

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)
Институт прикладной математики и компьютерных наук

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ В ГЭК
Руководитель ОПОП
д-р техн. наук, профессор
К.И. Лившиц
« 05 » июня 2023 г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА
МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ СОВМЕСТНОГО ДОСТУПА С НЕНАДЕЖНЫМ
РЕСУРСОМ

по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика,
направленность (профиль) «Математические методы в экономике»

Кострюков Никита Сергеевич

Руководитель ВКР
д-р физ.-мат. наук, доцент
С.В. Рожкова С.В. Рожкова
« 29 » мая 2023 г.

Автор работы
студент группы № 931923
Н.С. Кострюков Н.С. Кострюков
« 29 » мая 2023 г.

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации.
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)
Институт прикладной математики и компьютерных наук

УТВЕРЖДАЮ

Руководитель ОПОП

д-р техн. наук, профессор



К.И. Лившиц

« ^{подпись} 21 » ноября 20 22 г.

ЗАДАНИЕ

по выполнению выпускной квалификационной работы бакалавра обучающегося

Кострюкову Никите Сергеевичу

Фамилия Имя Отчество обучающегося

по направлению подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика,
направленность (профиль) «Математические методы в экономике»

1 Тема выпускной квалификационной работы

Моделирование систем совместного доступа с ненадежным ресурсом.

2 Срок сдачи обучающимся выполненной выпускной квалификационной работы:

а) в учебный офис / деканат – 29.05.2023

б) в ГЭК – 07.06.2023

3 Исходные данные к работе:

Объект исследования – системы совместного доступа с ненадежным ресурсом.

Предмет исследования – распределение вероятностей числа заявок на орбите.

Цель исследования – построение и исследование моделей систем совместного доступа с ненадежным ресурсом.

Задачи:

Построить математическую модель системы совместного доступа с ненадежным ресурсом в виде RQ-системы $M|M|1$ с ненадежным ресурсом;

Построить математическую модель системы совместного доступа с ненадежным ресурсом в виде RQ-системы $MMPP|M|1$ с ненадежным ресурсом;

Исследовать RQ-систему $M|M|1$ методами производящих, характеристических функций и методом асимптотического анализа;

Исследовать RQ-систему $MMPP|M|1$ методом асимптотического анализа;

Разработать имитационные модели RQ-систем с ненадежным ресурсом;

Сравнить распределения вероятностей, полученные с помощью имитационной модели и асимптотического анализа, и определить точность модели.

Методы исследования:

Дифференциальные уравнения Колмогорова, метод производящих функций, метод характеристических функций, метод асимптотического анализа, имитационное моделирование.

Организация или отрасль, по тематике которой выполняется работа, –

Национальный исследовательский Томский государственный университет, кафедра теории вероятностей и математической статистики.

4 Краткое содержание работы

(06.09.2021-06.11.2021) Поставлена и описана задача в терминах теории вероятностей и случайных процессов.

(07.11.2021-08.05.2022) Аналитически исследованы модели RQ-систем с ненадежным ресурсом.

(09.05.2022-01.03.2023) Разработан алгоритм и построена имитационная модель RQ-систем с ненадежным ресурсом, получено распределение вероятностей числа заявок на орбите.

(02.03.2023-21.04.2023) Построена гауссовская аппроксимация распределения числа заявок на орбите для RQ-систем.

(22.04.2023-15.05.2023) Проведено сравнение полученных результатов.

Руководитель выпускной
квалификационной работы
Профессор, каф. ТВиМС

должность, место работы



подпись

С.В. Рожкова

И.О. Фамилия

Задание принял к исполнению
Студент, группа №931923

должность, место работы



подпись

Н.С. Кострюков

И.О. Фамилия

АННОТАЦИЯ

Ключевые слова: система массового обслуживания, система с повторными вызовами, RQ-система с ненадежным прибором, метод производящих функций, метод характеристических функций, метод асимптотического анализа, имитационное моделирование.

Объект исследования – системы совместного доступа с ненадежным ресурсом.

Цель работы – исследование математических моделей систем совместного доступа с ненадежным ресурсом и построение имитационных моделей.

Методы исследования – дифференциальные уравнения Колмогорова, метод производящих функций, метод характеристических функций, метод асимптотического анализа, имитационное моделирование.

Имитационное моделирование систем совместного доступа является актуальным инструментом для работы с сетями связи в современном мире, так как позволяет исследовать различные сценарии и параметры, чтобы определить оптимальные настройки и предсказать, как система будет работать в различных условиях.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, 6 глав, заключения и списка использованной литературы. Общий объем работы составляет 57 страниц. Представлено 16 рисунков, 3 таблицы и 31 использованная литература.

В первой главе рассматривается технический аспект систем совместного доступа с ненадежным ресурсом, а именно постановка задачи в терминах теории телетрафика, вводится специальная терминология и показатели качества обслуживания. Вторая глава содержит описание математических моделей RQ-систем, постановку задач и систему дифференциальных уравнений Колмогорова. В третьей главе рассматриваются аналитические методы исследования RQ-системы $M|M|1$: методы производящих и характеристических функций. Четвертая глава содержит асимптотический анализ RQ-систем (асимптотика первого и второго порядка) и сравнение асимптотического и допредельного распределения вероятностей. Пятая глава посвящена проектированию и реализации имитационной модели исследуемой системы для получения распределения вероятностей числа заявок на орбите. В шестой главе проводится сравнения результатов асимптотического анализа и имитационного моделирования.

Результат работы – получено асимптотическое распределение числа заявок на орбите в исследуемой системе при условии большой задержки на орбите; спроектирована и реализована имитационная модель систем совместного доступа с ненадежным ресурсом и с повторными обращениями.

ОГЛАВЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1 Технический аспект систем совместного доступа	5
1.1 Постановка задачи в терминах теории телетрафика	5
1.2 Специальная терминология.....	5
1.3 Показатели качества обслуживания	6
2 Математические модели систем совместного доступа с ненадежным ресурсом	7
2.1 Математическая модель системы совместного доступа в виде RQ-системы $M M 1$ с ненадежным прибором	7
2.1.1 Постановка задачи	7
2.1.2 Система дифференциальных уравнений Колмогорова	8
2.2 Математическая модель системы совместного доступа в виде RQ-системы $MMPP M 1$ с ненадежным прибором	10
2.2.1 Постановка задачи	11
2.2.2 Система дифференциальных уравнений Колмогорова	12
3 Аналитические методы исследования RQ-системы $M M 1$	14
3.1 Метод производящих функций.....	14
3.2 Метод характеристических функций	16
4 Асимптотический анализ.....	19
4.1 Исследование RQ-системы $M M 1$	19
4.1.1 Асимптотика первого порядка.....	19
4.1.2 Асимптотика второго порядка.....	21
4.1.3 Асимптотическое и допредельное распределение вероятностей.....	25
4.2 Исследование RQ-системы $MMPP M 1$	27
4.2.1 Асимптотика первого порядка.....	27
4.2.2 Асимптотика второго порядка.....	31
5 Имитационные модели систем совместного доступа с ненадежным ресурсом.....	38
5.1 Модельное время и события системы	38
5.2 Алгоритм модели	39
5.3 Инструменты реализации и интерфейс формы.....	42
6 Асимптотическое распределение и результаты имитационной модели.....	45
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	49
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	50
Приложение А Листинг кода имитационной модели	53

ВВЕДЕНИЕ

Теория массового обслуживания, зародившаяся в 20-ом веке, стала неотъемлемым инструментом для решения практических задач в различных областях, включая телекоммуникацию, производство и экономику. Ее основная цель заключается в обеспечении эффективного обслуживания большого объема запросов на различные услуги.

Ученый А. Эрланг, работавший в телефонной компании в начале 20-го века, считается основоположником теории массового обслуживания. Он столкнулся с задачей определения оптимального числа телефонных операторов для обработки заданного объема звонков. В 1909 году он доказал, что поток телефонных звонков подчиняется Пуассоновскому распределению [1].

В середине 20-го века математик А. Я. Хинчин сделал значительный вклад в развитие теории массового обслуживания и ввел термин «теория массового обслуживания» [2, 3].

Со временем технологии связи, такие как компьютерные и телефонные сети, системы передачи данных, телевидение и мобильная связь, продолжают усиливать свое значение в нашем мире [4], так как количество людей, использующих услуги связи, постоянно увеличивается. Телекоммуникационные системы являются примерами систем массового обслуживания и предназначены для обработки массовых запросов на различные услуги [5, 6, 7, 8]. Модели call-центров и принципы их работы описаны в этих источниках [9, 10].

Телекоммуникационные системы отличаются от классических систем массового обслуживания тем, что они сталкиваются с ситуациями, когда заявка, встречая занятое устройство, не просто ожидает своей очереди, а отправляется в источник повторных вызовов, где она будет находиться некоторое случайное время, прежде чем снова попытаться занять ресурс и получить обслуживание. Такие системы называются системами массового обслуживания с повторными вызовами (Retrial Queueing system). Возникновение моделей RQ-систем связывают с работами ученых Wilkinson R.I. и Cohen J.W. [11, 12]. Г.И. Фалин подробно рассматривал такие системы в своей работе [13].

Системы совместного доступа в терминах теории массового обслуживания - это модели, которые используются для анализа процессов обслуживания клиентов в общей системе. В таких системах клиенты конкурируют за доступ к общим ресурсам, таким как канал передачи данных или другие общие сервисы [14, 15].

В настоящее время актуальным является изучение систем массового обслуживания с ненадежными ресурсами, обзор которых приведен в [16]. В реальных системах из-за

высокой нагрузки сети такие ресурсы могут выходить из строя. После восстановления ресурс снова способен принимать и обслуживать поступающие заявки.

Получение аналитических результатов для RQ-систем возможно только в простых случаях, в то время как системы с повторными вызовами, имеющие более сложную структуру, в основном изучаются с использованием асимптотического анализа [17, 18]. Исследование методом асимптотического анализа при условии больших задержках заявок на орбите подробно описано в работах А. А. Назарова [19, 20]. Кроме того, исследования различных систем с повторными вызовами можно найти в других источниках [21, 22, 23].

Имитационное моделирование представляет собой способ исследования, при котором система изучения заменяется моделью, описывающей реальную систему с достаточной точностью, и имеет широкое распространение в сфере производства и обслуживания, телефонных и вычислительных системах [24, 25, 26, 27, 28, 29]. С построенной моделью проводятся эксперименты с целью получения информации и проверки адекватного соответствия реальной системе.

Построение математических и имитационных моделей RQ-систем позволяет анализировать характеристики работы исследуемой системы связи с целью их оптимизации.

Целью данной работы является построение и исследование систем совместного доступа с ненадежным ресурсом при условии простейшего входящего потока, марковского модулированного пуассоновского потока и одним источником повторных вызовов с бесконечным числом заявок.

В соответствии с целью ставятся следующие задачи:

1. Построить математическую модель системы совместного доступа с ненадежным ресурсом в виде RQ-системы $M|M|1$ с ненадежным ресурсом;
2. Построить математическую модель системы совместного доступа с ненадежным ресурсом в виде RQ-системы $MMPP|M|1$ с ненадежным ресурсом;
3. Исследовать RQ-систему $M|M|1$ методами производящих, характеристических функций и методом асимптотического анализа;
4. Исследовать RQ-систему $MMPP|M|1$ методом асимптотического анализа;
5. Разработать имитационные модели RQ-систем с ненадежным ресурсом;
6. Сравнить распределения вероятностей, полученные с помощью имитационной модели и асимптотического анализа, и определить точность модели.

1 Технический аспект систем совместного доступа

1.1 Постановка задачи в терминах теории телеграфика

Пусть имеется информация, которую необходимо передать через сеть связи в виде непрерывного потока битов. Для эффективной передачи этот поток разбивается на пакеты фиксированной длины, которые поступают в систему с интенсивностью λ – это означает, что в среднем определенное количество пакетов поступает на обработку в единицу времени. Канальный ресурс отвечает за фактическую передачу пакетов. Время, необходимое для передачи одного пакета, является случайной величиной, которая подчиняется экспоненциальному распределению с параметром μ_1 . Из-за загруженности ресурса или высокой нагрузки на линию связи возможна ситуация, когда запрос на передачу данных будет отклонен, и пакет будет помещен в виртуальную область, где будет ожидать некоторое время, определяемое случайной экспоненциально распределенной величиной с параметром σ . После ожидания пакет снова будет пытаться получить доступ к каналному ресурсу для передачи.

Повторные запросы могут привести к внезапному увеличению трафика на определенных сегментах сети, что приведет к значительному ухудшению качества связи. В таких случаях канальный ресурс может выйти из строя и потребовать времени для восстановления. Время восстановления определяется случайной экспоненциально распределенной величиной с параметром μ_2 . Когда возникает такая ситуация, обслуживаемый пакет направляется в виртуальную область. Интенсивность выхода из строя канального ресурса определяется параметрами γ_1 (когда канальный ресурс свободен) и γ_2 (когда ресурс занят передачей пакета).

Ставится задача оценки загрузки виртуальной области. Для решения этой задачи мы воспользуемся инструментами, основанными на теории вероятностей, случайных процессах, теории массового обслуживания и имитационном моделировании. Такие методы позволят нам получить надежные результаты и более глубокое понимание происходящих процессов в системе связи.

1.2 Специальная терминология

Для изучения системы массового обслуживания и анализа процесса поступления данных необходимо ввести специальную терминологию. В данном контексте, термин «заявка» будет означать запрос на выделение канального ресурса для передачи информации в системе связи. Моменты поступления заявок будут служить временной шкалой для

анализа потока данных. Компоненты, осуществляющие передачу данных и обеспечивающие качественное взаимодействие между абонентами, такие как каналный ресурс, линии связи и коммутаторы, будут называться обслуживающими приборами. Под обслуживанием заявки понимается передача данных, пакетов или сообщений между абонентами.

Особое внимание следует уделить повторным заявкам, которые временно не могут быть обслужены прибором из-за его занятости или выхода из строя. В таких случаях эти заявки не покидают систему и не становятся в очередь на обслуживание, а отправляются в специальную виртуальную область, называемую орбитой или источником повторных вызовов. На орбите заявки ожидают некоторое время перед возможностью повторного обращения к прибору для передачи данных. Когда ожидание заявки завершается, она снова пытается получить доступ к прибору путем отправки повторного запроса.

Под выходом прибора из строя понимается ситуация, когда прибор выходит из рабочего состояния и временно не может обслуживать заявки. В это время все заявки, поступающие из входящего потока, будут перенаправлены на орбиту для ожидания. После восстановления прибор переходит в свободное состояние и ожидает новых заявок для обслуживания.

1.3 Показатели качества обслуживания

Для анализа области применения модели оценивают показатели качества обслуживания заявок. Для этого можно определить долю времени, когда прибор находится в состоянии свободен, занят или находится в ремонте, а также вычислить среднее количество абонентов, которые повторно пытаются соединиться. Дополнительные характеристики работы системы включают в себя среднее число повторных попыток соединения на одну первичную, долю повторных вызовов в общем потоке, интенсивность суммарного потока и т.д.

2 Математические модели систем совместного доступа с ненадежным ресурсом

2.1 Математическая модель системы совместного доступа в виде RQ-системы M|M|1 с ненадежным прибором

В данном разделе предлагается исследование систем совместного доступа с ненадежным ресурсом в виде системы массового обслуживания с повторными вызовами и ненадежным прибором.

2.1.1 Постановка задачи

Объектом исследования является однолинейная RQ-система с простейшим входящим потоком, экспоненциальным временем обслуживания и одним ненадежным прибором (рисунок 1).

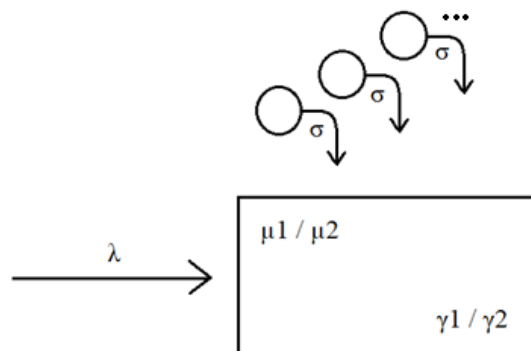


Рисунок 1 – Модель RQ-системы M|M|1 с ненадежным прибором

В систему поступают заявки с интенсивностью λ . Время обслуживания каждой заявки является случайной величиной, распределенной по экспоненциальному закону с параметром μ_1 . Если заявка приходит и прибор свободен, она немедленно занимает его для обслуживания. Однако, если прибор занят, заявка отправляется на орбиту, где ожидает случайное время, распределенное по экспоненциальному закону с параметром σ . После истечения этого времени заявка снова пытается обратиться к прибору. Если прибор свободен, заявка с орбиты занимает его для обслуживания. В противном случае, заявка возвращается в орбиту и снова ожидает случайное время.

В системе также существует состояние ремонта, что указывает на ее ненадежность. Время работы системы без сбоев является случайной величиной, распределенной экспоненциально со значениями параметров γ_1 или γ_2 , в зависимости от того, в каком состоянии прибор: свободен или занят обслуживанием. Другими словами, γ_1 и γ_2 представляют собой интенсивности отказа прибора в свободном и занятом состоянии.

Когда прибор выходит из строя, он отправляется на ремонт, а время восстановления также является случайной величиной, распределенной экспоненциально с параметром μ_2 . Заявка, находящаяся в приборе в момент сбоя, мгновенно переходит на орбиту. Все поступающие заявки с потока также отправляются на орбиту.

Параметры системы:

1. λ – параметр интенсивности простейшего потока;
2. σ – параметр времени ожидания заявки на орбите;
3. μ_1 – параметр времени обслуживания заявок;
4. μ_2 – параметр времени восстановления прибора;
5. γ_1 – параметр интенсивности поломки прибора в свободном состоянии;
6. γ_2 – параметр интенсивности поломки прибора в занятом состоянии.

Пусть $i(t)$ показывает число заявок на орбите, а $k(t)$ – состояние прибора в момент времени t . Тогда:

$$k(t) = \begin{cases} 0, & \text{если прибор свободен,} \\ 1, & \text{если прибор занят,} \\ 2, & \text{если прибор на ремонте.} \end{cases}$$

Процесс изменения состояний системы во времени $\{k(t), i(t)\}$ является двумерной цепью Маркова, поскольку входящий простейший поток заявок и экспоненциальное время обслуживания обладают свойством отсутствия последействия.

Ставится задача поиска стационарного распределения вероятностей числа заявок на орбите:

$$P_k(i, t) = P(k(t) = k; i(t) = i),$$

где $k = 0, 1, 2$;

$i = 0, 1, 2, \dots$

2.1.2 Система дифференциальных уравнений Колмогорова

Для того, чтобы составить систему дифференциальных уравнений, необходимо определить вероятности:

1. $\lambda \Delta t$ – в прибор поступит новая заявка;
2. $1 - \lambda \Delta t$ – в прибор не поступит новая заявка;
3. $(i + 1) \sigma \Delta t$ – заявка с орбиты обратится к прибору и займет его для обслуживания;

4. $1 - i\sigma\Delta t$ – ни одна заявка с орбиты не обратится к прибору;
5. $\mu_1\Delta t$ – прибор закончит обслуживание заявки;
6. $1 - \mu_1\Delta t$ – прибор не закончит обслуживание заявки;
7. $\mu_2\Delta t$ – ремонт прибора завершится;
8. $1 - \mu_2\Delta t$ – ремонт прибора не завершится;
9. $\gamma_1\Delta t$ – время бесперебойной работы свободного прибора завершится;
10. $1 - \gamma_1\Delta t$ – время бесперебойной работы свободного прибора не завершится;
11. $\gamma_2\Delta t$ – время бесперебойной работы занятого прибора завершится;
12. $1 - \gamma_2\Delta t$ – время бесперебойной работы занятого прибора не завершится.

Используя Δt метод и формулу полной вероятности, получим следующие системы равенств при различных значениях i .

При $i = 0$:

$$\begin{cases} P_0(0, t + \Delta t) = P_0(0, t)(1 - \lambda\Delta t)(1 - \gamma_1\Delta t) + P_1(0, t)\mu_1\Delta t + P_2(0, t)\mu_2\Delta t + o(\Delta t), \\ P_1(0, t + \Delta t) = P_1(0, t)(1 - \lambda\Delta t)(1 - \mu_1\Delta t)(1 - \gamma_2\Delta t) + P_0(0, t)\lambda\Delta t + P_0(1, t)\sigma\Delta t + o(\Delta t), \\ P_2(0, t + \Delta t) = P_2(0, t)(1 - \lambda\Delta t)(1 - \mu_2\Delta t) + P_0(0, t)\gamma_1\Delta t + o(\Delta t). \end{cases}$$

При $i \geq 0$:

$$\begin{cases} P_0(i, t + \Delta t) = P_0(i, t)(1 - \lambda\Delta t)(1 - i\sigma\Delta t)(1 - \gamma_1\Delta t) + P_1(i, t)\mu_1\Delta t + P_2(i, t)\mu_2\Delta t + o(\Delta t), \\ P_1(i, t + \Delta t) = P_1(i, t)(1 - \lambda\Delta t)(1 - \mu_1\Delta t)(1 - \gamma_2\Delta t) + P_0(i, t)\lambda\Delta t + P_0(1, t)(i + 1)\sigma\Delta t + \\ \quad + P_1(i - 1, t)\lambda\Delta t + o(\Delta t), \\ P_2(i, t + \Delta t) = P_2(i, t)(1 - \lambda\Delta t)(1 - \mu_2\Delta t) + P_0(i, t)\gamma_1\Delta t + P_1(i - 1, t)\gamma_2\Delta t + P_2(i - 1, t)\lambda\Delta t + o(\Delta t). \end{cases}$$

Далее раскрываем все скобки, делим уравнения этих систем на Δt и устремляем Δt к нулю. Тогда получим систему дифференциальных уравнений Колмогорова для распределения вероятностей состояний $P_k(i, t)$.

При $i = 0$:

$$\begin{cases} \frac{\partial P_0(0, t)}{\partial t} = -P_0(0, t)(\lambda + \gamma_1) + P_1(0, t)\mu_1 + P_2(0, t)\mu_2, \\ \frac{\partial P_1(0, t)}{\partial t} = -P_1(0, t)(\lambda + \mu_1 + \gamma_2) + P_0(0, t)\lambda + P_0(1, t)\sigma, \\ \frac{\partial P_2(0, t)}{\partial t} = -P_2(0, t)(\lambda + \mu_2) + P_0(0, t)\gamma_1. \end{cases}$$

При $i \geq 0$:

$$\begin{cases} \frac{\partial P_0(i,t)}{\partial t} = -P_0(i,t)(\lambda + i\sigma + \gamma_1) + P_1(i,t)\mu_1 + P_2(i,t)\mu_2, \\ \frac{\partial P_1(i,t)}{\partial t} = -P_1(i,t)(\lambda + \mu_1 + \gamma_2) + P_0(i,t)\lambda + P_0(i+1,t)(i+1)\sigma + P_1(i-1,t)\lambda, \\ \frac{\partial P_2(i,t)}{\partial t} = -P_2(i,t)(\lambda + \mu_2) + P_0(i,t)\gamma_1 + P_1(i-1,t)\gamma_2 + P_2(i-1,t)\lambda. \end{cases}$$

Выполним предельный переход при $t \rightarrow \infty$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_k(i,t) = P_k(i).$$

Тогда в стационарном режиме системы дифференциальных уравнений Колмогорова примут следующий вид.

При $i = 0$:

$$\begin{cases} -P_0(0)(\lambda + \gamma_1) + P_1(0)\mu_1 + P_2(0)\mu_2 = 0, \\ -P_1(0)(\lambda + \mu_1 + \gamma_2) + P_0(0)\lambda + P_0(1)\sigma = 0, \\ -P_2(0)(\lambda + \mu_2) + P_0(0)\gamma_1 = 0. \end{cases}$$

При $i \geq 0$:

$$\begin{cases} -P_0(i)(\lambda + i\sigma + \gamma_1) + P_1(i)\mu_1 + P_2(i)\mu_2 = 0, \\ -P_1(i)(\lambda + \mu_1 + \gamma_2) + P_0(i)\lambda + P_0(i+1)(i+1)\sigma + P_1(i-1)\lambda = 0, \\ -P_2(i)(\lambda + \mu_2) + P_0(i)\gamma_1 + P_1(i-1)\gamma_2 + P_2(i-1)\lambda = 0. \end{cases} \quad (1)$$

2.2 Математическая модель системы совместного доступа в виде RQ-системы MMPP|M|1 с ненадежным прибором

Обобщим результаты п. 2.1 на более сложной модели входящего потока.

Пусть в систему поступает MMPP-поток заявок. Обозначим цепь Маркова, управляющую MMPP-поток, как $n(t)$. Введем матрицу инфинитезимальных характеристик управляющего процесса $n(t)$ и обозначим ее как \mathbf{Q} . Также введем матрицу $\mathbf{\Lambda}$, которая является диагональной матрицей с элементами условных интенсивностей MMPP-потока λ_n ($n = 1, 2, \dots, N$). Вектор-строка \mathbf{r} будет представлять собой стационарное

распределение вероятностей состояний управляющего процесса $n(t)$ и являться решением системы уравнений:

$$\begin{cases} \mathbf{rQ} = 0, \\ \mathbf{re} = 1. \end{cases}$$

Параметры системы:

1. Λ – матрица условных интенсивностей;
2. Q – матрица инфинитезимальных характеристик.

Остальные параметры те же, что и для RQ-системы M|M|1 (п. 2.1.1).

2.2.1 Постановка задачи

Объектом исследования является однолинейная RQ-система с марковским модулированным пуассоновским потоком, экспоненциальным временем обслуживания и одним ненадежным прибором (рисунок 2).

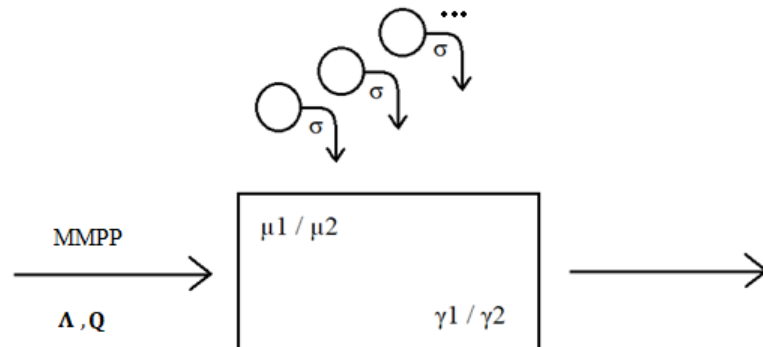


Рисунок 2 – Модель RQ-системы MMPP|M|1 с ненадежным прибором

Процесс $\{k(t), n(t), i(t)\}$ является трехмерной цепью Маркова с непрерывным временем.

Ставится задача поиска стационарного распределения вероятностей числа заявок на орбите:

$$P_k(n, i, t) = P(k(t) = k; n(t) = n; i(t) = i),$$

где $k = 0, 1, 2;$

$n = 0, 1, 2, \dots, N;$

$i = 0, 1, 2, \dots$

2.2.2 Система дифференциальных уравнений Колмогорова

Для составления системы дифференциальных уравнений необходимо определить дополнительные вероятности помимо тех, которые были в системе $M|M|1$ (п. 2.1.2):

1. $q_{vn}\Delta t$ – цепь Маркова перейдет из состояния v в состояние n ;
2. $1 + q_{vn}\Delta t$ – состояние цепи Маркова не изменится.

Используя Δt метод и формулу полной вероятности, получим следующие системы равенств при различных значениях i .

При $i = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_0(n, 0, t + \Delta t) = P_0(n, 0, t)(1 - \lambda_n \Delta t)(1 - \gamma_1 \Delta t)(1 + q_{nn} \Delta t) + P_1(n, 0, t)\mu_1 \Delta t + \\ \quad + P_2(n, 0, t)\mu_2 \Delta t + \sum_{v \neq n} P_0(v, 0, t)q_{vn} \Delta t + o(\Delta t), \\ P_1(n, 0, t + \Delta t) = P_1(n, 0, t)(1 - \lambda_n \Delta t)(1 - \mu_1 \Delta t)(1 - \gamma_2 \Delta t)(1 + q_{nn} \Delta t) + P_0(n, 0, t)\lambda_n \Delta t + \\ \quad + P_0(n, 1, t)\sigma \Delta t + \sum_{v \neq n} P_1(v, 0, t)q_{vn} \Delta t + o(\Delta t), \\ P_2(n, 0, t + \Delta t) = P_2(n, 0, t)(1 - \lambda_n \Delta t)(1 - \mu_2 \Delta t)(1 + q_{nn} \Delta t) + \\ \quad + P_0(n, 0, t)\gamma_1 \Delta t + \sum_{v \neq n} P_2(v, 0, t)q_{vn} \Delta t + o(\Delta t). \end{array} \right.$$

При $i \geq 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_0(n, i, t + \Delta t) = P_0(n, i, t)(1 - \lambda_n \Delta t)(1 - i\sigma \Delta t)(1 - \gamma_1 \Delta t)(1 + q_{nn} \Delta t) + P_1(n, i, t)\mu_1 \Delta t + \\ \quad + P_2(n, i, t)\mu_2 \Delta t + \sum_{v \neq n} P_0(v, i, t)q_{vn} \Delta t + o(\Delta t), \\ P_1(n, i, t + \Delta t) = P_1(n, i, t)(1 - \lambda_n \Delta t)(1 - \mu_1 \Delta t)(1 - \gamma_2 \Delta t)(1 + q_{nn} \Delta t) + P_0(n, i, t)\lambda_n \Delta t + \\ \quad + P_0(n, i + 1, t)(i + 1)\sigma \Delta t + P_1(n, i - 1, t)\lambda_n \Delta t + \sum_{v \neq n} P_1(v, i, t)q_{vn} \Delta t + o(\Delta t), \\ P_2(n, i, t + \Delta t) = P_2(n, i, t)(1 - \lambda_n \Delta t)(1 - \mu_2 \Delta t)(1 + q_{nn} \Delta t) + P_0(n, i, t)\gamma_1 \Delta t + P_1(n, i - 1, t)\gamma_2 \Delta t + \\ \quad + P_2(n, i - 1, t)\lambda_n \Delta t + \sum_{v \neq n} P_2(v, i, t)q_{vn} \Delta t + o(\Delta t). \end{array} \right.$$

Далее раскрываем все скобки, делим уравнения этих систем на Δt и устремляем Δt к нулю. Тогда получим систему дифференциальных уравнений Колмогорова для распределения вероятностей состояний $P_k(n, i, t)$.

При $i = 0$:

$$\begin{cases} \frac{\partial P_0(n,0,t)}{\partial t} = -P_0(n,0,t)(\lambda_n + \gamma_1 - q_{nn}) + P_1(n,0,t)\mu_1 + P_2(n,0,t)\mu_2 + \sum_{v \neq n} P_0(v,0,t)q_{vn}, \\ \frac{\partial P_1(n,0,t)}{\partial t} = -P_1(n,0,t)(\lambda_n + \mu_1 + \gamma_2 - q_{nn}) + P_0(n,0,t)\lambda_n + P_0(n,1,t)\sigma + \sum_{v \neq n} P_1(v,0,t)q_{vn}, \\ \frac{\partial P_2(n,0,t)}{\partial t} = -P_2(n,0,t)(\lambda_n + \mu_2 - q_{nn}) + P_0(n,0,t)\gamma_1 + \sum_{v \neq n} P_2(v,0,t)q_{vn}. \end{cases}$$

При $i \geq 0$:

$$\begin{cases} \frac{\partial P_0(n,i,t)}{\partial t} = -P_0(n,i,t)(\lambda_n + i\sigma + \gamma_1 - q_{nn}) + P_1(n,i,t)\mu_1 + P_2(n,i,t)\mu_2 + \sum_{v \neq n} P_0(v,i,t)q_{vn}, \\ \frac{\partial P_1(n,i,t)}{\partial t} = -P_1(n,i,t)(\lambda_n + \mu_1 + \gamma_2 - q_{nn}) + P_0(n,i,t)\lambda_n + P_0(n,i+1,t)(i+1)\sigma + \\ + P_1(n,i-1,t)\lambda_n + \sum_{v \neq n} P_1(v,i,t)q_{vn}, \\ \frac{\partial P_2(n,i,t)}{\partial t} = -P_2(n,i,t)(\lambda_n + \mu_2 - q_{nn}) + P_0(n,i,t)\gamma_1 + P_1(n,i-1,t)\gamma_2 + \\ + P_2(n,i-1,t)\lambda_n + \sum_{v \neq n} P_2(v,i,t)q_{vn}. \end{cases}$$

Выполним переход к стационарному режиму. Тогда системы дифференциальных уравнений Колмогорова примут следующий вид.

При $i = 0$:

$$\begin{cases} -P_0(n,0)(\lambda_n + \gamma_1 - q_{nn}) + P_1(n,0)\mu_1 + P_2(n,0)\mu_2 + \sum_{v \neq n} P_0(v,0)q_{vn} = 0, \\ -P_1(n,0)(\lambda_n + \mu_1 + \gamma_2 - q_{nn}) + P_0(n,0)\lambda_n + P_0(n,1)\sigma + \sum_{v \neq n} P_1(v,0)q_{vn} = 0, \\ -P_2(n,0)(\lambda_n + \mu_2 - q_{nn}) + P_0(n,0)\gamma_1 + \sum_{v \neq n} P_2(v,0)q_{vn} = 0. \end{cases}$$

При $i \geq 0$:

$$\begin{cases} -P_0(n,i)(\lambda_n + i\sigma + \gamma_1 - q_{nn}) + P_1(n,i)\mu_1 + P_2(n,i)\mu_2 + \sum_{v \neq n} P_0(v,i)q_{vn} = 0, \\ -P_1(n,i)(\lambda_n + \mu_1 + \gamma_2 - q_{nn}) + P_0(n,i)\lambda_n + P_0(n,i+1)(i+1)\sigma + P_1(n,i-1)\lambda_n + \\ + \sum_{v \neq n} P_1(v,i)q_{vn} = 0, \\ -P_2(n,i)(\lambda_n + \mu_2 - q_{nn}) + P_0(n,i)\gamma_1 + P_1(n,i-1)\gamma_2 + P_2(n,i-1)\lambda_n + \sum_{v \neq n} P_2(v,i)q_{vn} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

3 Аналитические методы исследования RQ-системы M|M|1

3.1 Метод производящих функций

Для нахождения решения воспользуемся методом производящих функций. Введем частичные производящие функции:

$$D_k(z) = \sum_{i=0}^{\infty} z^i P_k(i),$$

где $k = 0, 1, 2$.

В соответствии с предложенной заменой, система (1) преобразуется в следующий вид:

$$\begin{cases} -(\lambda + \gamma_1)D_0(z) + \mu_1 D_1(z) + \mu_2 D_2(z) - \sigma z \frac{\partial D_0(z)}{\partial z} = 0, \\ -(\lambda + \mu_1 + \gamma_2)D_1(z) + \lambda D_0(z) + \lambda z D_1(z) + \sigma \frac{\partial D_0(z)}{\partial z} = 0, \\ -(\lambda + \mu_2)D_2(z) + \gamma_1 D_0(z) + \gamma_2 z D_1(z) + \lambda z D_2(z) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Производящая функция $D(z)$ выражается через частичные производящие функции $D_k(z)$ с использованием следующего соотношения:

$$D(z) = D_0(z) + D_1(z) + D_2(z).$$

Путем умножения второго уравнения системы (3) на z , сложения всех уравнений и деления полученного уравнения на $(z - 1)$, получим следующее:

$$\lambda D_0(z) + (\lambda z - \mu_1)D_1(z) + \lambda D_2(z) = 0. \quad (4)$$

Выразим $D_1(z)$ из уравнения (4):

$$D_1(z) = \frac{-\lambda(D_2(z) + D_0(z))}{\lambda z - \mu_1}. \quad (5)$$

Подставим $D_1(z)$ в последнее уравнение системы (3):

$$\frac{\gamma_1(\lambda z - \mu_1) - \gamma_2 z \lambda}{(\lambda z - \mu_1)} D_0(z) + \frac{\lambda(z-1)(\lambda z - \mu_1) - \gamma_2 z \lambda - \mu_2(\lambda z - \mu_1)}{(\lambda z - \mu_1)} D_2(z) = 0. \quad (6)$$

Выразим $D_2(z)$ из уравнения (6):

$$D_2(z) = \frac{\gamma_2 z \lambda - \gamma_1(\lambda z - \mu_1)}{\lambda(z-1)(\lambda z - \mu_1) - \gamma_2 z \lambda - \mu_2(\lambda z - \mu_1)} D_0(z).$$

Подставим $D_2(z)$ в уравнение (5):

$$D_1(z) = \frac{\lambda^2 + \mu_2 \lambda - \lambda^2 z + \gamma_1 \lambda}{\lambda(z-1)(\lambda z - \mu_1) - \gamma_2 z \lambda - \mu_2(\lambda z - \mu_1)} D_0(z).$$

Решение исходной системы с учетом условия нормировки

$$D_0(1) + D_1(1) + D_2(1) = 1$$

имеет следующий вид:

$$\begin{cases} D_0(z) = -\frac{1}{\sigma} \exp \left\{ \lambda \int_z^1 \left(1 + \frac{(\lambda + \mu_2 - \lambda z + \gamma_1)(\lambda(z-1) - \mu_1 - \gamma_2)}{\lambda(z-1)(\lambda z - \mu_1) - \gamma_2 z \lambda - \mu_2(\lambda z - \mu_1)} \right) dz \right\}, \\ D_1(z) = \frac{\lambda^2 + \mu_2 \lambda - \lambda^2 z + \gamma_1 \lambda}{\lambda(z-1)(\lambda z - \mu_1) - \gamma_2 z \lambda - \mu_2(\lambda z - \mu_1)} D_0(z), \\ D_2(z) = \frac{\gamma_2 z \lambda - \gamma_1(\lambda z - \mu_1)}{\lambda(z-1)(\lambda z - \mu_1) - \gamma_2 z \lambda - \mu_2(\lambda z - \mu_1)} D_0(z). \end{cases}$$

Так как $R_k = D_k(1)$, то по условию нормировки найдем R_0 , далее найдем R_1 и R_2 :

$$\begin{cases} R_0 = P\{k(t) = 0\} = \frac{\mu_1 \mu_2 - \mu_2 \lambda - \gamma_2 \lambda}{\mu_1(\mu_2 + \gamma_1)}, \\ R_1 = P\{k(t) = 1\} = \frac{\lambda}{\mu_1}, \\ R_2 = P\{k(t) = 2\} = \frac{\mu_1 \gamma_1 - \gamma_1 \lambda + \gamma_2 \lambda}{\mu_1(\mu_2 + \gamma_1)}. \end{cases} \quad (7)$$

Таким образом, для RQ-системы M|M|1 с ненадежным прибором найдено распределение вероятностей состояний прибора. С помощью системы (7) можно рассчитать показатели качества обслуживания, например, долю времени, когда прибор был занят, свободен или на ремонте.

Для нахождения распределения вероятностей числа заявок на орбите можно использовать формулу обратного преобразования:

$$\Pi_s(i) = \frac{D^{(s)}(0)}{s!},$$

где $D^{(s)}(0)$ – производная порядка s в точке 0.

В связи с высокой вычислительной сложностью нахождения производных высокого порядка, часто применяется метод характеристических функций. Этот метод позволяет найти распределение вероятностей числа заявок в орбите с меньшей вычислительной сложностью.

3.2 Метод характеристических функций

Для нахождения допредельного распределения вероятностей числа заявок в орбите и подтверждения достоверности системы (7), воспользуемся методом характеристических функций.

Необходимо ввести частичные характеристические функции:

$$H_k(u) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{ju i} P_k(i),$$

где $j = \sqrt{-1}$;

$k = 0, 1, 2$.

Тогда, преобразуя систему (1) согласно формуле выше, получим следующий вид:

$$\begin{cases} -(\lambda + \gamma_1)H_0(u) + \mu_1 H_1(u) + \mu_2 H_2(u) + j\sigma \frac{\partial H_0(u)}{\partial u} = 0, \\ -(\lambda + \mu_1 + \gamma_2)H_1(u) + \lambda H_0(u) + \lambda e^{ju} H_1(u) - j\sigma e^{-ju} \frac{\partial H_0(u)}{\partial u} = 0, \\ -(\lambda + \mu_2)H_2(u) + \gamma_1 H_0(u) + \gamma_2 e^{ju} H_1(u) + \lambda e^{ju} H_2(u) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Характеристическая функция $H(u)$ выражается через частичные характеристические функции $H_k(u)$ с использованием следующего соотношения:

$$H(u) = H_0(u) + H_1(u) + H_2(u).$$

Умножим второе уравнение системы (8) на e^{ju} , сложим полученные уравнения и разделим на $\lambda(e^{ju} - 1)$:

$$H_0(u) + \left(e^{ju} - \frac{\mu_1}{\lambda} \right) H_1(u) + H_2(u) = 0. \quad (9)$$

Приравниваем уравнение (9) к последнему уравнению системы (8), деленному на γ_1 :

$$\left(1 - \frac{\lambda(e^{ju} - 1) - \mu_2}{\gamma_1} \right) H_2(u) = \frac{\lambda e^{ju}(\gamma_2 - \gamma_1) + \mu_1 \gamma_1}{\lambda \gamma_1} H_1(u).$$

Выразим $H_2(u)$:

$$H_2(u) = \frac{\lambda e^{ju}(\gamma_2 - \gamma_1) + \mu_1 \gamma_1}{\lambda(\gamma_1 - \lambda(e^{ju} - 1) + \mu_2)} H_1(u). \quad (10)$$

Подставим $H_2(u)$ в уравнение (9) и выразим $H_1(u)$:

$$H_1(u) = \left(\frac{\lambda(\gamma_1 - \lambda(e^{ju} - 1) + \mu_2)}{\mu_1(\gamma_1 - \lambda(e^{ju} - 1) + \mu_2) - \lambda e^{ju}(\gamma_1 - \lambda(e^{ju} - 1) + \mu_2) - (\lambda e^{ju}(\gamma_2 - \gamma_1) + \mu_1 \gamma_1)} \right) H_0(u).$$

Теперь подставим $H_1(u)$ в уравнение (10) и выразим $H_2(u)$:

$$H_2(u) = \left(\frac{\lambda e^{ju}(\gamma_2 - \gamma_1) + \mu_1 \gamma_1}{\mu_1(\gamma_1 - \lambda(e^{ju} - 1) + \mu_2) - \lambda e^{ju}(\gamma_1 - \lambda(e^{ju} - 1) + \mu_2) - (\lambda e^{ju}(\gamma_2 - \gamma_1) + \mu_1 \gamma_1)} \right) H_0(u).$$

После этого подставим $H_1(u)$ во второе уравнение системы (8) и найдем $H_0(u)$.

Решение исходной системы с учетом условия нормировки

$$H_0(0) + H_1(0) + H_2(0) = 1$$

принимает вид:

$$\left\{ \begin{aligned} H_0(u) &= -\frac{j}{\sigma} \times \\ &\times \exp \left\{ \lambda \int_0^u \left(1 + \frac{(\gamma_1 - \lambda(e^{ju} - 1) + \mu_2)(\lambda(e^{ju} - 1) - \mu_1 - \gamma_2)}{\mu_1(\gamma_1 - \lambda(e^{ju} - 1) + \mu_2) - \lambda e^{ju}(\gamma_1 - \lambda(e^{ju} - 1) + \mu_2) - (\lambda e^{ju}(\gamma_2 - \gamma_1) + \mu_1\gamma_1)} \right) du \right\}, \\ H_1(u) &= \left(\frac{\lambda(\gamma_1 - \lambda(e^{ju} - 1) + \mu_2)}{\mu_1(\gamma_1 - \lambda(e^{ju} - 1) + \mu_2) - \lambda e^{ju}(\gamma_1 - \lambda(e^{ju} - 1) + \mu_2) - (\lambda e^{ju}(\gamma_2 - \gamma_1) + \mu_1\gamma_1)} \right) H_0(u), \\ H_2(u) &= \left(\frac{\lambda e^{ju}(\gamma_2 - \gamma_1) + \mu_1\gamma_1}{\mu_1(\gamma_1 - \lambda(e^{ju} - 1) + \mu_2) - \lambda e^{ju}(\gamma_1 - \lambda(e^{ju} - 1) + \mu_2) - (\lambda e^{ju}(\gamma_2 - \gamma_1) + \mu_1\gamma_1)} \right) H_0(u). \end{aligned} \right.$$

Так как $R_k = H_k(0)$, то по условию нормировки найдем R_0 , далее найдем R_1 и R_2 :

$$\left\{ \begin{aligned} R_0 &= \frac{\mu_1\mu_2 - \mu_2\lambda - \gamma_2\lambda}{\mu_1(\mu_2 + \gamma_1)}, \\ R_1 &= \frac{\lambda}{\mu_1}, \\ R_2 &= \frac{\mu_1\gamma_1 - \gamma_1\lambda + \gamma_2\lambda}{\mu_1(\mu_2 + \gamma_1)}. \end{aligned} \right. \quad (11)$$

Заметно, что стационарные распределения вероятностей состояний прибора (7) и (11) равны.

Применяя обратное преобразование Фурье к характеристической функции $H(u)$ можно записать распределение вероятностей $\Pi(i)$:

$$\Pi(i) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-jui} H(u) du.$$

4 Асимптотический анализ

В теории массового обслуживания метод асимптотического анализа представляет собой исследование уравнений, которые определяют какие-либо характеристики системы при выполнении некоторого асимптотического (предельного) условия. Форма этого условия конкретизируется в зависимости от модели и задачи исследования [30].

Для построения гауссовской аппроксимации необходимо определить два параметра: асимптотическое среднее и асимптотическую дисперсию. Поэтому исследование проводится в два этапа.

4.1 Исследование RQ-системы M|M|1

4.1.1 Асимптотика первого порядка

Чтобы найти решение с помощью асимптотического анализа при $\sigma \rightarrow 0$, то есть при условии растущей задержки на орбите, обозначим $\sigma = \varepsilon$ и выполним следующие шаги:

$$u = w\varepsilon,$$
$$H_k(u) = F_k(w, \varepsilon).$$

Используя систему уравнений (8) и замену выше, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} -(\lambda + \gamma_1)F_0(w, \varepsilon) + \mu_1 F_1(w, \varepsilon) + \mu_2 F_2(w, \varepsilon) + j \frac{\partial F_0(w, \varepsilon)}{\partial w} = 0, \\ -(\lambda + \mu_1 + \gamma_2)F_1(w, \varepsilon) + \lambda F_0(w, \varepsilon) + \lambda e^{jw\varepsilon} F_1(w, \varepsilon) - j e^{-jw\varepsilon} \frac{\partial F_0(w, \varepsilon)}{\partial w} = 0, \\ -(\lambda + \mu_2)F_2(w, \varepsilon) + \gamma_1 F_0(w, \varepsilon) + \gamma_2 e^{jw\varepsilon} F_1(w, \varepsilon) + \lambda e^{jw\varepsilon} F_2(w, \varepsilon) = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Решение системы (12) будем искать в следующем виде:

$$F_k(w, \varepsilon) = e^{jw\varepsilon} R_k + O(\varepsilon).$$

В системе (12) выполним предельный переход вида:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_k(w, \varepsilon) = F_k(w).$$

Выпишем преобразованную систему (12) с учетом условия нормировки:

$$\begin{cases} -(\lambda + \gamma_1 + a_1)R_0 + \mu_1 R_1 + \mu_2 R_2 = 0, \\ (\lambda + a_1)R_0 - (\mu_1 + \gamma_2)R_1 = 0, \\ \gamma_1 R_0 + \gamma_2 R_1 - \mu_2 R_2 = 0, \\ R_0 + R_1 + R_2 = 1. \end{cases} \quad (13)$$

С помощью элементарных вычислений из системы (13) найдем R_k :

$$\begin{cases} R_0 = \frac{\mu_1 \mu_2 - \mu_2 \lambda - \gamma_2 \lambda}{\mu_1 (\mu_2 + \gamma_1)}, \\ R_1 = \frac{\lambda}{\mu_1}, \\ R_2 = \frac{\mu_1 \gamma_1 - \gamma_1 \lambda + \gamma_2 \lambda}{\mu_1 (\mu_2 + \gamma_1)}. \end{cases} \quad (14)$$

Стационарные распределения вероятностей состояний прибора (7), (11) и (14) равны.

Выразим a_1 из второго уравнения системы (13):

$$a_1 = \frac{\lambda(\gamma_2(\mu_2 + \gamma_1 + \lambda) + \mu_1 \gamma_1 + \mu_2 \lambda)}{\mu_1 \mu_2 - \mu_2 \lambda - \gamma_2 \lambda}.$$

Так как искали решение в виде

$$F_k(w, \varepsilon) = e^{jwa_1} R_k + O(\varepsilon).$$

то следует, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_k(w, \varepsilon) = F_k(w) = e^{jwa_1}.$$

Получим характеристическую функцию вида:

$$H(u) = \sum_{k=0}^2 F_k(w, \varepsilon) \approx F(w) = e^{jwa_1} + O(\varepsilon) = e^{\frac{jua_1}{\sigma}}.$$

Асимптотический анализ первого порядка позволяет определить среднее значение числа заявок на орбите. Однако для более детального исследования процесса $i(t)$ следует использовать асимптотику второго порядка. Это позволит получить более точную информацию о поведении процесса.

4.1.2 Асимптотика второго порядка

Произведем замену:

$$H_k(u) = e^{\frac{jua_1}{\sigma}} H_k^{(2)}(u).$$

Используя систему уравнений (8) и замену выше, получим следующую систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} -(\lambda + \gamma_1) e^{\frac{jua_1}{\sigma}} H_0^{(2)}(u) + \mu_1 e^{\frac{jua_1}{\sigma}} H_1^{(2)}(u) + \mu_2 e^{\frac{jua_1}{\sigma}} H_2^{(2)}(u) + \\ \quad + j\sigma \left(\frac{ja_1 e^{\frac{jua_1}{\sigma}} H_0^{(2)}(u)}{\sigma} + e^{\frac{jua_1}{\sigma}} \frac{\partial H_0^{(2)}(u)}{\partial u} \right) = 0, \\ -(\lambda + \mu_1 + \gamma_2) e^{\frac{jua_1}{\sigma}} H_1^{(2)}(u) + \lambda e^{\frac{jua_1}{\sigma}} H_0^{(2)}(u) + \lambda e^{ju} e^{\frac{jua_1}{\sigma}} H_1^{(2)}(u) - \\ \quad - j\sigma e^{-ju} \left(\frac{ja_1 e^{\frac{jua_1}{\sigma}} H_0^{(2)}(u)}{\sigma} + e^{\frac{jua_1}{\sigma}} \frac{\partial H_0^{(2)}(u)}{\partial u} \right) = 0, \\ -(\lambda + \mu_2) e^{\frac{jua_1}{\sigma}} H_2^{(2)}(u) + \gamma_1 e^{\frac{jua_1}{\sigma}} H_0^{(2)}(u) + \gamma_2 e^{ju} e^{\frac{jua_1}{\sigma}} H_1^{(2)}(u) + \lambda e^{ju} e^{\frac{jua_1}{\sigma}} H_2^{(2)}(u) = 0. \end{array} \right. \quad (15)$$

Обозначим $\sigma = \varepsilon^2$ и сделаем следующее:

$$u = w\varepsilon,$$

$$H_k^{(2)}(u) = F_k^{(2)}(w, \varepsilon).$$

Подставим замены в систему (15):

$$\left\{ \begin{aligned} & -(\lambda + \gamma_1) e^{\frac{jwa_1}{\varepsilon}} F_0^{(2)}(w, \varepsilon) + \mu_1 e^{\frac{jwa_1}{\varepsilon}} F_1^{(2)}(w, \varepsilon) + \mu_2 e^{\frac{jwa_1}{\varepsilon}} F_2^{(2)}(w, \varepsilon) + \\ & \quad + j\varepsilon^2 \left(\frac{ja_1 e^{\frac{jwa_1}{\varepsilon}} F_0^{(2)}(w, \varepsilon)}{\varepsilon^2} + e^{\frac{jwa_1}{\varepsilon}} \frac{\partial F_0^{(2)}(w, \varepsilon)}{\partial w \varepsilon} \right) = 0, \\ & -(\lambda + \mu_1 + \gamma_2) e^{\frac{jwa_1}{\varepsilon}} F_1^{(2)}(w, \varepsilon) + \lambda e^{\frac{jwa_1}{\varepsilon}} F_0^{(2)}(w, \varepsilon) + \lambda e^{jw\varepsilon} e^{\frac{jwa_1}{\varepsilon}} F_1^{(2)}(w, \varepsilon) - \\ & \quad - j\varepsilon^2 e^{-jw\varepsilon} \left(\frac{ja_1 e^{\frac{jwa_1}{\varepsilon}} F_0^{(2)}(w, \varepsilon)}{\varepsilon^2} + e^{\frac{jwa_1}{\varepsilon}} \frac{\partial F_0^{(2)}(w, \varepsilon)}{\partial w \varepsilon} \right) = 0, \\ & -(\lambda + \mu_2) e^{\frac{jwa_1}{\varepsilon}} F_2^{(2)}(w, \varepsilon) + \gamma_1 e^{\frac{jwa_1}{\varepsilon}} F_0^{(2)}(w, \varepsilon) + \gamma_2 e^{jw\varepsilon} e^{\frac{jwa_1}{\varepsilon}} F_1^{(2)}(w, \varepsilon) + \\ & \quad + \lambda e^{jw\varepsilon} e^{\frac{jwa_1}{\varepsilon}} F_2^{(2)}(w, \varepsilon) = 0. \end{aligned} \right. \quad (16)$$

Поделим уравнения системы (16) на $e^{\frac{jwa_1}{\varepsilon}}$:

$$\left\{ \begin{aligned} & -(\lambda + \gamma_1) F_0^{(2)}(w, \varepsilon) + \mu_1 F_1^{(2)}(w, \varepsilon) + \mu_2 F_2^{(2)}(w, \varepsilon) + \\ & \quad + j\varepsilon^2 \left(\frac{ja_1 F_0^{(2)}(w, \varepsilon)}{\varepsilon^2} + \frac{\partial F_0^{(2)}(w, \varepsilon)}{\partial w \varepsilon} \right) = 0, \\ & -(\lambda + \mu_1 + \gamma_2) F_1^{(2)}(w, \varepsilon) + \lambda F_0^{(2)}(w, \varepsilon) + \lambda e^{jw\varepsilon} F_1^{(2)}(w, \varepsilon) - \\ & \quad - j\varepsilon^2 e^{-jw\varepsilon} \left(\frac{ja_1 F_0^{(2)}(w, \varepsilon)}{\varepsilon^2} + \frac{\partial F_0^{(2)}(w, \varepsilon)}{\partial w \varepsilon} \right) = 0, \\ & -(\lambda + \mu_2) F_2^{(2)}(w, \varepsilon) + \gamma_1 F_0^{(2)}(w, \varepsilon) + \gamma_2 e^{jw\varepsilon} F_1^{(2)}(w, \varepsilon) + \lambda e^{jw\varepsilon} F_2^{(2)}(w, \varepsilon) = 0. \end{aligned} \right. \quad (17)$$

Запишем решение $F_k^{(2)}(w, \varepsilon)$ в виде:

$$F_k^{(2)}(w, \varepsilon) = (R_k + jw\varepsilon f_k) \Phi^{(2)}(w) + O(\varepsilon^2).$$

Возьмем разложение в ряд Тейлора

$$e^{jw\varepsilon} = 1 + jw\varepsilon + O(\varepsilon^2),$$

применим его в системе (17):

$$\left\{ \begin{aligned} & -(\lambda + \gamma_1)(R_0 + jw\varepsilon f_0)\Phi^{(2)}(w) + \mu_1(R_1 + jw\varepsilon f_1)\Phi^{(2)}(w) + \mu_2(R_2 + jw\varepsilon f_2)\Phi^{(2)}(w) + \\ & \quad + j^2 a_1(R_0 + jw\varepsilon f_0)\Phi^{(2)}(w) + \\ & \quad + j\varepsilon \left(\frac{\partial(R_0 + jw\varepsilon f_0)}{\partial w} \Phi^{(2)}(w) + (R_0 + jw\varepsilon f_0) \frac{\partial \Phi^{(2)}(w)}{\partial w} \right) = 0, \\ & -(\lambda + \mu_1 + \gamma_2)(R_1 + jw\varepsilon f_1)\Phi^{(2)}(w) + \lambda(R_0 + jw\varepsilon f_0)\Phi^{(2)}(w) + \\ & \quad + \lambda(1 + jw\varepsilon)(R_1 + jw\varepsilon f_1)\Phi^{(2)}(w) + a_1(1 - jw\varepsilon)(R_0 + jw\varepsilon f_0)\Phi^{(2)}(w) - \\ & \quad - j\varepsilon(1 - jw\varepsilon) \left(\frac{\partial(R_0 + jw\varepsilon f_0)}{\partial w} \Phi^{(2)}(w) + (R_0 + jw\varepsilon f_0) \frac{\partial \Phi^{(2)}(w)}{\partial w} \right) = 0, \\ & -(\lambda + \mu_2)(R_2 + jw\varepsilon f_2)\Phi^{(2)}(w) + \gamma_1(R_0 + jw\varepsilon f_0)\Phi^{(2)}(w) + \\ & \quad + \gamma_2(1 + jw\varepsilon)(R_1 + jw\varepsilon f_1)\Phi^{(2)}(w) + \lambda(1 + jw\varepsilon)(R_2 + jw\varepsilon f_2)\Phi^{(2)}(w) = 0. \end{aligned} \right. \quad (18)$$

Упростим систему (18):

$$\left\{ \begin{aligned} & -(\lambda + \gamma_1 + a_1)(R_0 + jw\varepsilon f_0)\Phi^{(2)}(w) + \mu_1(R_1 + jw\varepsilon f_1)\Phi^{(2)}(w) + \mu_2(R_2 + jw\varepsilon f_2)\Phi^{(2)}(w) + \\ & \quad + j\varepsilon \frac{\partial(R_0 + jw\varepsilon f_0)}{\partial w} \Phi^{(2)}(w) + j\varepsilon(R_0 + jw\varepsilon f_0) \frac{\partial \Phi^{(2)}(w)}{\partial w} = 0, \\ & -(\lambda + \mu_1 + \gamma_2 - \lambda(1 + jw\varepsilon))(R_1 + jw\varepsilon f_1)\Phi^{(2)}(w) + \\ & \quad + (\lambda + (1 - jw\varepsilon)a_1)(R_0 + jw\varepsilon f_0)\Phi^{(2)}(w) - j\varepsilon(1 - jw\varepsilon) \frac{\partial(R_0 + jw\varepsilon f_0)}{\partial w} \Phi^{(2)}(w) - \\ & \quad - j\varepsilon(1 - jw\varepsilon)(R_0 + jw\varepsilon f_0) \frac{\partial \Phi^{(2)}(w)}{\partial w} = 0, \\ & -(\lambda + \mu_2 - \lambda(1 + jw\varepsilon))(R_2 + jw\varepsilon f_2)\Phi^{(2)}(w) + \gamma_1(R_0 + jw\varepsilon f_0)\Phi^{(2)}(w) + \\ & \quad + \gamma_2(1 + jw\varepsilon)(R_1 + jw\varepsilon f_1)\Phi^{(2)}(w) = 0. \end{aligned} \right. \quad (19)$$

Делим уравнения системы (19) на $\Phi^{(2)}(w)$:

$$\left\{ \begin{aligned} & -(\lambda + \gamma_1 + a_1)(R_0 + jw\varepsilon f_0) + \mu_1(R_1 + jw\varepsilon f_1) + \mu_2(R_2 + jw\varepsilon f_2) + \\ & \quad + j\varepsilon \frac{\partial(R_0 + jw\varepsilon f_0)}{\partial w} + j\varepsilon(R_0 + jw\varepsilon f_0) \frac{\partial \Phi^{(2)}(w)}{\Phi^{(2)}(w) \partial w} = 0, \\ & -(\lambda + \mu_1 + \gamma_2 - \lambda(1 + jw\varepsilon))(R_1 + jw\varepsilon f_1) + (\lambda + (1 - jw\varepsilon)a_1)(R_0 + jw\varepsilon f_0) - \\ & \quad - j\varepsilon(1 - jw\varepsilon) \frac{\partial(R_0 + jw\varepsilon f_0)}{\partial w} - j\varepsilon(1 - jw\varepsilon)(R_0 + jw\varepsilon f_0) \frac{\partial \Phi^{(2)}(w)}{\Phi^{(2)}(w) \partial w} = 0, \\ & -(\lambda + \mu_2 - \lambda(1 + jw\varepsilon))(R_2 + jw\varepsilon f_2) + \gamma_1(R_0 + jw\varepsilon f_0) + \gamma_2(1 + jw\varepsilon)(R_1 + jw\varepsilon f_1) = 0. \end{aligned} \right. \quad (20)$$

Раскроем все скобки в уравнениях системы (20) и соберем слагаемые при ε в первой степени:

$$\begin{cases} -\lambda jw\varepsilon f_0 - \gamma_1 jw\varepsilon f_0 - a_1 jw\varepsilon f_0 + \mu_1 jw\varepsilon f_1 + \mu_2 jw\varepsilon f_2 + j\varepsilon \frac{\partial \Phi^{(2)}(w)}{\Phi^{(2)}(w)\partial w} R_0 = 0, \\ \lambda jw\varepsilon R_1 - \mu_1 jw\varepsilon f_1 - \gamma_2 jw\varepsilon f_1 - a_1 jw\varepsilon R_0 + \lambda jw\varepsilon f_0 + a_1 jw\varepsilon f_0 - j\varepsilon \frac{\partial \Phi^{(2)}(w)}{\Phi^{(2)}(w)\partial w} R_0 = 0, \\ \lambda jw\varepsilon R_2 - \mu_2 jw\varepsilon f_2 + \gamma_1 jw\varepsilon f_0 + \gamma_2 jw\varepsilon f_1 + \gamma_2 jw\varepsilon R_1 = 0. \end{cases} \quad (21)$$

Делим уравнения системы (21) на $jw\varepsilon$:

$$\begin{cases} -(\lambda + \gamma_1 + a_1)f_0 + \mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 + \frac{\partial \Phi^{(2)}(w)}{w\Phi^{(2)}(w)\partial w} R_0 = 0, \\ (\lambda + a_1)f_0 - (\mu_1 + \gamma_2)f_1 - R_0 a_1 + R_1 \lambda - \frac{\partial \Phi^{(2)}(w)}{w\Phi^{(2)}(w)\partial w} R_0 = 0, \\ \gamma_1 f_0 + \gamma_2 f_1 - \mu_2 f_2 + R_1 \gamma_2 + R_2 \lambda = 0. \end{cases} \quad (22)$$

Преобразуем систему (22):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi^{(2)}(w)}{w\Phi^{(2)}(w)\partial w} &= -a_2, \\ \int \frac{\partial \Phi^{(2)}(w)}{\Phi^{(2)}(w)} &= -a_2 \int w \partial w, \\ \ln \Phi^{(2)}(w) - \ln C &= \frac{-w^2 a_2}{2}, \\ \ln \frac{\Phi^{(2)}(w)}{C} &= \frac{-w^2 a_2}{2}, \\ \Phi^{(2)}(w) &= C e^{\frac{-w^2 a_2}{2}}. \end{aligned}$$

Так как $H(0) = 1$, то $F^{(2)}(0, \varepsilon) = 1$. Поэтому $\Phi(0) = 1$, из чего следует, что $C = 1$. Тогда $\Phi^{(2)}(w)$ имеет вид:

$$\Phi^{(2)}(w) = e^{\frac{-w^2 a_2}{2}}.$$

Из этого утверждения следует:

$$\begin{cases} -(\lambda + \gamma_1 + a_1)f_0 + \mu_1 f_1 + \mu_2 f_2 - R_0 a_2 = 0, \\ (\lambda + a_1)f_0 - (\mu_1 + \gamma_2)f_1 + R_0 a_2 = -R_1 \lambda + R_0 a_1, \\ \gamma_1 f_0 + \gamma_2 f_1 - \mu_2 f_2 = -R_1 \gamma_2 - R_2 \lambda, \\ f_0 + f_1 + f_2 = 0. \end{cases} \quad (23)$$

Из системы (23) можно найти f_k и a_2 с помощью математического пакета Mathcad, где имеется встроенная функция $\text{lsolve}(\mathbf{A}, \mathbf{b})$, которая возвращает вектор-столбец решений системы линейных уравнений, где \mathbf{A} – матрица коэффициентов при f_k и a_2 , \mathbf{b} – вектор-столбец свободных членов.

Выразим a_2 из первого уравнения системы (23) и подставим f_k :

$$a_2 = \frac{-(\lambda + \gamma_1 + a_1)f_0 + \mu_1 f_1 + \mu_2 f_2}{R_0}.$$

Характеристическая функция для асимптотики второго порядка:

$$H_k^{(2)}(u) = F_k^{(2)}(w, \varepsilon) \approx F_k^{(2)}(w) = e^{\frac{(ju)^2 a_2}{2\sigma}} R_k.$$

Асимптотическая характеристическая функция:

$$H(u) = e^{\frac{jua_1}{\sigma} + \frac{(ju)^2 a_2}{2\sigma}}.$$

Асимптотический анализ второго порядка позволяет найти дисперсию числа заявок на орбите. Асимптотическое распределение является гауссовским с параметрами a_1/σ и a_2/σ .

4.1.3 Асимптотическое и допредельное распределение вероятностей

Рассмотрим систему с ненадежным прибором, положив

$$\lambda = 1, \mu_1 = 2, \mu_2 = 5, \gamma_1 = 0,1, \gamma_2 = 0,2,$$

для различных параметров σ .

Рисунки 3 – 5 отображают графики асимптотических (красная) и допредельных (синяя) распределений вероятностей при заданных значениях σ . Построение допредельного

распределения выполняется с использованием преобразования Фурье, указанного в конце п. 3.2.

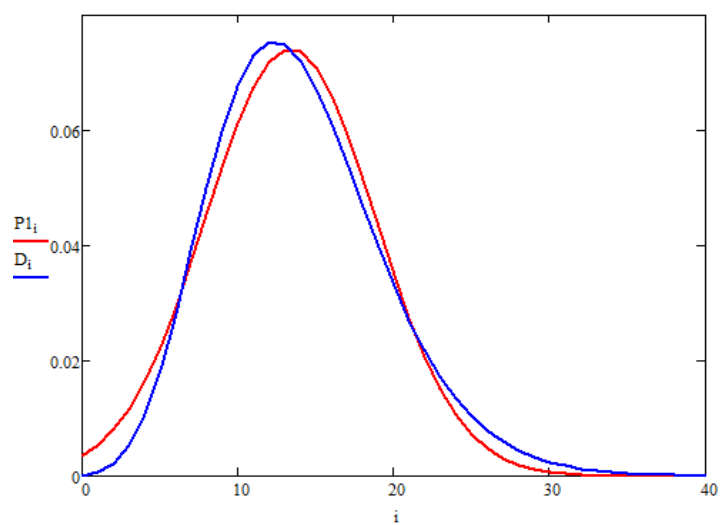


Рисунок 3 – Распределение вероятностей при $\sigma = 0,1$

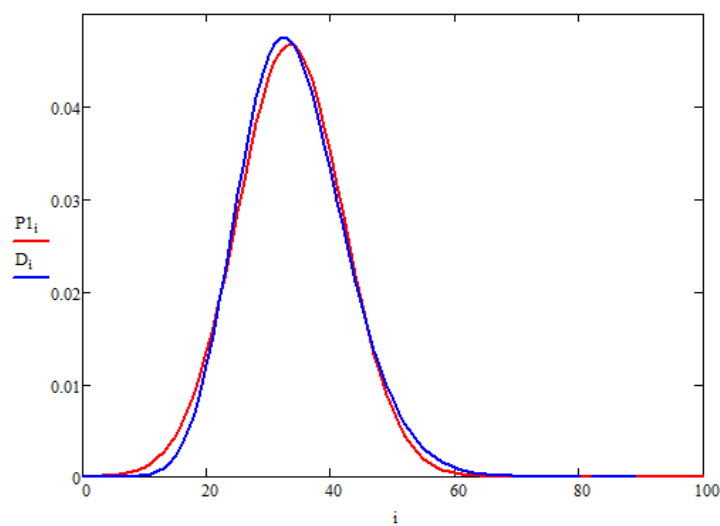


Рисунок 4 – Распределение вероятностей при $\sigma = 0,04$

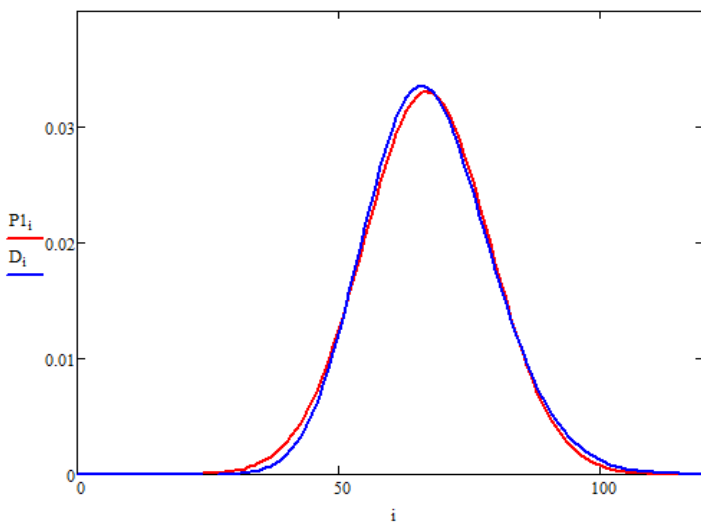


Рисунок 5 – Распределение вероятностей при $\sigma = 0,02$

На представленных графиках видно, что при уменьшении параметра σ , число заявок на орбите увеличивается.

Для определения погрешности между асимптотическим и допредельным распределением вероятностей числа заявок на орбите используется расстояние Колмогорова:

$$\Delta = \max |F(x)_{асимпт.} - F(x)_{допред.}|,$$

где $F(x)_{асимпт.}$ – функция распределения вероятностей числа заявок на орбите, построенная с помощью асимптотического анализа, $F(x)_{допред.}$ – функция распределения допредельных вероятностей. На таблице 1 представлено расстояние Колмогорова.

Таблица 1 – Расстояния Колмогорова

σ	0,1	0,04	0,02
Δ	0,031	0,023	0,016

4.2 Исследование RQ-системы MMPP|M|1

4.2.1 Асимптотика первого порядка

Найдем решение с помощью асимптотического анализа при $\sigma \rightarrow 0$, то есть при условии растущей задержки на орбите.

Введем характеристическую функцию вида

$$H_k(u, n) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{ju i} P_k(n, i),$$

где $j = \sqrt{-1}$;

$k = 0, 1, 2$.

Перепишем систему (2) следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} (-\lambda_n - \gamma_1 + q_{nn})H_0(u, n) + \mu_1 H_1(u, n) + \mu_2 H_2(u, n) + j\sigma \frac{\partial H_0(u, n)}{\partial u} + \sum_{v \neq n} q_{vn} H_0(u, v) = 0, \\ \lambda_n H_0(u, n) + (-\lambda_n - \mu_1 - \gamma_2 + \lambda_n e^{ju} + q_{nn})H_1(u, n) - j\sigma e^{-ju} \frac{\partial H_0(u, n)}{\partial u} + \\ + \sum_{v \neq n} q_{vn} H_1(u, v) = 0, \\ \gamma_1 H_0(u, n) + \gamma_2 e^{ju} H_1(u, n) + (-\lambda_n - \mu_2 + \lambda_n e^{ju} + q_{nn})H_2(u, n) + \sum_{v \neq n} q_{vn} H_2(u, v) = 0. \end{array} \right. \quad (24)$$

Запишем сумму инфинитезимальных характеристик вместе:

$$q_{nn}H_k(u, v) + \sum_{v \neq n} q_{nv}H_k(u, v) = \sum_v q_{nv}H_k(u, v).$$

Обозначим $\mathbf{H}_k(u) = \{H_k(u, 1), H_k(u, 2), \dots, H_k(u, N)\}$. В матричном виде система (24) записывается следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{H}_0(u)(-\Lambda - \gamma_1 \mathbf{I} + \mathbf{Q}) + \mu_1 \mathbf{H}_1(u) + \mu_2 \mathbf{H}_2(u) + j\sigma \frac{\partial \mathbf{H}_0(u)}{\partial u} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{H}_0(u)\Lambda + \mathbf{H}_1(u)((e^{ju} - 1)\Lambda - (\mu_1 + \gamma_2)\mathbf{I} + \mathbf{Q}) - j\sigma e^{-ju} \frac{\partial \mathbf{H}_0(u)}{\partial u} = \mathbf{0}, \\ \gamma_1 \mathbf{H}_0(u) + \gamma_2 e^{ju} \mathbf{H}_1(u) + ((e^{ju} - 1)\Lambda - \mu_2 \mathbf{I} + \mathbf{Q})\mathbf{H}_2(u) = \mathbf{0}. \end{array} \right. \quad (25)$$

где \mathbf{I} – единичная матрица.

Просуммируем все уравнения системы (25) и умножим на единичный вектор-столбец \mathbf{e} соответствующей размерности, далее поделим уравнение на $(1 - e^{ju})$. Учтем то, что

$$\mathbf{Qe} = 0, \quad \mathbf{Ie} = 1$$

и получим следующее:

$$\mathbf{H}_1(u)(\Lambda + \gamma_2 \mathbf{I})\mathbf{e} + \mathbf{H}_2(u)\Lambda \mathbf{e} + j\sigma e^{-ju} \frac{\partial \mathbf{H}_0(u)}{\partial u} \mathbf{e} = 0. \quad (26)$$

Запишем систему (25) вместе с уравнением (26), обозначим $\sigma = \varepsilon$ и сделаем следующее:

$$u = w\varepsilon,$$

$$\mathbf{H}_k(u) = \mathbf{F}_k(w, \varepsilon).$$

Получим систему следующего вида:

$$\begin{cases} \mathbf{F}_0(w, \varepsilon)(-\mathbf{\Lambda} - \gamma_1 \mathbf{I} + \mathbf{Q}) + \mu_1 \mathbf{F}_1(w, \varepsilon) + \mu_2 \mathbf{F}_2(w, \varepsilon) + j \frac{\partial \mathbf{F}_0(w, \varepsilon)}{\partial w} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{F}_0(w, \varepsilon) \mathbf{\Lambda} + \mathbf{F}_1(w, \varepsilon) \left((e^{jw\varepsilon} - 1) \mathbf{\Lambda} - (\mu_1 + \gamma_2) \mathbf{I} + \mathbf{Q} \right) - j e^{-jw\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{F}_0(w, \varepsilon)}{\partial w} = \mathbf{0}, \\ \gamma_1 \mathbf{F}_0(w, \varepsilon) + \gamma_2 e^{jw\varepsilon} \mathbf{F}_1(w, \varepsilon) + \mathbf{F}_2(w, \varepsilon) \left((e^{jw\varepsilon} - 1) \mathbf{\Lambda} - \mu_2 \mathbf{I} + \mathbf{Q} \right) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{F}_1(w, \varepsilon) (\mathbf{\Lambda} + \gamma_2 \mathbf{I}) \mathbf{e} + \mathbf{F}_2(w, \varepsilon) \mathbf{\Lambda} \mathbf{e} + j e^{-jw\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{F}_0(w, \varepsilon)}{\partial w} \mathbf{e} = 0. \end{cases} \quad (27)$$

В системе (27) устремим $\varepsilon \rightarrow 0$, то есть рассмотрим ее в предельной форме.

$$\begin{cases} \mathbf{F}_0(w)(-\mathbf{\Lambda} - \gamma_1 \mathbf{I} + \mathbf{Q}) + \mu_1 \mathbf{F}_1(w) + \mu_2 \mathbf{F}_2(w) + j \frac{\partial \mathbf{F}_0(w)}{\partial w} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{F}_0(w) \mathbf{\Lambda} + \mathbf{F}_1(w) \left(-(\mu_1 + \gamma_2) \mathbf{I} + \mathbf{Q} \right) - j \frac{\partial \mathbf{F}_0(w)}{\partial w} = \mathbf{0}, \\ \gamma_1 \mathbf{F}_0(w) + \gamma_2 \mathbf{F}_1(w) + \mathbf{F}_2(w) \left(-\mu_2 \mathbf{I} + \mathbf{Q} \right) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{F}_1(w) (\mathbf{\Lambda} + \gamma_2 \mathbf{I}) \mathbf{e} + \mathbf{F}_2(w) \mathbf{\Lambda} \mathbf{e} + j \frac{\partial \mathbf{F}_0(w)}{\partial w} \mathbf{e} = 0. \end{cases} \quad (28)$$

Решение системы (28) будем искать в виде

$$\mathbf{F}_k(w) = e^{jwa_1} \mathbf{r}_k,$$

где \mathbf{r}_k – стационарные распределения вероятностей двумерного процесса.

$$\begin{cases} e^{jwa_1} \mathbf{r}_0 (-\mathbf{\Lambda} - \gamma_1 \mathbf{I} + \mathbf{Q}) + \mu_1 e^{jwa_1} \mathbf{r}_1 + \mu_2 e^{jwa_1} \mathbf{r}_2 + j \frac{\partial e^{jwa_1}}{\partial w} \mathbf{r}_0 = \mathbf{0}, \\ e^{jwa_1} \mathbf{r}_0 \mathbf{\Lambda} + e^{jwa_1} \mathbf{r}_1 \left(-(\mu_1 + \gamma_2) \mathbf{I} + \mathbf{Q} \right) - j \frac{\partial e^{jwa_1}}{\partial w} \mathbf{r}_0 = \mathbf{0}, \\ \gamma_1 e^{jwa_1} \mathbf{r}_0 + \gamma_2 e^{jwa_1} \mathbf{r}_1 + e^{jwa_1} \mathbf{r}_2 \left(-\mu_2 \mathbf{I} + \mathbf{Q} \right) = \mathbf{0}, \\ e^{jwa_1} \mathbf{r}_1 (\mathbf{\Lambda} + \gamma_2 \mathbf{I}) \mathbf{e} + e^{jwa_1} \mathbf{r}_2 \mathbf{\Lambda} \mathbf{e} + j \frac{\partial e^{jwa_1}}{\partial w} \mathbf{r}_0 \mathbf{e} = 0. \end{cases} \quad (29)$$

Теперь поделим все уравнения системы (29) на $e^{\frac{j\omega a_1}{\varepsilon}}$:

$$\begin{cases} \mathbf{r}_0(-\Lambda - \gamma_1 \mathbf{I} + \mathbf{Q}) + \mu_1 \mathbf{r}_1 + \mu_2 \mathbf{r}_2 + j \frac{\partial e^{j\omega a_1}}{e^{j\omega a_1} \partial \omega} \mathbf{r}_0 = \mathbf{0}, \\ \mathbf{r}_0 \Lambda + \mathbf{r}_1(-(\mu_1 + \gamma_2) \mathbf{I} + \mathbf{Q}) - j \frac{\partial e^{a_1 j\omega}}{e^{j\omega a_1} \partial \omega} \mathbf{r}_0 = \mathbf{0}, \\ \gamma_1 \mathbf{r}_0 + \gamma_2 \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2(-\mu_2 \mathbf{I} + \mathbf{Q}) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{r}_1(\Lambda + \gamma_2 \mathbf{I}) \mathbf{e} + \mathbf{r}_2 \Lambda \mathbf{e} + j \frac{\partial e^{j\omega a_1}}{e^{j\omega a_1} \partial \omega} \mathbf{r}_0 \mathbf{e} = 0. \end{cases} \quad (30)$$

Учитывая то, что $j \frac{\partial e^{a_1 j\omega}}{e^{a_1 j\omega} \partial \omega} = -a_1$, перепишем систему (30), умножая на \mathbf{e} .

$$\begin{cases} -\mathbf{r}_0 \Lambda \mathbf{e} - \gamma_1 \mathbf{r}_0 \mathbf{e} + \mu_1 \mathbf{r}_1 \mathbf{e} + \mu_2 \mathbf{r}_2 \mathbf{e} - a_1 \mathbf{r}_0 \mathbf{e} = 0, \\ \mathbf{r}_0 \Lambda \mathbf{e} - \mu_1 \mathbf{r}_1 \mathbf{e} - \gamma_2 \mathbf{r}_1 \mathbf{e} + a_1 \mathbf{r}_0 \mathbf{e} = 0, \\ \gamma_1 \mathbf{r}_0 \mathbf{e} + \gamma_2 \mathbf{r}_1 \mathbf{e} - \mu_2 \mathbf{r}_2 \mathbf{e} = 0, \\ \mathbf{r}_1 \Lambda \mathbf{e} + \gamma_2 \mathbf{r}_1 \mathbf{e} + \mathbf{r}_2 \Lambda \mathbf{e} - a_1 \mathbf{r}_0 \mathbf{e} = 0. \end{cases} \quad (31)$$

Запишем условие согласованности многомерных распределений для стационарного распределения состояний прибора:

$$\mathbf{r}_0 + \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 = \mathbf{r},$$

где \mathbf{r} – вектор стационарного распределения вероятностей цепи Маркова, управляющей входящим ММРР-поток, который удовлетворяет системе уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{r} \mathbf{Q} = 0, \\ \mathbf{r} \mathbf{e} = 1. \end{cases}$$

Сложим второе уравнение и четвертое уравнение системы (31) и выразим $\mathbf{r}_1 \mathbf{e}$:

$$p_1 = \mathbf{r}_1 \mathbf{e} = \frac{\lambda}{\mu_1}.$$

Далее подставим $\mathbf{r}_1 \mathbf{e}$ в третье уравнение (31), выразим $\mathbf{r}_2 \mathbf{e}$ через $\mathbf{r}_0 \mathbf{e}$ и подставим $\mathbf{r}_2 \mathbf{e}$ в условие $\mathbf{r} \mathbf{e} = 1$:

$$p_0 = \mathbf{r}_0 \mathbf{e} = \frac{\mu_1 \mu_2 - \lambda \mu_2 - \lambda \gamma_2}{\mu_1 (\gamma_1 + \mu_2)}.$$

Через условие $\mathbf{r} \mathbf{e} = 1$ находим $\mathbf{r}_2 \mathbf{e}$:

$$p_2 = \mathbf{r}_2 \mathbf{e} = \frac{\mu_1 \gamma_1 + \lambda \gamma_2 - \lambda \gamma_1}{\mu_1 (\gamma_1 + \mu_2)}.$$

Стационарные распределения вероятностей состояний прибора (7), (11), (14) равны значениям r_k .

Выразим a_1 из второго уравнения системы (31):

$$a_1 = \frac{\lambda(\gamma_2(\mu_2 + \gamma_1 + \lambda) + \mu_1 \gamma_1 + \mu_2 \lambda)}{\mu_1 \mu_2 - \mu_2 \lambda - \gamma_2 \lambda}.$$

Так как искали решение в виде

$$F_k(w, \varepsilon) = e^{jwa_1} \mathbf{r}_k + O(\varepsilon),$$

то следует, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F_k(w, \varepsilon) = F_k(w) = e^{jwa_1}.$$

Получим характеристическую функцию вида:

$$H(u) = \sum_{k=0}^2 F_k(w, \varepsilon) \approx F(w) = e^{jwa_1} + O(\varepsilon) = e^{\frac{jua_1}{\sigma}}.$$

Для более детального исследования процесса перейдем к асимптотике второго порядка.

4.2.2 Асимптотика второго порядка

Для получения асимптотики более высокого порядка произведем замену

$$\mathbf{H}_k(u) = e^{\frac{jua_1}{\sigma}} \mathbf{H}_k^{(2)}(u)$$

в системе (25), уравнении (26) и поделим на общий множитель $e^{\frac{jua_1}{\sigma}}$. Получим систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{H}_0^{(2)}(u)(-\mathbf{\Lambda} - \gamma_1 \mathbf{I} + \mathbf{Q}) - a_1 \mathbf{H}_0^{(2)}(u) + \mu_1 \mathbf{H}_1^{(2)}(u) + \mu_2 \mathbf{H}_2^{(2)}(u) + j\sigma \frac{\partial \mathbf{H}_0^{(2)}(u)}{\partial u} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{H}_0^{(2)}(u)\mathbf{\Lambda} + \mathbf{H}_1^{(2)}(u)((e^{ju} - 1)\mathbf{\Lambda} - (\mu_1 + \gamma_2)\mathbf{I} + \mathbf{Q}) + a_1 e^{-ju} \mathbf{H}_0^{(2)}(u) - \\ - j\sigma e^{-ju} \frac{\partial \mathbf{H}_0^{(2)}(u)}{\partial u} = \mathbf{0}, \\ \gamma_1 \mathbf{H}_0^{(2)}(u) + \gamma_2 e^{ju} \mathbf{H}_1^{(2)}(u) + \mathbf{H}_2^{(2)}(u)((e^{ju} - 1)\mathbf{\Lambda} - \mu_2 \mathbf{I} + \mathbf{Q}) = \mathbf{0}, \\ -a_1 e^{-ju} \mathbf{H}_0^{(2)}(u)\mathbf{e} + \mathbf{H}_1^{(2)}(u)(\mathbf{\Lambda} + \gamma_2 \mathbf{I})\mathbf{e} + \mathbf{H}_2^{(2)}(u)\mathbf{\Lambda}\mathbf{e} + j\sigma e^{-ju} \frac{\partial \mathbf{H}_0^{(2)}(u)}{\partial u} \mathbf{e} = \mathbf{0}. \end{array} \right. \quad (32)$$

Обозначим $\sigma = \varepsilon^2$ и сделаем следующее в системе (32):

$$u = w\varepsilon,$$

$$\mathbf{H}_k^{(2)}(u) = \mathbf{F}_k^{(2)}(w, \varepsilon).$$

Получим систему следующего вида:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{F}_0^{(2)}(w, \varepsilon)(-\mathbf{\Lambda} - \gamma_1 \mathbf{I} + \mathbf{Q} - a_1 \mathbf{I}) + \mu_1 \mathbf{F}_1^{(2)}(w, \varepsilon) + \mu_2 \mathbf{F}_2^{(2)}(w, \varepsilon) + j\varepsilon \frac{\partial \mathbf{F}_0^{(2)}(w, \varepsilon)}{\partial w} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{F}_0^{(2)}(w, \varepsilon)(\mathbf{\Lambda} + a_1 e^{-jw\varepsilon} \mathbf{I}) + \mathbf{F}_1^{(2)}(w, \varepsilon)((e^{jw\varepsilon} - 1)\mathbf{\Lambda} - (\mu_1 + \gamma_2)\mathbf{I} + \mathbf{Q}) - \\ - j\varepsilon e^{-jw\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{F}_0^{(2)}(w, \varepsilon)}{\partial w} = \mathbf{0}, \\ \gamma_1 \mathbf{F}_0^{(2)}(w, \varepsilon) + \gamma_2 e^{jw\varepsilon} \mathbf{F}_1^{(2)}(w, \varepsilon) + \mathbf{F}_2^{(2)}(w, \varepsilon)((e^{jw\varepsilon} - 1)\mathbf{\Lambda} - \mu_2 \mathbf{I} + \mathbf{Q}) = \mathbf{0}, \\ -a_1 e^{-jw\varepsilon} \mathbf{F}_0^{(2)}(w, \varepsilon)\mathbf{e} + \mathbf{F}_1^{(2)}(w, \varepsilon)(\mathbf{\Lambda} + \gamma_2 \mathbf{I})\mathbf{e} + \mathbf{F}_2^{(2)}(w, \varepsilon)\mathbf{\Lambda}\mathbf{e} + j\varepsilon e^{-jw\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{F}_0^{(2)}(w, \varepsilon)}{\partial w} \mathbf{e} = \mathbf{0}. \end{array} \right. \quad (33)$$

Запишем решение $F_k^{(2)}(w, \varepsilon)$ для системы (33) в виде:

$$\mathbf{F}_k^{(2)}(w, \varepsilon) = \Phi^{(2)}(w)(\mathbf{r}_k + jw\varepsilon \mathbf{f}_k) + O(\varepsilon^2).$$

Перепишем систему (33):

$$\left\{ \begin{aligned}
& \Phi^{(2)}(w)(\mathbf{r}_0 + jw\varepsilon\mathbf{f}_0)(-\Lambda - \gamma_1\mathbf{I} + \mathbf{Q} - a_1\mathbf{I}) + \mu_1\Phi^{(2)}(w)(\mathbf{r}_1 + jw\varepsilon\mathbf{f}_1) + \\
& + \mu_2\Phi^{(2)}(w)(\mathbf{r}_2 + jw\varepsilon\mathbf{f}_2) + \\
& + j\varepsilon \left(\Phi^{(2)}(w) \frac{\partial(\mathbf{r}_0 + jw\varepsilon\mathbf{f}_0)}{\partial w} + \frac{\partial\Phi^{(2)}(w)}{\partial w}(\mathbf{r}_0 + jw\varepsilon\mathbf{f}_0) \right) = \mathbf{0}, \\
& \Phi^{(2)}(w)(\mathbf{r}_0 + jw\varepsilon\mathbf{f}_0)(\Lambda + a_1e^{-jw\varepsilon}\mathbf{I}) + \\
& + \Phi^{(2)}(w)(\mathbf{r}_1 + jw\varepsilon\mathbf{f}_1) \left((e^{jw\varepsilon} - 1)\Lambda - (\mu_1 + \gamma_2)\mathbf{I} + \mathbf{Q} \right) - \\
& - j\varepsilon e^{-jw\varepsilon} \left(\Phi^{(2)}(w) \frac{\partial(\mathbf{r}_0 + jw\varepsilon\mathbf{f}_0)}{\partial w} + \frac{\partial\Phi^{(2)}(w)}{\partial w}(\mathbf{r}_0 + jw\varepsilon\mathbf{f}_0) \right) = \mathbf{0}, \\
& \gamma_1\Phi^{(2)}(w)(\mathbf{r}_0 + jw\varepsilon\mathbf{f}_0) + \gamma_2e^{jw\varepsilon}\Phi^{(2)}(w)(\mathbf{r}_1 + jw\varepsilon\mathbf{f}_1) + \\
& + \Phi^{(2)}(w)(\mathbf{r}_2 + jw\varepsilon\mathbf{f}_2) \left((e^{jw\varepsilon} - 1)\Lambda - \mu_2\mathbf{I} + \mathbf{Q} \right) = \mathbf{0}, \\
& -a_1e^{-jw\varepsilon}\Phi^{(2)}(w)(\mathbf{r}_0 + jw\varepsilon\mathbf{f}_0)\mathbf{e} + \Phi^{(2)}(w)(\mathbf{r}_1 + jw\varepsilon\mathbf{f}_1)(\Lambda + \gamma_2\mathbf{I})\mathbf{e} + \\
& + \Phi^{(2)}(w)(\mathbf{r}_2 + jw\varepsilon\mathbf{f}_2)\Lambda\mathbf{e} + \\
& + j\varepsilon e^{-jw\varepsilon} \left(\Phi^{(2)}(w) \frac{\partial(\mathbf{r}_0 + jw\varepsilon\mathbf{f}_0)}{\partial w} + \frac{\partial\Phi^{(2)}(w)}{\partial w}(\mathbf{r}_0 + jw\varepsilon\mathbf{f}_0) \right) \mathbf{e} = \mathbf{0}.
\end{aligned} \right. \quad (34)$$

Возьмем разложение в ряд Тейлора

$$e^{jw\varepsilon} = 1 + jw\varepsilon + O(\varepsilon^2),$$

применим его в системе (34) и получим следующее:

$$\left\{ \begin{aligned}
& \Phi^{(2)}(w)\mathbf{r}_0(-\Lambda - \gamma_1\mathbf{I} + \mathbf{Q} - a_1\mathbf{I}) + jw\varepsilon\Phi^{(2)}(w)\mathbf{f}_0(-\Lambda - \gamma_1\mathbf{I} + \mathbf{Q} - a_1\mathbf{I}) + \mu_1\Phi^{(2)}(w)\mathbf{r}_1 + \\
& + \mu_1jw\varepsilon\Phi^{(2)}(w)\mathbf{f}_1 + \mu_2\Phi^{(2)}(w)\mathbf{r}_2 + \mu_2jw\varepsilon\Phi^{(2)}(w)\mathbf{f}_2 + j^2\varepsilon^2\Phi^{(2)}(w)\mathbf{f}_0 + \\
& + \frac{\partial\Phi^{(2)}(w)}{\partial w}(j\varepsilon\mathbf{r}_0 + j^2w\varepsilon^2\mathbf{f}_0) = \mathbf{0}, \\
& \Phi^{(2)}(w)\mathbf{r}_0(\Lambda + (1 - jw\varepsilon)a_1\mathbf{I}) + jw\varepsilon\Phi^{(2)}(w)\mathbf{f}_0(\Lambda + (1 - jw\varepsilon)a_1\mathbf{I}) + \\
& + \Phi^{(2)}(w)\mathbf{r}_1(jw\varepsilon\Lambda - (\mu_1 + \gamma_2)\mathbf{I} + \mathbf{Q}) + jw\varepsilon\Phi^{(2)}(w)\mathbf{f}_1(jw\varepsilon\Lambda - (\mu_1 + \gamma_2)\mathbf{I} + \mathbf{Q}) + \\
& + \varepsilon^2(1 - jw\varepsilon)\Phi^{(2)}(w)\mathbf{f}_0 - \frac{\partial\Phi^{(2)}(w)}{\partial w}(j\varepsilon(1 - jw\varepsilon)\mathbf{r}_0 + j\varepsilon(1 - jw\varepsilon)jw\varepsilon\mathbf{f}_0) = \mathbf{0}, \\
& \gamma_1\Phi^{(2)}(w)\mathbf{r}_0 + \gamma_1jw\varepsilon\Phi^{(2)}(w)\mathbf{f}_0 + \gamma_2(1 + jw\varepsilon)\Phi^{(2)}(w)\mathbf{r}_1 + \gamma_2jw\varepsilon(1 + jw\varepsilon)\Phi^{(2)}(w)\mathbf{f}_1 + \\
& + \Phi^{(2)}(w)\mathbf{r}_2(jw\varepsilon\Lambda - \mu_2\mathbf{I} + \mathbf{Q}) + jw\varepsilon\Phi^{(2)}(w)\mathbf{f}_2(jw\varepsilon\Lambda - \mu_2\mathbf{I} + \mathbf{Q}) = \mathbf{0}, \\
& -a_1(1 - jw\varepsilon)\Phi^{(2)}(w)\mathbf{r}_0\mathbf{e} - a_1jw\varepsilon(1 - jw\varepsilon)\Phi^{(2)}(w)\mathbf{f}_0\mathbf{e} + \Phi^{(2)}(w)\mathbf{r}_1(\Lambda + \gamma_2\mathbf{I})\mathbf{e} + \\
& + jw\varepsilon\Phi^{(2)}(w)\mathbf{f}_1(\Lambda + \gamma_2\mathbf{I})\mathbf{e} + \Phi^{(2)}(w)\mathbf{r}_2\Lambda\mathbf{e} + jw\varepsilon\Phi^{(2)}(w)\mathbf{f}_2\Lambda\mathbf{e} - \\
& - \varepsilon^2(1 - jw\varepsilon)\Phi^{(2)}(w)\mathbf{f}_0\mathbf{e} + \\
& + \frac{\partial\Phi^{(2)}(w)}{\partial w}(j\varepsilon(1 - jw\varepsilon)\mathbf{r}_0 + j\varepsilon(1 - jw\varepsilon)jw\varepsilon\mathbf{f}_0)\mathbf{e} = \mathbf{0}.
\end{aligned} \right. \quad (35)$$

Соберем слагаемые при ε в первой степени в системе (35):

$$\left\{ \begin{aligned}
& jw\varepsilon\Phi^{(2)}(w)\mathbf{f}_0(-\Lambda - \gamma_1\mathbf{I} + \mathbf{Q} - a_1\mathbf{I}) + \mu_1jw\varepsilon\Phi^{(2)}(w)\mathbf{f}_1 + \mu_2jw\varepsilon\Phi^{(2)}(w)\mathbf{f}_2 + \\
& + j\varepsilon\frac{\partial\Phi^{(2)}(w)}{\partial w}\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}, \\
& -jw\varepsilon a_1\Phi^{(2)}(w)\mathbf{r}_0\mathbf{I} + jw\varepsilon\Phi^{(2)}(w)\mathbf{f}_0(\Lambda + a_1\mathbf{I}) + jw\varepsilon\Phi^{(2)}(w)\mathbf{r}_1\Lambda + \\
& + jw\varepsilon\Phi^{(2)}(w)\mathbf{f}_1(-(\mu_1 + \gamma_2)\mathbf{I} + \mathbf{Q}) + \\
& - j\varepsilon\frac{\partial\Phi^{(2)}(w)}{\partial w}\mathbf{r}_0 = \mathbf{0}, \\
& \gamma_1jw\varepsilon\Phi^{(2)}(w)\mathbf{f}_0 + \gamma_2jw\varepsilon\Phi^{(2)}(w)\mathbf{r}_1 + \gamma_2jw\varepsilon\Phi^{(2)}(w)\mathbf{f}_1 + \\
& + jw\varepsilon\Phi^{(2)}(w)\mathbf{r}_2\Lambda + \\
& + jw\varepsilon\Phi^{(2)}(w)\mathbf{f}_2(-\mu_2\mathbf{I} + \mathbf{Q}) = \mathbf{0}, \\
& jw\varepsilon a_1\Phi^{(2)}(w)\mathbf{r}_0\mathbf{e} - a_1jw\varepsilon\Phi^{(2)}(w)\mathbf{f}_0\mathbf{e} + \\
& + jw\varepsilon\Phi^{(2)}(w)\mathbf{f}_1(\Lambda + \gamma_2\mathbf{I})\mathbf{e} + jw\varepsilon\Phi^{(2)}(w)\mathbf{f}_2\Lambda\mathbf{e} + \\
& + j\varepsilon\frac{\partial\Phi^{(2)}(w)}{\partial w}\mathbf{r}_0\mathbf{e} = \mathbf{0}.
\end{aligned} \right. \quad (36)$$

Разделим все уравнения системы (36) на $jw\varepsilon\Phi^{(2)}(w)$:

$$\begin{cases} \mathbf{f}_0(-\Lambda - \gamma_1 \mathbf{I} + \mathbf{Q} - a_1 \mathbf{I}) + \mu_1 \mathbf{f}_1 + \mu_2 \mathbf{f}_2 + \frac{\partial \Phi^{(2)}(w)}{w \Phi^{(2)}(w) \partial w} \mathbf{r}_0 = \mathbf{0}, \\ -a_1 \mathbf{r}_0 \mathbf{I} + \mathbf{f}_0(\Lambda + a_1 \mathbf{I}) + \mathbf{r}_1 \Lambda + \mathbf{f}_1(-(\mu_1 + \gamma_2) \mathbf{I} + \mathbf{Q}) - \frac{\partial \Phi^{(2)}(w)}{w \Phi^{(2)}(w) \partial w} \mathbf{r}_0 = \mathbf{0}, \\ \gamma_1 \mathbf{f}_0 + \gamma_2 \mathbf{r}_1 + \gamma_2 \mathbf{f}_1 + \mathbf{r}_2 \Lambda + \mathbf{f}_2(-\mu_2 \mathbf{I} + \mathbf{Q}) = \mathbf{0}, \\ a_1 \mathbf{r}_0 \mathbf{e} - a_1 \mathbf{f}_0 \mathbf{e} + \mathbf{f}_1(\Lambda + \gamma_2 \mathbf{I}) \mathbf{e} + \mathbf{f}_2 \Lambda \mathbf{e} + \frac{\partial \Phi^{(2)}(w)}{w \Phi^{(2)}(w) \partial w} \mathbf{r}_0 \mathbf{e} = 0. \end{cases} \quad (37)$$

Учтем в системе (37), что $\frac{\partial \Phi^{(2)}(w)}{w \Phi^{(2)}(w) \partial w} = -a_2$, и дополнительно умножим все уравнения системы на \mathbf{e} и приведем неоднородную систему линейных уравнений к каноническому виду:

$$\begin{cases} -\mathbf{f}_0(\Lambda \mathbf{e} + \gamma_1 \mathbf{e} + a_1 \mathbf{e}) + \mu_1 \mathbf{f}_1 \mathbf{e} + \mu_2 \mathbf{f}_2 \mathbf{e} = a_2 \mathbf{r}_0 \mathbf{e}, \\ \mathbf{f}_0(\Lambda \mathbf{e} + a_1 \mathbf{e}) - \mathbf{f}_1(\mu_1 \mathbf{e} + \gamma_2 \mathbf{e}) = a_1 \mathbf{r}_0 \mathbf{e} - a_2 \mathbf{r}_0 \mathbf{e} - \mathbf{r}_1 \Lambda \mathbf{e}, \\ \gamma_1 \mathbf{f}_0 \mathbf{e} + \gamma_2 \mathbf{f}_1 \mathbf{e} - \mu_2 \mathbf{f}_2 \mathbf{e} = -\gamma_2 \mathbf{r}_1 \mathbf{e} - \mathbf{r}_2 \Lambda \mathbf{e}, \\ -a_1 \mathbf{f}_0 \mathbf{e} + \mathbf{f}_1(\Lambda \mathbf{e} + \gamma_2 \mathbf{e}) + \mathbf{f}_2 \Lambda \mathbf{e} = a_2 \mathbf{r}_0 \mathbf{e} - a_1 \mathbf{r}_0 \mathbf{e}. \end{cases} \quad (38)$$

Решение системы будем искать по методу суперпозиции, то есть в виде

$$\mathbf{f}_k = C \mathbf{r}_k + a_2 \mathbf{g}_k + \mathbf{y}_k.$$

Подставим разложение в систему уравнений (38) и уничтожим слагаемые, содержащие константу C :

$$\begin{cases} -(a_2 \mathbf{g}_0 + \mathbf{y}_0)(\Lambda \mathbf{e} + \gamma_1 \mathbf{e} + a_1 \mathbf{e}) + \mu_1(a_2 \mathbf{g}_1 + \mathbf{y}_1) \mathbf{e} + \mu_2(a_2 \mathbf{g}_2 + \mathbf{y}_2) \mathbf{e} = a_2 \mathbf{r}_0 \mathbf{e}, \\ (a_2 \mathbf{g}_0 + \mathbf{y}_0)(\Lambda \mathbf{e} + a_1 \mathbf{e}) - (a_2 \mathbf{g}_1 + \mathbf{y}_1)(\mu_1 \mathbf{e} + \gamma_2 \mathbf{e}) = a_1 \mathbf{r}_0 \mathbf{e} - a_2 \mathbf{r}_0 \mathbf{e} - \mathbf{r}_1 \Lambda \mathbf{e}, \\ \gamma_1(a_2 \mathbf{g}_0 + \mathbf{y}_0) \mathbf{e} + \gamma_2(a_2 \mathbf{g}_1 + \mathbf{y}_1) \mathbf{e} - \mu_2(a_2 \mathbf{g}_2 + \mathbf{y}_2) \mathbf{e} = -\gamma_2 \mathbf{r}_1 \mathbf{e} - \mathbf{r}_2 \Lambda \mathbf{e}, \\ -a_1(a_2 \mathbf{g}_0 + \mathbf{y}_0) \mathbf{e} + (a_2 \mathbf{g}_1 + \mathbf{y}_1)(\Lambda \mathbf{e} + \gamma_2 \mathbf{e}) + (a_2 \mathbf{g}_2 + \mathbf{y}_2) \Lambda \mathbf{e} = a_2 \mathbf{r}_0 \mathbf{e} - a_1 \mathbf{r}_0 \mathbf{e}. \end{cases} \quad (39)$$

Объединим коэффициенты при различных степенях a_2 в две системы уравнений из системы (39).

При \mathbf{g}_k (a_2 в степени 1):

$$\begin{cases} -\mathbf{g}_0(\Lambda \mathbf{e} + \gamma_1 \mathbf{e} + a_1 \mathbf{e}) + \mu_1 \mathbf{g}_1 \mathbf{e} + \mu_2 \mathbf{g}_2 \mathbf{e} = \mathbf{r}_0 \mathbf{e}, \\ \mathbf{g}_0(\Lambda \mathbf{e} + a_1 \mathbf{e}) - \mathbf{g}_1(\mu_1 \mathbf{e} + \gamma_2 \mathbf{e}) = -\mathbf{r}_0 \mathbf{e}, \\ \gamma_1 \mathbf{g}_0 \mathbf{e} + \gamma_2 \mathbf{g}_1 \mathbf{e} - \mu_2 \mathbf{g}_2 \mathbf{e} = 0, \\ -a_1 \mathbf{g}_0 \mathbf{e} + \mathbf{g}_1(\Lambda \mathbf{e} + \gamma_2 \mathbf{e}) + \mathbf{g}_2 \Lambda \mathbf{e} = \mathbf{r}_0 \mathbf{e}. \end{cases} \quad (40)$$

При \mathbf{y}_k (a_2 в степени 0):

$$\begin{cases} -\mathbf{y}_0(\Lambda \mathbf{e} + \gamma_1 \mathbf{e} + a_1 \mathbf{e}) + \mu_1 \mathbf{y}_1 \mathbf{e} + \mu_2 \mathbf{y}_2 \mathbf{e} = 0, \\ \mathbf{y}_0(\Lambda \mathbf{e} + a_1 \mathbf{e}) - \mathbf{y}_1(\mu_1 \mathbf{e} + \gamma_2 \mathbf{e}) = a_1 \mathbf{r}_0 \mathbf{e} - \mathbf{r}_1 \Lambda \mathbf{e}, \\ \gamma_1 \mathbf{y}_0 \mathbf{e} + \gamma_2 \mathbf{y}_1 \mathbf{e} - \mu_2 \mathbf{y}_2 \mathbf{e} = -\gamma_2 \mathbf{r}_1 \mathbf{e} - \mathbf{r}_2 \Lambda \mathbf{e}, \\ -a_1 \mathbf{y}_0 \mathbf{e} + \mathbf{y}_1(\Lambda \mathbf{e} + \gamma_2 \mathbf{e}) + \mathbf{y}_2 \Lambda \mathbf{e} = -a_1 \mathbf{r}_0 \mathbf{e}. \end{cases} \quad (41)$$

Также запишем дополнительные условия для обеих систем:

$$(\mathbf{g}_0 + \mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2) \mathbf{e} = 0, \quad (\mathbf{y}_0 + \mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_2) \mathbf{e} = 0.$$

Сложим второе и четвертое уравнение системы (40) и выразим $\mathbf{g}_1 \mathbf{e}$:

$$s_1 = \mathbf{g}_1 \mathbf{e} = 0.$$

Из второго уравнения системы (40) выразим $\mathbf{g}_0 \mathbf{e}$:

$$s_0 = \mathbf{g}_0 \mathbf{e} = -\mathbf{r}_0 \mathbf{e} (\Lambda \mathbf{e} + a_1 \mathbf{e})^{-1} \mathbf{e}.$$

Из дополнительного условия найдем $\mathbf{g}_2 \mathbf{e}$:

$$s_2 = \mathbf{g}_2 \mathbf{e} = -\mathbf{g}_0 \mathbf{e}.$$

Сложим первое и третье уравнения, вычтем четвертое уравнения системы (41), выразим $\mathbf{y}_1 \mathbf{e}$:

$$w_1 = \mathbf{y}_1 \mathbf{e} = \frac{a_1 \mathbf{r}_0 \mathbf{e} - \gamma_2 \mathbf{r}_1 \mathbf{e} - \mathbf{r}_2 \Lambda \mathbf{e}}{\mu_1}.$$

Выразим из второго уравнения системы (41) $\mathbf{y}_0 \mathbf{e}$:

$$w_0 = \mathbf{y}_0 \mathbf{e} = (a_1 \mathbf{r}_0 \mathbf{e} - \mathbf{r}_1 \Lambda \mathbf{e} + \mu_1 \mathbf{y}_1 \mathbf{e} + \gamma_2 \mathbf{y}_1 \mathbf{e})(\Lambda \mathbf{e} + a_1 \mathbf{e})^{-1} \mathbf{e}.$$

Из дополнительного условия выразим $\mathbf{y}_2 \mathbf{e}$:

$$w_2 = \mathbf{y}_2 \mathbf{e} = -w_0 - w_1.$$

Выразим a_2 из последнего уравнения системы (39):

$$a_2 = (a_1 p_0 \mathbf{e} - a_1 w_0 \mathbf{e} + \lambda w_1 \mathbf{e} + \gamma_2 w_1 \mathbf{e} + \lambda w_2 \mathbf{e})(a_1 s_0 \mathbf{e} - s_1 (\Lambda \mathbf{e} + a_1 \mathbf{e}) - \lambda s_2 \mathbf{e} + p_0 \mathbf{e})^{-1}.$$

Получаем характеристическую функцию вида:

$$H(u) = e^{\frac{a_1 j u}{\sigma} + \frac{a_2 j^2 u^2}{2\sigma}}.$$

Стоит отметить, что стационарный режим систем массового обслуживания в виде RQ-систем с различными входящими потоками и ненадежным прибором достигается при условиях, что все значения параметров системы положительны и $\mu_1 > \lambda$, $\frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_2 + \gamma_2} > \lambda$.

5 Имитационные модели систем совместного доступа с ненадежным ресурсом

5.1 Модельное время и события системы

Имитационное моделирование представляет собой процесс построения достаточно точной модели реальной системы, с помощью которой можно исследовать поведение систем совместного доступа, таких как RQ-системы, и получать статистические данные, которые могут быть использованы для построения распределений вероятностей и других аналитических характеристик.

В данном исследовании выбран дискретно-событийный подход к моделированию, который предполагает, что система функционирует как последовательность хронологических событий. Каждое событие происходит в определенный момент времени и вызывает изменение состояния системы. Этот подход позволяет учесть временные зависимости и последовательность событий, что важно для более точного моделирования исследуемых процессов.

Основные события для RQ-систем с ненадежным прибором:

1. заявка поступила в систему;
2. заявка обратилась с орбиты;
3. заявка обслужилась;
4. прибор вышел из строя свободным;
5. прибор вышел из строя занятым;
6. прибор отремонтирован;
7. цепь Маркова сменила состояние (ММРР-поток).

Вектор-состояний системы состоит из:

1. количества заявок на орбите;
2. состояния прибора:
 - 2.1 свободен;
 - 2.2 занят;
 - 2.3 на ремонте;
3. состояния цепи Маркова (от 0 до N).

Для учета моментов наступления событий необходим таймер модального времени $T_{\text{мод.}}$, который на каждой итерации моделирования сдвигается к моменту ближайшего события. Введем обозначения для моментов наступления событий:

1. $T_{пост.}$ – поступление заявки в систему;
2. $T_{орб.}$ – обращение заявки из орбиты;
3. $T_{обсл.}$ – завершение обслуживания заявки;
4. $T_{слом.своб.}$ – поломка прибора в свободном состоянии;
5. $T_{слом.зан.}$ – поломка прибора в занятом состоянии;
6. $T_{восст.}$ – восстановление прибора;
7. $T_{цепь.}$ – смена состояния цепи Маркова (условной интенсивности).

Корректировку модального времени на каждой итерации можно описать таким образом:

$$T_{мод.} = \min(T_{пост.}, T_{орб.}, T_{обсл.}, T_{слом.своб.}, T_{слом.зан.}, T_{восст.}, T_{цепь.}).$$

Дискретно-событийное имитационное моделирование функционирует на основе генерации событий на временной оси и последовательных сдвигах таймера модального времени по событиям, расположенным на данной оси.

5.2 Алгоритм модели

Время обслуживания – экспоненциальное. Это означает, что случайное время определяется формулой:

$$-\frac{\ln(R)}{y},$$

где R – случайная величина от 0 до 1,

y – задаваемый параметр времени.

Алгоритм имитационного моделирования:

1. Задаем входные параметры системы:
 - 1.1 Параметр времени ожидания заявки на орбите (σ);
 - 1.2 Параметр времени обслуживания заявок (μ_1);
 - 1.3 Параметр времени восстановления (μ_2);
 - 1.4 Параметр времени бесперебойной работы прибора в свободном состоянии (γ_1);
 - 1.5 Параметр времени бесперебойной работы прибора в занятом состоянии (γ_2);
 - 1.6 Вектор условных интенсивностей Λ (для простейшего потока задаем все условные интенсивности одинаковыми);

- 1.7 Матрица инфинитезимальных характеристик \mathbf{Q} ;
- 1.8 Время моделирования (V);
2. Задаем состояние системы:
 - 2.1 Начальное состояние прибора (k);
 - 2.2 Начальное количество заявок на орбите (i);
3. Находим вектор вероятностей состояний цепи Маркова (\mathbf{r}):
 - 3.1 Задается матрица \mathbf{A} , состоящая из транспонированной матрицы \mathbf{Q} и единичной вектор-строки, и вектор-столбец $\mathbf{b} = \{0,0,0,1\}$;
 - 3.2 Находим $\mathbf{r} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}$;
4. Определяем начальное состояние цепи Маркова n в соответствии с вероятностями \mathbf{r} :
 - 4.1 Создаем кумулятивный массив, где каждый элемент представляет собой сумму вероятностей от начала массива до соответствующего элемента \mathbf{r} ;
 - 4.2 Генерируем случайное число в диапазоне от 0 до 1 с помощью равномерного распределения;
 - 4.3 Находим первый элемент в кумулятивном массиве, который больше или равен сгенерированному числу. Индекс этого элемента используется для выбора интенсивности;
 - 4.4 Если выбранная интенсивность является первым элементом вектора условных интенсивностей, то состояние цепи Маркова – первое, и параметр интенсивности смены состояния цепи Маркова является первым диагональным элементом матрицы инфинитезимальных характеристик;
5. Находим переходные вероятности из различных состояний. Переходные вероятности находятся как отношение недиагонального элемента к диагональному элементу строки матрицы инфинитезимальных характеристик со знаком минуса;
6. Моделируем моменты времени событий, описанных выше:
 - 6.1 Выводим на график точки числа заявок на орбите, состояния прибора и состояния цепи Маркова, которые образуют ступенчатую линию;
 - 6.2 Генерируем случайную величину $R \sim R(0,1)$ каждый раз, когда моделируем какое-либо время;
 - 6.3 Определяем момент времени смены состояния цепи Маркова: $T_{\text{цепь.}} = \frac{\ln(R)}{q_{ii}}$;
 - 6.4 Определяем момент времени поступления заявки: $T_{\text{пост.}} = -\frac{\ln(R)}{\lambda}$;
 - 6.5 Определяем момент времени обслуживания заявки:

6.5.1 Если прибор свободен или сломан, то: $T_{обсл.} = \infty$;

6.5.2 Иначе: $T_{обсл.} = -\frac{\ln(R)}{\mu_1}$;

6.6 Определяем время ожидания заявки на орбите:

6.6.1 Если орбита пустая, то: $T_{орб.} = \infty$;

6.6.2 Иначе: $T_{орб.} = -\frac{\ln(R)}{\sigma i}$;

6.7 Определяем время бесперебойной работы и восстановления. Изначально все интенсивности равны бесконечности. Необходимо учитывать настоящее состояние прибора:

6.7.1 Если прибор свободен, то: $T_{слом.своб.} = -\frac{\ln(R)}{\gamma_1}$;

6.7.2 Если прибор занят, то: $T_{слом.зан.} = -\frac{\ln(R)}{\gamma_2}$;

6.7.3 Если прибор сломан, то: $T_{вост.} = -\frac{\ln(R)}{\mu_2}$;

7. Определяем момент времени наступления ближайшего события:

7.1 $T_{пред.} = T_{мод.}$;

7.2 $T_{мод.} = \min(T_{пост.}, T_{орб.}, T_{обсл.}, T_{слом.своб.}, T_{слом.зан.}, T_{вост.}, T_{цель.})$;

8. Определяем изменения состояний системы в зависимости от ближайшего события:

8.1 Если $T_{мод.} = T_{цель.}$, то переходим только к пункту 4, где теперь вместо вектора вероятностей \mathbf{r} используем вектор вероятностей перехода из текущего состояния, найденный в пункте 5;

8.2 Если $T_{мод.} = T_{пост.}$, то:

8.2.1 Если прибор свободен, то: $k++$;

8.2.2 Иначе: $i++$;

8.3 Если $T_{мод.} = T_{обсл.}$, то: $k--$;

8.4 Если $T_{мод.} = T_{орб.}$, то:

8.4.1 Если прибор свободен, то: $k++, i--$;

8.5 Если $T_{мод.} = T_{слом.своб.}$, то: $k++$;

8.6 Если $T_{мод.} = T_{слом.зан.}$, то: $k++, i++$;

8.7 Если $T_{\text{мод.}} = T_{\text{вост.}}$, то: $k--$;

9. Определяем время, при котором на орбите находилось определенное количество заявок:

$$T[i] = T[i] + (T_{\text{мод.}} - T_{\text{пред.}});$$

10. Если время моделирования событий V вышло, то моделирование завершено. Иначе переходим к пункту 6.

11. Вероятности числа заявок на орбите определяются следующим образом:

$$P(i) = \frac{T[i]}{T_{\text{мод.}}};$$

12. Построение графика распределения вероятностей числа заявок на орбите.

Допустим, пользователю понадобится только простейший входящий поток, так как проводит исследование для системы массового обслуживания другой структуры, но с ненадежным ресурсом. В этом случае стоит пропустить пункты 1.6, 1.7 (необходимо задать интенсивность входящего потока λ), 3, 4, 5, 6.3, 8.1. В пункте 6.1 не будет состояний цепи Маркова. Эти действия будут усложнять задачу. Также представленный алгоритм имеет возможность усовершенствования до более сложных систем массового обслуживания.

Листинг кода имитационной модели RQ-системы MMPP|M|1 с ненадежным ресурсом представлен в приложении А. Для RQ-системы M|M|1 с ненадежным ресурсом в векторе LAMBDA указываем одинаковые значения для всех условных интенсивностей.

5.3 Инструменты реализации и интерфейс формы

Результаты имитационного моделирования представлены с помощью пользовательского интерфейса Windows Forms.

Для разработки выбран язык C++ (объектно-ориентированный).

Среда разработки – Microsoft Visual Studio 2022.

На рисунке 6 представлен интерфейс формы.

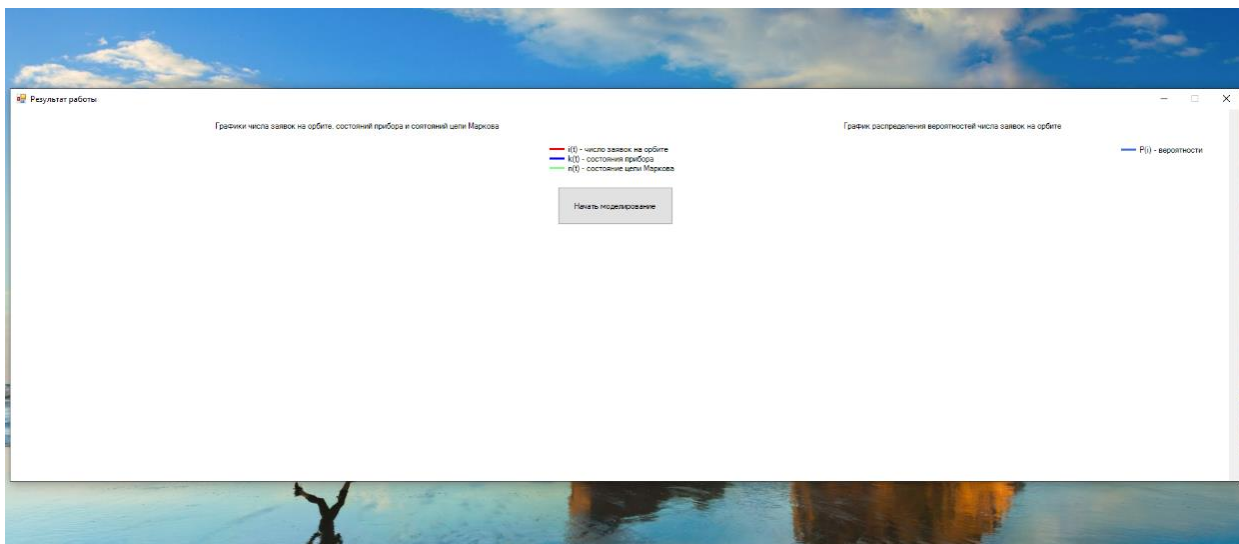


Рисунок 6 – Интерфейс формы

При нажатии на кнопку «Начать моделирование» выводятся графики числа заявок на орбите, состояния прибора и состояния цепи Маркова, либо распределение вероятностей числа заявок на орбите (рисунки 7 – 9).

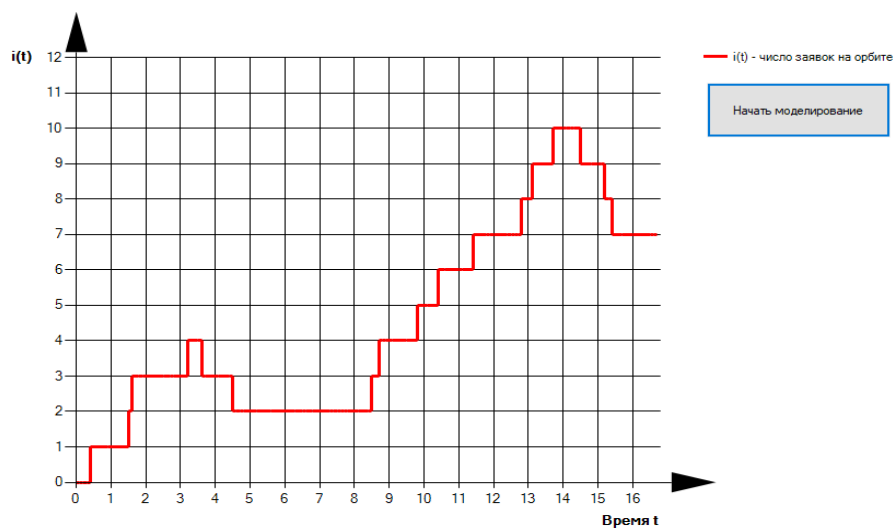


Рисунок 7 – Число заявок на орбите

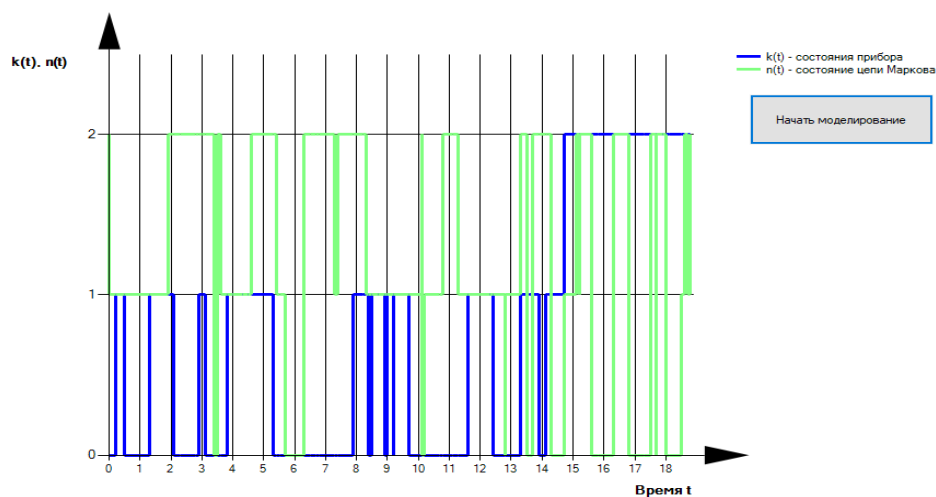


Рисунок 8 – Состояние прибора и цепи Маркова

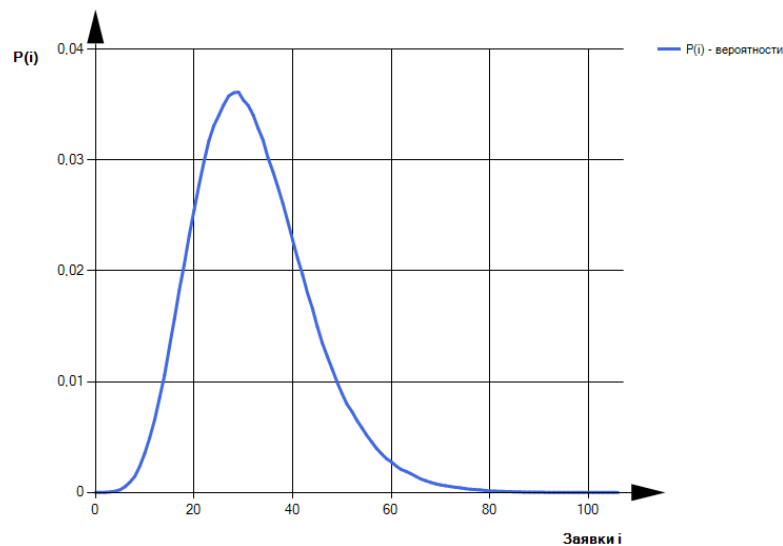


Рисунок 9 – Распределение вероятностей числа заявок на орбите

В зависимости от того, что нужно пользователю, есть возможность закомментировать строки вывода того или иного графика и получить необходимый результат для дальнейшего анализа.

Для использования полученных результатов, реализован экспорт вероятностей в txt файл для математического пакета Mathcad (рисунок 10). Номер строки в документе указывает о количестве заявок на орбите. Например, вероятность того, что на орбите не будет заявок, равна 1,63041e-06.

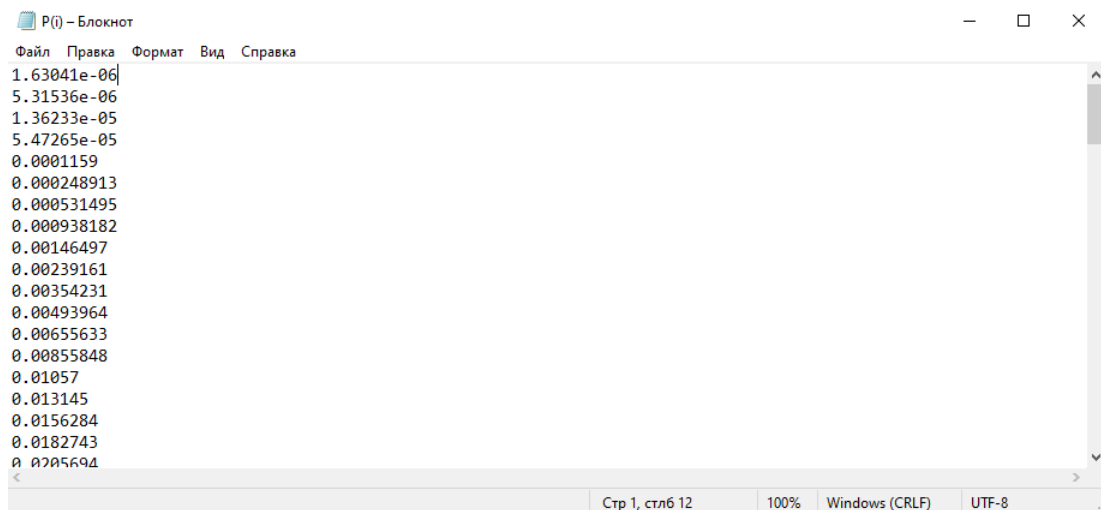


Рисунок 10 – Значения вероятностей $P(i)$

Для определения точности имитационной модели использовалось расстояние Колмогорова между двумя реализациями моделирования при одних и тех же параметрах. Точность данной имитационной модели хорошая, так как расстояние Колмогорова принимает значения, не превышающие 0,005.

6 Асимптотическое распределение и результаты имитационной модели

Имея математическое ожидание a_1/σ и дисперсию a_2/σ , можно получить асимптотически гауссовские дискретные распределения вероятностей числа заявок на орбите с помощью следующей формулы:

$$P(i) = \frac{L(i+0,5) - L(i-0,5)}{1 - L(-0,5)},$$

где $L(x) = \sqrt{\frac{\sigma}{2\pi a_2}} \int_{-\infty}^x \exp \left\{ -\frac{\sigma \left(t - \frac{a_1}{\sigma} \right)^2}{2a_2} \right\} dt$ – нормальная функция распределения.

Для определения погрешности между имитационным и асимптотическим распределением вероятностей числа заявок на орбите используется расстояние Колмогорова:

$$\Delta = \max |F(x)_{имит.} - F(x)_{асимпт.}|,$$

где $F(x)_{имит.}$ – функция распределения вероятностей числа заявок на орбите, построенная с помощью имитационной модели, $F(x)_{асимпт.}$ – функция распределения вероятностей, найденная асимптотическим методом.

На рисунках 11 – 13 приведены графики сравнения аппроксимации распределения вероятностей числа заявок на орбите (линия) и распределения, полученного имитационной моделью (пунктир), для ММРР-потока при следующих параметрах:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -0,4 & 0,1 & 0,3 \\ 0,3 & -0,5 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & -0,2 \end{pmatrix}, \mu_1 = 3, \mu_2 = 0,5, \gamma_1 = 0,4, \gamma_2 = 0,2.$$

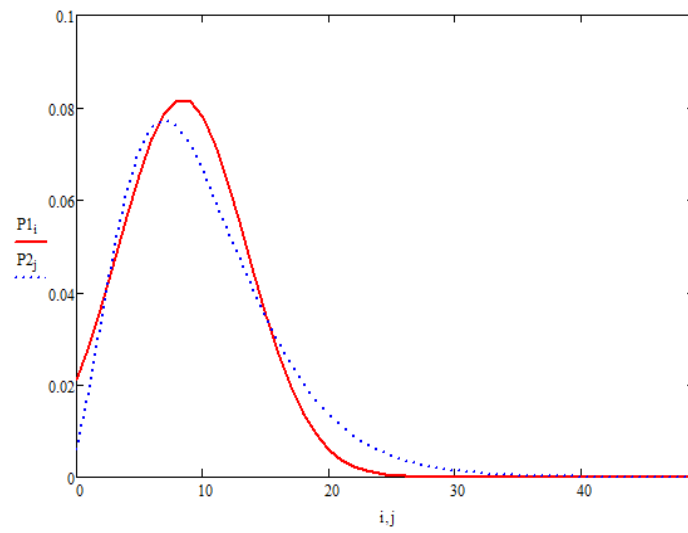


Рисунок 11 – Распределение вероятностей при $\sigma = 0,2$

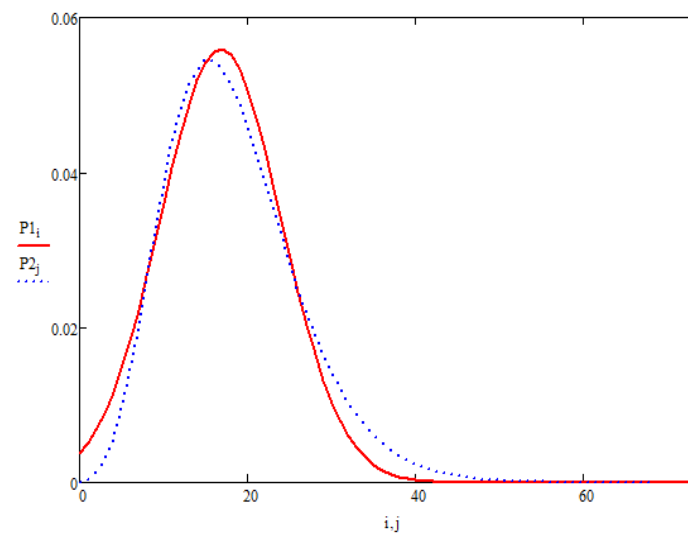


Рисунок 12 – Распределение вероятностей при $\sigma = 0,1$

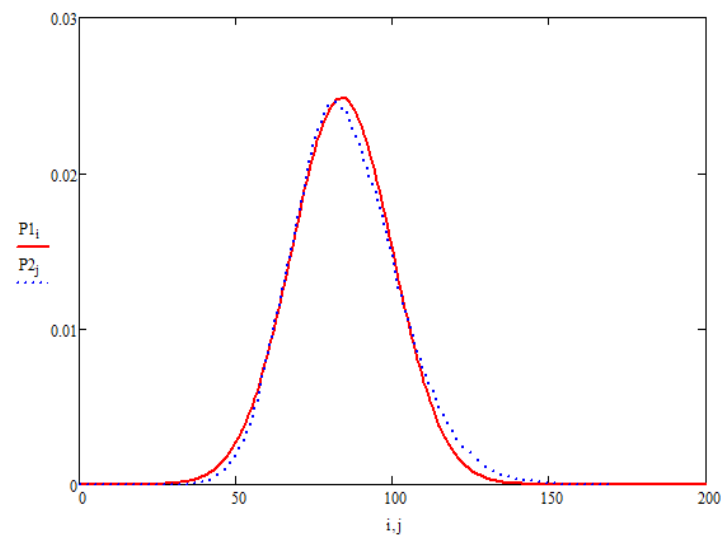


Рисунок 13 – Распределение вероятностей при $\sigma = 0,02$

В таблице 2 приведены результаты сравнения функций распределения, полученных с помощью имитационного моделирования и асимптотического анализа при условии растущей задержки заявок на орбите для ММРР-потока.

Таблица 2 – Расстояния Колмогорова

σ	0,2	0,1	0,02	0,002
Δ	0,073	0,054	0,031	0,021

На рисунках 14 – 16 представлены графики сравнения аппроксимации распределения вероятностей числа заявок на орбите (линия) и распределения, полученного имитационной моделью (пунктир), для простейшего потока при следующих параметрах:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} -0,4 & 0,1 & 0,3 \\ 0,3 & -0,5 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & -0,2 \end{pmatrix}, \mu_1 = 1,8, \mu_2 = 4, \gamma_1 = 0,2, \gamma_2 = 0,1.$$

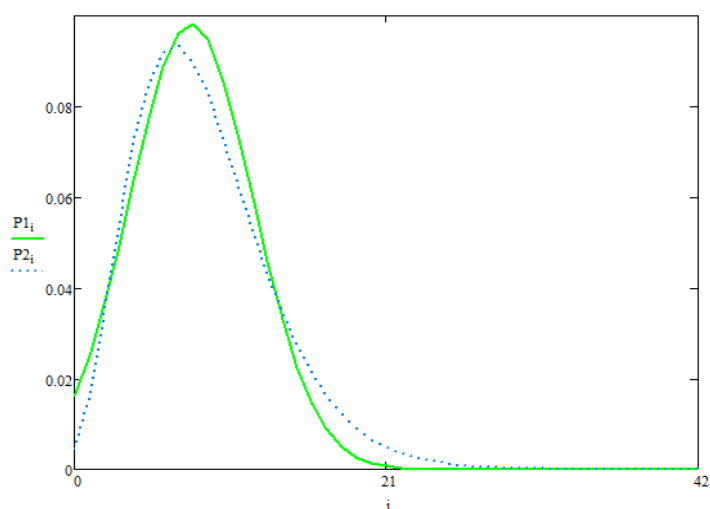


Рисунок 14 – Распределение вероятностей при $\sigma = 0,2$

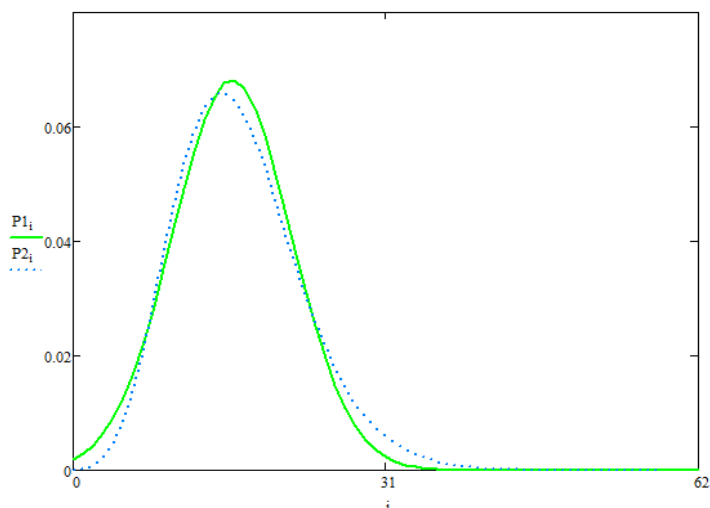


Рисунок 15 – Распределение вероятностей при $\sigma = 0,1$

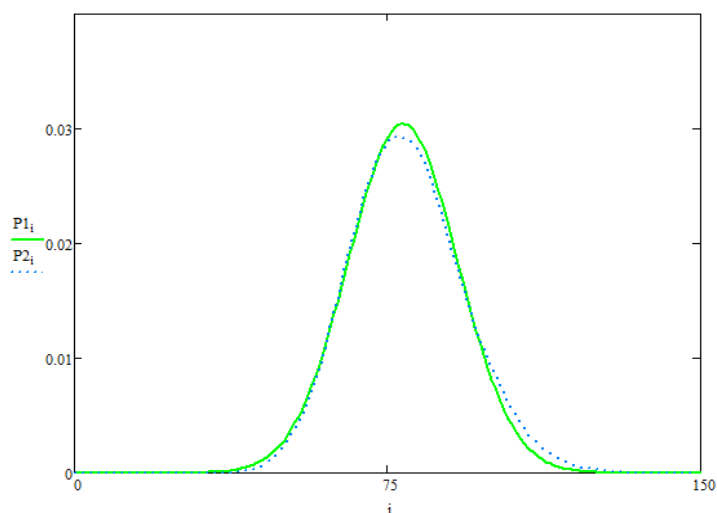


Рисунок 16 – Распределение вероятностей при $\sigma = 0,02$

Результаты сравнения функций распределения, полученных с помощью имитационного моделирования и асимптотического анализа при условии растущей задержки заявок на орбите для простейшего потока, приведены в таблице 3.

Таблица 3 – Расстояния Колмогорова

σ	0,2	0,1	0,02	0,002
Δ	0,055	0,039	0,026	0,016

По таблицам 2,3 заметно, что при уменьшении параметра σ , расстояние Колмогорова между распределениями вероятностей уменьшается.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе построена математическая модель RQ-системы и исследованы ее характеристики с помощью методов производящих и характеристических функций. Также исследована система с помощью асимптотического анализа первого и второго порядка, найдено стационарное распределение вероятностей числа заявок на орбите. Создан алгоритм для построения RQ-систем с ненадежным прибором при различных входящих потоках и реализована имитационная модель. Построены графики распределения вероятностей числа заявок на орбите с помощью асимптотического анализа при разных параметрах, а также проведены сравнения с допредельным распределением и распределением, полученным имитационной моделью. В результате имитационная модель представленной системы продемонстрировала адекватные результаты реальной системы совместного доступа с ненадежным ресурсом.

По результатам работы был успешно представлен доклад на двух конференциях:

1. на Международной молодежной научной конференции «Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем» 26 – 28 мая 2022 г. (диплом).
2. на Всероссийской с международным участием научно-практической конференции «Системы управления, информационные технологии и математическое моделирование» 25 – 26 апреля 2023 г. (диплом III степени).

Также по результатам работы подготовлена к публикации в сборник статья в материалах Всероссийской с международным участием научно-практической конференции «Системы управления, информационные технологии и математическое моделирование» 25 – 26 апреля 2023 г. [31].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Artalejo J. R. Retrial queueing systems / J. R. Artalejo, A. Gomez-Corral // *Mathematical and Computer Modelling*. – 1999. – Vol. 30, № 3–4. – P. 13–15.
2. Хинчин А. Я. Работы по математической теории массового обслуживания / А. Я. Хинчин; под ред. Б. В. Гнеденко. – М. : Наука, 1963. – 528 с.
3. Назаров, А. А. Теория массового обслуживания : учебное пособие. – 2-е изд., испр. / А. А. Назаров, А. Ф. Терпугов. – Томск : Издательство НТЛ, 2010. – 228 с.
4. Пшеничников А. П. Обобщенная модель call-центра / А. П. Пшеничников, М. С. Степанов // *T-Comm*. – 2011. – №7. – С. 125–128.
5. Гнеденко Б. В. Введение в теорию массового обслуживания. / Б. В. Гнеденко, И. Н. Коваленко – Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 336 с.
6. Бочаров, П. П. Теория массового обслуживания : учебник / П. П. Бочаров, А. В. Печинкин. – М. : Изд-во РУДН, 1995. – 529 с.
7. Кенинг, Д. Теория массового обслуживания / Д. Кенинг, В. В. Рыков, Д. Штоян. – М. : Московский ин-т нефтехим. и газовой пром., 1979. – 112 с.
8. Клейнрок, Л. Теория массового обслуживания / Л. Клейнрок.; пер. И. И. Грушко; ред. В. И. Нейман. – М. : Машиностроение, 1979. – 432 с.
9. Alexandre Deslauriers. Markov chain models of a telephone call center with call blending / Deslauriers Alexandre, L'Ecuyer Pierre, Pichitlamken Jutta. // *Computers & operations research*. – 2007. – Vol. 34, № 6. – P. 1616–1645.
10. Gilmore Audrey. Call centres: how can service quality be managed? / Gilmore Audrey, Moreland Lesley. // *Irish Marketing Review*. – 2000. – Vol. 13, № 1. – P. 3.
11. Wilkinson R.I. Theories for toll traffic engineering in the USA // *The Bell System Technical Journal*. – 1956. – V.35, № 2. – P. 421–507.
12. Cohen J.W. Basic problems of telephone traffic and the influence of repeated calls // *Philips Telecommunication Review*. – 1957. – Vol.18, № 2. – P. 49–100.
13. Falin G.I., Templeton J.G. C. Retrial queues. London: Chapman & Hall, 1997. 328 p.
14. Степанов С. Н. Теория телетрафика: концепции, модели, приложения / С. Н. Степанов. – М. : Горячая линия – Телеком, 2015. – 868 с. : ил. – (Серия «Теория и практика инфокоммуникаций»).
15. Волков А.О., Степанов С.Н. Разработка модели и алгоритмов обслуживания трафика в системах облачных услуг // *Труды XIV международной отраслевой научно-технической конференции «Технологии информационного общества»*. М.: ИДМП. 2020. С. 82-84.

16. Dudin, A.N., Dudin, S.A.: A brief overview of works in the field of research of queuing systems with unreliable service devices. In: The Collection: Queueing Theory and Network Applications, International Congress on Informatics: Information Systems and Technologies, Materials of the International Scientific Congress. 2016. P. 612–616.

17. Федорова Е. А. Асимптотический анализ RQ-системы M/M/1 с ненадежным прибором / Е. А. Федорова, С. В. Рожкова, Н. М. Воронина // Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем: материалы Международной научной конференции, Томск, 28-30 мая 2020 г. Томск: Изд-во Том. ун-та, 2020 – С. 304–309.

18. Voronina, N.M., Rozhkova, S.V., Fedorova, E.A. Asymptotic Analysis of MMPP/M/1 Retrial Queueing System with Unreliable Server. In: Dudin, A., Nazarov, A., Moiseev, A. (eds) Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications. ITMM 2021. Communications in Computer and Information Science. 2022. Vol. 1605. P. 356–370. Springer, Cham.

19. Назаров А.А. Исследование RQ-системы MMPP|M|1 методом асимптотического анализа в условии большой загрузки. Научная статья / А.А. Назаров, Е.А. Моисеева. – Томск.: Издательство Томского государственного университета, 2013. – С. 19–23.

20. Назаров А. А. Исследование адаптивной RQ-системы MMPP|GI|1 в условии большой задержки / А. А. Назаров, Т. В. Любина // Матер. Междунар. научн. конф. «Теор. вер., случайные процессы, мат. стат. и их приложения». – Минск : РИВШ, 2014. – С.103–108.

21. Назаров А.А., Рожкова С.В., Титаренко Е.Ю. Исследование M/M/1 системы с повторными вызовами, обратной связью и неординарным пуассоновским входящим потоком // Математика, ее приложения и математическое образование (МПМО'20): материалы VII Междунар. конф. Улан-Удэ: Изд-во ВСГУТУ, 2020. С. 160–162.

22. Лизюра О. Д. Асимптотический анализ RQ-системы MMPP|M|1 с N типами вызываемых заявок в условии предельно редких изменений состояний входящего потока // Математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем / О. Д. Лизюра, А. А. Назаров, С. В. Пауль. – Томск, 2019. – С. 241–246.

23. Danilyuk E.Yu., Moiseeva S.P., Sztrik J. Asymptotic Analysis of Retrial Queueing System M/M/1 with Impatient Customers, Collisions and Unreliable Server // Журнал Сибирского федерального университета. Серия: Математика и физика = Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. 2020. Vol. 13, № 2. P. 218–230.

24. Осипов Г.С. Математическое и имитационное моделирование систем массового обслуживания. – М.: Издательский дом Академии Естествознания, 2017. – 56 с.
25. Марголис Н. Ю. Имитационное моделирование случайности. Учебно-справочное пособие / Н.Ю. Марголис, А.Ф. Терпугов. – Томск.: Издательство Томского государственного университета, 2003. – 62 с.
26. Даммер Д. Д. Имитационное моделирование: учебно-методическое пособие / Д. Д. Даммер, Н. Ю. Марголис, С. А. Цой. – Томск : ТГУ, 2010 – 32 с.
27. Лоу А. Имитационное моделирование / А. Лоу, В. Кельтон. – 3-е изд. – СПб. : Питер; Киев : Издательская группа BHV, 2004. – 847 с.
28. Бахвалов, Л. А. Моделирование систем: учеб. пособие для вузов / Л. А. Бахвалов. – М.: Изд-во Московского гос. горного ун-та, 2006. – 295 с.
29. Задорожный, В. Н. Имитационное моделирование: учеб. пособие / В. Н. Задорожный. – Омск: ОМГУ, 1999. – 151 с.
30. Назаров А.А. Метод асимптотического анализа в теории массового обслуживания / А.А. Назаров, Моисеева С. П. – Томск: Изд-во НТЛ, 2006. 112 с.
31. Кострюков Н.С. Моделирование RQ-системы $MMPP|M|1$ с ненадежным прибором // Системы управления, информационные технологии и математическое моделирование / Н.С. Кострюков, Н. М. Воронина, С. В. Рожкова. – Омск, 2023. (в печати)

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Листинг кода имитационной модели

```

double DoubleRand(double _min, double _max) //функция формирования случайного числа
{
    std::random_device rd;
    std::mt19937 gen(rd());
    std::uniform_real_distribution<> dis(_min, _max);
    double rand_num = dis(gen);
    return rand_num;
}

double chooseLambda(double* LAMBDA, double* r) //функция выбора интенсивности в
соответствии с вероятностью
{
    double cum_r[3];
    cum_r[0] = r[0];
    for (int i = 1; i < 3; i++) {
        cum_r[i] = cum_r[i - 1] + r[i];
    }
    std::random_device rd;
    std::mt19937 gen(rd());
    std::uniform_real_distribution<> dis(0.0, 1.0);
    double rand_num = dis(gen);
    int idx = std::upper_bound(cum_r, cum_r + 3, rand_num) - cum_r;
    double lambda_selected = LAMBDA[idx];
    return lambda_selected;
}

private: System::Void button1_Click(System::Object^ sender, System::EventArgs^ e)
//основной код имитационной модели
{
    using namespace std;
    srand(time(0));
    //создаем переменные разного типа
    double sigma, mu1, mu2, gamma1, gamma2, t, tLast, tNew, R, M, X, Y, Z, B, W,
S, Sum;
    int i, k, n, iLast;
    double T[1000], P[1000]; //массивы времени и вероятностей
    T[1000] = 0;
    P[1000] = 0;
    double q_selected;
    double Perehod0[3], Perehod1[3], Perehod2[3]; //переходные вероятности
(вектор-строки)
    //-----
    //параметры RQ-системы с ненадежным прибором
    double Q[3][3] = {{-0.4, 0.1, 0.3},
                      {0.3, -0.5, 0.2}, //матрица инфинитезимальных характеристик
                      {0.1, 0.1, -0.2}};
    double LAMBDA[3] = { 2.0, 2.0, 2.0 }; //вектор условных интенсивностей
    //для простейшего входящего потока задается одно значение лямбды для всего
вектора
    //для ММРР потока задаются различные значения
    sigma = 0.02; //параметр времени ожидания заявки на орбите
    mu1 = 3.0; //параметр времени обслуживания заявок
    mu2 = 2.0; //параметр времени восстановления прибора
    gamma1 = 0.4; //параметр времени бесперебойной работы прибора в свободном
состоянии
    gamma2 = 0.2; //параметр времени бесперебойной работы прибора в занятом
состоянии
    k = 0; //начальное состояние прибора - свободен
    i = 0; //начальное количество заявок на орбите - нуль
    //-----
    //A*r=b, где r - вектор вероятностей состояний цепи Маркова. Найдем r.
    double A[4][3] = {{Q[0][0], Q[1][0], Q[2][0]},
                      {Q[0][1], Q[1][1], Q[2][1]},

```



```

        {Q[0][2], Q[1][2], Q[2][2]},
        {1, 1, 1}};
double b[4] = {0,0,0,1};
double AT[3][4]; // транспонированная матрица
//транспонирование матрицы
for (int i = 0; i < 3; i++) {
    for (int j = 0; j < 4; j++) {
        AT[i][j] = A[j][i];
    }
}
double C[3][3];
for (int i = 0; i < 3; i++) {
    for (int j = 0; j < 3; j++) {
        double sum = 0.0;
        for (int k = 0; k < 4; k++) {
            sum += AT[i][k] * A[k][j];
        }
        C[i][j] = sum;
    }
}
double C_inv[3][3];
double temp;
//создаем расширенную матрицу, объединяя матрицу C и единичную матрицу
double C_aug[3][6];
for (int i = 0; i < 3; i++) {
    for (int j = 0; j < 3; j++) {
        C_aug[i][j] = C[i][j];
    }
    for (int j = 3; j < 6; j++) {
        C_aug[i][j] = (i == (j - 3)) ? 1.0 : 0.0;
    }
}
//приводим расширенную матрицу к треугольному виду
for (int i = 0; i < 3; i++) {
    //делаем главный элемент равным 1
    temp = C_aug[i][i];
    for (int j = i; j < 6; j++) {
        C_aug[i][j] /= temp;
    }
    //вычитаем главный элемент из остальных строк
    for (int k = 0; k < 3; k++) {
        if (k != i) {
            temp = C_aug[k][i];
            for (int j = i; j < 6; j++) {
                C_aug[k][j] -= temp * C_aug[i][j];
            }
        }
    }
}
//извлекаем обратную матрицу
for (int i = 0; i < 3; i++) {
    for (int j = 0; j < 3; j++) {
        C_inv[i][j] = C_aug[i][j + 3];
    }
}
double D[3][4];
for (int i = 0; i < 3; i++) {
    for (int j = 0; j < 4; j++) {
        double sum = 0.0;
        for (int k = 0; k < 3; k++) {
            sum += C_inv[i][k] * AT[k][j];
        }
        D[i][j] = sum;
    }
}
}

```

```

double r[3];
for (int i = 0; i < 3; i++) {
    double sum = 0.0;
    for (int j = 0; j < 4; j++) {
        sum += D[i][j] * b[j];
    }
    r[i] = sum;
}
double lambda_selected = chooseLambda(LAMBDA, r); //функция определения
интенсивности входящего потока в соответствии с вероятностями
if (lambda_selected == LAMBDA[0]){
    q_selected = Q[0][0];
    n = 0; //начальное состояние цепи Маркова
}
if (lambda_selected == LAMBDA[1]) {
    q_selected = Q[1][1];
    n = 1; //начальное состояние цепи Маркова
}
if (lambda_selected == LAMBDA[2]) {
    q_selected = Q[2][2];
    n = 2; //начальное состояние цепи Маркова
}
Perehod0[0] = 0;
Perehod0[1] = Q[0][1] / (-Q[0][0]); //переходные вероятности для перехода из
состояния 0
Perehod0[2] = Q[0][2] / (-Q[0][0]);
Perehod1[0] = Q[1][0] / (-Q[1][1]);
Perehod1[1] = 0; //переходные вероятности для перехода из
состояния 1
Perehod1[2] = Q[1][2] / (-Q[1][1]);
Perehod2[0] = Q[2][0] / (-Q[2][2]);
Perehod2[1] = Q[2][1] / (-Q[2][2]); //переходные вероятности для перехода из
состояния 2
Perehod2[2] = 0;
t = 0.0; //время начинается с нуля
//-----
for (int j = 0; j < 10000000; j++) { //цикл по единице времени (сек., мин.,
часы и т.д.)
    //вывод графиков числа заявок на орбите, состояний прибора и состояние
цепи маркова
    //this->chart1->Series[0]->Points->AddXY(round(t * 10) / 10, i);
    //this->chart1->Series[1]->Points->AddXY(round(t * 10) / 10, k);
    //this->chart1->Series[2]->Points->AddXY(round(t * 10) / 10, n);
    R = DoubleRand(0, 1); //R - случайное число от 0 до 1
    M = log(R) / q_selected; //время, в которое меняется состояние цепи
Маркова
    R = DoubleRand(0, 1);
    X = -log(R) / lambda_selected; //время поступления заявок

    R = DoubleRand(0, 1);
    if ((k == 0) || (k == 2)) { //если прибор свободен или прибор на
ремонте
        Y = DBL_MAX; //то время обслуживания заявки равно
бесконечности
    }
    else Y = -log(R) / mu1; //иначе получим время обслуживания заявки
    R = DoubleRand(0, 1);
    if (i == 0) { //если орбита пустая
        Z = DBL_MAX; //то ожидание заявки на орбите равно бесконечности
    }
    else Z = -log(R) / (sigma * i); //иначе получим ожидание заявки
//время бесперебойной работы и завершения восстановления изначально
равно бесконечности
    B = DBL_MAX;
    W = DBL_MAX;
}

```

```

S = DBL_MAX;
R = DoubleRand(0, 1);
switch (k) {
case 0: //если прибор свободен
    B = -log(R) / gamma1; //то получим время бесперебойной работы,
когда прибор свободен
    break;
case 1: //если прибор занят
    W = -log(R) / gamma2; //то получим время бесперебойной работы,
когда прибор занят обслуживанием
    break;
case 2: //если прибор сломан
    S = -log(R) / mu2; //то получим время завершения
восстановления прибора
    break;
}
tLast = t; // предыдущий момент времени равен t
iLast = i; // предыдущее число заявок на орбите
if ((M < X) && (M < Y) && (M < Z) && (M < B) && (M < W) && (M < S)) {
//если раньше всего цепь маркова поменяет свое состояние
switch (n) {
case 0: //если состояние цепи Маркова было равным 0,
    lambda_selected = chooseLambda(LAMBDA, Perehod0); //то
состояние меняется в соответствии с вероятностями
    break;
case 1: //если состояние цепи Маркова было равным 1,
    lambda_selected = chooseLambda(LAMBDA, Perehod1); //то
состояние меняется в соответствии с вероятностями
    break;
case 2: //если состояние цепи Маркова было равным 2,
    lambda_selected = chooseLambda(LAMBDA, Perehod2); //то
состояние меняется в соответствии с вероятностями
    break;
}
//определяем входящий поток и состояние цепи Маркова
if (lambda_selected == LAMBDA[0]) {
    q_selected = Q[0][0];
    n = 0;
}
if (lambda_selected == LAMBDA[1]) {
    q_selected = Q[1][1];
    n = 1;
}
if (lambda_selected == LAMBDA[2]) {
    q_selected = Q[2][2];
    n = 2;
}
t = t + M; //прибавляется время, в которое меняется состояние
цепи Маркова
}
if ((X < Y) && (X < Z) && (X < B) && (X < W) && (X < S) && (X < M)) {
//если раньше всего поступит новая заявка
if (k == 0) { //если ресурс не занят обслуживанием
    k++; //то заявка занимает его для обслуживания
}
else i++; //иначе уходит на орбиту
t = t + X; //прибавляется время, в которое поступит заявка
}
if ((Y < X) && (Y < Z) && (Y < B) && (Y < W) && (Y < S) && (Y < M)) {
//если раньше всего завершилось обслуживание заявки
k--; //заявка покидает прибор
t = t + Y; //прибавляется время, в которое заявка уходит с
орбиты
}
}

```

```

        if ((Z < X) && (Z < Y) && (Z < B) && (Z < W) && (Z < S) && (Z < M)) {
//если раньше всего завершилось ожидание заявки на орбите
            if (k == 0) { //если ресурс не занят обсаживанием
                i--;      //то заявка, покидая орбиту,
                k++;      //отправляется в прибор
            }
            t = t + Z;    //прибавляется время, в которое заявка покинет
орбиту
        }
        if ((B < X) && (B < Y) && (B < Z) && (B < W) && (B < S) && (B < M)) {
//если раньше всего вышел прибор из строя свободным
            k = 2;        //прибор отправляется на ремонт
            t = t + B;    //прибавляется время, в которое прибор выходит из
строю
        }
        if ((W < X) && (W < Y) && (W < Z) && (W < B) && (W < S) && (W < M)) {
//если раньше всего вышел прибор из строя занятым
            k = 2;        //прибор отправляется на ремонт
            i++;          //заявка уходит на орбиту
            t = t + W;    //прибавляется время, в которое прибор выходит из
строю
        }
        if ((S < X) && (S < Y) && (S < Z) && (S < B) && (S < W) && (S < M)) {
//если раньше всего был отремонтирован прибор
            k = 0;        //прибор восстанавливается
            t = t + S;    //прибавляется время, в которое прибор
восстанавливается
        }
        tNew = t; // новое время
        T[iLast] = T[iLast] + (tNew - tLast); // время, при котором на орбите
находилось определенное количество заявок
    }
    //-----
    //записываем в файл все вероятности
    ofstream outf("J:/Учеба/ТГУ/Дипломная_работа/P(i).txt");
    if (!outf) { //если не можем открыть файл
        cerr << "Error" << endl; //то выдаем ошибку
        exit(1);
    }
    for (int j = 0; j < 1000; j++) {
        P[j] = T[j] / t; // запоминаем вероятности
        if (P[j] != 0) {
            outf << P[j] << endl; // записываем в файл ненулевые вероятности
        }
        Sum = Sum + P[j];
    }
    //outf << "Сумма P[i] = " << Sum << endl; // и сумму всех вероятностей для
проверки
    //-----
    for (int j = 0; j < 700; j++) { // строим распределение вероятностей числа
заявок в источнике повторных вызовов
        if (P[j] != 0) {
            this->chart2->Series[0]->Points->AddXY(j, P[j]);
        }
    }
}
};
}

```

СПРАВКА

о результатах проверки текстового документа
на наличие заимствований

Томский Государственный Университет

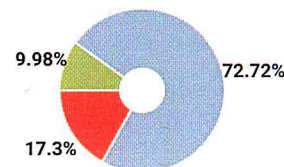
ПРОВЕРКА ВЫПОЛНЕНА В СИСТЕМЕ АНТИПЛАГИАТ.ВУЗ

Автор работы: Кострюков Никита Сергеевич
Самоцитирование
рассчитано для: Кострюков Никита Сергеевич
Название работы: Кострюков_ВКР
Тип работы: Выпускная квалификационная работа
Подразделение: НИ ТГУ, Институт прикладной математики и компьютерных наук

РЕЗУЛЬТАТЫ

СОВПАДЕНИЯ	17.3%
ОРИГИНАЛЬНОСТЬ	72.72%
ЦИТИРОВАНИЯ	9.98%
САМОЦИТИРОВАНИЯ	0%

ДАТА ПОСЛЕДНЕЙ ПРОВЕРКИ: 01.06.2023



Структура документа: Модули поиска:

Проверенные разделы: титульный лист с.1, основная часть с.2-42, 44-52, содержание с.43, библиография с.53-55, приложение с.56-60
ИПС Адилет; Библиография; Сводная коллекция ЭБС; Интернет Плюс*; Сводная коллекция РГБ; Цитирование; Переводные заимствования (RuEn); Переводные заимствования по eLIBRARY.RU (EnRu); Переводные заимствования по коллекции Гарант: аналитика; Переводные заимствования по коллекции Интернет в английском сегменте; Переводные заимствования по Интернету (EnRu); Переводные заимствования по коллекции Интернет в русском сегменте; Переводные заимствования издательства Wiley; eLIBRARY.RU; СПС ГАРАНТ: аналитика; СПС ГАРАНТ: нормативно-правовая документация; Медицина; Диссертации НББ; Коллекция НБУ; Перефразирования по eLIBRARY.RU; Перефразирования по СПС ГАРАНТ: аналитика; Перефразирования по Интернету; Перефразирования по Интернету (EN); Перефразированные заимствования по коллекции Интернет в английском сегменте; Перефразированные заимствования по коллекции Интернет в русском сегменте; Перефразирования по коллекции

*С результатами
оформлено
С. Рожкова*

Работу проверил: Пахомова Елена Григорьевна
ФИО проверяющего

Дата подписи:

Подпись проверяющего



Чтобы убедиться
в подлинности справки, используйте QR-код,
который содержит ссылку на отчет.

Ответ на вопрос, является ли обнаруженное заимствование
корректным, система оставляет на усмотрение проверяющего.
Предоставленная информация не подлежит использованию
в коммерческих целях.