cdot\delta(x_2-x_1);$$

На самом деле очевидно, что это формальное выражение для двумерной плотности. Двумерной плотности в обычном ее смысле конечно же не существует.

<u>Можно иначе рассуждать, показывая, что двумерной плотности не существует</u>.

По определению двумерной плотности:

$$p_\xi(x_1,x_2,t_1,t_2)=\lim_{\Delta x_1,\Delta x_2\to 0}\frac{P\{x_1\le\xi(t_1)<x_1+\Delta x_1, x_2\le\xi(t_2)<x_2+\Delta x_2\}}{\Delta x_1\cdot\Delta x_2}=$$

$$=\lim_{\Delta x_1,\Delta x_2\to 0}\frac{P\{x_1\le V<x_1+\Delta x_1, x_2\le V<x_2+\Delta x_2\}}{\Delta x_1\cdot\Delta x_2}=\lim_{\Delta x_1,\Delta x_2\to 0}\frac{P\{V\in[x_1,x_1+\Delta x_1)\cap[x_2,x_2+\Delta x_2)\}}{\Delta x_1\cdot\Delta x_2}$$

Рассмотрим событие $V\in[x_1,x_1+\Delta x_1)\cap[x_2,x_2+\Delta x_2)$, т.е. случайная величина V, должна принадлежать пересечению двух интервалов, но указанные интервалы пересекаются тогда и только тогда, когда $x_1=x_2$, во всех других случаях пересечение пусто. Пусть например, $x_1<x_2$, тогда $x_1+\Delta x_1<x_2$ в силу малости Δx_1. Поэтому продолжаем оценивать предел положив: $x_1=x_2=x$.

$$\lim_{\Delta x_1,\Delta x_2\to 0}\frac{P\{V\in[x_1,x_1+\Delta x_1)\cap[x_2,x_2+\Delta x_2)\}}{\Delta x_1\cdot\Delta x_2}=\lim_{\min(\Delta x_1,\Delta x_2)\to 0}\frac{P\{V\in[x,x+\Delta x)\}}{(\min(\Delta x_1,\Delta x_2))^2}=\infty,\ \text{где}\ \Delta x=\min(\Delta x_1,\Delta x_2)$$

Т.е. двумерная функция плотности действительно не существует.

Пример 2.9. *Пусть случайный процесс $\xi(t)=\varphi(t)\cdot V,\ t\in[0,1]$, где V – гауссовская случайная величина с параметрами a и σ^2, $\varphi(t)$ – неслучайная функция. Найти характеристическую функцию случайного процесса $\xi(t)$.*

Решение. Согласно определению, характеристическая функция конечномерного распределения случайного процесса: $g_\xi(u_1,t_1,\dots,u_n,t_n)=M\left\{\exp\left(i\sum_{k=1}^{n}\xi(t_k)u_k\right)\right\}$.

Введем обозначение, пусть $\eta=\sum_{k=1}^{n}u_k\xi(t_k)$, тогда в силу того, что $\xi(t_k)=\varphi(t_k)\cdot V$, можем записать $\eta=\sum_{k=1}^{n}u_k\cdot\xi(t_k)=\sum_{k=1}^{n}u_k\cdot\varphi(t_k)\cdot V$, выносим V за знак суммы: $\eta=V\sum_{k=1}^{n}u_k\cdot\varphi(t_k)$, η – гауссовская случайная величина, ее математическое ожидание и дисперсия равны:

$$M\{\eta\} = M\left\{V \cdot \sum_{k=1}^{n} u_k \varphi(t_k)\right\} = M\{V\} \cdot M\left\{\sum_{k=1}^{n} u_k \varphi(t_k)\right\} = a\sum_{k=1}^{k} u_k \cdot \varphi(t_k) = m_\eta$$

$$D\{\eta\} = D\left\{V \cdot \sum_{k=1}^{n} u_k \varphi(t_k)\right\} = \left\{т.к.\ D\left[V \cdot \varphi(t)\right] = \left(DV\right) \cdot \varphi^2\left(t\right)\right\} = \sigma^2 \left[\sum_{k=1}^{n} u_k \cdot \varphi(t_k)\right]^2 = D_\eta .$$

Учитывая, что для нормально распределённой случайной величины η с параметрами распределения m_η и $D_\eta = \sigma_\eta^2$ характеристическая функция имеет вид:

$$g_\eta(u) = M\left\{e^{iu\eta}\right\} = \exp\left\{ium_\eta - u^2 \frac{D_\eta}{2}\right\},$$

получаем выражение для характеристической функции $\xi(t)$:

$$g_\xi(u_1, t_1, \cdots, u_n, t_n) = M\left\{\exp\left(i\sum_{k=1}^{n} \xi(t_k) u_k\right)\right\} = M\left\{e^{i\eta}\right\} = g_\eta(1) = \exp\left\{im_\eta - \frac{1}{2} D_\eta\right\} .$$

Задачи по теме для самостоятельного решения

1. Случайный процесс $\xi(t)$ формируется так: на оси Ot имеется простейший поток событий с интенсивностью λ. Случайный процесс попеременно принимает значения +1 и –1, при наступлении очередного события в простейшем потоке случайный процесс скачком меняет свое состояние с +1 на –1 или наоборот. Записать одномерный закон распределения этого процесса в виде функции распределения.

2. Пусть U – случайная величина, заданная функцией распределения $F_U\left(x\right)$. Найти семейство конечномерных распределений случайного процесса $\xi\left(t\right) = U + t, t > 0$.

3. Случайный процесс задан соотношением $\xi\left(t\right) = X + \alpha \cdot t, t > 0$, где X – случайная величина с непрерывной функцией распределения, а $\alpha > 1$ – детерминированная постоянная. Пусть $D \subset \left[0, \infty\right)$ – некоторое конечное или счетное подмножество. Найти вероятность события: $P\left\{\xi\left(t\right) = 0 \text{ хотя бы для одного } t \in D\right\}$.

4. Случайный процесс задан в виде $\xi(t) = V \cdot t^2$, где V – непрерывная случайная величина, распределенная по нормальному закону с параметрами a и σ^2. Найти многомерную плотность распределения случайного процесса $\xi(t)$.

5. Случайный процесс $\xi(t)$ представляет собой аддитивную смесь некоррелированных между собой процессов: сигнала $s(t)$ и помехи $n(t)$, т.е. $\xi(t) = s(t) + n(t)$. Известно, что сигнал есть детерминированная функция $s(t) = A \cdot \cos(B \cdot t + \varphi)$, а помеха $n(t)$ – нормальный стационарный шум с нулевым средним и дисперсией σ^2. Записать одномерный закон распределения этого процесса.

6. Пусть $\xi(\omega, t) = \eta + t$, где $t > 0$ и η – случайная величина, плотность распределения которой имеет вид $p_\eta(x) = e^{-x}, x > 0$. Найти n-мерные функции распределения данного случайного процесса. При каких n существуют n-мерные плотности распределения?

7. Пусть случайный процесс $\xi(t) = \varphi(t) \cdot V$, $t \in [0,1]$, где V – некоторая случайная величина, с функцией распределения $F_V(x)$, а $\varphi(t) > 0$. Найти многомерную функцию распределения случайного процесса $\xi(t)$.

8. Пусть случайный процесс $\{\xi(t), t \geq 0\}$, определяется соотношением: $\xi(t) = U \cdot t + V$, где U и V – независимые случайные величины с функциями распределения $F_U(x)$ и $F_V(y)$. Определить вид реализаций данного процесса $\xi(t)$ и его одномерную и n-мерную функции распределения.

9. В условиях задачи ***8*** построить пучок траекторий процесса $\xi(t)$, если $U \sim R[-1,0]$ и $V \sim R[0,1]$.

10. Случайный процесс $\xi(t) = X \cdot t^2 + Y \cdot t$, $t > 0$, где X, Y – независимые случайные величины с одинаковым гауссовским распределением $N(0,1)$. Найти вероятности следующих событий:

a) $A_1 = \{$ траектория процесса монотонно не убывает $\}$;

b) $A_2 = \left\{\min\limits_{t>0} \xi(t) < 0\right\}$.

11. Найти плотность вероятности гармонического колебания $\xi(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)$. Имеющего постоянными амплитуду A и частоту ω, но случайную начальную фазу φ, распределенную равномерно на интервале $[-\pi, \pi]$.

12. Случайный процесс задан соотношением $\xi(t) = X^2 + 2t \cdot Y + t^2$, $t \ge 0$, где X, Y - независимые случайные величины, имеющие гауссовское распределение $N(0,1)$. Найти вероятности следующих событий:

a) $A_1 = \{\xi(t)$ монотонно не убывает $\}$;

b) $A_2 = \{\xi(t)$ неотрицателен $\}$;

c) $A_3 = \{\xi(t) = 0$ хотя бы для одного $t \in D\}$, где $D \subset [0, \infty)$ – некоторое конечное или счетное подмножество.

d) $A_4 = \{\xi(t) = 0$ хотя бы для одного $t \in [0, \infty)\}$.

3. Основные характеристики случайных процессов

Конечномерные распределения дают исчерпывающее описание случайного процесса. Однако существует большое число задач, для решения которых оказывается достаточным использование основных характеристик случайного процесса, которые в более *краткой* и *сжатой форме*, отражают основные свойства случайного процесса. Такими характеристиками являются ***моменты первых двух порядков***. В отличие от случайных величин, для которых моменты являются числами и поэтому их называют ***числовыми характеристиками***, моменты случайной функции являются неслучайными (детерминированными) функциями, их называют ***характеристиками случайной функции*** (***процесса***).

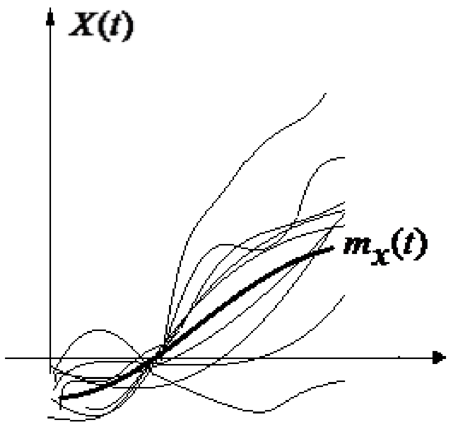
Математическое ожидание случайного процесса

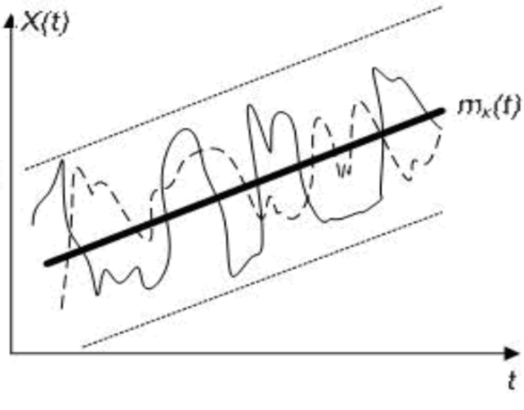
Определение 1*. *Математическим ожиданием случайного процесса $X(t)$ или его ***статистическим средним значением*** называется неслучайная (детерминированная) функция $m_X(t),\ t \in T$, определяемая соотношением:

$$m_X(t) = M\left\{X(t)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x,t).$$

Значение этой функции при любом ***t*** равно математическому ожиданию соответствующего сечения случайного процесса.

Математическое ожидание, есть ***«средняя» функция***, вокруг которой происходит разброс реализаций случайного процесса.





Свойства математического ожидания случайного процесса

1. Математическое ожидание неслучайной функции $\varphi(t)$ равно самой неслучайной функции:

$$M\left[\varphi(t)\right]=\varphi(t).$$

2. Неслучайный множитель $\varphi(t)$ можно выносить за знак математического ожидания:

$$M\left[\varphi(t)\cdot X(t)\right]=\varphi(t)\cdot M\left[X(t)\right]=\varphi(t)\cdot m_X(t).$$

3. Математическое ожидание суммы двух случайных функций равно сумме математических ожиданий слагаемых:

$$M\left[X_1(t)+X_2(t)\right]=M\left[X_1(t)\right]+M\left[X_2(t)\right];$$

4. Математическое ожидание произведения двух случайных функций $X_1(t)$ и $X_2(t)$, равно произведению математических ожиданий, если сечения $X_1(t)$ и $X_2(t)$ некоррелированы при каждом $t\in(-\infty,\infty)$:

$$M\left[X_1(t)\cdot X_2(t)\right]=M\left[X_1(t)\right]\cdot M\left[X_2(t)\right].$$

5. Математическое ожидание суммы случайной и неслучайной функций равно сумме математического ожидания случайной $X(t)$ и неслучайной функции $\varphi(t)$:

$$M\left[X(t)+\varphi(t)\right]=M\left[X(t)\right]+\varphi(t).$$

Пример 3.1. *Найти математическое ожидание случайного процесса $\xi(t)=U\cos t$, где U – случайная величина, математическое ожидание которой $MU=2$.*

Решение: Множитель $\cos t$ неслучайная функция, которую, используя свойство 2 можно вынести за знак математического ожидания:

$$M\left[\xi(t)\right]=M\left[U\cos\left(t\right)\right]=\cos\left(t\right)M\left(U\right)=2\cos\left(t\right).$$

Дисперсия случайного процесса

***Определение 2**. **Дисперсией случайного процесса** $X(t)$* называется неслучайная (детерминированная) неотрицательная функция $D_X(t)$, которая при любом значении аргумента t равна дисперсии соответствующего сечения случайного процесса:

$$D_X(t) = M\left\{\left(X(t) - m_X(t)\right)^2\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_X(t))^2 \, dF(x,t).$$

Дисперсия характеризует разброс реализаций относительно средней траектории $m_X(t)$.

Свойства дисперсии случайного процесса

1. Дисперсия неслучайной функции равна нулю:

$$D\left[\varphi(t)\right] = 0.$$

2. Дисперсия суммы случайной функции $X(t)$ и неслучайной функции $\varphi(t)$ равна дисперсии случайной функции:

$$D\left[X(t) + \varphi(t)\right] = D_X(t).$$

3. Дисперсия произведения случайной функции $X(t)$ на неслучайную функцию $\varphi(t)$ равна произведению квадрата неслучайного множителя на дисперсию случайной функции:

$$D\left[\varphi(t) \cdot X(t)\right] = \varphi^2(t) \cdot D_X(t).$$

4. Дисперсия суммы двух случайных функций $X_1(t)$ и $X_2(t)$ равно сумме дисперсий слагаемых, если сечения $X_1(t)$ и $X_2(t)$ некоррелированы при каждом $t \in (-\infty, \infty)$:

$$D\left[X_1(t) + X_2(t)\right] = D\left[X_1(t)\right] + D\left[X_2(t)\right].$$

Пример 3.2. *Найти дисперсию случайного процесса $\xi(t) = U \cdot \sin(t)$, где U – случайная величина, дисперсия которой $D(U) = 6$.*

Решение: Множитель $\sin(t)$ детерминированная функция, которую, используя свойство 3 можно вынести за знак дисперсии: $D\left[\xi(t)\right] = D\left[U \cdot \sin(t)\right] = \sin^2(t) \cdot D(U) = 6\sin^2(t)$.

<u>***Пример 3.3***</u>***.*** *Пусть случайный процесс, определяется соотношением* $\xi(t)=\dfrac{U+V}{t}$, *где* U *и* V *– независимые случайные величины, имеющие гауссовское распределение* $N\sim\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$. *Найти математическое ожидание и дисперсию случайного процесса* $\xi(t)$ *и вероятность* $P\left\{|\xi(t)|<\dfrac{3}{t}\right\}$ *для произвольного* $t>0$.

Решение. Найдем основные характеристики случайного процесса $\xi(t)$. В силу того, что U и V гауссовские с параметрами распределения $MU=MV=0$; $DU=DV=1/2$ и независимые случайные величины, можем записать:

$$M\{\xi(t)\}=M\left\{\frac{U+V}{t}\right\}=\frac{1}{t}M\{U\}+\frac{1}{t}M\{V\}=0,$$

$$D\{\xi(t)\}=D\left\{\frac{U+V}{t}\right\}=\frac{1}{t^2}D\{U\}+\frac{1}{t^2}D\{V\}=\frac{1}{t^2}.$$

Так как сумма гауссовских случайных величин $U+V$ имеет гауссовское распределение с параметрами $a=0,\ \sigma^2=1$, то

$$F_\xi(x,t)=P\{\xi(t)<x\}=P\left\{\frac{U+V}{t}<x\right\}=P\{U+V<xt\}=\Phi(xt),$$

где $\Phi(z)$ – функция Лапласа:

$$\Phi(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{z}\exp\{-u^2\}du.$$

Тогда искомая вероятность определяется следующим образом:

$$P\left\{|\xi(t)|<\frac{3}{t}\right\}=F_\xi(\frac{3}{t},t)-F_\xi(-\frac{3}{t},t)=\Phi(3)-\Phi(-3)=0.997.$$

Среднеквадратическое отклонение случайного процесса

<u>***Определение 3***</u>***. Среднеквадратическим*** или *стандартным* ***отклонением случайного процесса*** $X(t)$ называют <u>*неслучайную*</u> функцию $\sigma(t)=\sqrt{D_X(t)}$.

Размерность функции $\sigma_x(t)$ равна размерности случайного процесса $X(t)$. Значения реализаций случайного процесса при каждом t отклоняются от математического ожидания $m_x(t)$ на величину порядка $\sigma_x(t)$.

Центрированный случайный процесс

<u>Определение 4</u>. Центрированным случайным процессом $\overset{\circ}{\xi}(t)$ называется процесс, который получится, если из случайного процесса $\xi(t)$ вычесть его математическое ожидание: $\overset{\circ}{\xi}(t) = \xi(t) - m_\xi(t)$;

Свойства центрированного случайного процесса

1. Прибавление к случайной функции $\xi(t)$ неслучайного слагаемого $\varphi(t)$ не изменяет ее центрированной функции, т.е. если $\xi_1(t) = \xi_2(t) + \varphi(t)$, то $\overset{\circ}{\xi}_2(t) = \overset{\circ}{\xi}_1(t)$.

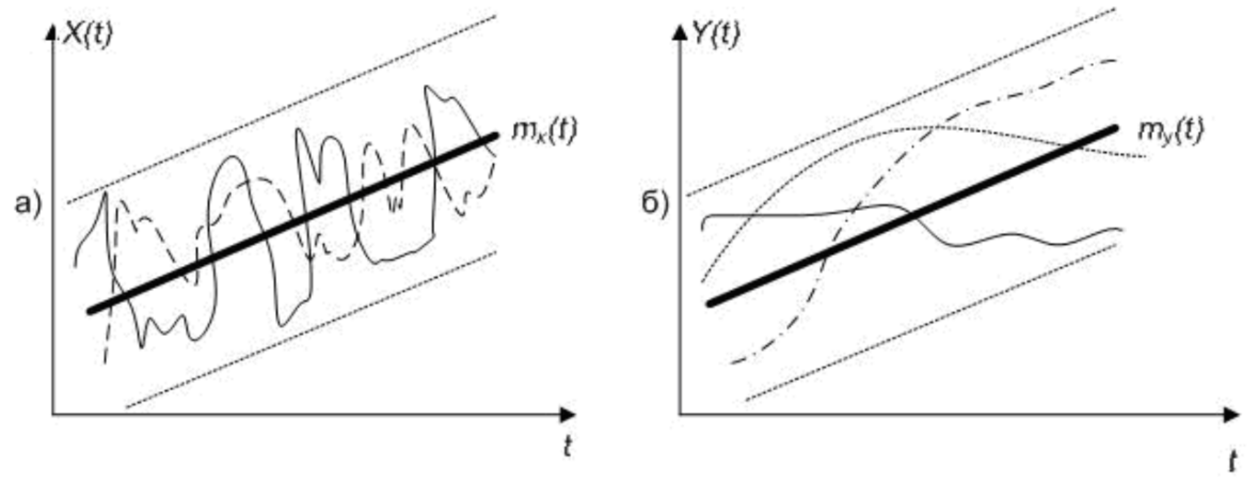
2. При умножении случайной функции $\xi(t)$ на неслучайный множитель $\varphi(t)$ ее центрированная функция умножается на этот же множитель, т.е. если $\xi_1(t) = \xi(t)\cdot\varphi(t)$, то

$$\overset{\circ}{\xi}_1(t) = \varphi(t)\cdot\xi(t) - M\{\varphi(t)\cdot\xi(t)\} = \varphi(t)\cdot\xi(t) - \varphi(t)\cdot M\xi(t) =$$
$$= \varphi(t)\cdot\left(\xi(t) - M\xi(t)\right) = \varphi(t)\cdot\overset{\circ}{\xi}(t)$$

3. Математическое ожидание центрированного случайного процесса тождественно равно нулю: $M\left[\overset{\circ}{\xi}_2(t)\right] = M\left[\xi(t) - m_\xi(t)\right] \equiv 0$.

Реализации центрированного случайного процесса $\overset{\circ}{\xi}(t)$ представляют собой отклонения случайного процесса $\xi(t)$ от его математического ожидания. Значения отклонений могут иметь как положительные, так и отрицательные значения, а в среднем равны нулю. Как указывалось выше, дисперсия представляет собой неслучайную функцию, характеризующую степень разброса реализации случайного процесса около его математического ожидания, т.е. степень разброса реализаций центрированного случайного процесса $\overset{\circ}{\xi}(t)$.

Математическое ожидание и дисперсия – важные, но недостаточные характеристики для описания основных свойств случайных процессов. В этом можно убедиться, обратившись к рисунку, на котором изображены реализации двух случайных процессов $X(t)$ и $Y(t)$, математические ожидания и дисперсии которых равны.



Внутренняя структура процессов совершенно различна. Первый процесс $X(t)$ имеет более «нервный» характер, $Y(t)$ – изменяется более «плавно». Но это не отражает ни математическое ожидание, ни дисперсия. Для описания динамики изменения случайных процессов вводится специальная характеристика – *корреляционная* функция. Она характеризует степень сходства между сечениями процесса $X(t_1)$ и $X(t_2)$. Эта функция описывает процесс в целом.

Функция корреляции случайного процесса

Определение 5. ***Функцией корреляции случайного процесса*** $\xi(t)$ называется математическое ожидание произведения сечений случайного процесса в моменты времени t_1 и t_2.

$$R_{\xi}(t_1,t_2) = M\left\{\xi(t_1)\cdot\xi(t_2)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x_1\cdot x_2 \; dF(x_1,t_1,x_2,t_2)\,.$$

Она определяется двумерной функцией распределения $F(x_1,t_1,x_2,t_2)$ и в общем случае зависит от двух аргументов: t_1 и t_2. Эту функцию $R_{\xi}(t_1,t_2)$ называют также ***функцией автокорреляции.***

Очевидно, что для процесса $Y(t)$, изображенного на рисунке ***(б)*** выше, зависимость между сечениями будет более тесной, чем для $X(t)$. У процесса $X(t)$ эта зависимость затухает очень быстро по мере увеличения расстояния между сечениями. Для $Y(t)$ характерна большая предсказуемость реализаций. Можно с большой вероятностью утверждать, что если реализация процесса $Y(t)$ была в какой-то момент времени t выше его математического ожидания $m_Y(t)$, то и ее продолжение будет лежать выше кривой $m_Y(t)$. Между сечениями процесса $X(t)$: $X(t_1)$ и $X(t_2)$ практически нет вероятностной зависимости при достаточном удалении сечений друг от друга (эта зависимость быстро уменьшается по мере увеличения разности $t_1 - t_2$). Очевидно, что корреляционные функции случайных процессов $Y(t)$ и $X(t)$ различны. Корреляционная функция $R_Y(t_1,t_2)$ убывает намного медленнее (с увеличением разности $t_1 - t_2$), чем корреляционная функция $R_X(t_1,t_2)$

Свойства функции корреляции

Рассмотрим основные свойства функции корреляции $R_X(t_1,t_2)$ случайного процесса $X(t)$.

1. Функция корреляции является симметрической функцией своих аргументов, т.е. при перестановке аргументов корреляционная функция не изменяется: $R\,(t_1,t_2) = R\,(t_2,t_1)$.

   Для стационарных процессов функция корреляции – чётная функция

$$R\,(\tau) = R\,(t_2 - t_1) = R\,(t_1 - t_2) = R\,(-\tau).$$

2. Для корреляционной функции выполняется неравенство:

$$\left|R\,(t_1,t_2)\right| \le \sqrt{R\,(t_1,t_1)R\,(t_2,t_2)}\,.$$

   Для стационарных случайных процессов это неравенство означает, что в нуле функция корреляции достигает наибольшего значения.

3. Если случайный процесс задан соотношением $X(t) = \varphi(t)\cdot Y(t)$ где $\varphi(t)$ – неслучайная функция, $Y(t)$ - случайный процесс, то

$$R_X(t_1,t_2) = \varphi(t_1)\cdot\varphi(t_2)\cdot R_Y(t_1,t_2).$$

4. Если случайный процесс задан соотношением $\zeta(t) = \xi(t) + \eta(t)$ т.е. является суммой двух случайных процессов, тогда его корреляционная функция равна сумме корреляционных функций слагаемых $R_\xi(t_1,t_2)$, $R_\eta(t_1,t_2)$ и взаимной корреляционной функции $R_{\xi\eta}(t_1,t_2)$, которая прибавляется дважды с разным порядком следования аргументов:

$$R_\zeta(t_1,t_2) = R_\xi(t_1,t_2) + R_\eta(t_1,t_2) + R_{\xi\eta}(t_1,t_2) + R_{\eta\xi}(t_1,t_2)$$

5. Если случайный процесс задан соотношением $\zeta(t) = \varphi(t)\cdot\xi(t) + \psi(t)\cdot\eta(t)$, то

$$R_\zeta(t_1,t_2) = \varphi(t_1)\cdot\varphi(t_2)\cdot R_\xi(t_1,t_2) + \psi(t_1)\cdot\psi(t_2)\cdot R_\eta(t_1,t_2) +$$
$$+\,\varphi(t_1)\cdot\psi(t_2)\cdot R_{\xi\eta}(t_1,t_2) + \varphi(t_1)\cdot\psi(t_2)\cdot R_{\eta\xi}(t_1,t_2)$$

   где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ – неслучайные функции.

6. Если для стационарного случайного процесса при $\tau \to \infty$ случайные величины $\xi(t)$ и $\xi(t+\tau)$ стохастически независимы, то:

$$\lim_{\tau\to\infty} R(\tau) = \lim_{\tau\to\infty} M\left\{\xi(t)\cdot\xi(t+\tau)\right\} = M\xi(t)\cdot M\xi(t+\tau) = m_\xi^2 = R(\infty)$$

   В этом случае среднее значение процесса можно выразить через его функцию корреляции: $m_\xi = \sqrt{R(\infty)}$.

   Используя определение дисперсии процесса, запишем:

$$\sigma_\xi^2 = R_\xi(0) - m_\xi^2 = R_\xi(0) - R_\xi(\infty) .$$

   Таким образом, среднее значение и дисперсию стационарного случайного процесса можно найти, если известна его функция корреляции.

7. Функция корреляции случайного процесса является положительно определённой, то есть для любых n произвольных действительных чисел $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ выполняется неравенство:

$$\sum_{j,k} R_\xi(t_j, t_k)\lambda_j\lambda_k = M\left\{\sum_{j,k}\xi(t_j)\xi(t_k)\lambda_j\lambda_k\right\} = M\left\{\sum_k \xi(t_k)\lambda_k\right\}^2 \geq 0 .$$

8. Корреляционная функция суммы случайных процессов равна сумме корреляционных функций слагаемых плюс сумма всех взаимных корреляционных функций этих слагаемых. Т.е. для $\xi(t) = \sum_{i=1}^{n}\xi_i(t)$:

$$R_\xi(t_1, t_2) = \sum_i R_{\xi_i}(t_1, t_2) + \sum_{i\neq j} R_{\xi_i\xi_j}(t_1, t_2) .$$

   Для некоррелированных слагаемых с нулевыми средними значениями имеем:

$$R_\xi(t_1, t_2) = \sum_i R_{\xi_i}(t_1, t_2) .$$

Для двух случайных процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$ вводится понятие ***взаимной функции корреляции*** или функции ***кросс-корреляции:***

$$R_{\xi\eta}(t_1, t_2) = M\left\{\xi(t_1), \eta(t_2)\right\} .$$

она ***характеризует степень*** *сходства сечений одного* случайного процесса *с различными сечениями другого* случайного процесса.

Совместная корреляционная функция двух случайных процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$ определяется как матричная функция:

$$\begin{bmatrix} R_{\xi\xi}(t_1,t_2) & R_{\xi\eta}(t_1,t_2) \\ R_{\eta\xi}(t_1,t_2) & R_{\eta\eta}(t_1,t_2) \end{bmatrix},$$

все элементы которой определены выше.

Пример 3.4. *Найти функцию корреляции случайного процесса* $\xi(t) = U\sin(t)$*, где* U *– случайная величина, числовые характеристики которой:* $MU = 0$; $DU = 1$.

Решение: По определению $R_\xi(t_1,t_2) = M\{\xi(t_1)\cdot\xi(t_2)\}$, тогда у нас

$$R_\xi(t_1,t_2) = M\{\xi(t_1)\cdot\xi(t_2)\} = M\{U\sin t_1 \cdot U\sin t_2\} = M\left\{U^2\sin t_1\cdot\sin t_2\right\} = \sin t_1\cdot\sin t_2\cdot M\left\{U^2\right\} =$$
$$= \sin t_1\cdot\sin t_2$$

Использовали: $DU = MU^2 + M^2U = MU^2$, т.к. $MU = 0$.

Пример 3.5. *Пусть случайный процесс* $\xi(t) = \varphi(t)\cdot V$, $t\in T$ *, где* V *– некоторая случайная величина, с математическим ожиданием* $MV = m_V$ *и дисперсией* DV , а $\varphi(t)$ *– неслучайная функция. Найти математическое ожидание* $m_\xi(t)$ *и функцию корреляции случайного процесса* $R_\xi(t_1,t_2)$.

Решение. Согласно определению и свойствам математического ожидания случайного процесса: $m_\xi(t) = M\{\xi(t)\} = M\{\varphi(t)\cdot V\} = \varphi(t)\cdot M\{V\} = m_V\cdot\varphi(t)$.

Можем найти функцию корреляции:

$$R_\xi(t_1,t_2) = M\{\xi(t_1)\cdot\xi(t_2)\} = M\{V\cdot\varphi(t_1)\cdot V\cdot\varphi\cdot(t_2)\} = \varphi(t_1)\cdot\varphi(t_2)\cdot M\left\{V^2\right\} = \varphi(t_1)\cdot\varphi(t_2)\cdot\left(D_V + m_V^2\right)$$
$$\text{т.к. } DV = MV^2 - M^2V,\ MV^2 = DV + M^2V.$$

Частным случаем ***корреляционной функции*** является ***функция ковариации***, она представляет собой статистически усредненное произведение значений центрированной случайной функции $\overset{\circ}{\xi}(t) = \xi(t) - m_\xi(t)$ в моменты времени t_1 и t_2. В терминах теории вероятностей ***ковариационная функция*** является ***вторым центральным моментом*** случайного процесса.

Функция ковариации случайного процесса

Определение 6. ***Функцией ковариации*** (*ковариационной функцией или автоковариации*) случайного процесса $\xi(t)$ называется математическое ожидание произведения центрированных сечений случайного процесса в моменты времени t_1 и t_2:

$$K_\xi(t_1,t_2) = M\left(\overset{\circ}{\xi}(t_1)\cdot\overset{\circ}{\xi}(t_2)\right) = M\left\{\left(\xi(t_1) - m_\xi(t_1)\right)\cdot\left(\xi(t_2) - m_\xi(t_2)\right)\right\} =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left(x_1 - m_1\right)\cdot\left(x_2 - m_2\right)\, dF(x_1,t_1,x_2,t_2).$$

Ковариационная функция $K_\xi(t_1,t_2)$ ***характеризует*** не только *степень зависимости между двумя сечениями*, но и *разброс этих сечений относительно математического ожидания* $m_\xi(t)$.

Замечание 1. Для *центрированных* случайных процессов ***функция автоковариации*** *тождественна* функции ***автокорреляции***.

Нетрудно показать, что

$$K_\xi(t_1,t_2) = R_\xi(t_1,t_2) - m_\xi(t_1)m_\xi(t_2)$$

Замечание 2. При $t_1 = t_2 = t$ функция ковариации совпадает с дисперсией $D_\xi(t)$ случайного процесса:

$$K_\xi(t,t) = D_\xi(t) = \sigma_\xi^{\,2}(t).$$

Из этого следует, что для случайных процессов и функций основными характеристиками являются функции математического ожидания и корреляции (ковариации), особой необходимости в отдельной функции дисперсии нет.

Свойства функции ковариации

1. При перестановке аргументов ковариационная функция не изменяется (свойство симметрии):

$$K_\xi(t_1,t_2) = K_\xi(t_2,t_1).$$

2. Прибавление к случайному процессу $\xi(t)$ неслучайного слагаемого $\varphi(t)$ не изменяет его ковариационной функции. Т.е. если $\xi_1(t) = \xi(t) + \varphi(t)$, то

$$K_{\xi_1}(t_1,t_2) = K_\xi(t_1,t_2).$$

3. При умножении случайной функции $\xi(t)$ на неслучайный множитель $\varphi(t)$ ее ковариационная функция умножается на произведение $\varphi(t_1)\cdot\varphi(t_2)$. Т.е. если $\xi_1(t) = \xi(t)\cdot\varphi(t)$, то

$$K_{\xi_1}(t_1,t_2) = K_\xi(t_1,t_2)\cdot\varphi(t_1)\cdot\varphi(t_2).$$

4. Абсолютное значение ковариационной функции не превышает среднего геометрического дисперсий соответствующих сечений:

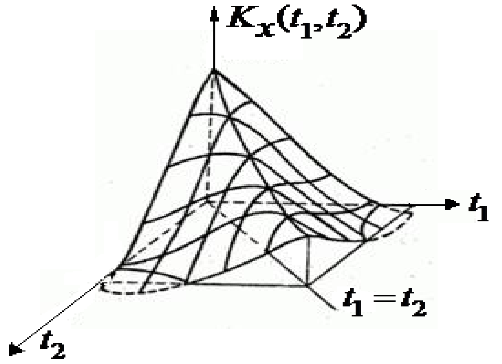
$$\left|K_\xi(t_1,t_2)\right| \le \sqrt{D_\xi(t_1)D_\xi(t_2)}\ .$$

5. Функция ковариации случайного процесса является положительно определённой:

$$\iint\limits_{(B)(B)} a(t_1)a(t_2)K_\xi(t_1,t_2)\,dt_1\,dt_2 \ge 0$$

где $a(t)$ – произвольная функция аргумента t, B – произвольное подмножество множества T, на котором определен случайный процесс $\xi(t)$.

График ковариационной функции может выглядеть так:



Кроме того, этот рисунок иллюстрирует свойство ***1*** (симметрии) ковариационной функции:

$$K_\xi(t_1,t_2) = K_\xi(t_2,t_1)$$

На рисунке ковариационная функция изображена в виде поверхности и эта поверхность симметрична относительно вертикальной плоскости, проходящей через биссектрису угла t_1Ot_2.

Нормированная функция ковариации

<u>Определение 7.</u> Величину

$$r_\xi(t_1,t_2)=\frac{K_\xi(t_1,t_2)}{\sigma_\xi(t_1)\sigma_\xi(t_2)}=\frac{K_\xi(t_1,t_2)}{\sqrt{K_\xi(t_1,t_1)K_\xi(t_2,t_2)}}$$

называют ***коэффициентом корреляции случайного процесса*** или ***нормированной функцией ковариации***.

В общем случае ***коэффициент корреляции*** является *<u>мерой линейной зависимости двух сечений</u>* $\xi(t_1)$ и $\xi(t_2)$ случайного процесса, то есть он показывает, с какой точностью одна из случайных величин $\xi(t_1)$, может быть линейно выражена через другую $\xi(t_2)$.

<u>Замечание 3:</u> Абсолютное значение нормированной функции ковариации для любых t_1, t_2 не превосходит единицы: $\left|r_\xi(t_1,t_2)\right|\le 1$. Значение нормированной функции ковариации для $t_1=t_2=t$ равно единице: $r_\xi(t,t)=1$

Взаимная функция ковариации

<u>Определение 8.</u> ***Взаимной функцией ковариации*** двух случайных процессов $\xi(t)$ и $\eta(t)$ называется неслучайная функция $K_{\xi\eta}(t_1,t_2)=M\left\{\overset{\circ}{\xi}(t_1)\cdot\overset{\circ}{\eta}(t_2)\right\}$.

Некоррелированными называют два случайных процесса, взаимная ковариационная функция которых тождественно равна нулю:

$$K_{\xi\eta}(t_1,t_2)\equiv 0$$

Коррелированными в противоположном случае.

Свойства взаимной функции ковариации

Пусть даны случайные процессы $X(t)$, $Y(t)$ и $\varphi(t)$, $\psi(t)$ – неслучайные функции.

1. $K_X(t_1,t_2) = M\left(X(t_1)\cdot Y(t_1)\right) - m_X(t_1)\cdot m_Y(t_2)$

2. $K_{X,Y}(t_1,t_2) = K_{Y,X}(t_1,t_2)$

3. $K_{X+\varphi,\, Y+\psi}(t_1,t_2) = K_{X,Y}(t_1,t_2)$

4. $K_{\varphi\cdot X,\, \psi\cdot Y}(t_1,t_2) = \varphi(t_1)\cdot\psi(t_2)\cdot K_{X,Y}(t_1,t_2)$

5. $\left|K_{X,Y}(t_1,t_2)\right| \le \sigma_X(t_1)\cdot\sigma_Y(t_2)$

Нормированная взаимная функция ковариации

Определение 9. ***Нормированной взаимной функцией ковариации случайных процессов*** называется неслучайная функция:

$$r_{X,Y}(t_1,t_2) = \frac{K_{X,Y}(t_1,t_2)}{\sigma_X(t_1)\cdot\sigma_Y(t_2)}$$

Замечание 4: Абсолютное значение нормированной взаимной функции ковариации для любых t_1, t_2 не превосходит единицы: $\left|r_{X,Y}(t_1,t_2)\right| \le 1$.

Пример 3.6. *Найти функцию ковариации случайного процесса* $\xi(t) = U\sin(t)$*, где* U *– случайная величина, числовые характеристики которой:* $MU = 0$; $DU = 1$.

Решение: По определению ковариационной функции:

$$K_\xi(t_1,t_2) = M\left(\overset{\circ}{\xi}(t_1)\cdot\overset{\circ}{\xi}(t_2)\right) = M\left\{\left(\xi(t_1) - m_\xi(t_1)\right)\cdot\left(\xi(t_2) - m_\xi(t_2)\right)\right\},$$

Найдем значение $m_\xi(t_1)$ и $m_\xi(t_2)$:

$$m_\xi(t_1) = M\{U\sin(t_1)\} = MU\cdot M\sin(t_1) = 0;\ m_\xi(t_2) = M\{U\sin(t_2)\} = MU\cdot M\sin(t_2) = 0.$$

Тогда: $K_\xi(t_1,t_2) = M\left\{\left(\xi(t_1) - m_\xi(t_1)\right)\cdot\left(\xi(t_2) - m_\xi(t_2)\right)\right\} = M\{\xi(t_1)\cdot\xi(t_2)\} = R_\xi(t_1,t_2)$.

Ранее было найдено:

$$R_\xi(t_1,t_2) = M\left\{\xi(t_1)\cdot\xi(t_2)\right\} = M\left\{U\sin t_1 \cdot U\sin t_2\right\} = M\left\{U^2\sin t_1\cdot\sin t_2\right\} = \sin t_1\cdot\sin t_2\cdot M\left\{U^2\right\} = \\ = \sin t_1\cdot\sin t_2$$

Использовали $DU = MU^2 + M^2U = MU^2$, т.к. $MU = 0$.

Таким образом, ковариационная и корреляционная функции тождественны для любых моментов времени t_1 и t_2:

$$K_\xi(t_1,t_2) = R_\xi(t_1,t_2) = \sin t_1\cdot\sin t_2$$

Пример 3.7. *Пусть случайный процесс* $\xi(t) = \varphi(t)\cdot V$, $t\in T$, *где* V – *некоторая случайная величина, с математическим ожиданием* $MV = m_V$ *и дисперсией* DV, а $\varphi(t)$ – *неслучайная функция. Найти дисперсию* $D_\xi(t)$ *и функцию ковариации случайного процесса* $K_\xi(t_1,t_2)$.

Решение. Согласно определению математического ожидания случайного процесса:

$$m_\xi(t) = M\left\{\xi(t)\right\} = M\left\{\varphi(t)\cdot V\right\} = \varphi(t)\cdot M\left\{V\right\} = m_V\cdot\varphi(t)\,.$$

Найдем функцию корреляции:

$$R_\xi(t_1,t_2) = M\left\{\xi(t_1)\cdot\xi(t_2)\right\} = M\left\{V\cdot\varphi(t_1)\cdot V\cdot\varphi(t_2)\right\} = \varphi(t_1)\cdot\varphi(t_2)\cdot M\left\{V^2\right\} = \varphi(t_1)\cdot\varphi(t_2)\cdot\left(D_V + m_V{}^2\right)$$

$$K_\xi(t_1,t_2) = M\left\{\left(\xi(t_1) - m_\xi(t_1)\right)\cdot\left(\xi(t_2) - m_\xi(t_2)\right)\right\} = R_\xi(t_1,t_2) - m_\xi(t_1)m_\xi(t_2) =$$

$$= \varphi(t_1)\cdot\varphi(t_2)\cdot\left(D_V + m_V{}^2\right) - m_V{}^2\cdot\varphi(t_1)\cdot\varphi(t_2) = D_V\cdot\varphi(t_1)\cdot\varphi(t_2)\,.$$

Откуда можем найти дисперсию случайного процесса, т.к.

$$K_\xi(t,t) = D_\xi(t)$$

тогда у нас:

$$D_\xi(t) = K_\xi(t,t) = D_V\cdot\varphi^2(t)\,.$$

Пример 3.8. *Пусть задан случайный процесс* $\xi(t) = U\cdot t$, $t\in T$, *где* U – *некоторая случайная величина, с математическим ожиданием* $m_U = 4$ *и дисперсией* $D_U = 10$. *Найти дисперсию* $D_\xi(t)$ *и функцию ковариации случайного процесса* $K_\xi(t_1,t_2)$.

Решение. Найдем математическое ожидание: $m_\xi(t) = M\left[\xi(t)\right] = M\left[U\cdot t\right] = t\cdot M(U) = 4t$.

Найдем центрированную функцию: $\overset{\circ}{\xi}(t) = \xi(t) - m_{\xi}(t) = U \cdot t - 4t = (U-4) \cdot t$;

Откуда $\overset{\circ}{\xi}(t_1) = \left(U-4\right) \cdot t_1, \quad \overset{\circ}{\xi}(t_2) = \left(U-4\right) \cdot t_2$;

Находим функцию ковариации:

$$K_{\xi}(t_1,t_2) = M\left[\overset{\circ}{\xi}(t_1)\overset{\circ}{\xi}(t_2)\right] = M\left[\left(U-4\right)t_1\left(U-4\right)t_2\right] = t_1 \cdot t_2 M\left[\left(U-4\right)^2\right] = t_1 \cdot t_2 D_U = 10 t_1 \cdot t_2$$

Теперь можем найти дисперсию, для чего положим $t_1 = t_2 = t$: $K_{\xi}(t,t) = D_{\xi}(t) = 10t^2$;

Пример 3.9. *Найти нормированную функцию ковариации случайного процесса $\xi(t)$ по его известной функции ковариации случайного процесса $K_{\xi}(t_1,t_2) = 5\cos(t_2 - t_1)$.*

Решение. Искомая нормированная ковариационная функция будет иметь вид:

$$r_{\xi}(t_1,t_2) = \frac{K_{\xi}(t_1,t_2)}{\sigma_{\xi}(t_1)\cdot\sigma_{\xi}(t_2)} = \frac{K_{\xi}(t_1,t_2)}{\sqrt{K_{\xi}(t_1,t_1)\cdot K_{\xi}(t_2,t_2)}} =$$

$$= \frac{5\cos(t_2 - t_1)}{\sqrt{5\cos(t_1 - t_1)\cdot 5\cos(t_2 - t_2)}} = \cos(t_2 - t_1)$$

Пример 3.10. *Пусть случайный процесс $\xi(t) = \sum_{i=1}^{n} Y_i\,\varphi_i(t),\ t \in T$, где Y_i – некоррелированные случайные величины с математическими ожиданиями m_i и дисперсиями D_i, а $\varphi_i(t)$ – заданные на T детерминированные функции. Найти $m_{\xi}(t)$, $D_{\xi}(t)$ и $R_{\xi}(t_1,t_2)$.*

Решение. Согласно определениям математического ожидания и ковариационной и корреляционной функций имеем:

$$m_{\xi}(t) = M\left\{\xi(t)\right\} = M\left\{\sum_{i=1}^{n} Y_i \cdot \varphi_i(t)\right\} = \sum_{i=1}^{n} M\left\{Y_i\right\}\cdot\varphi_i(t) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \varphi_i(t),$$

$$R_{\xi}(t_1,t_2) = M\left\{\xi(t_1)\cdot\xi(t_2)\right\} = M\left\{\sum_{i=1}^{n} Y_i\cdot\varphi_i(t_1)\sum_{i=1}^{n} Y_i\cdot\varphi_i(t_2)\right\} = M\left\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i\cdot Y_i\cdot\varphi_i(t_1)\varphi_i(t_2)\right\} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} M\left\{Y_i\cdot Y_j\right\}\cdot\varphi_i(t_1)\cdot\varphi_i(t_2) = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\sum_{i=1}^{n} M\left\{Y_i\right\}\cdot M\left\{Y_i\right\}\cdot\varphi_i(t_1)\cdot\varphi_i(t_2) + \sum_{i=1}^{n} M\left\{Y_i^2\right\}\cdot\varphi_i(t_1)\cdot\varphi_i(t_2) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot m_j \cdot \varphi_i(t_1)\cdot\varphi_i(t_2) + \sum_{i=1}^{n}\left(D_i + m_i^2\right)\cdot\varphi_i(t_1)\cdot\varphi_i(t_2),$$

$$K_\xi(t_1,t_2) = R_\xi(t_1,t_2) - m_\xi(t_1)\cdot m_\xi(t_2) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_i \cdot m_j \cdot \varphi_i(t_1)\cdot\varphi_i(t_2) + \sum_{i=1}^{n}\left(D_i + m_i^2\right)\cdot\varphi_i(t_1)\cdot\varphi_i(t_2) -$$

$$-\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \varphi_i(t_1)\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \varphi_i(t_2) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} D_i \cdot \varphi_i(t_2)\cdot\varphi_j(t_2),$$

$$D_\xi(t) = K_\xi(t,t) = \sum_{i=1}^{n} D_i \cdot \varphi_i^2(t_2).$$

Задачи по теме для самостоятельного решения

1. Найти математическое ожидание, ковариационную функцию и дисперсию случайного процесса $\xi(t) = U\sin 3t$; где $U -$ случайная величина, $m_U = 10, D_U = 0{,}2$.

2. Дан случайный процесс $\xi(t) = \alpha t + \eta$, $\alpha = const$, $t > 0$, $\eta -$дискретная случайная величина, заданная рядом распределения:

η_i	*–1*	*0*	*1*
p_i	*0,25*	*0,5*	*0,25*

Найти математическое ожидание, дисперсию и ковариационную функцию случайного процесса $\xi(t) = \alpha t + \eta.$.

3. Случайный процесс выражается через элементарную случайную функцию, которая имеет вид $Y(t) = X \cdot \cos t$, где X – дискретная случайная величина, закон распределения которой дан таблицей:

x_i	*1*	*2*	*3*	*4*
p_i	*0,5*	*0,1*	*0,2*	*0,2*

Найти значение корреляционной функции $K_Y(t_1,t_2)$, при $t_1 = 0$, $t_2 = \pi$.

4. Найти нормированную взаимную ковариационную функцию случайных процессов $\xi(t) = Ut$ и $\eta(t) = U(t+1)$; где U - случайная величина, $D_U = 10$.

5. Известны математические ожидания $m_\xi(t) = 2t+1, m_\eta(t) = t-1$ и ковариационные функции $K_\xi(t_1,t_2) = t_1 \cdot t_2, K_\eta(t_1,t_2) = e^{-4(t_2-t_1)^2}$ некоррелированных случайных процессов $\xi(t), \eta(t)$. Найти математическое ожидание, ковариационную функцию случайного процесса $\varsigma(t) = \xi(t) + \eta(t)$.

6. Найти математическое ожидание $m_\xi(t)$, ковариационную функцию $K_\xi(t_1,t_2)$, дисперсию $D_\xi(t)$ случайного процесса $\xi(t) = U\sin t + V\cos t$, где U,V - некоррелированные случайные величины, $m_U = 1, m_V = 8, D_U = D_V = 4$.

7. Заданы случайные функции $\xi(t) = U\cos t + V\sin t, \eta(t) = U\cos 3t + V\sin 3t$, где U,V - некоррелированные случайные величины, $m_U = 0, m_V = 0, D_U = D_V = 5$. Найти нормированную взаимную ковариационную функцию.

8. Найти математическое ожидание $m_\xi(t)$, ковариационную функцию $K_\xi(t_1,t_2)$, дисперсию $D_\xi(t)$ случайного процесса $\xi(t) = U \cdot sht - 3e^{-3t} \cdot V + t^2$, где U,V – некоррелированные случайные величины, $U \sim R(-3;3)$, $V \sim P(1,2)$.

9. Найти ковариационную функцию $K_\zeta(t_1,t_2)$ и дисперсию $D_\zeta(t)$, если $\xi(t), \eta(t)$ – некоррелированные случайные процессы, $\zeta(t) = t^2 \cdot \xi(t) - \eta(t) \cdot \sin 2t + \cos 2t$, и даны ковариационные функции $K_\xi(t_1,t_2) = 1 + \cos(t_2 - t_1)$; $K_\eta(t_1,t_2) = \exp(-|t_2 - t_1|)$.

10. Даны центрированные случайные процессы $\xi(t), \eta(t)$. Для которых известно: $K_\xi(t_1,t_2) = 4\sin t_1 \sin t_2$; $K_\eta(t_1,t_2) = 81\sin t_1 \sin t_2$; $K_{\xi\eta}(t_1,t_2) = 18\sin t_1 \sin t_2$. Найти математическое ожидание $m_\zeta(t)$, ковариационную функцию $K_\zeta(t_1,t_2)$, дисперсию $D_\zeta(t)$, нормированную ковариационную функцию $r_\zeta(t_1,t_2)$ случайного процесса $\zeta(t) = \sin 4t + e^{-2t} \cdot \xi(t) + e^{-t} \cdot \eta(t)$.

4. Стационарные случайные процессы. Эргодические процессы

Важным классом случайных процессов являются стационарные случайные процессы. Стационарные случайные процессы – это такие процессы, которые на различных достаточно больших участках времени протекают приблизительно одинаково.

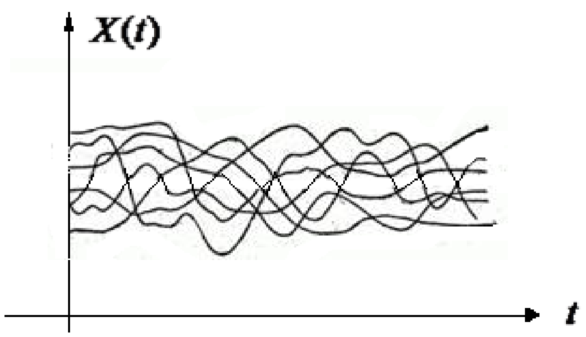
Графики реализаций таких процессов – колеблющиеся линии примерно одинакового характера. Причем средняя амплитуда, средняя частота колебаний, средний уровень, около которого происходят колебания, вычисленные на достаточно большом промежутке времени, существенно не меняются при сдвиге промежутка по оси времени.

Можно сказать, что все ***характеристики*** описанных процессов ***не меняются*** с изменением начала отсчета времени. В частности, ***математическое ожидание*** и ***дисперсия*** такого процесса ***<u>должны быть постоянными</u>***, иначе процесс вел бы себя различно при переходе от сечения к сечению.

<u>К таким процессам относятся:</u> колебания самолета при «автопилоте», колебания напряжения в электрической цепи, давление газа в газопроводе, процесс качки корабля на стационарной волне и т.д.

Стационарные процессы проще для изучения, поскольку описываются более простыми математическими зависимостями. Понятие стационарности случайного процесса отражает идею неизменности (стационарности) условий, в которых он протекает.

Свойство стационарности означает независимость некоторых характеристик сечений процесса от времени. Для реальных процессов это условие дает жесткие ограничения, поэтому на практике, чтобы применять свойства стационарных процессов к исследуемому явлению, рассматривают процесс на достаточно коротком интервале времени, в течение которого вероятностные характеристики изменяются мало.



Определение 1: Случайный процесс $\xi(t)$ называется ***стационарным в узком смысле или строго стационарным***, если его конечномерная функция распределения (или плотность распределения вероятностей) инвариантны относительно сдвига всех моментов времени $t_i \quad i = 1, 2, ..., n$ на одну и ту же величину τ.

$$F_\xi(x_1, t_1, ..., x_n, t_n) = F_\xi(x_1,\, t_1 + \tau, ..., x_n, t_n + \tau),$$

$$p_\xi(x_1, t_1, \cdots, x_n, t_n) = p_\xi(x_1, t_1 + \tau, \cdots, x_n, t_n + \tau), \quad \forall\, \tau, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

Другими словами, *статистические (вероятностные) свойства* стационарного случайного процесса *не зависят от начала наблюдения*.

При $n = 1$, из условия стационарности следует:

$$p(x, t) = p(x, t + \tau).$$

Полагая $t = -\tau$, получим:

$$p(x, t) = p(x),$$

то есть одномерное распределение стационарного случайного процесса не зависит от времени.

Замечание 1: Одномерное распределение определяет *среднее значение* и *дисперсию* случайного процесса, следовательно, для строго стационарного случайного процесса среднее и дисперсия не зависят от времени:

$$m_\xi(t) = m_\xi = \text{const},$$

$$D_\xi(t) = \sigma^2 = \text{const}.$$

При $n = 2$, из условия стационарности, получим равенство:

$$p(x_1, t_1, x_2, t_2) = p(x_1, t_1 + \tau, x_2, t_2 + \tau),$$

полагая в котором $t = -\tau$, запишем:

$$p(x_1, t_1, x_2, t_2) = p(x_1, x_2,\, t_2 - t_1),$$

то есть ***двумерное распределение*** *зависит* лишь *от разности моментов времени*, следовательно, ***функция корреляции*** стационарного случайного процесса *зависит только от одного аргумента:*

$$R_\xi(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1x_2p(x_1,t_1,x_2,t_2)dx_1dx_2==\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_1x_2p(x_1,x_2,t_2-t_1)dx_1dx_2=R_\xi(t_2-t_1).$$

Определение 2. Случайный процесс называется ***стационарным в широком смысле***, если его среднее значение и дисперсия не зависят от времени, а функция корреляции (и ковариации) зависят лишь от разности моментов времени.

Т.е. выполняются свойства:

1) $m_\xi\left(t\right)=M\left[\xi\left(t\right)\right]=M\left[\xi\left(0\right)\right]=const$;

2) $D_\xi\left(t\right)=const$;

3) $R_\xi\left(t_1,t_2\right)=R_\xi\left(t_2-t_1\right)=R\left(\tau\right)$, т.е. $R_\xi\left(t_1,t_2\right)$ зависит от разности аргументов $\tau=t_2-t_1$

4) $K_\xi\left(t_1,t_2\right)=K_\xi\left(t_2-t_1\right)=K\left(\tau\right)$, т.е. $K_\xi\left(t_1,t_2\right)$ зависит от $\tau=t_2-t_1$.

5) $D_\xi(t)=K_\xi\left(t,t\right)=K_\xi\left(t-t\right)=K_\xi\left(0\right)$.

Замечание 2. Из стационарности в узком смысле следует стационарность в широком смысле. Обратное утверждение, вообще говоря, не верно, но для гауссовских процессов (которые будут рассмотрены ниже) верно и обратное утверждение.

Пример 4.1. *Пусть дан случайный процесс* $\eta(t)=\xi_1\cdot\sin\alpha t+\xi_2\cdot\cos\alpha t$, *где* $\alpha=const$ ξ_1,ξ_2 – *независимые случайные величины, с законом распределения:*

ξ_i	-1		1
p_i	$1/2$		$1/2$

Показать, что процесс стационарен в широком смысле, но не стационарен в узком.

Решение:

1. Найдем математическое ожидание и дисперсию $\xi_i,\ i=1,2$: $M\xi_i=0$,

$$D\xi_i=M\xi^2-M^2\xi=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

2. Найдем математическое ожидание и ковариационную функцию процесса $\eta(t)$:

$$M\eta(t) = M\left\{\xi_1 \cdot \sin\alpha t + \xi_2 \cdot \cos\alpha t\right\} = \sin\alpha t \cdot M\xi_1 + \cos\alpha t \cdot M\xi_2 = 0$$

$$K_\eta(t_1, t_2) = R_\eta(t_1, t_2) = M(\eta(t_1), \eta(t_2)) = M\left\{(\xi_1 \sin\alpha t_1 + \xi_2 \cos\alpha t_1)\cdot(\xi_1 \sin\alpha t_2 + \xi_2 \cos\alpha t_2)\right\} =$$
$$= \cos\alpha\left(t_1 - t_2\right) = \cos\alpha\tau$$

Т.е. процесс является стационарным в широком смысле.

3. Для стационарных в узком смысле процессов конечномерные законы распределения не меняются при сдвиге на одну и ту же величину τ . Рассмотрим распределение при $t = 0$:

$$\eta(0) = \xi_1 \cdot \sin 0 + \xi_2 \cdot \cos 0 = \xi_2$$

Рассмотрим теперь распределение, сдвинув на величину $\tau = \dfrac{\pi}{4\lambda}$:

$$\eta(\frac{\pi}{4\lambda}) = \xi_1 \cdot \sin\lambda \cdot \frac{\pi}{4\lambda} + \xi_2 \cdot \cos\lambda \cdot \frac{\pi}{4\lambda} = \xi_1 \cdot \sin\frac{\pi}{4} + \xi_2 \cdot \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\xi_1 + \xi_2\right)$$

Случайная величина $\psi = \xi_1 + \xi_2$ принимает значения:

$$\psi_1 = \xi_1 + \xi_2 = -1 - 1 = -2;\ \psi_2 = \xi_1 + \xi_2 = -1 + 1 = 0;\ \psi_3 = \xi_1 + \xi_2 = 1 + 1 = 2;$$

с вероятностями:

$$P\left\{\psi_1 = -2\right\} = P\left\{\xi_1 = -1, \xi_2 = -1\right\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4};\ P\left\{\psi_1 = 2\right\} = P\left\{\xi_1 = 1, \xi_2 = 1\right\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4};$$
$$P\left\{\psi_1 = 0\right\} = P\left\{\xi_1 = -1, \xi_2 = 1\right\} + P\left\{\xi_1 = 1, \xi_2 = -1\right\} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2};$$

Очевидно, что при сдвиге закон распределения изменился, поэтому процесс не является стационарным в узком смысле.

Свойства ковариационной функции стационарного случайного процесса

1. Ковариационная функция стационарного случайного процесса есть четная функция: $K_\xi\left(\tau\right) = K_\xi\left(-\tau\right)$;
2. Абсолютное значение ковариационной функции стационарного случайного процесса не превышает ее значения в начале координат: $\left|K_\xi\left(\tau\right)\right| \le K_\xi\left(0\right)$;

<u>Определение 3.</u> Нормированной ковариационной функцией стационарного случайного процесса называют неслучайную функцию аргумента, определяемую по формуле:

$$r_\xi(\tau) = \frac{K_\xi(\tau)}{K_\xi(0)}$$

Свойства нормированной ковариационной функции стационарного случайного процесса

1. Абсолютное значение нормированной ковариационная функции стационарного случайного процесса не превышает единицы:

$$\left|r_\xi(\tau)\right| = \left|\frac{K_\xi(\tau)}{K_\xi(0)}\right| \le \frac{K_\xi(0)}{K_\xi(0)} = 1$$

2. При $\tau = 0$ нормированная ковариационная функция равна единице:

$$r_\xi(\tau) = \frac{K_\xi(0)}{K_\xi(0)} = 1\,.$$

Стационарно связанные случайные процессы

<u>Определение 4.</u> Стационарно связанными называют два случайных процесса $\xi(t)$, $\eta(t)$, если их взаимная ковариационная функция зависит только от разности аргументов $\tau = t_2 - t_1$.

$$K_{\xi\eta}(t_1, t_2) = K_{\xi\eta}(t_2 - t_1) = K_{\xi\eta}(\tau)\,.$$

<u>Замечание 3:</u> Взаимная ковариационная функция стационарно связанных случайных процессов обладает следующим свойством: $K_{\xi\eta}(\tau) = K_{\xi\eta}(-\tau)$.

Пример 4.2: *Пусть задан случайный процесс* $\xi(t) = \cos(t + \varphi)$, *где* φ *– случайная величина,* $\varphi \sim R(0,2\pi)$. *Доказать, что* $\xi(t)$ *– стационарный случайный процесс в широком смысле.*

Решение:

1. Найдем математическое ожидание процесса:

$$m_\xi = M\left(\cos(t+\varphi)\right) = M\left(\cos t\cos\varphi - \sin t\sin\varphi\right) = M\left(\cos t\cos\varphi\right) - M\left(\sin t\sin\varphi\right) =$$
$$= \cos t \cdot M\left(\cos\varphi\right) - \sin t \cdot M\left(\sin\varphi\right);$$

Найдем $M\left(\cos\varphi\right)$ и $M\left(\sin\varphi\right)$, т.к. $\varphi \sim R(0,2\pi)$, то функция плотности для равномерно распределенной случайной величины: $p_\xi(x) = \dfrac{1}{2\pi}$, где $x \in [0,2\pi]$, тогда

$$M(\cos\varphi) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \cos\varphi \cdot d\varphi = 0 \text{ и } M(\sin\varphi) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \sin\varphi \cdot d\varphi = 0$$

откуда следует, что $m_\xi(t) = 0$.

2. Найдем ковариационную функцию:

$$K_\xi(t_1, t_2) = \operatorname{cov}(\xi(\mathrm{t}_1), \xi(t_2)) = M\left\{(\xi(t_1) - m_\xi(t_1))(\xi(t_2) - m_\xi(t_2))\right\}$$

$\xi(t_1) - m_\xi(t_1) = \xi(t_1),\ \ \xi(t_2) - m_\xi(t_2) = \xi(t_2)$ т.к. $m_\xi(t) = 0$

Тогда можем записать,

$$M\left\{(\xi(t_1) - m_\xi(t_1))(\xi(t_2) - m_\xi(t_2))\right\} = M\left\{\cos(t_1+\varphi)\cdot\cos(t_2+\varphi)\right\}.$$

Используя известные тригонометрические формулы, получаем:

$$M\left\{\cos(t_1+\varphi)\cdot\cos(t_2+\varphi)\right\} = M\left\{\frac{\cos(t_2-t_1)+\cos(t_2+t_1+2\varphi)}{2}\right\}.$$

В силу того, что

$$M\left\{\frac{\cos(t_2+t_1+2\varphi)}{2}\right\} = 0.$$

Окончательно имеем:

$$K_\xi(t_1, t_2) = M\left\{\frac{\cos(t_2-t_1)}{2}\right\}.$$

Таким образом, получили, что математическое ожидание случайного процесса постоянно $m_\xi(t) = 0$ при всех значениях аргумента t, а ковариационная функция зависит только от разности аргументов $t_2 - t_1$. Окончательно делаем вывод, действительно $\xi(t)$ – стационарный случайный процесс в широком смысле.

Пример 4.3: *Задана ковариационная функция* $K_\xi(\tau) = \frac{1}{2}\cos\tau$ *стационарного случайного процесса* $\xi(t)$. *Найти нормированную ковариационную функцию.*

Решение: Используя определение нормированной ковариационной функции стационарного случайного процесса, найдем:

$$r_{\xi}(\tau)=\frac{K_{\xi}(\tau)}{K_{\xi}(0)}=\frac{\frac{1}{2}\cos\tau}{\frac{1}{2}\cos 0}=\cos\tau.$$

Пример 4.4: *Заданы два стационарных случайных процесса* $\xi(t)=\cos(t+\varphi)$ *и* $\eta(t)=\sin\,(t+\varphi)$, *где* φ *– случайная величина,* $\varphi\sim R(0,2\pi)$. *Доказать, что* $\xi(t)$ *и* $\eta(t)$ *– стационарно связаны.*

Решение:

1. В примере 4.1. было показано, что математическое ожидание случайного процесса $\xi(t)$: $m_{\xi}(t)=0$, аналогично можно показать и для случайного процесса $\eta(t)$: $m_{\eta}(t)=0$.

2. Можем записать выражение для центрированных случайных процессов $\overset{\circ}{\xi}(t)$ и $\overset{\circ}{\eta}(t)$:

$$\overset{\circ}{\xi}(t)=\cos(t+\varphi),\overset{\circ}{\eta}(t)=\sin(t+\varphi).$$

3. Взаимная ковариационная функция имеет вид:

$$K_{\xi\eta}(t_1,t_2)=M\left\{\overset{\circ}{\xi}(t_1)\overset{\circ}{\eta}(t_2)\right\}=M\left\{\cos(t_1+\varphi)\cdot\sin(t_2+\varphi)\right\}=M\left\{\frac{\sin(t_2-t_1)+\sin(t_2+t_1+2\varphi)}{2}\right\}$$

Найдем значение:

$$M\left\{\frac{\sin(t_2+t_1+2\varphi)}{2}\right\}=M\left\{\frac{\sin(t_2+t_1)\cos 2\varphi+\cos(t_2+t_1)\sin 2\varphi}{2}\right\}=$$
$$=\frac{\sin(t_2+t_1)}{2}M\cos 2\varphi+\frac{\cos(t_2+t_1)}{2}M\sin 2\varphi;$$

$$M(\cos 2\varphi)=\int_0^{2\pi}\frac{1}{4\pi}\cos 2\varphi\, d2\varphi=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\cos 2\varphi\, d2\varphi=0;$$

$$M(\sin 2\varphi)=\int_0^{2\pi}\frac{1}{4\pi}\sin 2\varphi\, d2\varphi=\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\sin 2\varphi\, d2\varphi=0.$$

Окончательно получаем, что: $M\left\{\frac{\sin(t_2+t_1+2\varphi)}{2}\right\}=0$;

Поэтому из выражения ковариационной функции:

$$K_{\xi\eta}(t_1,t_2)=M\left\{\overset{\circ}{\xi}(t_1)\overset{\circ}{\eta}(t_2)\right\}=M\left\{\frac{\sin(t_2-t_1)+\sin(t_2+t_1+2\varphi)}{2}\right\}=M\left\{\frac{\sin(t_2-t_1)}{2}\right\}+M\left\{\frac{\sin(t_2+t_1+2\varphi)}{2}\right\}$$

можем окончательно записать:

$$K_{\xi\eta}(t_1,t_2)=M\left\{\frac{\sin(t_2-t_1)}{2}\right\}=\frac{\sin\left(t_2-t_1\right)}{2},$$

т.е. взаимная ковариационная функция зависит только от разности аргументов, следовательно, $\xi(t)$ и $\eta(t)$ – стационарно связанные случайные процессы.

Эргодические случайные процессы

На практике довольно редко удается получить большое количество реализаций. Часто бывает, что для исследования предлагается всего одна реализация, а повторение опыта по тем или иным причинам невозможно.

Поэтому возникает вопрос: Нельзя ли найти характеристики случайного процесса путем усреднения соответствующих величин ***по времени***?

Ответ: В общем случае отрицательный.

Но: Можно выделить классы случайных процессов, для которых поставленный вопрос решается полностью или частично.

Например: Для некоторых стационарных процессов каждая реализация достаточно хорошо представляет весь процесс в целом. Поэтому значения рассматриваемого сечения такого процесса можно заменить значениями какой-либо одной реализации.

Определение 5. Стационарные процессы, для которых временные средние случайных величин, определяемых процессом, совпадают со средними этих же величин по множеству всех реализаций, называются ***эргодическими случайными процессами***.

Эргодическая теория выясняет, при каких условиях возможна замена одних средних другими и в каком смысле средние по времени на промежутке $\left[-T,T\right]$ приближаются к оцениваемым величинам, т.е. в каких случаях можно предположить, что одна-единственная реализация достаточной продолжительности может служить опытным материалом для получения характеристик всего случайного процесса.

Название «эргодический» происходит от греческих слов $\varepsilon\rho\gamma o\nu$ – работа и $o\delta o\zeta$ – путь. Оно появилось впервые в статистической физике в теориях, где приходится сравнивать средние величины физической системы (температура, давление), найденные по всем фазовым состояниям системы, со средними в пределах одного эксперимента, т.е. по одной реализации. Эргодическая гипотеза о замене фазовых средних временными была выдвинута в начале 70-х гг. XIX в. австрийским физиком Л. Больцманом. Первые исследования в эргодической теории принадлежат американскому математику Г. Биркхофу и российскому математику А.Я. Хинчину.

Большинство стационарных случайных процессов обладают важным для практики ***эргодическим свойством***, т.е. каждая отдельная реализация случайного процесса является представителем всей совокупности возможных реализаций; одна реализация достаточной продолжительности может заменить при обработке множество реализаций той же общей продолжительности. И отдельные характеристики таких процессов, могут быть определены как соответствующие средние по времени для одной реализации достаточно большой продолжительности.

Таким образом ***для стационарных случайных процессов*** кроме *средних статистических характеристик* вводятся ещё характеристики: *средние по времени*.

Выберем k-ю реализацию – $\xi^{(k)}(t)$ случайного процесса и будем наблюдать её в течение времени $2T$.

Рассмотрим ***среднее по времени*** значение этой реализации:

$$\left\langle \xi^{(k)} \right\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \xi^{(k)}(t)\ dt = \tilde{m}_{\xi}$$

Замечание 4. Здесь символ $\langle\rangle$ обозначает *усреднение по времени*, в отличие от символа математического ожидания M – *усреднения по распределению*, или *статистического усреднения.*

Это ***среднее по времени*** можно рассматривать как постоянную составляющую случайного процесса $\xi(t)$.

Аналогично можно определить ***усреднённую по времени функцию корреляции для стационарного процесса:***

$$\tilde{R}_{\xi}(\tau) = \left\langle \xi^{(k)}(t)\cdot\xi^{(k)}(t+\tau) \right\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \xi^{(k)}(t)\cdot\xi^{(k)}(t+\tau)\ dt\ .$$

<u>Определение 6</u>. Случайный процесс будем называть ***эргодическим***, если любая его статистическая характеристика, равна соответствующей характеристике, полученной усреднением по времени одной единственной реализации.

<u>Определение 7.</u> Случайный процесс $\xi(t)$ называется ***эргодическим по отношению к математическому ожиданию***, если:

1) математическое ожидание постоянно $m_{\xi}(t) = const$;

2) временное среднее по промежутку $[-T,T]$ в среднем квадратическом сходится к математическому ожиданию $\left\langle \xi^{(k)} \right\rangle = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} \xi^{(k)}(t)\ dt = \tilde{m}_{\xi}$.

Условия, при выполнении которых можно проверить эргодичность процесса по отношению к математическому ожиданию, сформулированы в следующей теореме.

<u>Теорема 1</u>. Для того, чтобы случайный процесс $\xi(t)$, имеющий постоянное математическое ожидание, был эргодическим по отношению к математическому ожиданию, достаточно выполнения условий: $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{D_{\xi}(t)}{t} = 0$, $\lim\limits_{|t_1 - t_2|\to\infty} K_{\xi}(t_1, t_2) = 0$.

Первое условие теоремы означает ограниченность или слабый рост дисперсии при $t \to \infty$. Второе условие означает ослабление до нуля корреляционной связи между сечениями при неограниченном увеличении промежутка времени между моментами t_1 и t_2.

Пример 4.5. Известны математическое ожидание и корреляционная функция случайного процесса $\xi(t)$: $m_{\xi}(t) = t^2 - 1$, $K_{\xi}(t_1, t_2) = e^{-|t_2 - t_1|}$. Проверить, будет ли центрированный процесс эргодическим по отношению к математическому ожиданию.

Решение:

1. Поскольку математическое ожидание случайного процесса $\xi(t)$ не является постоянным, то сам процесс не эргодический.

2. По определению, для центрированного случайного процесса $\overset{\circ}{\xi}(t)$, математическое ожидание равно нулю, поскольку $\overset{\circ}{\xi}(t) = \xi(t) - m_{\xi}(t)$, следовательно, центрированный процесс может оказаться эргодическим по отношению к математическому ожиданию.

Проверим достаточные условия эргодичности по отношению к математическому ожиданию. Дисперсия процесса $D_\xi(t)=K_\xi(t,t)=e^{-|t-t|}=1$, поэтому $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{D_\xi(t)}{t}=\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{t}=0$. Проверка условия эргодичности для корреляционной функции $\lim\limits_{|t_1-t_2|\to\infty}K_\xi(t_1,t_2)=\lim\limits_{|t_1-t_2|\to\infty}e^{-|t_2-t_1|}=0$ показывает, что достаточные условия выполнены, следовательно, центрированный случайный процесс является эргодическим по отношению к математическому ожиданию.

Для стационарных в широком смысле случайных процессов достаточные условия эргодичности процесса по отношению к математическому ожиданию могут быть записаны в более простой форме.

Теорема 2. Для того, чтобы стационарный в широком смысле случайный процесс был эргодическим по отношению к математическому ожиданию, достаточно выполнения условия $\lim\limits_{\tau\to\infty}K_\xi(\tau)=0$.

Пример 4.6. Стационарный в широком смысле случайный процесс $\xi(t)$ имеет корреляционную функцию $K_\xi(\tau)=\frac{2}{1+\tau^2}$. Проверить, является ли процесс эргодическим по отношению к математическому ожиданию.

Решение. Для стационарного в широком смысле процесса математическое ожидание и дисперсия постоянны, поэтому условия $m_\xi(t)=const$ и $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{D_\xi(t)}{t}=0$ выполнены. Проверим условие $\lim\limits_{\tau\to\infty}K_\xi(\tau)=0$. Действительно, $\lim\limits_{\tau\to\infty}K_\xi(\tau)=\lim\limits_{\tau\to\infty}\frac{2}{1+\tau^2}=0$, откуда и следует эргодичность процесса по отношению к математическому ожиданию.

Рассмотрим пример стационарного, но неэргодического процесса.

Пример 4.7. Пусть дан случайный процесс $\xi(t)=\eta(t)+\zeta$, где $\eta(t)$ – эргодический случайный процесс с характеристиками $M\eta=m_\eta$, $K_\eta(\tau)$, а ζ – некоторая случайная величина с числовыми характеристиками $M\zeta=m_\zeta=const$, $D\zeta=D_\zeta=const\neq 0$. Для любого момента времени t: $\eta(t)$ и ζ некоррелированы. Показать, что случайный процесс не является эргодическим.

Решение: Найдем характеристики случайного процесса $\xi(t)$:

Так как величины $\eta(t)$ и ζ для любого t некоррелированы, то характеристики случайного процесса $\xi(t)$ будут следующими: $M\left(\eta(t)+\zeta\right)=m_\eta+M\zeta$, $K_\xi(\tau)=K_\eta(\tau)+D\zeta$. для нахождения ковариационной функции случайного процесса $\xi(t)$, который является суммой, воспользовались таким свойством: если имеется процесс $\zeta(t)=\xi(t)+\eta(t)$, то его ковариационная функция равна $K_\zeta(t_1,t_2)=K_\xi(t_1,t_2)+K_\eta(t_1,t_2)+K_{\xi\eta}(t_1,t_2)+K_{\eta\xi}(t_1,t_2)$, в силу того, что $\eta(t)$ и ζ некоррелированы: $K_{\zeta\eta}(t_1,t_2)=K_{\eta\zeta}(t_1,t_2)=0$ и $K_\zeta(t,t)=D_\zeta$, поэтому $K_\xi(\tau)=K_\eta(\tau)+D\zeta$.

Можем сделать заключение, что случайный процесс $\xi(t)=\eta(t)+\zeta$ является стационарным в широком смысле, т.к. математическое ожидание константа и ковариационная функция зависит лишь от $\tau=t_1-t_2$.

Но к сожалению этот процесс не будет эргодическим, т.к. каждая его реализация будет по характеру отличаться от других в зависимости от того, какое значение приняла случайная величина ζ .

Рассмотрим ковариационную функцию случайного процесса $\xi(t)=\eta(t)+\zeta$. Она отличается от ковариационной функции случайного процесса $\eta(t)$ наличием постоянного слагаемого $D\zeta$. Поэтому при $\tau\to\infty$ получаем $\lim\limits_{\tau\to\infty}K_\xi(\tau)=\lim\limits_{\tau\to\infty}\left(K_\eta(\tau)+D\zeta\right)=\lim\limits_{\tau\to\infty}\left(0+D\zeta\right)=D\zeta\neq0$. И стало быть условие эргодичности не выполняется.

Таким образом, неэргодичность случайного процесса может быть связана с наличием в его составе слагаемого в виде обычной случайной величины.

Замечание 5:

1. ***Необходимым и достаточным условием*** эргодичности процесса по отношению к дисперсии является: $\lim\limits_{l\to\infty}\dfrac{1}{l^2}\int\limits_0^l\int\limits_0^l K_\eta(t_1,t_2)\,dt_1dt_2=0,\ t\in T=[0,l]$.

2. ***Достаточным условием*** эргодичности стационарного случайного процесса по отношению к дисперсии: $\lim\limits_{|t_1-t_2|\to\infty}K_\xi(t_1,t_2)=0$.

Итак, если случайный процесс эргодический, то любая его реализация определяет свойства всего ансамбля и поэтому результат усреднения по времени, выполненный по одной реализации, совпадает с соответствующей статистической характеристикой процесса, то есть

$$m_{\xi}(t) = \tilde{m}_{\xi}, K_{\xi}(\tau) = \tilde{K}_{\xi}, R_{\xi}(\tau) = \tilde{R}_{\xi}.$$

Можно ввести и _другие средние по времени характеристики эргодического процесса_.

Так, ***среднее время пребывания процесса ниже уровня*** x совпадает с вероятностью того, что значения случайного процесса в любой момент времени меньше, чем x, то есть

$$\tilde{F}(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} C\left(x - \xi^{(k)}(t)\right) dt = P\{\xi(t) < x\},$$

здесь

$$C(y) = \begin{cases} 1, & y > 0 \\ 0, & y \le 0 \end{cases}$$

Одномерная характеристическая функция определяется: как ***среднее по времени значение процесса*** $\exp\left\{i\xi^{(k)}(t)u\right\}$, то есть в виде:

$$\tilde{g}_{\xi}(u) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \exp\left\{ i\xi^{(k)}(t)u\right\} dt .$$

Пример 4.8. Дан случайный процесс $X(t) = (U+2)\cdot\cos 7t - V\cdot\sin 7t$, где $U \sim N\left(-2,\sqrt{3}\right)$ и $V \sim R(-3,3)$. Показать, что случайный процесс стационарен в широком смысле. Проверить свойство эргодичности для математического ожидания и корреляционной функции.

Решение:

1. Запишем числовые характеристики для случайных величин U и V, т.к. известны законы распределения обеих: $MU = -2,\ DU = 3$ и

$$MV = \frac{a+b}{2} = \frac{-3+3}{2} = 0,\quad DV = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{36}{12} = 3$$

2. Найдем математическое ожидание случайного процесса $X(t) = (U+2)\cdot\cos 7t - V\cdot\sin 7t$:

$$MX(t) = M\left\{(U+2)\cdot\cos 7t - V\cdot\sin 7t\right\} = \cos 7t\cdot M(U+2) - \sin 7t\cdot MV =$$
$$\cos 7t\cdot\left\{MU+2\right\} - \sin 7t\cdot MV = \cos 7t\cdot\left\{-2+2\right\} - \sin 7t\cdot 0 = 0 = const$$

Т.к. математическое ожидание процесса равно нулю, то функции ковариации и корреляции тождественны, т.е. $R_X\left(t_1,t_2\right) = K_X\left(t_1,t_2\right)$.

3. Найдем ковариационную функцию случайного процесса $X(t) = (U+2)\cdot\cos 7t - V\cdot\sin 7t$ по определению:

$$K_X\left(t_1,t_2\right) = M\left\{\overset{\circ}{X}(t_1)\cdot\overset{\circ}{X}(t_2)\right\} = M\left\{\left((U+2)\cdot\cos 7t_1 - V\cdot\sin 7t_1\right)\cdot\left((U+2)\cdot\cos 7t_2 - V\cdot\sin 7t_2\right)\right\} =$$
$$= M\begin{Bmatrix}\left((U+2)^2\cos 7t_1\cdot\cos 7t_2\right) - \left(V\cdot(U+2)\sin 7t_1\cdot\cos 7t_2\right) - \\ -\left(V\cdot(U+2)\sin 7t_2\cdot\cos 7t_1\right) + \left(V^2\cdot\sin 7t_1\sin 7t_2\right)\end{Bmatrix} =$$
$$= M\left\{\left((U+2)^2\cos 7t_1\cdot\cos 7t_2\right) - \left(V\cdot(U+2)\sin 7\left(t_1+t_2\right)\right) + \left(V^2\cdot\sin 7t_1\sin 7t_2\right)\right\}$$

т.к. $M(U+2)^2 = DU$ и $DV = MV^2 - M^2V = MV^2 - 0 = MV^2$

можем переписать выражение для $K_X\left(t_1,t_2\right)$:

$$K_X\left(t_1,t_2\right) = \cos 7t_1\cdot\cos 7t_2\cdot M\left((U+2)^2\right) - \sin 7\left(t_1+t_2\right)\cdot M\left(V\cdot(U+2)\right) + \sin 7t_1\sin 7t_2\, M\left(V^2\right) =$$
$$= \cos 7t_1\cdot\cos 7t_2\cdot DU - \sin 7\left(t_1+t_2\right)\cdot M\left(V\cdot(U+2)\right) + \sin 7t_1\sin 7t_2\cdot DV =$$
$$= 3\cdot\cos 7t_1\cdot\cos 7t_2 + 3\cdot\sin 7t_1\sin 7t_2 - \sin 7\left(t_1+t_2\right)\cdot M\left(V\cdot(U+2)\right) =$$
$$= 3\cdot\left\{\cos 7t_1\cdot\cos 7t_2 - \sin 7t_1\sin 7t_2\right\} - \sin 7\left(t_1+t_2\right)\cdot M\left(V\cdot(U+2)\right) =$$
$$= 3\cdot\cos 7\left(t_1-t_2\right) - \sin 7\left(t_1+t_2\right)\cdot M\left(V\cdot(U+2)\right)$$

т.к.

$$M\left(V\cdot(U+2)\right) = MV\cdot M(U+2) = 0$$

то окончательно***:***

$$K_X\left(t_1,t_2\right) = 3\cdot\cos 7\left(t_1-t_2\right) - \sin 7\left(t_1+t_2\right)\cdot M\left(V\cdot(U+2)\right) = 3\cdot\cos 7\left(t_1-t_2\right)$$

Заключение: т.к. $MX(t) = const$ и $K_X\left(t_1,t_2\right) = 3\cdot\cos 7\left(t_1-t_2\right) = 3\cdot\cos 7\left(\tau\right)$ процесс стационарен в широком смысле.

4. Проверим свойство эргодичности для математического ожидания и корреляционной функции случайного процесса:

Пусть $x(t) = u \cdot \cos 7t - v \cdot \sin 7t$ – реализация случайного процесса, преобразуем выражение для $x(t)$ по формуле: $x(t) = u \cdot \cos 7t - v \cdot \sin 7t = a\cos\left(7t + \varphi\right)$, где $a = \sqrt{u^2 + v^2}$, $\cos\varphi = \dfrac{u}{a}$, $\sin\varphi = \dfrac{v}{a}$

Подставим в равенство: $\tilde{m}_\xi = \left\langle \xi^{(k)} \right\rangle = \lim\limits_{T\to\infty} \dfrac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} \xi^{(k)}(t)\ dt$

$$\tilde{m}_\xi = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} a \cdot \cos\left(7t + \varphi\right)\ dt = \lim_{T\to\infty} \frac{a}{14 \cdot T} \int_{-T}^{T} \cos\left(7t + \varphi\right)\ d\left(7t + \varphi\right) = \lim_{T\to\infty} \frac{a}{14 \cdot T} \cdot \sin\Big(7t + \varphi\Big)\Big|_{-T}^{T} = 0$$

Т.е. можем сделать вывод, что случайный процесс эргодичен относительно математического ожидания.

5. Для корреляционной функции исследуемого случайного процесса:

$$\tilde{R}_\xi(\tau) = \left\langle \xi^{(k)}(t) \cdot \xi^{(k)}(t+\tau) \right\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} a \cdot \cos\left(7t + \varphi\right) \cdot a \cdot \cos\left(7(t+\tau) + \varphi\right)\ dt =$$
$$= \lim_{T\to\infty} \frac{a^2}{2T} \int_{-T}^{T} \cos\left(7t + \varphi\right) \cdot \cos\left(7(t+\tau) + \varphi\right)\ dt$$

используем формулу произведение косинусов $\cos\left(\alpha\right) \cdot \cos\left(\beta\right) = \dfrac{1}{2}\left[\cos\left(\alpha - \beta\right) + \cos\left(\alpha + \beta\right)\right]$:

$$\cos\left(7t + \varphi\right) \cdot \cos\left(7(t+\tau) + \varphi\right) = \frac{1}{2}\Big[\cos\left[\left(7t + \varphi\right) + 7(t+\tau) + \varphi\right] + \cos\left[\left(7t + \varphi\right) - \left(7(t+\tau) + \varphi\right)\right]\Big] =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\cos\left(14t + 2\varphi + \tau\right) + \cos\tau\ \right]$$

Подставим полученное в интеграл:

$$\tilde{R}_\xi(\tau) = \left\langle \xi^{(k)}(t) \cdot \xi^{(k)}(t+\tau) \right\rangle = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} a \cdot \cos\left(7t + \varphi\right) \cdot a \cdot \cos\left(7(t+\tau) + \varphi\right)\ dt =$$
$$= \lim_{T\to\infty} \frac{a^2}{4T} \int_{-T}^{T} \left[\cos\left(14t + 2\varphi + 7\tau\right) + \cos 7\tau\ \right]\ dt = \lim_{T\to\infty} \frac{a^2}{4T} \left\{ \int_{-T}^{T} \left[\cos\left(14t + 2\varphi + 7\tau\right)\ \right]\ dt + \int_{-T}^{T} \left[\cos\left(7\tau\right)\ \right]\ dt \right\} =$$
$$= \lim_{T\to\infty} \frac{a^2}{4T} \left\{ \frac{1}{14}\Big[\sin\Big(14t + 2\varphi + 7\tau\Big)\Big]\Big|_{-T}^{T} + \cos 7\tau \cdot t\Big|_{-T}^{T} \right\} = \lim_{T\to\infty} \frac{a^2 \cdot \cos 7\tau}{4T} \cdot 2T = \lim_{T\to\infty} \frac{a^2 \cdot \cos 7\tau}{2} = \frac{a^2 \cdot \cos 7\tau}{2}$$

Полученный результат не совпадает с ранее полученным выражением для корреляционной функции:

$$R_x(t_1, t_2) = K_x(t_1, t_2) = 3 \cdot \cos 7(\tau)$$

следовательно, процесс не является эргодическим относительно корреляционной функции.

Задачи по теме для самостоятельного решения

1. Задана случайный процесс $X(t) = \cos(t + \varphi)$, где φ – случайная величина, распределенная равномерно в интервале $(0, 2\pi)$. Доказать, что $X(t)$ – строго стационарный процесс.

2. Является ли стационарным случайный процесс $X(t) = U \sin t + V \cos t$, где U, V – некоррелированные случайные величины $m_U = m_V = 0,\ D_U = D_V = D.$

3. Известна ковариационная функция $K_\xi(\tau)$ стационарного процесса $\xi(t)$. Доказать, что если $\eta(t) = a \cdot \xi(t)$, то $K_\eta(\tau) = a^2 \cdot K_\xi(\tau)$.

4. Задана случайный процесс $\xi(t) = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$, где φ – случайная величина, распределенная равномерно в интервале $[-\pi, \pi]$, $A = const,\ \omega = const.$

Определить, является ли процесс эргодическим относительно математического ожидания и дисперсии.

5. Заданы два стационарных случайных процесса $X(t) = \cos(t + \varphi), Y(t) = \sin(t + \varphi)$, где φ – случайная величина, распределенная равномерно в интервале $(0, 2\pi)$. Доказать, что эти функции стационарно связаны.

6. Значения случайного процесса $X(t)$ изменяются скачками в случайные моменты времени t_k, $k = 0,1,3,\ldots$. Моменты скачков образуют простейший (пуассоновский) поток событий интенсивности μ, т.е. вероятность того, что за время τ произойдет k скачков равна: $\frac{(\mu \cdot \tau)^k}{k!} e^{-\mu \cdot \tau}$.

В интервале $\left(t_k, t_{k+1}\right)$ между двумя скачками процесс $X(t)$ может принимать лишь два значения 0 или 1 с вероятностями соответственно $1-p=q$ и p. Значения $X(t)$ в различных интервалах независимы (такой процесс называют фототелеграфным сигналом.) Выяснить является ли этот процесс стационарным в широком смысле.

7. Случайный процесс $\xi(t)$ формируется так: на оси Ot имеется простейший поток событий с интенсивностью λ. Случайный процесс попеременно принимает значения +1 и –1, при наступлении очередного события в простейшем потоке случайный процесс скачком меняет свое состояние с +1 на –1 или наоборот, оба значения равновероятны. Найти характеристики случайного процесса и выяснить является ли этот процесс стационарным в широком смысле и эргодическим.

8. Случайный процесс $\xi(t)$ формируется так: на оси Ot имеется простейший поток событий с интенсивностью λ. В момент наступления i-го события случайный процесс принимает случайное значение X_i, сохраняя его до следующего события в потоке. В начальный момент времени $t=0$: $X(0)=X_0$. Найти характеристики случайного процесса и выяснить является ли этот процесс стационарным и эргодическим.

9. U и V – независимые случайные величины, распределенные по экспоненциальному закону с параметрами λ_1 и λ_2, соответственно. Найти математическое ожидание, дисперсию и функцию корреляции процесса $S(t)=U+Vt$. Выяснить является ли этот процесс стационарным?

10. Случайный процесс $S(t)=U\cdot e^{-\alpha t}+V\cdot e^{-\beta t}$, где U и V – некоррелированные случайные величины с нулевым математическим ожидание, α и β неслучайные величины. Найти математическое ожидание, дисперсию и функцию корреляции процесса $S(t)$. Определить, является ли данный процесс стационарным, по крайней мере, в широком смысле.

11. Пусть $X(t)$, $t\ge 0$ пуассоновский случайный процесс с параметром λ. Доказать, что случайный процесс $Y(t)=X\left(t+1\right)-X\left(t\right)$, $t\ge 1$. является стационарным в широком смысле.

12. Случайный процесс $X(t)$ имеет вид $X(t)=b\cdot\sin(\omega t+\varphi)$, где $b,\omega-$ известные числа, φ – случайная величина с плотностью распределения вероятностей $f(x)$, $t\ge 0$. Исследовать случайный процесс $X(t)$ на стационарность и на эргодичность в следующих случаях:

a) $f(x)=\cos x$ при $x\in[0,\pi/2]$

b) $f(x)=\frac{1}{2}\pi$ при $x\in[0,2\pi]$ и $f(x)=0$ при $x\notin[0,2\pi]$

13. Случайный процесс $\xi(t)$ задан четырьмя равновероятными реализациями:

$$\xi_{\omega_1}(t)=1,\quad \xi_{\omega_2}(t)=-2,\quad \xi_{\omega_3}(t)=\sin\pi t,\quad \xi_{\omega_4}(t)=\cos\pi t,$$

Найти математическое ожидание, дисперсию и функцию корреляции процесса $\xi(t)$. Является ли этот процесс стационарным, по крайней мере в широком смысле?

14. Доказать, что сумма независимых стационарных случайных процессов является стационарным случайным процессом.

15. Пусть X и $Y-$ независимые одинаково распределенные случайные величины, принимающие значения -1 и 1 с вероятностями $1/2$. Исследовать на стационарность случайный процесс $\xi(t)=X\cdot\cos\lambda t+Y\cdot\sin\lambda t,\ t\ge 0$

5. Линейные преобразования случайных процессов

Представим, что имеется некая динамическая система L (прибор, механизм, система автоматического управления и т.д.), на вход которой поступают непрерывно определенные данные (входной случайный процесс). Система обрабатывает данные и после обработки, они преобразуются в некоторый результат (выходной случайный процесс).

Входной случайный процесс называют <u>*воздействием*</u>, а ***выходной*** – <u>*реакцией*</u> системы, или ее откликом.

Будем считать, что на вход системы подается случайный процесс $X(t)$, а на выходе получается процесс $Y(t)$. Т.е. система L выполняет некоторое преобразование входного сигнала: $Y(t) = L\Big(X(t)\Big)$.

Задача относительно этой ситуации формулируется так: если входной процесс $X(t)$ задан и известны его характеристики: ***математическое ожидание*** и ***корреляционная функция***, требуется найти аналогичные характеристики для выходного процесса $Y(t)$, т.е. необходимо определить реакцию (или отклик) системы.

Преобразование L может быть любой сложности и любого характера. Поэтому в общем случае решить задачу нахождения характеристик выходного сигнала затруднительно. Но данная задача может быть решена совершенно точно в случае, когда преобразование L принадлежит к классу линейных преобразований и соответственно система L принадлежит к классу линейных систем.

Пусть $X_1(t)$ и $X_2(t)$ – два случайных процесса, C_1, C_2 – произвольные константы.

<u>Определение 1.</u> ***Линейным однородным преобразованием*** (***линейным оператором***) L называется преобразование (отображение), обладающее следующими свойствами:

1) $L\big(C \cdot X_1(t)\big) = C \cdot L\big(X_1(t)\big)$ – постоянную величину можно выносить за знак оператора;

2) $L\big(X_1(t) + X_2(t)\big) = L\big(X_1(t)\big) + L\big(X_2(t)\big)$ – к сумме функций оператор L может применяться почленно.

Свойства однородного линейного преобразования можно объединить в одно:

$$L\left(C_1X_1(t)+C_2X_2(t)\right)=C_1L\left(X_1(t)\right)+C_2L\left(X_2(t)\right).$$

Примерами линейных однородных операторов являются: оператор дифференцирования, оператор интегрирования, оператор умножения на заданную функцию и др.

Линейные преобразования называются ***неоднородными***, если они состоят из линейных однородных операций с прибавлением заданной неслучайной функции:

$$L_n\left(X(t)\right)=L\left(X(t)\right)+\varphi(t).$$

Примерами линейных неоднородных операторов являются: $X(t)=\dfrac{dY(t)}{dt}+f(t)$, $X(t)=\int\limits_0^t Y(\tau)\,d\tau+f(t)$; $X(t)=f(t)\cdot Y(t)+\varphi(t)$.

Мы будем рассматривать в основном линейные однородные операторы: дифференцирования $X(t)=\dfrac{dY(t)}{dt}$ и интегрирования $X(t)=\int\limits_0^t Y(\tau)\,d\tau$.

Теорема 1. Если $X(t)$ – случайный процесс, имеющий математическое ожидание $m_x(t)$ и корреляционную функцию $K_x(t_1,t_2)$, преобразуется линейным однородным оператором L в случайный процесс $Y(t)$: $Y(t)=L\Big(X(t)\Big)$, то его математическое ожидание $m_y(t)$ получается из математического ожидания $m_x(t)$ при помощи того же линейного оператора $m_y(t)=L\Big(m_x(t)\Big)$, а для нахождения корреляционной функции $K_y(t_1,t_2)$ нужно применить к функции $K_y(t_1,t_2)$ соответствующий линейный однородный оператор L один раз по t_1, другой раз, к вновь полученному выражению, – по t_2: $K_y(t_1,t_2)=L^{(t_2)}\Big(L^{(t_1)}\Big(K_x(t_1,t_2)\Big)\Big)$

Теорема 2. Для дифференцируемого на множестве T случайного процесса $\xi(t)$, $t\in T$ с математическим ожиданием $m_\xi(t)$ и ковариационной функцией $K_\xi(t_1,t_2)$ определен случайный процесс $\xi'(t), t\in T$, и при этом, если случайный процесс $\eta(t)=\xi'(t)$, то

1) $m_\eta(t) = \frac{d}{dt} m_\xi(t)$;

2) $K_\eta(t_1, t_2) = \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} K_\xi(t_1, t_2)$.

Если к тому же $\xi(t)$ еще и стационарный процесс, то

1) $m_\eta(t) = 0$;

2) $K_\eta(t_1, t_2) = -K_\xi^{'}(\tau)$.

Теорема 3. Для интегрируемого на множестве T случайного процесса $\xi(t)$, $t \in T$ с математическим ожиданием $m_\xi(t)$ и ковариационной функцией $K_\xi(t_1, t_2)$ определен случайный процесс $\int_a^b \xi(t)\,dt$, $[a,b] \subset T$, и при этом, если случайный процесс $\eta(t) = \int_a^b \xi(t)dt$, то

1) $M\eta = M\left(\int_a^b \xi(t)dt\right) = \int_a^b m_\xi(t)\,dt$,

2) $K_\eta(t_1, t_2) = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} K_\xi(\tau_1, \tau_2)\; d\tau_1\, d\tau_2$

3) $\operatorname{cov}\left(\int_a^b \xi(t)dt,\;\; \xi(\tau)\right) = \int_a^b K_\xi(t,\tau)dt,\; \tau \in T$

4) $\operatorname{cov}\left\{\int_a^b \xi(t)dt,\;\; \int_c^d \xi(\tau)d\tau\right\} = \int_a^b\int_c^d K_\xi(t,\tau)\,dt\,d\tau,\; [a,b],[c,d] \subset T$

5) $D\left\{\int_c^d \xi(t)dt\right\} = \int_a^b\int_a^b K_\xi(t,\tau)\,dt\,d\tau$

Рассмотрим примеры.

Пример 5.1. *Зная математическое ожидание $m_\xi(t) = t^2 + t$ случайного процесса $\xi(t)$, найти математическое ожидание ее производной $m_{\xi'}(t) = m_\eta(t)$.*

Решение: Искомое математическое ожидание $m_{\xi'}(t) = m_\eta(t) = m_\xi^{'}(t) = \left(t^2 + t\right)^{'} = 2t + 1$.

Пример 5.2. *Случайный процесс определяется формулой* $\eta(t)=\xi(t)\cdot e^{-t}$, $t>0$, $\xi(t)\sim N(3,1)$. *Найти математическое ожидание и ковариационную функцию случайного процесса* $\eta'(t)=\dfrac{d\eta(t)}{dt}$.

Решение:

1. Найдем математическое ожидание случайного процесса $\eta(t)$: $m_\eta(t)=M(\xi\cdot e^{-t})=e^{-t}\cdot M\xi$;

но т.к. $\xi(t)\sim N(3,1)$, то получаем $m_\eta(t)=3\cdot e^{-t}$; найдем математическое ожидание $m_{\eta'}(t)$: $m_{\eta'}(t)=M\left(\eta'(t)\right)=\left(M\left(\eta(t)\right)\right)'=\left(3e^{-t}\right)'=-3e^{-t}$.

2. Найдем ковариационную функцию случайного процесса $\eta(t)$:

$$K_\eta(t_1,t_2)=M\left(\left(\xi\cdot e^{-t_1}-3\cdot e^{-t_1}\right)\cdot\left(\xi\cdot e^{-t_2}-3\cdot e^{-t_2}\right)\right)=M\xi^2\cdot e^{-t_1}\cdot e^{-t_2}-6\xi\cdot e^{-t_1}\cdot e^{-t_2}+9e^{-t_1}\cdot e^{-t_2}=$$

$$=M\left(e^{-t_1}\cdot e^{-t_2}\cdot(\xi-3)^2\right)=M\left((\xi-3)^2\right)e^{-t_1}\cdot e^{-t_2};$$

Т.к. из условия $M\left((\xi-3)^2\right)=D\xi=1$; то окончательно имеем:

$$K_\eta(t_1,t_2)=M\left((\xi-3)^2\right)e^{-t_1}\cdot e^{-t_2}=e^{-(t_1+t_2)};$$

3. Найдем ковариационную функцию случайного процесса $\eta'(t)=\dfrac{d\eta(t)}{dt}$;

$$\frac{\partial K_\eta(t_1,t_2)}{\partial t_1\partial t_2}=\frac{\partial\left(e^{-(t_1+t_2)}\right)}{\partial t_1\partial t_2}=e^{-(t_1+t_2)}.$$

Пример 5.3. *Зная ковариационную функцию* $K_x(t_1,t_2)=2t_1\cdot t_2+t_1^2\cdot t_2^2$ *случайного процесса* $X(t)$, *найти ковариационную функцию ее производной* $K_{x'}(t_1,t_2)$.

Решение:

1. Найдем частную производную от заданной ковариационную функции по t_1:

$$\frac{\partial K_x(t_1,t_2)}{\partial t_1}=\frac{\partial\left(2t_1\cdot t_2+t_1^2\cdot t_2^2\right)}{\partial t_1}=2t_2+2t_1\cdot t_2^2.$$

2. Найдем частную производную от полученного результата по t_2:

$$\frac{\partial^2 K_x(t_1,t_2)}{\partial t_1 \partial t_2} = \frac{\partial\left(2t_2 + 2t_1 \cdot t_2^2\right)}{\partial t_2} = 2 + 4t_1 \cdot t_2 .$$

Таким образом, искомая ковариационную функция: $K_{x'}(t_1,t_2) = 2 + 4t_1 \cdot t_2$

Пример 5.4. *Зная математическое ожидание* $m_\xi(t) = 2t + 1$ *случайного процесса* $\xi(t)$, *найти математическое ожидание интеграла* $\eta(t) = \int_0^t \xi(s)ds$.

Решение: $M\eta(t) = \int_0^t m_\xi(s)ds = \int_0^t (2s+1)ds = t^2 + t$.

Пример 5.5. *Зная математическое ожидание* $m_\xi(t) = 3e^{-t}$ *случайного процесса* $\xi(t)$ *и ковариационную функцию* $K_\xi(t_1,t_2) = e^{-t_1-t_2}$, *найти математическое ожидание и корреляционную функцию случайного процесса* $\eta(t) = \int_0^t \xi(s)ds$.

Решение: Найдем математическое ожидание процесса $\eta(t)$:

$$M\eta(t) = \int_0^t m_\xi(s)ds = \int_0^t 3e^{-s}ds = -3e^{-s}\Big|_0^t = 3 - 3e^{-t}.$$

Если $\eta(t) = \int_0^t \xi(s)ds$, то $K_\eta(t_1,t_2) = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} K_\xi(\tau_1,\tau_2)d\tau_1 d\tau_2$, т.е. корреляционная функция интеграла от случайного процесса равна двойному интегралу от корреляционной функции случайного процесса $\xi(t)$:

$$K_\eta(t_1,t_2) = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} e^{-\tau_1-\tau_2}d\tau_1 d\tau_2 = \int_0^{t_1} e^{-\tau_1}d\tau_1 \int_0^{t_2} e^{-\tau_2}d\tau_2 = \left(1-e^{-t_2}\right)\int_0^{t_1} e^{-\tau_1}d\tau_1 = \left(1-e^{-t_2}\right)\cdot\left(1-e^{-t_1}\right)$$

Метод канонических разложений

Идея метода канонических разложений состоит в том, что случайный процесс, над которым нужно произвести преобразование, представляется в виде суммы элементарных случайных функций.

Рассмотрим элементарные случайные функции вида:

$$\eta(t) = A \cdot \varphi(t)$$

где $A-$ случайная величина, а $\varphi-$ произвольная неслучайная функция.

Все возможные реализации элементарной случайной функции $\eta(t) = A \cdot \varphi(t)$ получаются из графика функции $\varphi(t)$ изменением масштаба по оси ординат.

Математическое ожидание определяется формулой:

$$m_\eta(t) = M\left[\eta(t)\right] = M\left[A \cdot \varphi(t)\right] = M(A) \cdot \varphi(t) .$$

В частности, если $M(A) = 0$, то и $m_\eta(t) = 0$, т.е. элементарная случайная функция $\eta(t) = A \cdot \varphi(t)$ представляет собой центрированный случайный процесс. Если $m_\eta(t) = 0$, то ковариационная функция тождественна корреляционной и определяется выражением:

$$K_\eta(t_1, t_2) = M\left[\overset{\circ}{\eta}(t_1) \cdot \overset{\circ}{\eta}(t_2)\right] = R_\eta(t_1, t_2) = M\left[\eta(t_1) \cdot \eta(t_2)\right] = M(A\varphi(t_1) \cdot A\varphi(t_2)) =$$
$$= \varphi(t_1) \cdot \varphi(t_2) \cdot M(A^2) = \varphi(t_1) \cdot \varphi(t_2) \cdot D(A)$$

Линейные преобразования с элементарными случайными функциями указанного вида выполняются очень просто:

$$\xi(t) = L\big(\eta(t)\big) = L\Big(A \cdot \varphi(t)\Big) = A \cdot L\Big(\varphi(t)\Big)$$

Следовательно, если входной случайный процесс можно представить в виде суммы элементарных случайных функций, то описание выходного процесса упрощается.

Пусть задан случайный процесс: $X(t) = m_x\big(t\big) + \overset{\circ}{X}(t)$, где $m_x\big(t\big)$ – математическое ожидание случайного процесса, $\overset{\circ}{X}(t)$ – центрированный случайный процесс, представленный в виде суммы $\overset{\circ}{X}(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k \cdot \varphi_k(t)$, где A_k – центрированные некоррелированные случайные величины с дисперсиями D_k; $\varphi_k(t)$ – неслучайные функции.

<u>Определение 2:</u> Представление случайного процесса $X(t)$ в виде:

$$X(t) = m_x\big(t\big) + \sum_{k=1}^{n} A_k \cdot \varphi_k(t)$$

Называется ***каноническим разложением случайного процесса***.

Случайные величины A_k называются ***коэффициентами разложения***.

Функции $\varphi_k(t)-$ ***координатными функциями разложения***.

<u>Замечание 1:</u> В сумме $\sum_{k=1}^{n} A_k \cdot \varphi_k(t)$ возможно, что $n=\infty$.

Таким образом, ***каноническое разложение случайного процесса*** представляет собой *<u>разложение по системе функций в виде конечной суммы или функционального ряда</u>*. В качестве координатных функций разложения обычно используются тригонометрические функции (синус, косинус), а в случае комплексного переменного – экспоненциальное представление этих функций.

Определим реакцию линейной системы на случайный процесс, заданный каноническим разложением:

$$Y(t)=L\big(X(t)\big)=L\left(m_x(t)+\sum_{k=1}^{n} A_k \cdot \varphi_k(t)\right)$$

В силу линейности преобразования получим:

$$Y(t)=L\Big(m_x(t)\Big)+\left(\sum_{k=1}^{n} A_k L(\varphi_k(t))\right)$$

Обозначим $L\Big(m_x(t)\Big)=m_y(t)$, $L(\varphi_k(t))=\psi_k(t)$ и запишем выходной случайный процесс в виде разложения по системе элементарных случайных функций:

$$Y(t)=m_y(t)+\sum_{k=1}^{n} A_k \psi_k(t) .$$

Если случайный процесс $X(t)$ допускает каноническое разложение, то его корреляционная функция также выражается суммой вида:

$$K_x(t_1,t_2)=\sum_{k=1}^{n} D_k \varphi_k(t_1)\varphi_k(t_2)$$

которая называется ***каноническим разложением корреляционной функции***.

Линейное преобразование случайного процесса, заданного каноническим разложением, подчиняется следующему правилу:

Если случайная функция $X(t)$, заданная разложением по элементарным функциям, подвергается линейному преобразованию $L(X(t))$, то коэффициенты разложения остаются неизменными, а математическое ожидание и координатные функции подвергаются тому же линейному преобразованию $L(X(t))$.

Пример 5.6. Входной случайный процесс $X(t)$ задан каноническим разложением $X(t) = \sin t + A_1 \cdot \sin 2t + A_2 \cdot \cos 2t.$ Известны дисперсии случайных величин: $D(A_1) = 0,2,$ $D(A_2) = 0,3.$ Найти каноническое разложение и характеристики случайного процесса $Y(t) = 2 \cdot t \cdot X(t) + t^3 - 1$.

Решение. Найдем характеристики входного случайного процесса $X(t)$. В соответствии с определением канонического разложения $m_x(t) = \sin t$. Чтобы определить корреляционную функцию входного сигнала

$$K_x(t_1, t_2) = M\left[\overset{\circ}{X}(t_1) \cdot \overset{\circ}{X}(t_2)\right]$$

Запишем соответствующий центрированный случайный процесс:

$$\overset{\circ}{X}(t) = X(t) - m_X(t) = \sin t + A_1 \cdot \sin 2t + A_2 \cdot \cos 2t - \sin t = A_1 \cdot \sin 2t + A_2 \cdot \cos 2t$$

Тогда

$$\begin{aligned} K_X(t_1, t_2) &= M\left\{\left(A_1 \cdot \sin 2t_1 + A_2 \cdot \cos 2t_1\right) \cdot \left(A_1 \cdot \sin 2t_2 + A_2 \cdot \cos 2t_2\right)\right\} = \\ &= \sin 2t_1 \cdot \sin 2t_2 \cdot M\left(A_1^2\right) + \sin 2\left(t_1 + t_2\right) \cdot M\left(A_1 \cdot A_2\right) + \cos 2t_1 \cdot \cos 2t_2 \cdot M\left(A_2^2\right) \end{aligned}$$

Так как A_1, A_2 – центрированные некоррелированные случайные величины, то

$$M(A_1 A_2) = 0,$$

$$M(A_1^2) = D(A_1) + M^2(A_1) = 0,2$$

$$M(A_2^2) = D(A_2) + M^2(A_2) = 0,3$$

Тогда корреляционная функция случайного процесса $X(t)$ равна:

$$K_x(t_1, t_2) = 0,2 \cdot \sin 2t_1 \cdot \sin 2t_2 + 0,3 \cdot \cos 2t_1 \cdot \cos 2t_2$$

Оператор, преобразующий случайный процесс $X(t)$ в процесс $Y(t)$, является линейным и неоднородным, так как имеет вид:

$$Y(t) = L_n\left(X(t)\right) = L\left(X(t)\right) + \varphi(t)$$

где $L(X(t)) = 2t \cdot X(t)$ и $\varphi(t) = t^3 - 1$.

В этом случае математическое ожидание выходного процесса определяется соотношением $m_y(t) = (L(m_x(t)) + \varphi(t)$, а корреляционная функция $K_y(t_1, t_2)$ будет такой же, как и для однородного линейного преобразования $L(X(t)) = 2t \cdot X(t)$:

$$m_y(t) = (L(m_x(t)) + \varphi(t) = 2t \cdot \sin t + t^3 - 1;$$

$$K_y(t_1, t_2) = 4 \cdot t_1 \cdot t_2 (0,2 \cdot \sin 2t_1 \cdot \sin 2t_2 + 0,3 \cdot \cos 2t_1 \cdot \cos 2t_2).$$

Вычислим дисперсию, положив в корреляционной функции выходного случайного процесса $t_1 = t_2 = t$:

$$D_Y(t) = 4t^2 \cdot \left(0,2 \cdot \sin^2 2t + 0,3 \cdot \cos^2 2t\right)$$

Каноническое разложение выходного случайного процесса имеет вид:

$$Y(t) = L(X(t)) + \varphi(t) = 2t \cdot X(t) + t^3 - 1 = 2t \cdot \left(\sin t + A_1 \cdot \sin 2t + A_2 \cdot \cos 2t\right) + t^3 - 1$$

или

$$Y(t) = 2t \cdot \sin t + t^3 - 1 + A_1 \cdot 2t \cdot \sin 2t + A_2 \cdot 2t \cdot \cos 2t$$

Замечание 2: Число членов канонического разложения случайного процесса может быть не только конечным, но и бесконечным. Кроме того, в ряде случаев применяются интегральные канонические представления случайных функций, в которых сумма заменяется интегралом.

Линейные преобразования стационарных случайных процессов

Рассмотрим несколько теорем, полезных при работе со стационарными случайными процессами.

Теорема 4: Ковариационная функция производной $\xi'(t)$ дифференцируемого стационарного случайного процесса $\xi(t)$ равна второй производной от ее ковариационной функции, взятой со знаком минус: $K_{\xi'}(\tau) = -K''_{\xi}(\tau)$.

Теорема 5: Взаимная ковариационная функция дифференцируемого стационарного случайного процесса $\xi(t)$ и ее производной $\xi'(t)$ равна первой производной от ковариационной функции $K_\xi(\tau)$, взятой со своим (противоположным) знаком, если индекс ξ' стоит на втором (первом) по порядку месте: $K_{\xi\xi'}(\tau) = K'_\xi(\tau)$ $\left(K_{\xi'\xi}(\tau) = -K'_\xi(\tau)\right)$.

Т.к. взаимная ковариационная функция $K_{\xi\xi'}(\tau)$ зависти только от τ, то стационарный случайный процесс и его производная стационарно связаны.

Теорема 6: Ковариационная функция интеграла $\eta(t) = \int_0^t \xi(s)ds$ от стационарного случайного процесса $\xi(t)$, вычисляется по формуле:

$$K_\eta(t_1, t_2) = \int_0^{t_2} (t_2 - \tau)\, K_\xi(\tau)d\tau - \int_0^{t_2 - t_1} (t_2 - t_1 - \tau) K_\xi(\tau)d\tau + \int_0^{t_1} (t_1 - \tau) K_\xi(\tau)d\tau .$$

Следствие 1: Дисперсия интеграла $\eta(t) = \int_0^t \xi(s)ds$ от стационарного случайного процесса $\xi(t)$, вычисляется по формуле: $D_\eta(t) = 2\int_0^t (t - \tau) K_\xi(\tau)d\tau$.

Пример 5.7. *Пусть задана ковариационная функция* $K_\xi(\tau) = 2e^{-0,5\tau^2}$ *стационарного случайного процесса* $\xi(t)$. *Найти ковариационную функцию и дисперсию производной* $\xi'(t)$.

Решение: Согласно теореме 1 $K_{\xi'}(\tau) = -K''_\xi(\tau)$, продифференцируем дважды данную ковариационную функцию, откуда дисперсия

$$D_{\xi'}(\tau = 0) = K_{\xi'}(0) = 2 \,.\, K_{\xi'}(\tau) = -K''_\xi(\tau) = -\left(2e^{-0,5\tau^2}\right)'' = 2e^{-0,5\tau^2}\left(1 - \tau^2\right)$$

Пример 5.8. *Задана ковариационная функция* $K_\xi(\tau) = e^{-|\tau|}\left(1 + |\tau|\right)$, *стационарного случайного процесса* $\xi(t)$. *Найти взаимную ковариационную функцию* $K_{\xi\xi'}(\tau)$ *случайного процесса* $\xi(t)$ *и его производной.*

Решение: Используем формулу $K_{\xi\xi'}(\tau) = K'_\xi(\tau)$.

1) Пусть $\tau \geq 0$, тогда $|\tau| \geq \tau$ и $K_\xi(\tau) = e^{-\tau}(1+\tau)$, $K_\xi^{'}(\tau) = -\tau e^{-\tau}$, окончательно имеем при $\tau \geq 0$: $K_{\xi\xi'}(\tau) = -\tau e^{-\tau}$;

2) Пусть $\tau < 0$, тогда $|\tau| = -\tau$ и $K_\xi(\tau) = e^{\tau}(1-\tau)$, $K_\xi^{'}(\tau) = -\tau e^{\tau}$, окончательно имеем при $\tau < 0$: $K_{\xi\xi'}(\tau) = -\tau e^{\tau}$;

Пример 5.9. *Задана ковариационная функция* $K_\xi(\tau) = \dfrac{1}{1+\tau^2}$ *стационарного случайного процесса* $\xi(t)$. *Найти дисперсию интеграла* $\eta(t) = \int\limits_0^t \xi(s)ds$.

Решение: По следствию из теоремы ***6*** дисперсия интеграла $\eta(t) = \int\limits_0^t \xi(s)ds$ от стационарного случайного процесса $\xi(t)$, вычисляется по формуле: $D_\eta(t) = 2\int\limits_0^t (t-\tau)K_\xi(\tau)d\tau$. Тогда можем записать:

$$D_\eta(t) = 2\int\limits_0^t (t-\tau)\frac{1}{1+\tau^2}d\tau = 2t\int\limits_0^t \frac{1}{1+\tau^2}d\tau - \int\limits_0^t \frac{2\tau}{1+\tau^2}d\tau = 2tarctgt - \int\limits_0^t \frac{d(\tau^2+1)}{1+\tau^2} = 2tarctgt - \ln(t^2+1).$$

Задачи по теме для самостоятельного решения

1. Задано математическое ожидание $m_X(t) = t^3 + 2t + 1$ случайного процесса $X(t)$. Найти математическое ожидание ее производной.

2. Задано математическое ожидание $m_X(t) = t^2 + 4$ случайного процесса $X(t)$. Найти математическое ожидание случайного процесса: $Y(t) = t \cdot X^{'}(t) + t^2$.

3. Задана ковариационная функция $K_\xi(t_1, t_2) = 5e^{-(t_2-t_1)^2}$ случайного процесса $X(t)$. Найти ковариационную функцию его производной.

4. Зная математическое ожидание $m_X(t) = 3t^2 + 1$ случайного процесса $X(t)$, найти математическое ожидание интеграла $Y(t) = \int\limits_0^t X(s)ds$.

5. Задан случайный процесс $X(t) = U \cdot e^{\alpha t} \cdot \cos\beta t$, где U – случайная величина, $m_U(t) = 5$. Найти математическое ожидание интеграла $Y(t) = \int_0^t X(s)ds$.

6. Дан случайный процесс $\xi(t) = ch2t - U \cdot sh2t$, случайная величина $U \sim E(0{,}4)$, $\eta(t) = \xi'(t)$. Найти математическое ожидание $m_\eta(t)$, ковариационную функцию $K_\eta(t_1,t_2)$, дисперсию $D_\eta(t)$, нормированную ковариационную функцию $r_\eta(t_1,t_2)$ случайного процесса $\eta(t)$, не дифференцируя $\xi(t)$. Найти взаимную ковариационную функцию $K_{\xi,\eta}(t_1,t_2)$ и нормированную взаимную ковариационную функцию $r_{\xi,\eta}(t_1,t_2)$.

7. Дан случайный процесс $\xi(t) = (t^2+1) \cdot U$, где $U \sim N(-3{,}5)$, и случайный процесс $\eta(t) = \int_0^t \xi(s)ds$. Найти математическое ожидание $m_\eta(t)$, ковариационную функцию $K_\eta(t_1,t_2)$, дисперсию $D_\eta(t)$, взаимные ковариационные функции $K_{\xi,\eta}(t_1,t_2), K_{\eta,\xi}(t_1,t_2)$ не интегрируя $\xi(t)$.

8. Дан случайный процесс $\xi(t) = \dfrac{U}{(t^2+4)}$, где $U \sim P(2)$ и случайный процесс $\eta(t) = \int_0^t \xi(s)ds$. Найти ковариационную функцию $K_\zeta(t_1,t_2)$, дисперсию $D_\zeta(t)$, нормированную ковариационную функцию $r_\zeta(t_1,t_2)$ случайного процесса $\zeta(t) = \xi(t) + \eta(t)$, не интегрируя $\xi(t)$.

9. Дана ковариационная функция $K_\xi(\tau) = \exp(-3|\tau|)(1+\sin 3|\tau|)$ стационарного случайного процесса $\xi(t)$. Найти ковариационную функцию, дисперсию производной $\xi'(t)$, взаимную ковариационную функцию $K_{\xi\xi'}(\tau)$.

10. Дана ковариационная функция $K_\xi(\tau)$ стационарного случайного процесса $\xi(t)$. Найти ковариационную функцию $K_\eta(t_1,t_2)$, дисперсию $D_\eta(t)$ случайного процесса $\eta(t) = \int_0^t \xi(s)ds$, взаимную ковариационную функцию $K_{\xi,\eta}(t_1,t_2)$ (в случае ***б*** лишь при $0 \le t_2 \le t_1$): ***а)*** $K_\xi(\tau) = \dfrac{72}{1+9\tau^2}$; ***б)*** $K_\xi(\tau) = e^{-\tau}$.

6. Спектральная плотность

Информацию о случайном процессе, которую дают корреляционная и ковариационная функции, можно получить и через так называемую ***спектральную плотность*** $S_{\xi}(\omega)$, которая широко используется для стационарных случайных процессов. Рассмотрим подробнее этот вопрос.

Спектральное разложение стационарного случайного процесса

В предыдущем разделе **5** было сформулировано понятие канонического разложения случайного процесса, заданного на конечном интервале, и указано, что если случайный процесс $\xi(t)$ допускает каноническое разложение, то его ковариационная функция также имеет каноническое разложение. Следовательно, существует связь между характером ковариационной функции и внутренней структурой соответствующего ей случайного процесса. Рассмотрим подробнее этот вопрос.

Пусть дан $\xi(t)$ стационарный случайный процесс.

Для ***стационарного случайного процесса*** $\xi(t)$, заданного на конечном интервале $[-T;T]$ ***каноническое разложение*** имеет вид:

$$\xi(t)=m_{\xi}(t)+\sum_{k=0}^{\infty}A_k\cdot\cos(\omega_k t)+B_k\cdot\sin(\omega_k t),$$

где

$$\omega_k=k\omega_1,\ \ \omega_1=\frac{2\pi}{2T}=\frac{\pi}{T},$$

Коэффициенты A_k и B_k ($k=1,2,...,n,...$) – центрированные некоррелированные случайные величины, причем дисперсии одинаковы для каждой пары случайных величин с одним и тем же индексом k: $D(A_k)=D(B_k)=D_k$.

Дисперсии D_k при различных k определяются формулами:

$$D_0=\frac{1}{T}\int_0^T K_{\xi}(\tau)\,d\tau,\ D_k=\frac{2}{T}\int_0^T K_{\xi}(\tau)\cdot\cos(\omega_k\tau)\,d\tau \text{ при } k\neq 0.$$

<u>Координатными функциями</u> канонического разложения являются функции $\cos(\omega_k t)$ и $\sin(\omega_k t)$ при различных ω_k.

Разложение такого рода называется ***спектральным разложением стационарного случайного процесса***.

Спектральное разложение изображает стационарный случайный процесс в виде разложения на гармонические колебания различных частот: $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_k, ...$, причем амплитуды этих колебаний A_k и B_k являются случайными величинами.

Спектральному разложению стационарного процесса соответствует разложение в ряд его корреляционной функции, которая, по определению, является четной, т.е. $K_\xi(\tau) = K_\xi(-\tau)$:

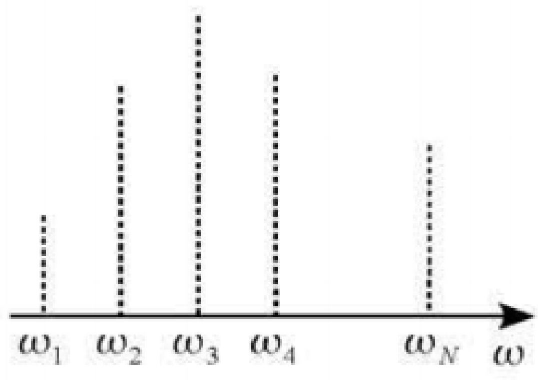
$$K_\xi(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \cos(\omega_k \tau).$$

Определим дисперсию случайного процесса $\xi(t)$, заданного спектральным разложением.

Используя свойство дисперсии суммы некоррелированных случайных величин и свойства ковариационной функции, можем записать:

$$D_\xi(\tau) = K_\xi(t,t) = K_\xi(0) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \cos(\omega_k \cdot 0) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k$$

<u>Совокупность дисперсий</u> D_k называют ***спектром стационарного случайного процесса***. *<u>Ординаты</u>* D_k – ***спектральными линиями***, соответствующими частотам ω_k.



Таким образом, дисперсия стационарного случайного процесса равна сумме дисперсий всех гармоник ее спектрального разложения.

Замечание 1: Из формулы $K_{\xi}(\tau)=\sum_{k=0}^{\infty} D_k \cos(\omega_k \tau)$ видно, что дисперсия стационарного случайного процесса $\xi(t)$, некоторым образом распределена по различным частотам: одним частотам соответствуют бóльшие дисперсии, другим – мéньшие.

Спектральное разложение на конечном интервале дает только приближенное описание стационарного процесса. При построении разложения мы получаем спектр дисперсий случайного процесса в виде ряда отдельных дискретных линий, разделенных равными промежутками («прерывистый» или «линейчатый» спектр). Чем больший участок времени мы будем рассматривать, тем полнее будут наши сведения о случайном процессе. Поэтому от спектрального разложения на конечном участке предельным переходом при $T \to \infty$ можем получить спектральное разложение на бесконечном интервале.

Если $T \to \infty$, то $\omega_1 = \frac{\pi}{T} \to 0$, поэтому расстояния между частотами ω_k, на которых строится спектр, будут неограниченно уменьшаться. При этом дискретный спектр будет приближаться к непрерывному, в котором каждому сколь угодно малому интервалу частот $\Delta\omega$ соответствует элементарная дисперсия $\Delta D(\omega)$.

Отношение $S_{\xi}(\omega_k)=\frac{D_k}{\Delta\omega}$ представляет собой *средняя плотность дисперсии* на участке $\Delta\omega$.

Если выполнить графическое построение, то получим ступенчатую фигуру, напоминающую гистограмму статистического распределения. Будем неограниченно увеличивать интервал T, тогда $\Delta\omega \to 0$, и ступенчатая кривая будет неограниченно приближаться к плавной кривой $S_{\xi}(\omega)$. Эта кривая изображает плотность распределения дисперсии по частотам непрерывного спектра, а сама функция $S_{\xi}(\omega)$ называется спектральной плотностью дисперсии, или ***спектральной плотностью*** стационарного случайного процесса $\xi(t)$.

Определение 1. Предел отношения дисперсии, приходящейся на данный интервал частот, к длине этого интервала, когда длина интервала стремится к нулю, называется ***спектральной плотностью*** стационарного случайного процесса $\xi(t)$.

Дискретный спектр разложения переходит в непрерывный, и вместо дисперсии амплитуды гармоники каждой частоты рассматривается плотность дисперсии амплитуды на единицу частоты.

Дисперсия случайного процесса вычисляется по формуле: $D_\xi = \int_0^\infty S_\xi(\omega) d\omega$.

Спектральная плотность описывает частотный состав стационарного процесса. Эта характеристика полностью определяется корреляционной функцией данного процесса.

Подобно тому как ординаты дискретного спектра D_k выражаются через корреляционную функцию $K_\xi(\tau)$, спектральная плотность $S_\xi(\omega)$ также может быть выражена через корреляционную функцию.

Рассмотрим каноническое разложение корреляционной функции на конечном интервале.

$$K_\xi(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \cos(\omega_k \tau),$$

где соответствующая частоте ω_k дисперсия:

$$D_k = \frac{2}{T} \int_0^T K_\xi(\tau) \cdot \cos(\omega_k \tau) d\tau .$$

Разделим обе части последнего выражения на $\Delta\omega = \frac{\pi}{T}$.

Поскольку $S_\xi(\omega_k) = \frac{D_k}{\Delta\omega}$, то получим:

$$S_\xi(\omega_k) = \frac{2}{\pi} \int_0^T K_\xi(\tau) \cdot \cos(\omega_k \tau) d\tau$$

Переходя в полученном выражении к пределу при $T \to \infty$, запишем выражение спектральной плотности через корреляционную функцию:

$$S_\xi(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty K_\xi(\tau) \cdot \cos(\omega \tau) d\tau$$

Теперь выполним аналогичные преобразования и получим выражение для корреляционной функции через спектральную плотность.

Выразим дисперсии D_k через спектральную плотность:

$$D_k = S_\xi(\omega_k) \cdot \Delta\omega,$$

подставим в формулу:

$$K_\xi(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k \cdot \cos(\omega_k \tau),$$

перейдем к пределу при $T \to \infty$ и получим:

$$K_\xi(\tau) = \int_0^{\infty} S_\xi(\omega) \cdot \cos(\omega\tau) d\omega$$

Полученные интегралы представляют собой интегралы Фурье. Таким образом, корреляционная функция и спектральная плотность выражаются одна через другую с помощью преобразований Фурье.

В ***действительной форме*** эти преобразования имеют вид:

$$\begin{cases} S_\xi(\omega) = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^{\infty} K_\xi(\tau) \cos(\omega\tau)\, d\tau \\ K_\xi(\tau) = \displaystyle\int_0^{\infty} S_\xi(\omega) \cos(\omega\tau)\, d\omega \end{cases}$$

Эти формулы называются ***формулами Винера – Хинчина***.

Свойства спектральной плотности $S_\xi(\omega)$:

1. $S_\xi(\omega) \geq 0$ – неотрицательность.

2. Если положить в выражении $K_\xi(\tau) = \int_0^{\infty} S_\xi(\omega) \cos(\omega\tau)\, d\omega$: $\tau = 0$, то получим:

$K_\xi(0) = D_\xi = \int_0^{\infty} S_\xi(\omega) \cdot \cos(\omega \cdot 0)\, d\omega = \int_0^{\infty} S_\xi(\omega) \cdot 1\, d\omega = \int_0^{\infty} S_\xi(\omega) \cdot d\omega$, т.е. интеграл от спектральной плотности в пределах от 0 до ∞ равен дисперсии стационарного случайного процесса.

Для того, чтобы упростить математические выкладки удобно использовать спектральное разложение стационарного случайного процесса в комплексной форме, при этом считается, что частоты изменяются в пределах от $(-\infty, \infty)$, но надо понимать, что частоты $\omega < 0$ физического смысла не имеют.

<u>*Спектральной плотностью стационарного случайного процесса в комплексной форме*</u> называется функция:

$$S_\xi^*(\omega) = \frac{1}{2} S_\xi(|\omega|)$$

Тогда ***формулы Винера – Хинчина в комплексной форме***, выглядят так:

$$\begin{cases} S_\xi^*(\omega) = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} K_\xi(\tau)\, e^{-i\omega\tau} d\tau \\ K_\xi(\tau) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} S_\xi^*(\omega)\, e^{i\omega\tau} d\omega \end{cases}$$

Свойства спектральной плотности $S_\xi^*(\omega)$:

1. $S_\xi^*(-\omega) = S_\xi^*(\omega)$ – четность спектральной плотности на интервале $(-\infty, \infty)$.
2. $S_\xi^*(\omega) = \frac{1}{2} S_\xi(\omega)$ на участке $(0, \infty)$.

Пример 6.1. *Корреляционная функция случайного процесса* $\xi(t)$ *задана в виде* $K_\xi(\tau) = D_\xi \cdot e^{-\alpha|\tau|}$, *где* $|\tau| = \begin{cases} \tau, \tau \geq 0 \\ -\tau, \tau < 0 \end{cases}$. *Определить спектральную плотность соответствующего случайного процесса.*

Решение. Спектральная плотность $S_\xi^*(\omega)$ определяется по формуле:

$$S_\xi^*(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_\xi(\tau)\, e^{-i\omega\tau} d\tau$$

Можем записать:

$$S_\xi^*(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}K_\xi(\tau)\cdot e^{-i\omega\tau}d\tau=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}D_\xi\cdot e^{-\alpha|\tau|}\cdot e^{-i\omega\tau}d\tau .$$

Исходя из условий задачи, представим этот интеграл в виде суммы двух интегралов:

$$S_\xi^*(\omega)=\frac{D_\xi}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{0}e^{\alpha\tau-i\omega\tau}d\tau+\int_{0}^{\infty}e^{-\alpha\tau-i\omega\tau}d\tau\right]=\frac{D_\xi}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{0}e^{(\alpha-i\omega)\tau}d\tau+\int_{0}^{\infty}e^{-(\alpha+i\omega)\tau}d\tau\right].$$

Вычислим входящие в выражение интегралы:

$$S_\xi^*(\omega)=\frac{D_\xi}{2\pi}\cdot\frac{1}{(\alpha-i\omega)}e^{(\alpha-i\omega)\tau}\Big|_{-\infty}^{0}+\frac{D_\xi}{2\pi}\cdot\frac{1}{-(\alpha+i\omega)}e^{-(\alpha+i\omega)\tau}\Big|_{0}^{\infty}=\frac{D_\xi}{2\pi}\cdot\left[\frac{1}{(\alpha-i\omega)}+\frac{1}{(\alpha+i\omega)}\right]=$$

$$=\frac{D_\xi}{2\pi}\frac{2\alpha}{(\alpha^2+\omega^2)}=\frac{\alpha\cdot D_\xi}{\pi(\alpha^2+\omega^2)}$$

Или окончательно из соотношения $S_\xi^*(\omega)=\frac{1}{2}S_\xi(|\omega|)$, находим $S_\xi(\omega)=\frac{2\cdot\alpha\cdot D_\xi}{\pi(\alpha^2+\omega^2)}$.

Задачи по теме для самостоятельного решения

1. $K_\xi(\tau)$ – ковариационная функция стационарного случайного процесса $\xi(t)$. Найти его спектральную плотность.

a) $K_\xi(\tau)=64\frac{\sin^2 4\tau}{\tau^2}$;

b) $K_\xi(\tau)=12\exp(-4|\tau|)\cdot(1+4|\tau|)$.

2. Найти ковариационную функцию стационарного случайного процесса $\xi(t)$, если его спектральная плотность $S_\xi(\omega)$:

a) $S_\xi(\omega)=\begin{cases}1-\frac{\omega^2}{16}, & \text{при } |\omega|\le 4\\ 0, & \text{при } |\omega|>4\end{cases}$;

b) $S_\xi(\omega)=\frac{10}{\pi}\cdot\left(\frac{1}{4+(3-\omega)^2}+\frac{1}{4+(3+\omega)^2}\right)$.

7. Сходимость, непрерывность, дифференцируемость и интегрируемость случайных процессов

В разделе **5** были рассмотрены воздействия линейных операторов на случайные процессы, в частности воздействие операторов дифференцирования и интегрирования.
При этом не уточнялось, как эти операции определяются для случайных процессов.

Рассмотрим подробнее вопросы сходимости, непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости случайных процессов.

Понятие ***сходимости*** является *базовым* в стохастическом (вероятностном) анализе, также, как и в математическом анализе.

Стохастический анализ – это раздел математики, в котором случайные функции изучают методами математического анализа. Теория стохастического анализа объединяет теорию пределов, дифференциального и интегрального исчисления и их непосредственные приложения.

В теории случайных процессов, также, как и в теории вероятностей рассматривают различные виды сходимости и вследствие этого различные виды непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости.

Наиболее удобно и просто ввести все эти понятия для процессов, которые удовлетворяют условию $M\left\{\xi^2(t)\right\}<\infty$, так называемых ***процессов второго порядка***, или ***гильбертовых процессов***.

Замечание 1: Физически условие $M\left\{\xi^2(t)\right\}<\infty$ означает, что процесс имеет конечную мощность, что выполнимо для всех реальных процессов.

Сходимость случайных процессов

В теории вероятностей были рассмотрены следующие виды сходимости случайных последовательностей:

1. Сходимость по вероятности: если для любого $\varepsilon > 0$, существует $\lim\limits_{k\to\infty} P\left[\left|\xi_k(\omega)-\xi(\omega)\right|>\varepsilon\right] = 0$.

2. Сходимость в среднем квадратическом: если $\lim\limits_{k\to\infty} M\left[\left(\xi_k(\omega)-\xi(\omega)\right)^2\right] = 0$.

3. Сходимость почти наверное: если $P\left\{\lim\limits_{k\to\infty} \xi_k(\omega) = \xi(\omega)\right\} = 1$.

4. Сходимость по распределению (слабая сходимость): если $\lim\limits_{k\to\infty} F_{\xi_k} = F_{\xi}(x)$ во всех точках непрерывности функции распределения $F_{\xi}(x)$.

При изучении теории случайных процессов мы будем использовать только сходимость в смысле среднего квадратического, потому что она является наиболее приемлемой с точки зрения приложений.

Сформулируем определение сходимости в среднем квадратическом для случайных процессов.

<u>Определение 1:</u> Последовательность $\xi_s(t)$ сходится к $\xi(t)$ ***в среднем квадратическом*** при $s \to s_0$, если $\lim\limits_{s\to s_0} M\left[\left(\xi_s(t)-\xi(t)\right)^2\right] = 0$,

Обозначение: $\xi_s(t) \underset{s\to s_0}{\overset{ср.кв.}{\to}} \xi(t)$; или $\underset{s\to s_0}{\text{l.i.m}}\, \xi_s(t) = \xi(t)$.

Пример 7.1. Найти предел в среднеквадратическом $X(t) = \lim\limits_{n\to\infty} X_n(t)$, если последовательность $X_n(t)$ распределена нормально $X_n(t) \sim N\left(0, \dfrac{t}{n}\right)$.

Решение: По определению, необходимо найти такой процесс $X(t)$, чтобы $\lim\limits_{n\to\infty} M\left(X_n(t) - X(t)\right)^2 = 0$. Покажем, что предельным является процесс $X(t) = 0$.

Распишем подробно $M\left(X_n(t) - X(t)\right)^2$:

$$\lim_{n\to\infty} M\left(X_n^2(t) - 2\cdot X_n(t)\cdot X(t) + X^2(t)\right) = \lim_{n\to\infty} \left\{M\left(X_n^2(t)\right) - 2\cdot M\left(X_n(t)\cdot X(t)\right) + M\left(X^2(t)\right)\right\}$$

Предположим, что все три предела существует, т.е.:

$$\lim_{n\to\infty} \left\{M\left(X_n^2(t)\right)-2\cdot M\left(X_n(t)\cdot X(t)\right)+M\left(X^2(t)\right)\right\}=$$
$$=\lim_{n\to\infty} M\left(X_n^2(t)\right)-2\cdot\lim_{n\to\infty} M\left(X_n(t)\cdot X(t)\right)+\lim_{n\to\infty} M\left(X^2(t)\right)$$

Оценим значение каждого из пределов:

1. $\lim_{n\to\infty} M\left(X_n^2(t)\right)$, т.к. $X_n(t)\sim N\left(0,\frac{t}{n}\right)$, то $\lim_{n\to\infty} M\left(X_n^2(t)\right)=\lim_{n\to\infty}\int_R x^2\cdot\exp\left\{-\frac{x^2\cdot n^2}{2\cdot t^2}\right\}dx=$

= *(используем терему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла)* =

$$=\int_R \lim_{n\to\infty}(x^2\cdot\exp\left\{-\frac{x^2\cdot n^2}{2\cdot t^2}\right\})dx=0;$$

Или здесь можно легче найти этот интеграл: т.к. $M\left(X_n^2(t)\right)=DX_n(t)+M^2X_n(t)$, а у нас известно, что $X_n(t)\sim N\left(0,\frac{t}{n}\right)$, то есть $M^2X_n(t)=0$ и $M\left(X_n^2(t)\right)=DX_n(t)=\frac{t}{n}$, поэтому $\lim_{n\to\infty} M\left(X_n^2(t)\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{t}{n}=0$

2. $\lim_{n\to\infty} M\left(X_n(t)\cdot X(t)\right)=0;$

3. $\lim_{n\to\infty} M\left(X^2(t)\right)=0$

Таким образом: $\lim_{n\to\infty} M\left(X_n(t)-X(t)\right)^2=0,$ а, следовательно, последовательность $X_n(t)\sim N\left(0,\frac{t}{n}\right)$ сходится в среднем квадратическом к процессу $X(t)=0$.

Непрерывность случайных процессов

Определение 2. Случайный процесс второго порядка $\xi(\omega,t)$, $t\in T$ (т.е. $M\left|\xi(\omega,t)\right|^2<\infty$) называется ***непрерывным в точке*** $t=t_0$, если существует предел:

$$\lim_{t\to t_0} M\left[\left|\xi(\omega,t)-\xi(\omega,t_0)\right|^2\right]=0$$

т.е. случайный процесс сходится в точке $t=t_0$ к случайной величине $\eta(\omega)=\xi(\omega,t_0)$.

Определение 3. Говорят, что скалярный случайный процесс второго порядка $\xi(\omega,t)$ $\xi(\omega,t)$, $t\in T$ ***непрерывен*** на T, если он непрерывен в каждой точке $t\in T$.

Пример 7.2. Пусть дан случайный процесс вида: $X(\omega,t)=\xi\cdot t$, где $\xi\sim N(0,1)$ – стандартная нормально распределенная случайная величина. Показать, что $X(t)$ – непрерывен в среднем квадратическом.

Решение: Найдем значение предела $\lim\limits_{t\to t_0} M\left[\left|X(\omega,t)-X(\omega,t_0)\right|^2\right]$:

$$\lim_{t\to t_0} M\left[\left|X(\omega,t)-X(\omega,t_0)\right|^2\right]=\lim_{t\to t_0} M\left[\left(\xi\cdot t-\xi\cdot t_0\right)^2\right]=\lim_{t\to t_0} M\left[\xi^2\left(t-t_0\right)^2\right]=\lim_{t\to t_0} M\xi^2\cdot\left[\left(t-t_0\right)^2\right]$$

Т.к. известно, что $\xi\sim N(0,1)$, т.е. $M\xi=0,\ D\xi=1=M\xi^2$, окончательно можем записать:

$$\lim_{t\to t_0} M\left[\left|X(\omega,t)-X(\omega,t_0)\right|^2\right]=\lim_{t\to t_0} M\xi^2\cdot\left[\left(t-t_0\right)^2\right]=\lim_{t\to t_0}\left[\left(t-t_0\right)^2\right]=0$$

Т.е. действительно случайный процесс $X(t)$ непрерывен в среднем квадратическом.

Пример 7.3. Показать, что пуассоновский случайный процесс непрерывен в среднем квадратическом.

Решение: Покажем его непрерывность в некоторой произвольной точке $t=t_0\in T$. Используем при решении свойство пуассоновского процесса:

$$P\left[\xi(\omega,t_2)-\xi(\omega,t_1)=k\right]=\frac{\left(\lambda\left(t_2-t_1\right)\right)^k}{k!}e^{-\lambda(t_2-t_1)};$$

Найдем значение предела $\lim\limits_{t\to t_0} M\left[\left|X(\omega,t)-X(\omega,t_0)\right|^2\right]$:

$$M\left[\left|\xi(\omega,t)-\xi(\omega,t_0)\right|^2\right]=\sum_{k=1}^{\infty}k^2\cdot P\left[\left|\xi(\omega,t)-\xi(\omega,t_0)\right|=k\right]=\sum_{k=1}^{\infty}k^2\cdot\frac{[\lambda(t-t_0)]^k}{k!}e^{-\lambda(t-t_0)}=$$
$$=\lambda(t-t_0)\cdot e^{-\lambda(t-t_0)}\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\frac{\left[\lambda(t-t_0)\right]^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Для дальнейшего упрощения полученного выражения найдем сумму ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}k\cdot\frac{\left[\lambda(t-t_0)\right]^{k-1}}{(k-1)!}$.

Обозначим $\lambda(t-t_0)=x$. Вначале проинтегрируем ряд почленно:

$$\int\sum_{k=1}^{\infty}k\cdot\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}dx=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{(k-1)!}=x\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}=x\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}=x\cdot e^x.$$

Продифференцировав полученное выражение, найдем сумма ряда $\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} = \frac{d}{dx}(x \cdot e^x) = x \cdot e^x + e^x = e^x \cdot (x+1).$$

Таким образом,

$$M\left[\left|\xi(\omega,t) - \xi(\omega,t_0)\right|^2\right] = \lambda(t-t_0) \cdot e^{-\lambda(t-t_0)} \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{\lambda(t-t_0)^{k-1}}{(k-1)!} =$$
$$= \lambda(t-t_0) e^{-\lambda(t-t_0)} \cdot e^{\lambda(t-t_0)} \cdot \left(\lambda(t-t_0)+1\right) = \lambda(t-t_0)\left[\lambda(t-t_0)+1\right] \xrightarrow[t \to t_0]{} 0,$$

И согласно определению ***2*** непрерывности процесса в точке, исследуемый процесс непрерывен в точке $t = t_0$. В силу произвольности выбора этой точки можем заключить, что процесс непрерывен в среднем квадратическом в каждой точке $t \in T$.

Замечание 2. Процесс Пуассона, реализации которого кусочно-постоянны, является примером, того, что стохастическая непрерывность и непрерывность в среднем квадратическом не означает, что реализации случайного процесса непрерывны.

Теорема 1: Для того, чтобы случайный процесс был непрерывным в среднем квадратическом в точке t, необходимо и достаточно, чтобы его ковариационная функция $K_X(t_1,t_2)$ была непрерывна в точке $t_1 = t_2 = t$.

Пример 7.4. Пусть дан случайный процесс вида: $X(\omega,t) = \frac{\xi}{t}$, где $\xi \sim N(0,1)$ – стандартная нормально распределенная случайная величина. Показать, что $X(t)$ – не является непрерывным процессом в среднем квадратическом в точке $t = t_0 = 0$.

Решение:

1. Найдем математическое ожидание случайного процесса:

$M\left\{X(\omega,t)\right\} = M\left\{\frac{\xi}{t}\right\} = \frac{1}{t} M\xi$, т.к. известно, что $\xi \sim N(0,1)$, поэтому окончательно

$$M\left\{X(\omega,t)\right\} = 0$$

2. Найдем ковариационную функцию случайного процесса:

$$K_X(t_1,t_2)=M\left\{\overset{\circ}{X}(t_1)\cdot \overset{\circ}{X}(t_2)\right\}=R_X(t_1,t_2)=M\left\{X(t_1)\cdot X(t_2)\right\}\text{ т.к. } M\left\{X(\omega,t)\right\}=0$$

$$M\left\{X(t_1)\cdot X(t_2)\right\}=M\left\{\frac{\xi}{t_1}\cdot\frac{\xi}{t_2}\right\}=\left\{\frac{1}{t_1\cdot t_2}\right\}M\xi^2\text{, т.к. } D\xi=M\xi^2+M^2\xi=M\xi^2+0=1\text{, то}$$

$$M\xi^2=1\text{, т.е. } K_X(t_1,t_2)=M\left\{X(t_1)\cdot X(t_2)\right\}=\left\{\frac{1}{t_1\cdot t_2}\right\}\cdot M\xi^2=\left\{\frac{1}{t_1\cdot t_2}\right\};$$

В силу теоремы 1, для того, чтобы случайный процесс был непрерывным в среднем квадратическом в точке t, необходимо и достаточно, чтобы его ковариационная функция $K_X(t_1,t_2)$ была непрерывна в точке $t_1=t_2=t$.

Покажем, что функция $K_X(t_1,t_2)$ в точке $t_1=t_2=t=0$ терпит разрыв. Хотя это и очевидно.

$$K_X(t_1,t_2)=\left\{\frac{1}{t_1\cdot t_2}\right\}\quad\text{при } t_1=t_2=t:\ K_X(t,t)=D_X(t)=\frac{1}{t^2}$$

В курсе математического анализа, формулировалось определение непрерывности функции в точке $t=t_0$, одним из условий непрерывности, было, то что функция должна быть определена в точке $t=t_0$ и некоторой ее окрестности. У нас функция $K_X(t,t)=\frac{1}{t^2}$ при $t=0$ неопределена, поэтому окончательно заключаем, что случайный процесс вида: $X(\omega,t)=\frac{\xi}{t}$ не является непрерывным процессом в среднем квадратичном в точке $t=t_0=0$.

Дифференцируемость случайного процесса

<u>Определение 4.</u> Случайный процесс $\xi(\omega,t)\ t\in T$ называется *дифференцируемым* в среднеквадратическом в точке $t=t_0$, если существует такая случайная величина $\xi'(\omega,t_0)$, для которой

$$\lim_{t\to t_0} M\left[\left|\frac{\xi(\omega,t)-\xi(\omega,t_0)}{t-t_0}-\xi'(\omega,t_0)\right|^2\right]=0.$$

При этом случайная величина $\xi'(\omega,t)$ называется его ***производной*** в этой точке.

Определение 5. ***Производной случайного процесса в точке*** t_0 называют среднеквадратичный предел отношения приращения функции к приращению аргумента $\Delta t = t - t_0$ при $\Delta t \to 0$:

$$\xi'(\omega, t) = \lim_{t \to t_0} \frac{\xi(\omega, t) - \xi(\omega, t_0)}{t - t_0}$$

Определение 6. Если случайный процесс $\xi(\omega, t),\ t \in T$ является дифференцируемым в каждой точке открытого множества $T_0 \subset T$, то его называют ***дифференцируемым*** на множестве T_0.

Рассмотрим еще раз задачу, которая обсуждалась в разделе 2.

Пример 7.5. *Дан случайный процесс* $\xi(t) = X + t \cdot (Y + t)$, *где* X *и* Y – *случайные величины. Причем* Y *имеет симметричное относительно нуля распределение и* $P(Y = 0) = 0$. *Найти вероятность того, что реализации случайного процесса при* $t \ge 0$ *возрастают.*

При решении была указана производная процесса. Покажем, что процесс $\xi(t) = X + t \cdot (Y + t)$ дифференцируем в среднем квадратическом и имеет среднеквадратическую производную $\xi'(t) = 2 \cdot t + Y$.

Решение: По определению можем записать:

$$\lim_{\Delta t \to 0} M\left[\left|\frac{\xi(\omega, t + \Delta t) - \xi(\omega, t)}{\Delta t} - \xi'(\omega, t)\right|^2\right] = 0$$

Тогда запишем для нашего процесса:

$$\xi(\omega, t + \Delta t) = (t + \Delta t)^2 + (t + \Delta t) \cdot Y + X \quad \text{и} \quad \xi(\omega, t) = t^2 + Yt + X$$

Рассмотрим предел отношения $\dfrac{\xi(\omega, t + \Delta t) - \xi(\omega, t)}{\Delta t}$:

$$\frac{\xi(\omega, t + \Delta t) - \xi(\omega, t)}{\Delta t} = \frac{(t+\Delta t)^2 + (t+\Delta t) \cdot Y + X - t^2 + Yt + X}{\Delta t} = \frac{t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2 + Yt + Y\Delta t + X - t^2 - Yt - X}{\Delta t} =$$

$$= \frac{2 \cdot t \cdot \Delta t + \Delta t^2 + Y \cdot \Delta t}{\Delta t} = 2 \cdot t + Y + \Delta t,$$

Тогда:

$$\lim_{\Delta t\to 0} M\left[\left|\frac{\xi(\omega,t+\Delta t)-\xi(\omega,t)}{\Delta t}-\xi'(\omega,t)\right|^2\right]=\lim_{\Delta t\to 0} M\left[\left|2\cdot t+Y+\Delta t-2\cdot t-Y\right|^2\right]=\lim_{\Delta t\to 0} M\left[\Delta t^2\right]=0$$

Таким образом показали, что процесс действительно дифференцируем в среднем квадратическом.

Теорема 2. ***(необходимое и достаточное условие дифференцируемости случайного процесса).*** Для того, чтобы скалярный случайный процесс $\xi(\omega,t)$ $t\in T$ был дифференцируемым в точке $t_0\in T$, а для случайной величины $\xi'(\omega,t_0)$ существовало математическое ожидание и дисперсия, необходимо и достаточно, чтобы функция $m_\xi(t)$ была дифференцируема в этой точке и существовала вторая обобщенная смешанная производная от ковариационная функции $K_\xi(t_1,t_2)$ при $t_1=t_2=t_0$.

Пример 7.6. *Задан случайный процесс* $X(t)=\alpha\cdot\cos(\varphi\cdot t)+\beta\cdot\sin(\varphi\cdot t),$ *где* α,β - *независимые случайные величины, числовые характеристики, которых* $m_\alpha=m_\beta=0,\ \sigma^2=\sigma_\alpha^2=\sigma_\beta^2$. *Показать, что это дифференцируемый процесс.*

Решение:

1. Найдем математическое ожидание и ковариационную функцию процесса:

$$m_X(t)=M\left(\alpha\cdot\cos(\varphi\cdot t)+\beta\cdot\sin(\varphi\cdot t)\right)=M\left(\alpha\cdot\cos(\varphi\cdot t)\right)+M\left(\beta\cdot\sin(\varphi\cdot t)\right)=$$
$$=m_\alpha\cos(\varphi\cdot t)+m_\beta\sin(\varphi\cdot t);$$

$$K_X(t_1,t_2)=M\left(X(t_1)X(t_2)\right)-m_X(t_1)m_X(t_2);$$

2. Откуда

$$M\left(X(t_1)X(t_2)\right)-m_X(t_1)m_X(t_2)=$$
$$M[(\alpha\cdot\cos(\varphi\cdot t_1)+\beta\cdot\sin(\varphi\cdot t_1)\cdot(\alpha\cdot\cos(\varphi\cdot t_2)+\beta\cdot\sin(\varphi\cdot t_2)]-m_X(t_1)m_X(t_2)=$$
$$=M\alpha^2\cdot\cos(\varphi\cdot t_1)\cos(\varphi\cdot t_2)+M\alpha\cdot M\beta\cdot\sin(\varphi\cdot(t_1+t_2))+M\beta^2\cdot\sin(\varphi\cdot t_1)\sin(\varphi\cdot t_2)-$$
$$-m_\alpha^2\cos(\varphi\cdot t_1)\cos(\varphi\cdot t_2)-m_\alpha\cdot m_\beta\left(\cos(\varphi\cdot t_1)\cdot\sin(\varphi\cdot t_2)+\sin(\varphi\cdot t_1)\cdot\cos(\varphi\cdot t_2)\right)-$$
$$-m_\beta^2\cdot\sin(\varphi\cdot t_1)\cdot\sin(\varphi\cdot t_2)=\sigma^2\cos(\varphi\cdot(t_1-t_2));$$

Сокращаем $M\alpha\cdot M\beta\cdot\sin(\varphi\cdot(t_1+t_2))$ и $-m_\alpha\cdot m_\beta\left(\cos(\varphi\cdot t_1)\cdot\sin(\varphi\cdot t_2)+\sin(\varphi\cdot t_1)\cdot\cos(\varphi\cdot t_2)\right)$

$$M\left(X(t_1)X(t_2)\right) - m_X(t_1)m_X(t_2) = M\alpha^2 \cdot \cos(\varphi \cdot t_1)\cos(\varphi \cdot t_2) + M\beta^2 \cdot \sin(\varphi \cdot t_1)\sin(\varphi \cdot t_2) -$$
$$- m_\alpha^2 \cos(\varphi \cdot t_1)\cos(\varphi \cdot t_2) - m_\beta^2 \cdot \sin(\varphi \cdot t_1) \cdot \sin(\varphi \cdot t_2) =$$
$$= \left[M\alpha^2 - m_\alpha^2\right] \cdot \cos(\varphi \cdot t_1)\cos(\varphi \cdot t_2)) + \left[M\beta^2 - m_\beta^2\right]\sin(\varphi \cdot t_1) \cdot \sin(\varphi \cdot t_2))$$

учитывая, что $M\alpha^2 = \sigma^2 + m_\alpha^2$; $M\beta^2 = \sigma^2 + m_\beta^2$ записываем окончательно:

$$K_X(t_1,t_2) = \sigma^2\left[\cos(\varphi \cdot t_1)\cos(\varphi \cdot t_2)) - \sin(\varphi \cdot t_1) \cdot \sin(\varphi \cdot t_2)\right] = \sigma^2 \cos\left(\varphi(t_1 - t_2)\right)$$

Таким образом получили: $m_X(t) = m_\alpha \cos(\varphi \cdot t) + m_\beta \sin(\varphi \cdot t)$; $K_X(t_1,t_2) = \sigma^2 \cos(\varphi \cdot (t_1 - t_2))$; откуда

$$m_X'(t) = \frac{dm_X}{dt} = \varphi \cdot [m_\beta \cos(\varphi \cdot t) - m_\alpha \sin(\varphi \cdot t)];$$
$$\frac{\partial^2 K_X}{\partial t_1 \partial t_2} = \sigma^2\varphi^2 \cos\varphi(t_2 - t_1)\Big|_{t_1=t_2=t_0} = \sigma^2\varphi^2$$

И согласно теореме о необходимом и достаточном условии дифференцируемости случайного процесса: случайный процесс $X(t) = \alpha \cdot \cos(\varphi \cdot t) + \beta \cdot \sin(\varphi \cdot t)$ – дифференцируем.

Интегрируемость случайного процесса

Понятие интеграла от случайного процесса будем также рассматривать в среднеквадратическом смысле. Пусть случайный процесс $\xi(t)$ определен на $T \subset R$. На отрезке $[a,b] \subset T$ построим некоторое разбиение $a = t_0 \le t_1 \le .... \le t_{n-1} \le t_n = b$, а на каждом из промежутков этого разбиения выберем произвольную точку $\tau_i \in \left[t_{i-1}, t_i\right), i = 1,...,n$.

Определение 7: Если при $n \to \infty$ и $\max\limits_{i=1,...,n}(t_i - t_{i-1}) \to 0$ существует предел в среднеквадратическом $\sum\limits_{i=1}^{n} \xi(\tau_i) \cdot (t_i - t_{i-1}) \xrightarrow{c.k} \eta$, не зависящий от способа разбиения $\{t_i\}$ и выбора точек $\{\tau_i\}$, т.е. $\lim\limits_{\max \Delta t_i \to 0} M\left\{\left[\sum\limits_{i=1}^{n} \xi(\tau_i)\cdot(t_i - t_{i-1}) - \int\limits_a^b \xi(t)\,dt\right]^2\right\} = 0$, то случайный процесс $\xi(t)$ называется ***интегрируемым в среднеквадратическом***, а случайная величина η называется ее ***среднеквадратическим интегралом*** по $[a,b]$ и обозначается $\eta = \int\limits_a^b \xi(t)\,dt$.

Теорема 3. Для существования среднеквадратического интеграла $\eta = \int\limits_a^b \xi(t)dt$ необходимо и достаточно, чтобы существовали следующие интегралы Римана:

$$I_1 = \int\limits_a^b m_\xi(t)\, dt; \quad \text{и} \quad I_2 = \int\limits_a^b \int\limits_a^b K_\xi(t,\tau)\ dt\, d\tau,$$

где $m_\xi(t) = M\{\xi(t)\}$, $K_\xi(t,\tau) = \operatorname{cov}\big(\xi(t), \xi(\tau)\big)$

Пример 7.7. *Задан случайный процесс $X(t) = V \cdot t^2$, где V – случайная величина, числовые характеристики, которой $m_V = 2,\ \sigma_V^2 = 1$. Показать, что $X(t)$ интегрируемый в среднем квадратическом процесс на $[1,2]$.*

Решение:

1. Найдем математическое ожидание и ковариационную функцию процесса:

$$m_X(t) = M\left(V \cdot t^2\right) = t^2 \cdot MV = 2t^2$$

$$K_X(t_1,t_2) = M\left(X(t_1)\cdot X(t_2)\right) - m_X(t_1)m_X(t_2) = M\left(V^2 \cdot t_1^2 \cdot t_2^2\right) - (MV)^2 \cdot t_1^2 \cdot t_2^2 =$$
$$= \left(t_1^2 \cdot t_2^2\right)MV^2 - (MV)^2 \cdot t_1^2 \cdot t_2^2 = \left(t_1^2 \cdot t_2^2\right)\cdot\left(MV^2 - (MV)^2\right) = \left(t_1^2 \cdot t_2^2\right)\cdot DV = t_1^2 \cdot t_2^2$$

2. Для существования среднеквадратического интеграла $\eta = \int\limits_a^b \xi(t)dt$ необходимо и достаточно, чтобы существовали следующие интегралы Римана:

$$I_1 = \int\limits_a^b m_\xi(t)\, dt \quad \text{и} \quad I_2 = \int\limits_a^b \int\limits_a^b K_\xi(t_1,t_2)\ dt_1\, dt_2$$

У нас:

$$I_1 = \int\limits_1^2 2t^2\, dt = \left.\frac{2t^3}{3}\right|_1^2 = \frac{16}{3} - \frac{2}{3} = \frac{14}{3};$$

$$I_2 = \int\limits_1^2 \int\limits_1^2 t_1^2 \cdot t_2^2\ dt_1\, dt_2 = \int\limits_1^2 t_1^2\ dt_1 \int\limits_1^2 t_2^2\ dt_2 = \int\limits_1^2 t_1^2\ dt_1 \left\{ \left.\frac{t_2^3}{3}\right|_1^2 \right\} = \frac{7}{3}\int\limits_1^2 t_1^2\ dt_1 = \frac{7}{3}\cdot\frac{7}{3} = \frac{49}{9}$$

Т.е. согласно теореме ***3***, о необходимом и достаточном условии существования среднеквадратического интеграла $\eta = \int\limits_a^b \xi(t)dt$ случайный процесс $X(t) = V \cdot t^2$ интегрируем на $[1,2]$.

8. Основные классы случайных процессов

Гауссовские случайные процессы

Важную роль во многих прикладных задачах играют гауссовские случайные процессы, которые возникают в результате сложения большого числа независимых или слабо зависимых случайных процессов примерно одинаковой мощности. В этом случае, с увеличением числа слагаемых сумма сходится к гауссовскому случайному процессу независимо от того, как распределены отдельные слагаемые.

Пусть $\vec{\xi} = \left(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\right)^T$ - n-мерный случайный вектор, и $\vec{u} = \left(u_1, u_2, \ldots, u_n\right)^T \in R^n$.

Характеристическая функция $\vec{\xi}$ определяется как: $g_n(\vec{u}) = Me^{i(\vec{u},\vec{\xi})} = Me^{i(u_1\xi_1 + \ldots + u_n\xi_n)}$,

где $\left(\vec{u}, \vec{\xi}\right)$ – скалярное произведение векторов.

Напомним, что n-мерный случайный вектор $\vec{\xi} = \left(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\right)^T$ имеет нормальное распределение, если его характеристическая функция имеет вид:

$$g_n(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \exp\left\{i\left(\vec{m}, \vec{u}\right) - \frac{1}{2}\vec{u}^T K \vec{u}\right\} = \exp\left\{i\sum_{k=1}^{n} m_k u_k - \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} K_{jk} u_j u_k\right\},$$

где $\vec{u} = \left(u_1, u_2, \ldots, u_n\right)^T$, $\vec{m}^T = \left(M\xi_1, M\xi_2, \cdots, M\xi_n\right) = \left(m_1, m_2, \cdots, m_n\right)$,

$K = (K_{jk})$ – ковариационная матрица случайного вектора $\vec{\xi} = \left(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\right)^T$:

$$K_{jk} = M\left(\left(\xi_j - m_j\right)\left(\xi_k - m_k\right)\right) = M\left(\overset{\circ}{\xi}_j \cdot \overset{\circ}{\xi}_k\right), \; j,k = \overline{1,n}.$$

<u>Определение 1.</u> Действительный случайный процесс $\xi(\omega,t)$, $t \in T$ называется ***гауссовским*** или ***нормальным***, если все его конечномерные законы распределения являются нормальными, т.е. n-мерная плотность распределения и характеристическая функция совместного распределения вероятностей случайных величин $\xi(\omega,t_1), \xi(\omega,t_2), \ldots, \xi(\omega,t_n)$ $\forall\, t_i \in T \left(i = \overline{1,n}\right)$ имеют вид:

$$p(x_1,x_2,...,x_n,t_1,t_2,...,t_n)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n\det K}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i,j}K_{ij}^{-1}\left(x_i-m_i\right)\left(x_j-m_j\right)\right\};$$

$$g_n\left(u_1,u_2,\ldots,u_n;t_1,t_2,\ldots,t_n\right)=M\left\{\exp\left(i\sum_{k=1}^{n}x_k u_k\right)\right\}=\exp\left\{i\sum_{k=1}^{n}m_k u_k-\frac{1}{2}\sum_{k,j=1}^{n}K_{kj}u_k u_j\right\}.$$

Характеристическая функция полностью определяет распределение совокупности случайных величин, и с ее помощью может быть задано полное семейство конечномерных распределений.

Пример 8.1. Найти характеристическую функцию гауссовского случайного процесса при $n=1$.

Решение: Пусть $n=1$, тогда по определению характеристической функции $g_1\left(u\right)=M\left[e^{iu\xi}\right]=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{iux}p_1(x)dx$,где $p_1\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{-\frac{\left(x-m\right)^2}{2\sigma^2}\right\}$ – плотность одномерного нормального распределения.

Плотность $p_1\left(x\right)$ находится по формуле обращения: $p_1\left(x\right)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-iux}g_1(u)du$.

Покажем, что: $g_1\left(u\right)=e^{ium-\frac{1}{2}\sigma^2u^2}$;

Имеем:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{iux}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx\overset{x-m=y}{=}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{i(y+m)u}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}}dy=\frac{e^{ium}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{iuy-\frac{1}{2\sigma^2}y^2}dy=$$

$$=\frac{e^{ium}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left(y-i\sigma^2u\right)^2}e^{-\frac{\sigma^2u^2}{2}}dy\overset{\left[z=y-i\sigma^2u\right]}{=}\frac{e^{ium}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{\sigma^2u^2}{2}}\int\limits_{-\infty-i\sigma^2u}^{+\infty-i\sigma^2u}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}dz=$$

$$=e^{ium-\frac{1}{2}\sigma^2u^2}.$$

Пример 8.2. Найти одномерную и двумерную плотности распределения вероятностей процесса $\xi(t)=\alpha\cdot\cos\left(\omega t\right)+\beta\sin\left(\omega t\right)$, где ω – постоянная угловая частота; α и β-взаимно независимые случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями $m_\alpha = m_\beta = 0$ и дисперсиями $D_\alpha = D_\beta = \sigma^2$.

Решение: При любом фиксированном значении t, будем иметь в сечении случайную величину, которая будет являться гауссовской величиной, т.к. она представляет собой линейную комбинацию гауссовских случайных величин. Для определения одномерной и двумерной плотностей распределения вероятностей процесса, нам нужно определить его математическое ожидание $m_\xi(t)$ и ковариационную функцию $K_\xi(t_1,t_2)$.

По определению:

$$m_\xi(t) = M\left(\alpha\cdot\cos(\omega t)+\beta\sin(\omega t)\right) = \cos(\omega t)\cdot M\alpha + M\beta\cdot\sin(\omega t) = 0;$$

$$\begin{aligned}K_\xi(t_1,t_2) &= M\left(\alpha\cdot\cos(\omega t_1)+\beta\cdot\sin(\omega t_1)\right)\left(\alpha\cdot\cos(\omega t_2)+\beta\cdot\sin(\omega t_2)\right) = \\ &= M(\alpha^2\cdot\cos(\omega t_1)\cdot\cos(\omega t_2)+\alpha\cdot\cos(\omega t_1)\cdot\beta\sin(\omega t_2)+ \\ &+\beta\cdot\sin(\omega t_1)\cdot\alpha\cdot\cos(\omega t_2)+\beta^2\cdot\sin(\omega t_1)\cdot\sin(\omega t_2))\end{aligned}$$

Из условия задачи известно, что α и β – взаимно независимые случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями $m_\alpha = m_\beta = 0$, поэтому $M(\alpha\cdot\beta) = M\alpha\cdot M\beta = 0$ (свойство математического ожидания для независимых случайных величин).

Упростим выражение для $K_\xi(t_1,t_2)$:

$$\begin{aligned}K_\xi(t_1,t_2) &= M\left(\alpha\cdot\cos(\omega t_1)+\beta\sin(\omega t_1)\right)\left(\alpha\cdot\cos(\omega t_2)+\beta\sin(\omega t_2)\right) = \\ &= M\left(\alpha^2\cos(\omega t_1)\cdot\cos(\omega t_2)+\beta^2\sin(\omega t_1)\cdot\sin(\omega t_2)\right) = M\alpha^2\cdot\left(\cos(\omega t_1)\cdot\cos(\omega t_2)\right)+ \\ &+M\beta^2\cdot\left(\sin(\omega t_1)\cdot\sin(\omega t_2)\right) = \sigma^2\left(\cos(\omega t_1)\cdot\cos(\omega t_2)\right)+\sigma^2\left(\sin(\omega t_1)\cdot\sin(\omega t_2)\right) = \\ &= \sigma^2\left(\cos(\omega t_1)\cdot\cos(\omega t_2)+\sin(\omega t_1)\cdot\sin(\omega t_2)\right) = \sigma^2\cos\omega(t_2-t_1) = K_\xi(\tau),\ \tau = t_2-t_1.\end{aligned}$$

Запишем ковариационную матрицу:

$$K = \begin{pmatrix} \sigma^2 & \sigma^2\cos\omega\tau \\ \sigma^2\cos\omega\tau & \sigma^2 \end{pmatrix}$$

найдем ее определитель:

$$|K| = \begin{vmatrix} \sigma^2 & \sigma^2\cos\omega\tau \\ \sigma^2\cos\omega\tau & \sigma^2 \end{vmatrix} = \sigma^4\cdot\left(1-\cos^2\omega\tau\right) = \sigma^4\cdot\sin^2\omega\tau > 0$$

Найдем обратную матрицу:

$$K^{-1}=\frac{1}{\det K}\cdot\begin{pmatrix}\sigma^2 & -\sigma^2\cos\omega\tau\\ -\sigma^2\cos\omega\tau & \sigma^2\end{pmatrix}=\frac{1}{\sigma^4\cdot\sin^2\omega\tau}\begin{pmatrix}\sigma^2 & -\sigma^2\cos\omega\tau\\ -\sigma^2\cos\omega\tau & \sigma^2\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{\sigma^2\cdot\sin^2\omega\tau}\begin{pmatrix}1 & -\cos\omega\tau\\ -\cos\omega\tau & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/\sigma^2\cdot\sin^2\omega\tau & -\cos\omega\tau/\sigma^2\cdot\sin^2\omega\tau\\ -\cos\omega\tau/\sigma^2\cdot\sin^2\omega\tau & 1/\sigma^2\cdot\sin^2\omega\tau\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}K_{11}^{-1} & K_{12}^{-1}\\ K_{21}^{-1} & K_{22}^{-1}\end{pmatrix}$$

Теперь можем записать искомые плотности распределения вероятностей, используя вышеуказанную формулу:

$$p(x_1,x_2,...,x_n,t_1,t_2,...,t_n)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n\det K}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i,j}K_{ij}^{-1}\left(x_i-a_i\right)\left(x_j-a_j\right)\right\};$$

Одномерная плотность распределения вероятностей процесса $\xi(t)=\alpha\cdot\cos\left(\omega t\right)+\beta\sin\left(\omega t\right)$:

$$p(x,t)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{\sigma^2}\right\};$$

Двумерная плотность распределения вероятностей процесса $\xi(t)=\alpha\cdot\cos\left(\omega t\right)+\beta\sin\left(\omega t\right)$:

$$p(x_1,x_2,t_1,t_2)=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2\sigma^4\cdot\sin^2\omega\tau}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{i,j}K_{ij}^{-1}\left(x_i-a_i\right)\left(x_j-a_j\right)\right\}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2\sigma^4\cdot\sin^2\omega\tau}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\cdot\left[K_{11}^{-1}\cdot x_1^2+K_{12}^{-1}\cdot x_1\cdot x_2+K_{21}^{-1}\cdot x_1\cdot x_2+K_{22}^{-1}\cdot x_2^2\right]\right\}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2\sigma^4\cdot\sin^2\omega\tau}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{x_1^2}{\sigma^2\cdot\sin^2\omega\tau}-\frac{x_1\cdot x_2\cdot\cos\omega\tau}{\sigma^2\cdot\sin^2\omega\tau}-\frac{x_1\cdot x_2\cdot\cos\omega\tau}{\sigma^2\cdot\sin^2\omega\tau}+\frac{x_2^2}{\sigma^2\cdot\sin^2\omega\tau}\right]\right\}=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)\cdot\sigma^2\cdot\sin\omega\tau}\exp\left\{-\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{x_1^2}{\sigma^2\cdot\sin^2\omega\tau}-\frac{2\cdot x_1\cdot x_2\cdot\cos\omega\tau}{\sigma^2\cdot\sin^2\omega\tau}+\frac{x_2^2}{\sigma^2\cdot\sin^2\omega\tau}\right]\right\}=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)\cdot\sigma^2\cdot\sin\omega\tau}\exp\left\{-\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{x_1^2-2\cdot x_1\cdot x_2\cdot\cos\omega\tau+x_2^2}{\sigma^2\cdot\sin^2\omega\tau}\right]\right\},\tau=t_2-t_1$$

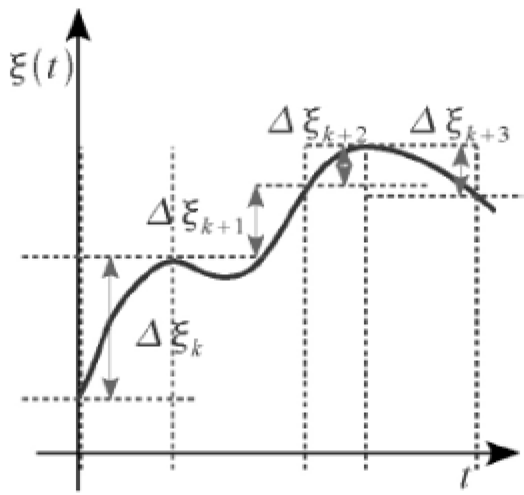
<u>Замечание 1:</u> Гауссовские процессы обладают рядом хороших свойств:

1. Гауссовский случайный процесс исчерпывающим образом определяется двумя моментными функциями: математическим ожиданием $m_\xi(t)$ и ковариационной функцией $K_\xi(\tau)$.

2. Для гауссовских случайных процессов понятия стационарности в широком и узком смысле совпадают. По определению, случайный процесс является стационарным в широком смысле, если его математическое ожидание не зависит от времени, а ковариационная функция зависит лишь от абсолютных значений интервалов между рассматриваемыми моментами времени. Одновременно он будет стационарным в узком смысле, т.к. многомерные плотности вероятности и характеристические функции не будут изменяться при сдвиге всей группы точек вдоль оси времени на произвольную постоянную величину.

Процессы с ортогональными и независимыми приращениями

Определение 2. ***Приращением случайного процесса*** на промежутке $(t_1, t_2]$, где $0 \le t_1 \le t_2$ называется ***случайная величина*** $\Delta\xi(t_1, t_2) = \xi(t_2) - \xi(t_1)$



Определение 3. Случайный процесс называется ***процессом с ортогональными приращениями***, если для произвольных моментов времени $0 \le t_1 \le t_2 \le t_3 \le t_4$ выполняется соотношение:

$$\operatorname{cov}\{\xi(t_2) - \xi(t_1), \xi(t_4) - \xi(t_3)\} = \operatorname{cov}\{\Delta\xi(t_1, t_2), \Delta\xi(t_3, t_4)\} = 0$$

Ковариация двух случайных величин имеет смысл скалярного произведения. Поэтому условие некоррелированности приращений часто называют условием их ортогональности, т.е. равенства нулю скалярного произведения этих приращений.

Замечание 2: Из всего вышеизложенного следует, что случайный процесс $\tilde{\xi}(t) = \xi(t) - \xi(0)$ тоже процесс с ортогональными приращениями. Для любого промежутка $(t_1, t_2]$:

$\Delta\tilde{\xi}(t)=\Delta\xi(t)$, т.е. все свойства приращений процесса $\xi(t)$ переносятся на приращения процесса $\tilde{\xi}(t)$. Поэтому далее будем предполагать, что $\xi(0)=0$. В таком случае говорят, что процесс выходит из нуля.

<u>*Частным случаем*</u> ***процессов с ортогональными приращениями*** являются процессы с независимыми приращениями.

<u>Определение 4.</u> Случайный процесс называется ***процессом с независимыми приращениями***, если для любых сечений $0\le t_1\le t_2\le\ldots\le t_n$, $n\ge 1$ случайные величины $\xi(0)$, $\Delta\xi(0,t_1),\Delta\xi(t_1,t_2),\ldots..,\Delta\xi(t_{n-1},t_n)$ независимы в совокупности.

$$\left\{\xi(t_0),\ \xi(t_1)-\xi(t_0)\right\},\left\{\xi(t_2)-\xi(t_1)\right\}.....,\left\{\xi(t_n)-\xi(t_{n-1}),\xi(t_{n-2})-\xi(t_{n-1})\right\}$$

и конечномерное распределение имеет вид:

$$p(x_1,x_2,...,x_n,t_1,t_2,...,t_n)=p(x_n,t_n\,|\,x_{n-1},t_{n-1})\cdot..........\cdot p(x_2,t_2\,|\,x_1,t_1)\cdot p(x_1,t_1)$$

Процессы с независимыми приращениями полностью описываются одномерными и двумерными законами распределения, т.е. для задания такого процесса достаточно знать только $p(x,t)$, $p(x_1,x_2,t_1,t_2)$ или $F(x,t)$, $F(x_1,x_2,t_1,t_2)$.

<u>Замечание 3:</u> В случае процесса с конечной мощностью, т.е. если $M\left(\xi^2(t)\right)<\infty$, при всех $t\ge 0$ процесс с независимыми приращениями также является процессом с ортогональными приращениями. Обратное в общем случае неверно, но гауссовские процессы с ортогональными приращениями также является и процессом с независимыми приращениями, в предположении, что $\xi(0)=0$.

Винеровский процесс

(частный случай процесса с независимыми приращениями)

<u>Определение 5</u>: Винеровским процессом $W(\omega,t)$ называют случайный процесс, для которого выполнены следующие аксиомы:

1. Для любого разбиения временного интервала $[0,T]$ точками $0=t_0<t_1<t_2\ldots<t_{n-1}<t_n=T$

Приращения: $W(t_1)-W(t_0)$, $W(t_2)-W(t_1)$, $W(t_3)-W(t_2)$, ..., $W(t_n)-W(t_{n-1})$ независимы.

2. Пусть $0 \le t_{i-1} < t_i \le T$. Тогда случайная величина $W(t_i) - W(t_{i-1})$ распределена нормально с нулевым математическим ожиданием $M\{W(t_i) - W(t_{i-1})\} = 0$ и дисперсией $M\{W(t_i) - W(t_{i-1})\}^2 = \sigma(t_i - t_{i-1})$.
3. Реализации $W(\omega_0, t)$ непрерывны по t на $[0, T]$.

Винеровский случайный процесс является одновременно и процессом с независимыми приращениями, и гауссовским случайным процессом. Если $\sigma = 1$, то винеровский процесс называется ***стандартным.***

Некоторые полезные свойства винеровского процесса

Винеровский процесс инвариантен относительно некоторых преобразований фазовой и временной шкал. Так, если $W(\omega, t)$ – винеровский случайный процесс, то для

$\forall\ \sigma > 0$ и $s \ge 0$ случайные процессы:

$$W(\omega, t) = \sigma \cdot W\left(\omega, \frac{t}{\sigma^2}\right)$$

$$X(\omega, t) = t \cdot W\left(\omega, \frac{1}{t}\right)$$

$$X(\omega, t) = W(\omega, t+s) - W(\omega, s)$$

Также являются винеровскими.

Пример 8.3. Показать, что корреляционная функция винеровского процесса имеет вид:

$$R_w(t_1, t_2) = \sigma^2 \min\{t_1, t_2\}$$

Решение:

1. Пусть $t_1 < t_2$. По определению корреляционной функции: $R_w(t_1, t_2) = M\{W(t_1) \cdot W(t_2)\}$ Проведем искусственные преобразования под знаком математического ожидания, добавим $W^2(t_1)$ и вычтем его же:

$$R_w(t_1, t_2) = M\{W(t_1) \cdot W(t_2)\} = M\{W(t_1) \cdot W(t_2) - W^2(t_1) + W^2(t_1)\}$$

Далее проводим простые алгебраические преобразования:

$$R_w(t_1,t_2)=M\left\{W\left(t_1\right)\cdot W\left(t_2\right)\right\}=M\left\{W\left(t_1\right)\cdot W\left(t_2\right)-W^2\left(t_1\right)+W^2\left(t_1\right)\right\}=$$
$$=M\left\{W\left(t_1\right)\cdot\left\{W\left(t_2\right)-W\left(t_1\right)\right\}+W^2\left(t_1\right)\right\}$$

Распишем последнее выражение, используя свойство математического ожидания суммы случайных процессов:

$$R_w(t_1,t_2)=M\left\{W\left(t_1\right)\cdot\left[W\left(t_2\right)-W\left(t_1\right)\right]+W^2\left(t_1\right)\right\}=M\left\{W\left(t_1\right)\cdot\left\{W\left(t_2\right)-W\left(t_1\right)\right\}\right\}+MW^2\left(t_1\right)$$

Можем переписать так: $R_w(t_1,t_2)=M\left\{\left(W\left(t_1\right)-W\left(t_0\right)\right)\cdot\left\{W\left(t_2\right)-W\left(t_1\right)\right\}\right\}+MW^2\left(t_1\right)$

В силу того, что все приращения винеровского процесса независимы, используем опять свойство математического ожидания произведения случайных процессов:

$$M\left\{\left(W\left(t_1\right)-W\left(t_0\right)\right)\cdot\left(W\left(t_2\right)-W\left(t_1\right)\right)\right\}=M\left\{W\left(t_1\right)-W\left(t_0\right)\right\}\cdot M\left\{W\left(t_2\right)-W\left(t_1\right)\right\}$$

Т.к. $M\left\{W\left(t_i\right)-W\left(t_{i-1}\right)\right\}=0$, то $M\left\{\left(W\left(t_1\right)-W\left(t_0\right)\right)\cdot\left(W\left(t_2\right)-W\left(t_1\right)\right)\right\}=0$

И тогда $R_w(t_1,t_2)=MW^2\left(t_1\right)$ или иначе $R_w(t_1,t_2)=M\left[W\left(t_1\right)-W\left(t_0\right)\right]^2=$

Т.к. по определению $M\left\{W\left(t_i\right)-W\left(t_{i-1}\right)\right\}^2=\sigma\left(t_i-t_{i-1}\right)$, то у нас окончательно:

$$R_w(t_1,t_2)=M\left[W\left(t_1\right)-W\left(t_0\right)\right]^2=\sigma\left(t_1-t_0\right)=\sigma\left(t_1-0\right)=\sigma\cdot t_1$$

2. Пусть $t_2<t_1$. Тогда проведя аналогичные предыдущему рассуждения, получим:

$$R_w(t_1,t_2)=M\left\{W\left(t_1\right)\cdot W\left(t_2\right)\right\}=M\left\{W\left(t_1\right)\cdot W\left(t_2\right)-W^2\left(t_2\right)+W^2\left(t_2\right)\right\}=$$
$$=M\left\{W\left(t_2\right)\cdot\left[W\left(t_1\right)-W\left(t_2\right)\right]+W^2\left(t_2\right)\right\}=M\left\{W\left(t_2\right)-W\left(t_0\right)\right\}\cdot M\left[W\left(t_1\right)-W\left(t_2\right)\right]+M\left\{W^2\left(t_2\right)\right\}=$$
$$=M\left\{W^2\left(t_2\right)\right\}=M\left[W\left(t_2\right)-W\left(t_1\right)\right]^2=\sigma^2\cdot\left(t_2-t_0\right)=\sigma^2\cdot t_2$$

Объединяя оба выражения в одно, окончательно можем записать:

$$R_w(t_1,t_2)=\sigma^2\min\left(t_1,t_2\right)$$

Это корреляционная функция винеровского процесса.

Пример 8.4. Показать, что винеровский процесс не дифференцируем в среднем квадратическом.

Решение: По определению производная слева:

$$\lim_{\Delta t\to 0-} M\left[\left|\frac{W(\omega,t+\Delta t)-W(\omega,t)}{\Delta t}\right|^2\right]=\lim_{\Delta t\to 0-}\frac{1}{\Delta t^2}M\left[\left(\mathrm{W}(\omega,t+\Delta t)-W(\omega,t)\right)^2\right]$$

Т.к. приращения винеровского процесса распределены нормально, то

$$M\left[\left(\mathrm{W}(\omega,t+\Delta t)-W(\omega,t)\right)^2\right]=\sigma^2\left[t+\Delta t-t\right]=\sigma^2\cdot\Delta t$$

Тогда $\lim\limits_{\Delta t\to 0-}\dfrac{1}{\Delta t^2}M\left[\left(\mathrm{W}(\omega,t+\Delta t)-W(\omega,t)\right)^2\right]=\lim\limits_{\Delta t\to 0-}\dfrac{1}{\Delta t^2}\cdot\sigma^2\cdot\Delta t=\lim\limits_{\Delta t\to 0-}\dfrac{\sigma^2}{\Delta t}=-\infty$

Аналогично для правой производной:

$$\lim_{\Delta t\to 0+} M\left[\left|\frac{W(\omega,t+\Delta t)-W(\omega,t)}{\Delta t}\right|^2\right]=\lim_{\Delta t\to 0+}\frac{1}{\Delta t^2}M\left[\left(\mathrm{W}(\omega,t+\Delta t)-W(\omega,t)\right)^2\right]=$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0+}\frac{1}{\Delta t^2}\cdot\sigma^2\cdot\Delta t=\lim_{\Delta t\to 0+}\frac{\sigma^2}{\Delta t}=+\infty$$

Действительно винеровский процесс не дифференцируем в среднем квадратическом.

Пуассоновский процесс

(частный случай процесса с независимыми приращениями)

<u>Определение 6.</u> Пуассоновским процессом с параметром $\lambda>0$ называется скалярный случайный процесс $\xi(\omega,t)$, $t\in R_+$, обладающий следующими свойствами:

1. $\xi(\omega,0)=0$
2. $\forall\, n>1,\, t_k\in T,\ k=\overrightarrow{1,n},\ t_1<t_2<\ldots<t_n$ случайные величины $\xi(t_1),\ \ \xi(t_2)-\xi(t_1),\ \ \xi(t_3)-\xi(t_2),\ \ldots,\ \ \xi(t_n)-\xi(t_{n-1})$ являются независимыми;
3. $\forall\ t_1,t_2\in T:\ 0\le t_1<t_2$ случайная величина $\xi(t_2)-\xi(t_1)$ распределена по закону Пуассона с параметром $\lambda\cdot(t_2-t_1)$:

$$P\left\{\xi(t_2)-\xi(t_1)=k\right\}=\frac{\left(\lambda\cdot(t_2-t_1)\right)^k}{k!}e^{-\lambda\cdot(t_2-t_1)}$$

В разделе непрерывность случайных процессов в ***примере 4.3*** было показано, что Пуассоновский процесс непрерывен в среднем квадратическом. Покажем теперь, что он не дифференцируем в среднем квадратическом.

Пример 8.5. Показать, что пуассоновский процесс не дифференцируем в среднем квадратическом.

Решение:

1. Согласно теореме о необходимом и достаточном условии дифференцируемости случайного процесса: для того, чтобы случайный процесс $\xi(\omega,t)$ $t \in T$ был дифференцируемым в каждой точке $t \in T$, а для случайной величины $\xi'(\omega,t)$ существовало математическое ожидание и дисперсия, необходимо и достаточно, чтобы функция $m_\xi(t)$ была дифференцируема в каждой точке $t \in T$ и существовала вторая обобщенная смешанная производная от ковариационная функции $K_\xi(t_1,t_2)$ при $t_1 = t_2 = t$.

2. Найдем характеристики случайного процесса:

$$m_\xi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \frac{(\lambda \cdot t)^k}{k!} e^{-\lambda \cdot t} = (\lambda \cdot t) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda \cdot t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda \cdot t} = (\lambda \cdot t) e^{-\lambda \cdot t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda \cdot t)^{k-1}}{(k-1)!} = (\lambda \cdot t) e^{-\lambda \cdot t} \cdot e^{\lambda \cdot t} = \lambda \cdot t$$

По определению: $K_\xi(t_1,t_2) = M\{\xi(t_1)\cdot\xi(t_2)\} - M\xi(t_1)\cdot M\xi(t_2)$

Тогда у нас при $t_1 < t_2$:

$$\begin{aligned} K_\xi(t_1,t_2) &= M\left(\xi(t_1)\cdot\xi(t_2)\right) - m_\xi(t_1)\cdot m_\xi(t_2) = M\left(\xi(t_1)\cdot\xi(t_2) - \xi^2(t_1) + \xi^2(t_1)\right) - m_\xi(t_1)\cdot m_\xi(t_2) = \\ &= M\left\{\xi(t_1)\cdot\left(\xi(t_2) - \xi(t_1)\right) + \xi^2(t_1)\right\} - m_\xi(t_1)\cdot m_\xi(t_2) = \\ &\qquad = M\left[\xi(t_1)\cdot\left(\xi(t_2) - \xi(t_1)\right)\right] + M\xi^2(t_1) - m_\xi(t_1)\cdot m_\xi(t_2) \end{aligned}$$

В преобразованиях использовали свойство, что математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме их математических ожиданий.

При проведении дальнейших преобразований учтем, что для Пуассоновского процесса: $\xi(t_0) = 0$, $M\left(\xi(t_2) - \xi(t_1)\right) = \lambda\cdot(t_2 - t_1)$, $M\xi^2(t_1) = D\xi(t_1) + M^2\xi(t_1)$, $M\xi(t_1) = D\xi(t_1) = \lambda\cdot t_1$, т.е. $M\xi^2(t_1) = \lambda\cdot t_1 + \lambda^2\cdot t_1^2$. Также используем свойство математического ожидания: математическое ожидание произведения независимых случайных величин, равно произведению их математических ожиданий. У нас независимыми являются приращения Пуассоновского процесса $\left(\xi(t_1) - \xi(t_0)\right)$ и $\left(\xi(t_2) - \xi(t_1)\right)$.

Используя все вышесказанное, продолжим:

$$K_\xi(t_1,t_2)=M\left[\xi(t_1)\cdot\left(\xi(t_2)-\xi(t_1)\right)\right]+M\xi^2(t_1)-m_\xi(t_1)\cdot m_\xi(t_2)=$$
$$=M\left[\xi(t_1)-\xi(t_0)\right]\cdot M\left[\left(\xi(t_2)-\xi(t_1)\right)\right]+M\xi^2(t_1)-m_\xi(t_1)\cdot m_\xi(t_2)=$$
$$=\lambda t_1\cdot\lambda\cdot\left(t_2-t_1\right)+\lambda\cdot t_1+\lambda^2\cdot t_1^2-\lambda^2\cdot t_1\cdot t_2=\lambda^2\cdot t_1\cdot t_2-\lambda^2\cdot t_1^2+\lambda\cdot t_1+\lambda^2\cdot t_1^2-\lambda^2\cdot t_1\cdot t_2=\lambda\cdot t_1$$

Таким образом получили, что $K_\xi(t_1,t_2)=\lambda\cdot t_1$

Аналогично рассуждая, при $t_2<t_1$, получим:

$$K_\xi(t_1,t_2)=M\left(\xi(t_1)\cdot\xi(t_2)\right)-m_\xi(t_1)\cdot m_\xi(t_2)=M\left(\xi(t_1)\cdot\xi(t_2)-\xi^2(t_2)+\xi^2(t_2)\right)-m_\xi(t_1)\cdot m_\xi(t_2)=$$
$$=M\left\{\xi(t_2)\cdot\left(\xi(t_1)-\xi(t_2)\right)+\xi^2(t_2)\right\}-m_\xi(t_1)\cdot m_\xi(t_2)=$$
$$=M\left[\xi(t_2)\cdot\left(\xi(t_1)-\xi(t_2)\right)\right]+M\xi^2(t_2)-m_\xi(t_1)\cdot m_\xi(t_2)$$

Т.к. $\xi(t_0)=0,\ M\left(\xi(t_1)-\xi(t_2)\right)=\lambda\cdot\left(t_1-t_2\right)$, $M\xi^2(t_2)=D\xi(t_2)+M^2\xi(t_2)$, $M\xi(t_2)=D\xi(t_2)=\lambda\cdot t_2$,

т.е. $M\xi^2(t_2)=\lambda\cdot t_2+\lambda^2\cdot t_2^2$.

$$K_\xi(t_1,t_2)=M\left[\xi(t_2)\cdot\left(\xi(t_1)-\xi(t_2)\right)\right]+M\xi^2(t_2)-m_\xi(t_1)\cdot m_\xi(t_2)=$$
$$=M\left[\xi(t_2)-\xi(t_0)\right]\cdot M\left[\left(\xi(t_1)-\xi(t_2)\right)\right]+M\xi^2(t_2)-m_\xi(t_1)\cdot m_\xi(t_2)=$$
$$=\lambda t_2\cdot\lambda\cdot\left(t_1-t_2\right)+\lambda\cdot t_2+\lambda^2\cdot t_2^2-\lambda^2\cdot t_1\cdot t_2=\lambda^2\cdot t_2\cdot t_1-\lambda^2\cdot t_2^2+\lambda\cdot t_2+\lambda^2\cdot t_2^2-\lambda^2\cdot t_1\cdot t_2=\lambda\cdot t_2$$

Следовательно, $K_\xi(t_1,t_2)=\lambda\cdot\min\left(t_1,t_2\right)$

3. Покажем по определению, что не существует второй обобщенной смешанной производной от ковариационная функции $K_\xi(t_1,t_2)$ при $t_1=t_2=t$:

$$\frac{\partial^2K_\xi(t_1,t_2)}{\partial t_1\partial t_2}=\frac{\partial^2K_\xi(t,t)}{\partial t^2}=\lim_{\Delta t\to0}K_\xi(t+\Delta t,t+\Delta t)-K_\xi(t,t+\Delta t)-K_\xi(t+\Delta t,t)+K_\xi(t,t)=$$
$$=\lim_{\Delta t\to0}\frac{1}{\Delta t^2}\left\{D_\xi(t+\Delta t,t+\Delta t)-K_\xi(t,t+\Delta t)-K_\xi(t+\Delta t,t)+D_\xi(t,t)\right\}=$$
$$=\lim_{\Delta t\to0}\frac{1}{\Delta t^2}\left\{\lambda\cdot\left(t+\Delta t\right)-\lambda t-\lambda t+\lambda t\right\}$$

Использовали, полученный результат, что при $t_1<t_2$: $K_\xi(t_1,t_2)=\lambda\cdot t_1$, тогда т.к. $t<t+\Delta t$, то $K_\xi(t,t+\Delta t)=K_\xi(t+\Delta t,t)=\lambda t$, и $K_\xi(t,t+\Delta t)=K_\xi(t+\Delta t,t)$, поэтому окончательно:

$$\frac{\partial^2K_\xi(t,t)}{\partial t^2}=\lim_{\Delta t\to0}\frac{1}{\Delta t^2}\left\{\lambda\cdot\left(t+\Delta t\right)-\lambda t-\lambda t+\lambda t\right\}=\lim_{\Delta t\to0}\frac{\lambda\cdot\Delta t}{\Delta t^2}=\lim_{\Delta t\to0}\frac{\lambda}{\Delta t}=\infty$$

Т.е. показали, что Пуассоновский процесс не дифференцируем в среднем квадратическом.

Задачи для самостоятельного решения по всем темам

1. Дан случайный процесс $\xi(t)=\eta(t-t_0)+b,\ t\in(-\infty,\infty)$, где η - произвольная одномерная случайная величина, t_0 и b – некоторые фиксированные числа. Записать одномерную функцию распределения случайного процесса $\xi(t)$.

2. Случайный процесс $\xi(t)$ состоит из горизонтальных отрезков единичной длины, ординаты которых независимые случайные величины с плотностью $p(x)=\dfrac{|x|^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}e^{-|x|}$. Найти математическое ожидание, дисперсию и функцию корреляции процесса $\xi(t)$. Определить, является ли данный процесс стационарным, по крайней мере, в широком смысле.

3. U и V независимые случайные величины, равномерно распределенные в интервале $[a,b]$ и $[c,d]$ соответственно. Найти математическое ожидание, дисперсию и функцию корреляции процесса $\xi(t)=U+V\cdot t$. Является ли этот процесс стационарным?

4. Случайный процесс задан в виде $\xi(t)=U\cdot\cos\alpha t+V\cdot\sin\alpha t$, где α – неслучайная величина, U и V – некоррелированные случайные величины, равномерно распределенные в интервалах $[-1,1]$ и $[-2,2]$ соответственно. Найти математическое ожидание, дисперсию и функцию корреляции данного процесса. Является ли данный процесс стационарным?

5. Найти функцию ковариации процесса виде $\eta(t)=\xi(t)\cdot\cos(\beta t+\varphi)$, где β – неслучайная величина, $\xi(t)$ – стационарный случайный процесс с математическим ожиданием m и функцией ковариации $K_{\xi}(\tau)$, φ – случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0,2\pi]$, $\xi(t)$ и φ независимые. Является ли этот процесс стационарным?

6. Является ли стационарной последовательность попарно независимых одинаково распределенных случайных величин?

7. Найти функцию взаимной ковариации процесса и его второй производной, если процесс $\xi(t)$ имеет математическое ожидание равное αt и функцию ковариации $K_{\xi}(t,s) = e^{-(t+s)}$.

8. Пусть $\eta_1(t)$ и $\eta_2(t)$ – независимые случайные процессы с корреляционными функциями $R_1(t,s)$ и $R_2(t,s)$, соответственно. Найти корреляционную функцию процесса $\xi(t) = \eta_1(t)\cdot\eta_2(t)$.

9. Найти математическое ожидание, дисперсию и функцию корреляции случайного процесса $\eta(t) = X\cdot\cos(t+Y)$, где X имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией, Y – случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0, 2\pi]$.

10. Пусть η – нормальная случайная величина с функцией распределения $\Phi\left(\dfrac{x-a}{\sigma}\right)$. Найти двумерное распределение случайного процесса $\xi(t) = \eta + t$, где $t \in R$.

11. Случайный процесс $\xi(t) = t + U\cdot e^{-\alpha t} + V\cdot e^{-\beta t}$, где U и $V-$ некоррелированные случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями U и $D_U = D_V = 2$, α и $\beta-$ неслучайные величины. Найти математическое ожидание, дисперсию и функцию корреляции процесса $\xi(t)$. Определить, является ли данный процесс стационарным, в широком смысле.

12. Случайная величина ξ распределена равномерно в интервале $[0, 2\pi]$. Для случайного процесса $\eta(t) = \xi\cdot t + a$, где $a-$ неслучайная величина, найти математическое ожидание, дисперсию и функцию корреляции. Является ли этот процесс стационарным?

13. Задан случайный процесс $\xi(t) = V\cdot t^2$, где V – непрерывная случайная величина, распределенная по нормальному закону с параметрами a и σ^2. Найти характеристики процесса $\xi(t)$ (математическое ожидание, дисперсию и функцию корреляции). Проверить является ли этот процесс стационарным в широком смысле?

14. Доказать строгую стационарность процесса $\xi(t) = \alpha\cdot\cos(\beta t + \varphi)$, где α и $\beta-$ неслучайные величины, $\varphi-$случайная величина равномерно распределенная на отрезке $[0, 2\pi]$.

15. Случайный процесс представляет собой $\xi(t) = V$, где V – непрерывная случайная величина с плотностью $p_V(x)$. Найти математическое ожидание, дисперсию и функцию корреляции процесса $\xi(t)$. Является ли этот процесс стационарным?

16. Входной случайный процесс $X(t)$ задан каноническим разложением $X(t) = 1 + 2t + A_1 t + A_2 t^2 + A_3 t^3$. Известны дисперсии коэффициентов разложения: $D(A_1) = 4$, $D(A_2) = 3$, $D(A_3) = 2$. Выходной случайный процесс определяется соотношением $Y(t) = \dfrac{dX(t)}{dt}$. Найти математическое ожидание, корреляционную функцию и дисперсию случайного процесса $Y(t)$.

17. Поток покупателей является простейшим Пуассоновским с параметром λ, это значит, что вероятность того, что за время τ появится ровно k покупателей определяется формулой Пуассона:

$$P_k\{\tau\} = \frac{(\lambda \cdot \tau)^k}{k!} e^{-\lambda \cdot \tau}$$

Процесс $\xi(t)$ представляет собой число покупателей пришедших от 0 до t (например, совпадает с началом рабочего дня). Найти математическое ожидание, дисперсию и функцию корреляции процесса $\xi(t)$.

Указание. При вычислении функции корреляции воспользоваться тем, что при $s > t$ $\xi(s) = \xi(t) + \Delta\xi$, где $\Delta\xi$ – число событий наступивших за время от t до s.

18. Пусть ξ – случайная величина, имеющая нормальное распределение с математическим ожиданием m_ξ и дисперсией σ^2. Найти функцию корреляции случайного процесса $\eta(t) = \xi^2 \cdot t + b,$ где b – вещественное число, $t > 0$.

19. Имеется пуассоновский поток случайных событий с интенсивностью λ. Случайный процесс $\xi(t)$ образуется следующим образом: в момент времени *i*-го события $(i = 1, 2, ..)$ процесс принимает случайное значение V_i и сохраняет его до появления следующего события в потоке. В начальный момент времени $\xi(0) = V_0$. Случайные величины $V_0, V_1, ...$ – независимы и одинаково распределены с плотностью $p_V(x)$. Найти основные характеристики процесса.

20. Найти корреляционную функцию случайного процесса $\xi(t)=\sum_{i=1}^{n} Y_i \cdot q_i(t)$, где $q_1(t),\ q_2(t), \ldots,\ q_n(t)$ – неслучайные функции, $Y_1,\ Y_2, \ldots, Y_n$ – некоррелированные случайные величины математическими ожиданиями $m_1, m_2, \ldots, m_n$ и дисперсиями $d_1, d_2, \ldots, d_n$ соответственно.

21. Пусть $R\ (t,s)$ – корреляционная функция некоторого случайного процесса, полином с положительными коэффициентами. Доказать, что функция $R(t,s)=Q(R(t,s))$ является корреляционной функцией некоторого случайного процесса.

22. Пусть $X \sim N\left(m,\sigma^2\right)$, b – вещественное число. Найти функцию корреляции случайного процесса $Y(t)=X\cdot t+b,\ t>0.$

23. Пусть $\varphi(t)$ – непрерывная периодическая функция с периодом T, X – случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0,T]$. Исследовать случайный процесс $Y(t)=\varphi(t+X)$ на стационарность.

24. Найти функцию ковариации процесса $\xi(t)=X\cdot\cos(t+Y)$, где X,Y независимы, $X\sim N(0,1)$, а $Y\sim R[-\pi,\pi]$

25. Пусть $X(t)$ – стационарный случайный процесс, Y – случайная величина. Является ли случайный процесс $Z(t)=X(t)+Y$ стационарным?

26. Показать, что функция $R(t)=\sigma^2\cdot e^{-\alpha\cdot|t|}\cdot\cos\beta t$, где α,β,σ – некоторые положительные постоянные, может быть функцией корреляции непрерывного в среднем квадратическом и стационарного в широком смысле случайного процесса. Определить спектральную плотность, соответствующую такой функции корреляции.

27. Найти предел в среднеквадратическом $X(t)=\lim\limits_{n\to\infty} X_n(t)$, если $X_n(t)=\dfrac{\sin nt}{nt}$ причем $X_n(t)$ распределена равномерно на интервале $[0,1]$.

28. Найти предел в среднеквадратическом при $n\to\infty$:

$$X_n(t)=\begin{cases}(t-t_i)\cdot W_i+(t_{i+1}-t)\cdot W_{i+1}, & t\in[t_i,t_{i+1}]\\ 0, & t\notin[t_i,t_{i+1}]\end{cases},$$

где $t_i=a+i\cdot\dfrac{b-a}{n}$ – точки разбиения отрезка $[a,b]$. Будет ли предельный процесс $W(t)\overset{?}{=}\lim\limits_{n\to\infty}X_n(t)$ винеровским?

29. Найти предел в среднеквадратичном при $n\to\infty$ последовательности случайных процессов: $X_n(t)=\dfrac{1}{n}\sin n\cdot\xi_n\cdot t$, где ξ_n – последовательность нормально распределенных случайных величин со средним нуль и дисперсией единица, $t\in[0,1]$.

30. Найти предел в среднеквадратичном при $n\to\infty$ последовательности случайных процессов: $X_n(t)=\dfrac{1}{n^2}\exp\left(-\xi_n^2\cdot t\right)$, где ξ_n – последовательность нормально распределенных случайных величин со средним нуль и дисперсией единица, $t\in[0,4]$.

31. Будет ли процесс $X(t)=\lim\limits_{n\to\infty}X_n(t)$, где $X_n(t)=\dfrac{\sin 5n}{n^2\cdot t}\exp\{-\xi_n\cdot t\}$, $t\in[0,1]$, ξ_n – распределены нормально с нулевым средним и дисперсией единица, непрерывным в среднеквадратическом?

32. Будет ли процесс $X(t)=\lim\limits_{n\to\infty}X_n(t)$, где $X_n(t)=\dfrac{\sin 5n-\sin 3n}{n^2\cdot t}\exp\{-\xi_n\cdot t\}$, $t\in[0,1]$, ξ_n – распределены нормально с нулевым средним и дисперсией единица, дифференцируемым в среднеквадратическом?

33. Доказать, что процесс $X_k(t)=\sum\limits_{n=1}^{k}\dfrac{\sin\pi n^2 t}{n^2}$ сходится к винеровскому процессу $W(t)$.

34. Случайный процесс $\xi(t)=t+U\cdot e^{-a\cdot t}$, где U случайная величина с нулевым математическим ожиданием и дисперсией $D_U=1$, a – неслучайная величина. Является ли данный процесс непрерывным и дифференцируемым в среднем квадратическом?

35. Случайная величина ξ распределена равномерно в интервале $[0,2\pi]$. Для случайного процесса $\eta(t)=\xi\cdot t+a$, где a – неслучайная величина. Является ли данный процесс непрерывным и дифференцируемым в среднем квадратическом?

Литература

1. *Волков И.К., Зуев С.М., Цветкова Г.М.* Случайные процессы : учеб. для вузов. М. : Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. 448 с.
2. *Маталыцкий М.А.* Элементы теории случайных процессов : учеб. пособие. Гродно : ГрГУ, 2004. 326 с.
3. *Вентцель Е.С., Овчаров Л.А.* Теория случайных процессов и ее инженерные приложения. М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991. 384 с.
4. *Миллер Б.М., Панков А.Р.* Теория случайных процессов в примерах и задачах. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. 320 с.
5. *Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н.* Введение в теорию массового обслуживания. 3-е изд., испр. и доп. М. : КомКнига, 2005. 400 с.
6. *Назаров А.А., Терпугов А.Ф.* Теория вероятностей и случайных процессов : учеб. пособие. Томск : Изд-во НТЛ, 2006. 204 с.
7. *Гнеденко Б.В.* Курс теории вероятностей. М. : Наука, 1969. 448 с.
8. *Письменный Д.Т.* Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных процессов. 3-е изд. М. : Айрис-пресс, 2008. 290 с.
9. *Прохоров А.В., Ушаков В.Г., Ушаков Н.Г.* Задачи по теории вероятностей : учеб. пособие. М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит, 1986. 328 с.
10. *Донской Е.Н.* Курс теории вероятностей с элементами случайных процессов и математической статистики. Саров : РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2000. 288 с.
11. *Максимов Ю.Д.* Математика. Теория вероятностей и случайных процессов. СПб. : Изд-во Политех. ун-та, 2008. 384 с.
12. *Сборник* задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций / под общ. ред. А.А. Свешникова. СПб. : Лань, 2007. 448 с.
13. *Власенков В.М.* Основы теории случайных процессов в практическом изложении. Комсомольск-на-Амуре : Изд-во КнАГТУ, 2004. 99 с.
14. *Марченко Л.В.* Случайные процессы : учеб. пособие. Хабаровск : Изд-во ДВГУПС, 2013. 75 с.
15. *Храмов А.Г.* Теория случайных процессов : электронное учебное пособие. Самара : Самарский аэрокосмический университет, .
16. *Крупин В.Г, Павлов А.Л., Попов Л.Г.* Теория вероятностей, математическая статистика, случайные процессы : учеб. пособие. М. : Издательский дом МЭИ, 2013. 368 с.
17. *Син Л.И.* Элементы теории случайных процессов : методическое пособие. Шахты : ЮРГУЭС, 2002. 32 с.
18. *Крицкий О.Л.* Введение в теорию случайных процессов : учеб. пособие. Томск : Изд-во ТПУ, 2009. 110 с.

Приложения

Приложение 1

Некоторые распределения случайных величин

1. *Распределение Бернулли.* Случайная величина $\xi -$ число наступлений некоторого события в одном испытании. $P(\xi=1)=p,\ P(\xi=0)=q,\quad M\xi=p, D\xi=p\cdot q$, характеристическая функция: $g_{\xi}(u)=q+p\cdot e^{iu}$.

2. *Биномиальное распределение.* Случайная величина $\xi -$ число наступлений некоторого события в ***n*** независимых испытаниях. $P(\xi=m)=C_n^m\cdot p^m\cdot q^{n-m},\ m=\overline{0,n},\ p-$ вероятность успеха в одном испытании, $q-$ вероятность неудачи. $M\xi=n\cdot p$, $D\xi=n\cdot p\cdot q$, характеристическая функция: $g_{\xi}(u)=\left(q+p\cdot e^{iu}\right)^n$.

3. *Геометрическое распределение.* В схеме Бернулли $\xi -$ число испытаний до первого наступления события. $P(\xi=m)=p\cdot q^{m-1},\ m=1,2,...;\ q=1-p$, $M\xi=\dfrac{1}{p},\ D\xi=\dfrac{q}{p^2}$; характеристическая функция: $g_{\xi}(u)=\dfrac{p\cdot e^{iu}}{1-q\cdot e^{iu}}$.

4. *Распределение Пуассона.* Случайная величина $\xi -$ число событий, наступивших в пуассоновском потоке, $P(\xi=m)=\dfrac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!},\ m=0,1,...;\ M\xi=D\xi=\lambda$ характеристическая функция: $g_{\xi}(u)=e^{\lambda\cdot(e^{iu}-1)}$.

5. *Равномерное распределение на конечном множестве.* Случайная величина $\xi -$ принимает любое из значений некоторого интервала с одинаковыми вероятностями. Закон распределения и числовые характеристики:

$$P(\xi=m)=\begin{cases}\dfrac{1}{n} & ,\ a\le k\le b\\ 0 & ,\quad else\end{cases}\quad n=b-a+1;\ k\in\{a,a+1,....,b-1,b\};M\xi=\frac{a+b}{2};\ D\xi=\frac{n^2-1}{12}$$

характеристическая функция: $g_{\xi}(u)=\dfrac{e^{iau}-e^{i(b+1)u}}{n\cdot(1-e^{iu})}$.

6. Непрерывное равномерное распределение. Распределение случайной величины ξ с плотностью вероятностей и числовыми характеристиками:

$$P_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & , a \le x \le b \\ 0 \ , & else \end{cases} \qquad M\xi = \frac{a+b}{2}, \quad D\xi = \frac{(b-a)^2}{12}$$

характеристическая функция: $g_\xi(u) = \dfrac{e^{ibu} - e^{iau}}{iu \cdot (b-a)}$.

7. Экспоненциальное распределение. Плотность вероятности случайной величины ξ с таким распределением и числовые характеристики:

$$P_\xi(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & , \ x \ge 0 \\ 0 & , \ x < 0 \end{cases} \qquad \lambda > 0, \ M\xi = \frac{1}{\lambda}, \qquad D\xi = \frac{1}{\lambda^2}$$

характеристическая функция: $g_\xi(u) = \dfrac{\lambda}{\lambda - iu}$.

8. Распределение Коши. Распределение случайной величины ξ с плотностью вероятностей:

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\lambda}{\lambda^2 + (x-a)^2}, \quad \lambda, a > 0, \ x \in (-\infty, \infty).$$

Данное распределение не имеет конечных математического ожидания и дисперсии, характеристическая функция: $g_\xi(u) = e^{iau - \lambda|u|}$.

9. Нормальное распределение. Распределение случайной величины ξ с плотностью вероятностей:

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad M\xi = a, \ D\xi = \sigma^2, \ x \in (-\infty, \infty)$$

характеристическая функция: $g_\xi(u) = \exp\left\{iau - \dfrac{\sigma^2 u^2}{2}\right\}$.

10. Двумерное нормальное распределение. Распределение случайной величины (ξ, η) с совместной плотностью вероятностей:

$$p_{\xi\eta}(x,y) = \frac{1}{2\pi\,\sigma_\xi \sigma_\eta \sqrt{1-r^2}} \cdot \exp\left\{\frac{1}{2(1-r^2)}\left\{\frac{(x-a_\xi)^2}{\sigma_\xi{}^2} + \frac{(y-a_\eta)^2}{\sigma_\eta{}^2} - 2r \cdot \frac{(x-a_\xi)\cdot(y-a_\eta)}{\sigma_\xi \sigma_\eta}\right\}\right\},$$

$M\xi = a_\xi, \ M\eta = a_\eta, \ D\xi = \sigma_\xi^2, \ D\eta = \sigma_\eta^2$

r – коэффициент корреляции случайных величин ξ и η.

11. Распределение Лапласа. Распределение случайной величины ξ с плотностью вероятностей: $p_\xi(x) = \dfrac{1}{2} \cdot e^{-|x|}$ $\quad M\xi = 0,\ \ D\xi = 2$ характеристическая функция: $g_\xi(u) = \dfrac{1}{1+u^2}$.

12. Гамма распределение. Распределение интервала времени, необходимого для появления ***k*** событий в пуассоновском потоке интенсивности λ, имеет плотность вероятностей и числовые характеристики:

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\, x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \\ 0 \qquad , & x < 0 \end{cases} \qquad \lambda, \alpha > 0,\quad M\xi = \frac{\alpha}{\lambda},\ D\xi = \frac{\alpha}{\lambda^2},\ \ \Gamma(\alpha) = \int_0^\infty z^{\alpha-1}\, e^{-z}\, dz$$

характеристическая функция: $g_\xi(u) = \left(1 - \dfrac{iu}{\lambda}\right)^{-\alpha}$.

Приложение 2

Табличные интегралы

1. $\int\limits_0^\infty \frac{\cos mx}{a^2+x^2}dx = \frac{\pi}{2a}e^{-ma}, \quad a>0,\ m\ge 0$

2. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin^2 mx}{a^2+x^2}dx = \frac{\pi}{4a}\left(1-e^{-2ma}\right), \quad a>0,\ m\ge 0$

3. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin mx\cdot\sin nx}{a^2+x^2}dx = \frac{\pi}{2a}e^{-ma}\cdot sh(na), \quad a>0,\ m\ge n\ge 0$

4. $\int\limits_0^\infty \frac{\cos mx\cdot\cos nx}{a^2+x^2}dx = \frac{\pi}{2a}e^{-ma}\cdot ch(na), \quad a>0,\ m\ge n\ge 0$

5. $\int\limits_0^\infty \frac{x\sin mx\cdot\cos nx}{a^2+x^2}dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2}e^{-ma}\cdot ch(na), & a>0,\ m>n\ge 0 \\ -\frac{\pi}{2}e^{-na}\cdot sh(ma), & a>0,\ m>n\ge 0 \end{cases}$

6. $\int\limits_0^\infty \frac{x\cdot\sin mx}{a^2+x^2}dx = \frac{\pi}{2}e^{-ma}, \quad a\ge 0,\ m>0$

7. $\int\limits_0^\infty \frac{x\cdot\sin mx}{\left(a^2+x^2\right)^2}dx = \frac{\pi m}{4a}\cdot e^{-ma}, \quad a>0,\ m\ge 0$

8. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin mx}{x\left(a^2+x^2\right)}dx = \frac{\pi}{2a^2}\cdot\left(1-e^{-ma}\right), \quad a>0,\ m\ge 0$

9. $\int\limits_0^\infty \frac{\sin mx}{x\left(a^2+x^2\right)^2}dx = \frac{\pi}{2a^4}\cdot\left(1-\frac{2+ma}{2}e^{-ma}\right), \quad a>0,\ m\ge 0$

10. $\int\limits_0^\infty \frac{x^2\cdot\cos mx}{\left(a^2+x^2\right)^2}dx = \frac{\pi}{4a}\left(1-ma\right)\cdot e^{-ma}, \quad a>0,\ m\ge 0$

11. $\int\limits_0^\infty \frac{\cos mx}{\left(a^2+x^2\right)^2}dx = \frac{\pi}{4a^3}\left(1+ma\right)\cdot e^{-ma}, \quad a>0,\ m\ge 0$

12. $\int\limits_0^\infty \frac{\cos mx}{\left(a^2+x^2\right)\left(b^2+x^2\right)}dx = \frac{\pi}{2\left(a^2-b^2\right)}\cdot\left(\frac{e^{-mb}}{b}-\frac{e^{-ma}}{a}\right), \quad a,b>0,\ a\ne b,\ m\ge 0$

13. $\int\limits_0^\infty \frac{x\cdot\sin mx}{\left(a^2+x^2\right)\left(b^2+x^2\right)}dx = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{e^{-mb}-e^{-ma}}{a^2-b^2}, \quad a,b>0,\ a\ne b,\ m\ge 0$

14. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin mx \cdot \cos nx}{x}\,dx = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & m > n \geq 0 \\ \dfrac{\pi}{4}, & m = n > 0 \\ 0, & n > m \geq 0 \end{cases}$

15. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin^2 ax \cdot \cos mx}{x^2}\,dx = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}\left(a - \dfrac{|m|}{2}\right), & a > \dfrac{|m|}{2} \geq 0 \\ 0, & \dfrac{|m|}{2} \geq a \geq 0 \end{cases}$

16. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos mx}{x^2}\,dx = \frac{\pi|m|}{2}$

17. $\displaystyle\int_0^\infty x \cdot e^{-\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha^2}, \quad \alpha > 0$

18. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax} \cdot \sin mx\,dx = \frac{m}{a^2+m^2}, \quad a > 0$

19. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax} \cdot \cos mx\,dx = \frac{a}{a^2+m^2}, \quad a > 0$

20. $\displaystyle\int_0^\infty x \cdot e^{-ax} \cdot \cos mx\,dx = \frac{a^2-m^2}{\left(a^2+m^2\right)^2}, \quad a > 0$

21. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax} \cdot \sin mx \cdot \cos nx\,dx = \frac{m\cdot\left(a^2+m^2-n^2\right)}{\left(a^2+(m-n)^2\right)\left(a^2+(m+n)^2\right)}, \quad a > 0$

22. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax} \cdot \cos mx \cdot \cos nx\,dx = \frac{a\cdot\left(a^2+m^2+n^2\right)}{\left(a^2+(m-n)^2\right)\left(a^2+(m+n)^2\right)}, \quad a > 0$

23. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax^2} \cdot \cos mx\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}e^{-\frac{m^2}{4a}}, \quad a > 0$

24. $\displaystyle\int x \cdot \cos ax\,dx = \frac{1}{a^2}\left(\cos ax + ax\sin ax\right) + C, \quad a \neq 0$

25. $\displaystyle\int x^2 \cdot \cos ax\,dx = \frac{1}{a^3}\left(2ax\cos ax + \left(a^2x^2-2\right)\sin ax\right) + C, \quad a \neq 0$

26. $\displaystyle\int x \cdot e^{ax}\,dx = e^{ax}\left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2}\right) + C, \quad a \neq 0$

27. $\displaystyle\int x^2 \cdot e^{ax}\,dx = e^{ax}\left(\frac{x^2}{a} - \frac{2x}{a^2} + \frac{2}{a^3}\right) + C, \quad a \neq 0$

Приложение 3

Сведения из теории вычетов

Пусть z_0 – простой полюс функции $\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$ аналитичны в точке z_0 и $\varphi\left(z_0\right) \neq 0$. Тогда

$$\underset{z_0}{Res} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \left. \frac{\varphi(z)}{\psi^{'}(z)} \right|_{z=z_0}$$

Пусть z_0 – полюс второго порядка функции $f(z)$. Тогда

$$\underset{z_0}{Res} f(z) = \lim_{z \to z_0} \left(\left(z - z_0 \right)^2 f(z) \right)^{'}$$

Вычисление несобственных интегралов с помощью вычетов

Пусть $P(z)$, $Q(z)$ многочлены от z степени n и m соответственно, причем $m > n+1$. Кроме того, пусть дробь $\dfrac{P(z)}{Q(z)}$ не имеет особых точек на оси Ox, а $z_1, z_2, ..., z_n$ –все ее полюса с положительными мнимыми частями. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \underset{z_k}{Res} \frac{P(z)}{Q(z)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x) e^{iax}}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{N} \underset{z_k}{Res} \frac{P(z) \cdot e^{iaz}}{Q(z)}, \quad a \geq 0$$

Учебное издание

Оксана Николаевна Галажинская
Светлана Петровна Моисеева

ТЕОРИЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

Часть 1

Учебное пособие

Издание подготовлено в авторской редакции

Компьютерная верстка А.И. Лелоюр
Дизайн обложки Л.Д. Кривцовой

Подписано к печати 2.09.2015 г. Формат $60\times84^{1}/_{8}$.
Бумага для офисной техники. Гарнитура Times.
Усл. печ. л. 14,8.
Тираж 100 экз. Заказ № 1217.

Отпечатано на оборудовании
Издательского Дома
Томского государственного университета
634050, г. Томск, пр. Ленина, 36
Тел. 8+(382-2)–53-15-28
Сайт: http://publish.tsu.ru
E-mail: rio.tsu@mail.ru