Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)
Институт прикладной математики и компьютерных наук

ДОПУСТИТЬ К ЗАЩИТЕ В ГЭК
Руководитель ОПОП
д-р техн. наук, профессор
________ С.П. Сущенко
«_29_» _мая_ 2023 г.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА БАКАЛАВРА

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ КРАТНЫХ ЗАЯВОК ПУАССОНОВСКОГО ПОТОКА

по направлению подготовки 09.03.03 Прикладная информатика,
направленность (профиль) «Прикладная информатика»

Шипунова Виктория Александровна

Руководитель ВКР
канд. физ.-мат. наук
________ И.А. Туренова
«_29_» _мая_ 2023 г.

Автор работы
студент группы № 931903
________ В.А. Шипунова
«_29_» _мая_ 2023 г.

Томск – 2023

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации.
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (НИ ТГУ)
Институт прикладной математики и компьютерных наук

УТВЕРЖДАЮ
Руководитель ОПОП
д-р техн. наук, профессор
__________ С.П. Сушенко
подпись
« 03 » января 2022 г.

ЗАДАНИЕ

по выполнению выпускной квалификационной работы бакалавра обучающемуся
Шипуновой Виктории Александровне
Фамилия Имя Отчество обучающегося
по направлению подготовки 09.03.03 Прикладная информатика, направленность (профиль) «Прикладная информатика»

1 Тема выпускной квалификационной работы
Исследование математической модели параллельного обслуживания кратных заявок пуассоновского потока.

2 Срок сдачи обучающимся выполненной выпускной квалификационной работы:
а) в учебный офис / деканат – 19.05.22 б) в ГЭК – 07.06.22

3 Исходные данные к работе:
Объект исследования – модель системы передачи данных через параллельные каналы
Предмет исследования – вероятностные характеристики числа заявок в блоках
Цель исследования – построение и исследование математических моделей параллельного обслуживания

Задачи:
построение и анализ математической модели системы передачи данных по трем каналам с разной пропускной способностью в виде $M^{(3)}|M_3|\infty$;
построение и анализ математической модели системы передачи данных по n каналам с разной пропускной способностью в виде $M^{(n)}|M_n|\infty$;
исследование методом производящих функций процессов, характеризующих число занятых приборов каждого блока в марковских системах параллельного обслуживания;
исследование выходящих потоков для СМО в виде $M^{(3)}|M_3|\infty$;
численный расчёт нахождения вероятностных характеристик числа занятых и обслуженных приборов.

Методы исследования:
исследование методом производящих функций,
численное исследование

Организация или отрасль, по тематике которой выполняется работа, –
Теория массового обслуживания

4 Краткое содержание работы

Проводится исследование модели передачи данных для трех и в общем случае множества каналов, приводятся основные вероятностные характеристики.

Руководитель выпускной квалификационной работы

доцент каф. ТВиМС ИПМКН ТГУ / И.А. Туренова

должность, место работы / подпись / И.О. Фамилия

Задание принял к исполнению

студентка гр. 031903 / В.А. Шипулова

должность, место работы / подпись / И.О. Фамилия

АННОТАЦИЯ

Выпускная квалификационная работа состоит из 2 глав, 50 страниц, включает 9 рисунков, 26 источников.

Ключевые слова: производящая функция, системы с неограниченным числом обслуживающих устройств, математическое моделирование, марковские системы, пуассоновский поток.

Объект исследования: модель системы передачи данных через параллельные каналы с неограниченным числом блоков обслуживания и приборов.

Цель работы: построение и исследование математической модели системы передачи данных по трем и n-каналам в виде СМО параллельного обслуживания.

Во введении описана актуальность работы, цели и задачи выпускной квалификационной работы.

В первой главе проведено исследование математической модели параллельного обслуживания строенных заявок пуассоновского потока и практическая значимость модели распределенного обслуживания заявок по различным каналам обработки. Вторая глава содержит и исследование математической модели параллельного обслуживания заявок пуассоновского потока для n-мерного случая. Заключение включает в себя основные выводы по данной работе.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 3

Глава 1 Системы параллельного обслуживания вида $M^3 | M_3 | \infty$ 7

1.1 Модель распределенного обслуживания заявок по различным каналам обработки 7

1.2 Построение математической модели 8

1.3 Система дифференциальных уравнений Колмогорова 10

1.4 Производящая функция 11

1.5 Вероятностные характеристики в стационарном режиме 15

1.6 Вероятностные характеристики в нестационарном режиме 17

1.7 Численный анализ для двумерного распределения вероятностей системы 20

1.8 Исследование выходящих потоков в системе параллельного обслуживания кратных заявок 24

1.9 Распределение числа выходящих заявок 29

Глава 2 Системы параллельного обслуживания вида $M^n | M_n | \infty$ 32

2.1 Система дифференциальных уравнений Колмогорова 32

2.3 Вероятностные характеристики в стационарном режиме 38

2.4 Вероятностные характеристики в нестационарном режиме 41

ЗАКЛЮЧЕНИЕ 43

ЛИТЕРАТУРА 45

ВВЕДЕНИЕ

Теория массового обслуживания является одним из важных и хорошо разработанных разделов науки с многочисленными применениями в повседневной жизни. Она изучает и анализирует процессы обслуживания различных потребностей, которые возникают в различных сферах деятельности, включая телефонные звонки, покупки, автомобильный ремонт и многое другое [11].

Основой теории систем массового обслуживания является понятие потока требований, которые поступают в систему для выполнения определенных операций или получения услуг. Эти потоки могут представлять собой вызовы абонентов, посетителей магазинов, заявки на выполнение работ и так далее [12].

Моделирование является ключевым инструментом для изучения систем массового обслуживания [13]. Оно позволяет исследовать и анализировать различные аспекты системы, такие как пропускная способность, время ожидания, загруженность и другие показатели производительности. Моделирование помогает улучшить проектирование и оптимизацию систем, а также предсказывать их поведение в различных условиях эксплуатации [14].

Исследования в области ТМО начинались с простых случаев, когда количество обслуживающих каналов было ограничено одним или несколькими. Эти исследования стали основой для более сложных моделей обслуживания массовых потоков, где количество обслуживающих устройств может быть неограниченным [15]. В последние десятилетия наука активно разрабатывает теорию многоканальных систем и сетей, а также систем с повторными вызовами. Это связано с появлением новых практических задач, связанных с проектированием и управлением вычислительными системами и сетями.

В середине XX века теория массового обслуживания (ТМО) достигла значительного прогресса. В этот период проводились активные исследования СМО, где поступающие заявки представляются в виде пуассоновских потоков

[3, 1, 7, 8, 14 и др]. Были разработаны общие методы решения широкого спектра задач и выявлены особенности этой теории. Важно отметить, что ТМО оказала значительное влияние на развитие других областей теории вероятностей, включая теорию случайных процессов.

Системы с неограниченным числом обслуживающих устройств [18] представляют особый класс систем массового обслуживания, где количество доступных устройств для обслуживания заявок практически неограниченно. В отличие от систем с ограниченным числом устройств, где могут возникать очереди и отказы в обслуживании, системы с неограниченным числом устройств позволяют обслуживать каждую поступающую заявку. Исследование таких систем имеет большое значение в практическом применении, поскольку позволяет оптимизировать процессы и повышать эффективность различных систем обслуживания. Современное изложение основных методов прикладного вероятностного анализа многосерверных систем обслуживания представлено, например, в фундаментальных работах С. Асмуссена [21], П. П. Бочарова и др. [22], Х. Арталехо и А. Гомес-Коррала [20], М. Харколь-Балтер [26], П. Брилля[23].

Основная идея систем с неограниченным числом обслуживающих устройств заключается в том, что при поступлении нового запроса он немедленно направляется к свободному устройству для обработки. Таким образом, отсутствует необходимость ожидания свободного устройства или формирования очереди. Это особенно полезно в ситуациях, где требуется мгновенное обслуживание или когда время ожидания является критическим фактором.

Математическое моделирование систем с неограниченным числом обслуживающих устройств часто основывается на теории очередей. В таких моделях запросы поступают с определенной интенсивностью и обслуживаются при наличии свободных устройств. Это позволяет анализировать производительность системы и загрузку устройств [15].

Однако следует отметить, что в реальных системах массового обслуживания часто существуют ограничения на доступность устройств, такие как ограниченные ресурсы или физические ограничения. В таких случаях моделирование системы с неограниченным числом обслуживающих устройств может быть упрощено или аппроксимировано, чтобы учесть эти ограничения и получить более реалистичные результаты.

В целом, теория массового обслуживания является мощным инструментом для изучения и оптимизации различных систем, где требуется обслуживание потока запросов. Она позволяет предсказывать и анализировать производительность системы, а также определять оптимальные стратегии управления и планирования ресурсов. Применение этой теории охватывает широкий спектр областей, включая транспортные сети [5, 17], телекоммуникации [16], финансовые институты [13], государственные службы [10] и другие сферы деятельности, где эффективное обслуживание запросов играет важную роль в обеспечении качества услуг и удовлетворении потребностей клиентов.

Целью данной работы является исследование математической модели системы передачи данных по трем и n-каналам в виде СМО параллельного обслуживания.

В соответствии с целью ставятся следующие задачи:

- построение и анализ математической модели системы передачи данных по трем каналам с разной пропускной способностью в виде $M^{(3)}\big|M_3\big|\infty$;
- построение и анализ математической модели системы передачи данных по n каналам с разной пропускной способностью в виде $M^{(n)}\big|M_n\big|\infty$;
- исследование методом производящих функций процессов, характеризующих число занятых приборов каждого блока в марковских системах параллельного обслуживания;
- исследование выходящих потоков для СМО в виде $M^{(3)}\big|M_3\big|\infty$;

- численный расчёт нахождения вероятностных характеристик числа занятых и обслуженных приборов.

Таким образом, решение поставленных задач позволит более полно изучить математическую модель параллельного обслуживания кратных заявок пуассоновского потока и определить ее особенности в различных условиях, что может быть полезно для практического применения этой модели в различных сферах, например, в телекоммуникациях, логистике, медицине и т.д.

Глава 1 Системы параллельного обслуживания вида $M^3 \mid M_3 \mid \infty$

1.1 Модель распределенного обслуживания заявок по различным каналам обработки

Предположим, у нас есть онлайн-платформа для размещения и продажи товаров, и мы решили разделить процесс обработки заказов на n блоков с разными параметрами обслуживания.

Каждый блок отвечает за определенный этап обработки заказа. Например, блок A может быть "Быстрым и ненадежным", блок B - "Медленным и надежным", блок C - "Средней скоростью и надежным", а блок D - "Быстрым и надежным".

Когда поступает заказ, он копируется и направляется в каждый из блоков. Каждый блок обрабатывает свою копию заказа в соответствии с его параметрами обслуживания. Например, блок A быстро проверяет доступность товара, блок B медленно, но надежно осуществляет финансовые операции, блок C выполняет обработку товара и подготовку к доставке, а блок D быстро обрабатывает доставку заказа.

Таким образом, каждый блок выполняет свою функцию, применяя свои параметры обслуживания. После обработки заказов в каждом блоке информация о статусе и результате обработки может быть собрана и объединена, чтобы предоставить общую информацию о заказе клиенту.

Такая система позволяет эффективно распределить процесс обработки заказов, учитывая различные характеристики каждого блока. Она также обеспечивает более гибкую и отказоустойчивую обработку заказов, так как при возникновении проблемы в одном блоке, другие блоки могут продолжать работу и обрабатывать заказы.

1.2 Построение математической модели

Пусть имеется система с тремя блоками обслуживания (рис. 1), каждый из которых содержит неограниченное число приборов. На вход системы поступает простейший поток кратных заявок с параметром λ, затем для обслуживания заявка копируется, и ее копия поступает на каждый блок для дальнейшего обслуживания в течение случайного времени, распределенного по экспоненциальному закону с параметрами μ_1, μ_2, μ_3. Продолжительность обслуживания заявок в каждом блоке является стохастически независимой и одинаково распределенной, при этом параметры распределения зависят от номера блока.

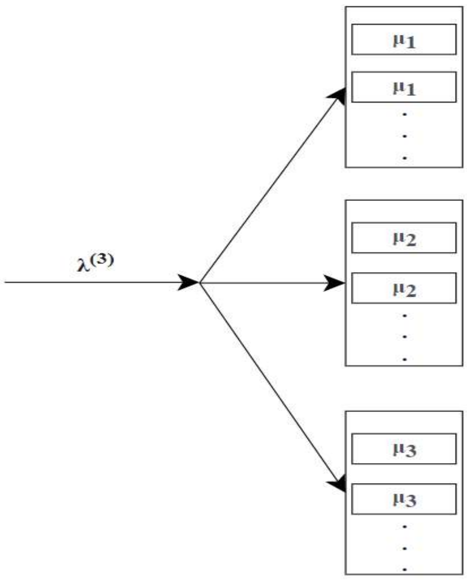


Рисунок 1 – СМО с параллельным обслуживанием строенных заявок

Вектор $\{i_1(t), i_2(t), i_3(t)\}$ определяет состояние системы, где i_k – число заявок, находящихся на обслуживании в k-ом блоке в момент времени t. Случайный процесс, который описывает изменение состояний системы во времени, является трехмерной эргодической цепью Маркова.

Поставленная задача состоит в исследовании трехмерного процесса $\{i_1(t), i_2(t), i_3(t)\}$, нахождении его производящей функции и основных вероятностных характеристик.

На рис. 2 показано графическое представление множества состояний и переходов. Представляет собой размеченный ориентированный граф, вершины которого — состояния системы, дуги — переходы из одного состояния в другое, а метки дуг — вероятности, с которыми осуществляется переход из одного состояния в другое.

Введем следующее обозначение: $P(i,j,k,t) = P[i_1(t) = i, i_2(t) = j, i_3(t) = k]$ — это вероятностное распределение состояний трехмерной цепи Маркова, которое описывает количество занятых приборов в каждом блоке в заданный момент времени t.

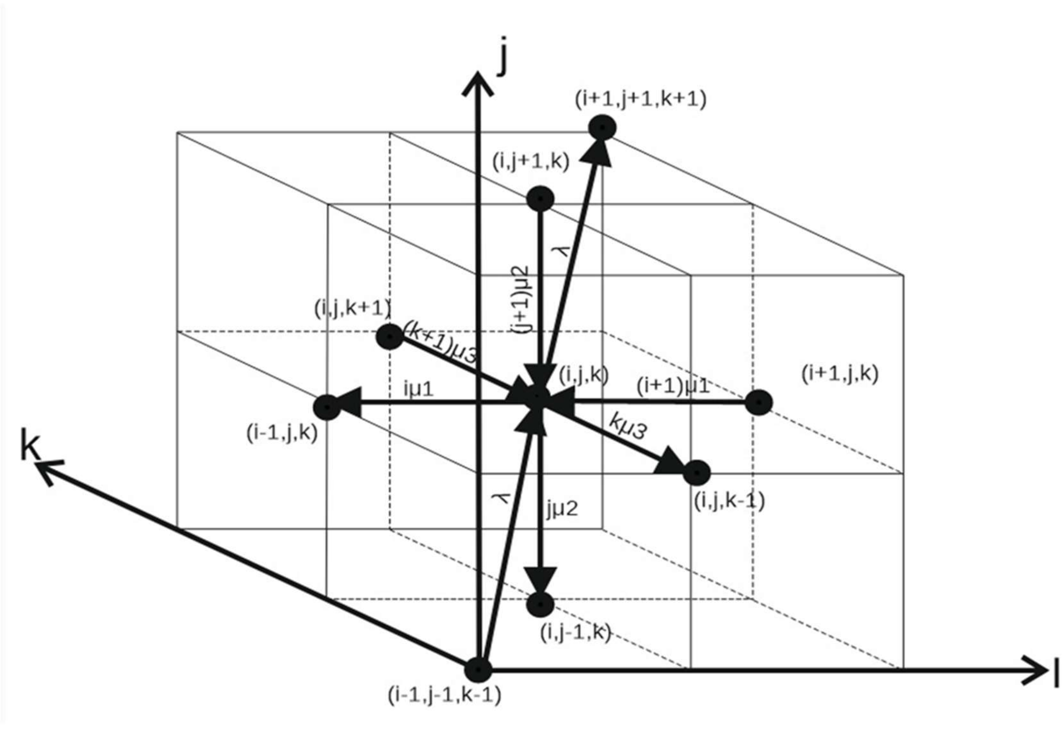


Рисунок 2 – Фрагмент графа переходов и состояний для i, j, k.

1.3 Система дифференциальных уравнений Колмогорова

Определим вероятности:

- $\lambda\Delta t$ – вероятность того, что в систему поступит новая пачка заявок, тогда $1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)$ – вероятность того, что в систему не поступит новая пачка заявок;
- $\mu_1\Delta t$ – вероятность того, что одна из заявок обслужилась на первом блоке за время Δt;
- $\mu_2\Delta t$ – вероятность того, что одна из заявок обслужилась на втором блоке за время Δt;
- $\mu_3\Delta t$ – вероятность того, что одна из заявок обслужилась на третьем блоке за время Δt;
- переходы в другие состояний возможны, вероятность перехода в них равна $o(\Delta t)$.

Используя Δt - метод, получим следующую систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\begin{aligned}&P(0,0,0,t+\Delta t)=(1-\lambda\Delta t)P(0,0,0,t)+\mu_1\Delta tP(1,0,0,t)+\\&+\mu_2\Delta tP(0,1,0,t)+\mu_3\Delta tP(0,0,1,t)+o(\Delta t)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&P(i,j,k,t+\Delta t)=(1-\lambda\Delta t)(1-i\mu_1\Delta t)(1-j\mu_2\Delta t)(1-k\mu_3\Delta t)P(i,j,k,t)+\\&+\lambda\Delta tP(i-1,j-1,k-1,t)+(i+1)\mu_1\Delta tP(i+1,j,k,t)+\\&+(j+1)\mu_2\Delta tP(i,j+1,k,t)+(k+1)\mu_3\Delta tP(i,j,k+1,t)+o(\Delta t)\end{aligned}$$

Разделим уравнения системы на Δt и устремим Δt к нулю. Получаем систему дифференциальных уравнений Колмогорова для распределения вероятностей состояний:

$$\frac{P(0,0,0,t)}{\partial t}=(-\lambda)P(0,0,0,t)+\mu_1P(1,0,0,t)+\mu_2P(0,1,0,t)+\mu_3P(0,0,1,t)$$

$$\frac{P(i,j,k,t)}{\partial t} = -(\lambda \Delta t + i\mu_1 + j\mu_2 + k\mu_3)P(i,j,k,t) +$$
$$+\lambda P(i-1,j-1,k-1,t) + (i+1)\mu_1 P(i+1,j,k,t) + (j+1)\mu_2 P(i,j+1,k,t) +$$
$$+(k+1)\mu_3 P(i,j,k+1,t)$$

Зададим начальные условия

$$P(i,j,k,0) = \begin{cases} 1, \textit{если } i = j = k = 0 \\ 0, \textit{если } i,j,k > 0 \end{cases},$$

предполагая, что в начальный момент времени система пуста.

1.4 Производящая функция

Производящая функция трехмерного распределения $P(i,j,k,t)$ определяется в виде:

$$F(x_1,x_2,x_3,t) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} x_1^i x_2^j x_3^k P(i,j,k,t)$$

Получаем линейное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial F(x_1,x_2,x_3,t)}{\partial t} + \mu_1(x_1-1)\frac{\partial F(x_1,x_2,x_3,t)}{\partial x_1} +$$
$$\mu_2(x_2-1)\frac{\partial F(x_1,x_2,x_3,t)}{\partial x_2} + +\mu_3(x_3-1)\frac{\partial F(x_1,x_2,x_3,t)}{\partial x_3} = \qquad (1.1)$$
$$= \lambda(x_1x_2x_3-1)F(x_1,x_2,x_3,t)$$

с начальным условием

$$F(x_1,x_2,x_3,0) = 1. \qquad (1.2)$$

Запишем для дифференциального уравнения (1.1) систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dt}{1}=\frac{dx_1}{\mu_1\left(x_1-1\right)}=\frac{dx_2}{\mu_2\left(x_2-1\right)}=\frac{dx_3}{\mu_3\left(x_3-1\right)}= \\ =\frac{dF(x_1,x_2,x_3,t)}{\lambda(x_1x_2x_3-1)F(x_1,x_2,x_3,t)}, \qquad (1.3)$$

где

$$\begin{aligned}(x_1x_2x_3-1)&=\left(x_1-1\right)\left(x_2-1\right)\left(x_3-1\right)+\\ &\left(x_1-1\right)\left(x_2-1\right)+\left(x_1-1\right)\left(x_3-1\right)+\\ &+\left(x_2-1\right)\left(x_3-1\right)+\left(x_1-1\right)+\left(x_2-1\right)+\left(x_3-1\right)\end{aligned} \qquad (1.4)$$

Для этой системы найдем первые интегралы. Рассмотрим первое уравнение:

$$\int dt=\int\frac{dx_1}{\mu_1(x_1-1)}\Rightarrow C_1=(x_1-1)e^{-\mu_1 t}.$$

Аналогично для второго и третьего:

$$\int dt=\int\frac{dx_2}{\mu_2(x_2-1)}\Rightarrow C_2=(x_2-1)e^{-\mu_2 t}, \qquad (1.5)$$

$$\int dt=\int\frac{dx_2}{\mu_3(x_3-1)}\Rightarrow C_3=(x_3-1)e^{-\mu_3 t}.$$

Далее рассмотрим дифференциальное уравнение:

$$\int dt=\int\frac{dF(x_1,x_2,x_3,t)}{\lambda(x_1x_2x_3-1)F(x_1,x_2,x_3,t)}.$$

Учитывая (1.4), перепишем его в виде:

$$\ln F(x_1,x_2,x_3)=\widetilde{C}+\int_0^t\begin{bmatrix}\left(x_1-1\right)\left(x_2-1\right)\left(x_3-1\right)+\left(x_1-1\right)\left(x_2-1\right)+\\ +\left(x_2-1\right)\left(x_3-1\right)+\left(x_1-1\right)\left(x_3-1\right)+\\ +\left(x_1-1\right)+\left(x_2-1\right)+\left(x_n-1\right)\end{bmatrix}ds.$$

Теперь с помощью (1.5) выражаем $(x_1-1),(x_2-1),(x_3-1)$, и получаем:

$$\ln F(x_1,x_2,x_3)=\widetilde{C}+\int_0^t\lambda\begin{bmatrix}C_1C_2C_3\,\mathrm{e}^{\{\mu_1+\mu_2+\mu_3\}s}+C_1C_2\,\mathrm{e}^{\{\mu_1+\mu_2\}s}+\\ +C_2C_3\,\mathrm{e}^{\{\mu_2+\mu_3\}s}+C_1C_3\,\mathrm{e}^{\{\mu_1+\mu_3\}s}+\\ +C_1\,\mathrm{e}^{\mu_1 s}+C_2\,\mathrm{e}^{\mu_2 s}+C_3\,\mathrm{e}^{\mu_3 s}\end{bmatrix}ds.$$

Далее C_1, C_2, C_3 снова выражаем из (1.5), только теперь с t, т. к. это константа:

$$\ln F(x_1, x_2, x_3, t) = \widetilde{C} + \int_0^t \lambda \begin{bmatrix} (x_1-1)e^{-\mu_1 t}(x_2-1)e^{-\mu_2 t}(x_3-1)e^{-\mu_3 t}\ \mathrm{e}^{\{\mu_1+\mu_2+\mu_3\}s} + \\ +(x_1-1)e^{-\mu_1 t}(x_2-1)e^{-\mu_2 t}\ \mathrm{e}^{\{\mu_1+\mu_2\}s} + \\ +(x_2-1)e^{-\mu_2 t}(x_3-1)e^{-\mu_3 t}\ \mathrm{e}^{\{\mu_2+\mu_3\}s} + \\ +(x_1-1)e^{-\mu_1 t}(x_3-1)e^{-\mu_3 t}\ \mathrm{e}^{\{\mu_1+\mu_3\}s} + \\ +(x_1-1)e^{-\mu_1 t} + (x_2-1)e^{-\mu_2 t} + (x_3-1)e^{-\mu_3 t} \end{bmatrix} ds$$

Общее решение системы (1.3) запишем в следующем виде

$$F(x_1, x_2, x_3, t) = \Phi\left((x_1-1)e^{-\mu_1 t}, (x_2-1)e^{-\mu_2 t}, (x_3-1)e^{-\mu_3 t}\right)\times$$

$$\times\exp\left\{\begin{matrix} \dfrac{\lambda(x_1-1)(x_2-1)(x_3-1)}{\mu_1+\mu_2+\mu_3} + \dfrac{\lambda(x_1-1)(x_2-1)}{\mu_1+\mu_2} + \dfrac{\lambda(x_1-1)(x_3-1)}{\mu_1+\mu_3} + \\ + \dfrac{\lambda(x_2-1)(x_3-1)}{\mu_2+\mu_3} + \dfrac{\lambda}{\mu_1}(x_1-1) + \dfrac{\lambda}{\mu_2}(x_2-1) + \dfrac{\lambda}{\mu_3}(x_3-1) \end{matrix}\right\}, (1.6)$$

где $\Phi(x)$ – произвольная дифференцируемая функция.

Учитывая начальные условия (1.2), имеем

$$F(x_1, x_2, x_3, 0) = \Phi\left[(x_1-1), (x_2-1), (x_3-1)\right]\times$$

$$\times\exp\left\{\begin{matrix} \dfrac{\lambda(x_1-1)(x_2-1)(x_3-1)}{\mu_1+\mu_2+\mu_3} + \dfrac{\lambda(x_1-1)(x_2-1)}{\mu_1+\mu_2} + \dfrac{\lambda(x_1-1)(x_3-1)}{\mu_1+\mu_3} + \\ + \dfrac{\lambda(x_2-1)(x_3-1)}{\mu_2+\mu_3} + \dfrac{\lambda}{\mu_1}(x_1-1) + \dfrac{\lambda}{\mu_2}(x_2-1) + \dfrac{\lambda}{\mu_3}(x_3-1) \end{matrix}\right\} = 1$$

$$\Phi\left[(x_1-1), (x_2-1), (x_3-1)\right] =$$

$$= \exp\left\{-\left(\begin{matrix} \dfrac{\lambda(x_1-1)(x_2-1)(x_3-1)}{\mu_1+\mu_2+\mu_3} + \dfrac{\lambda(x_1-1)(x_2-1)}{\mu_1+\mu_2} + \dfrac{\lambda(x_1-1)(x_3-1)}{\mu_1+\mu_3} + \\ + \dfrac{\lambda(x_2-1)(x_3-1)}{\mu_2+\mu_3} + \dfrac{\lambda}{\mu_1}(x_1-1) + \dfrac{\lambda}{\mu_2}(x_2-1) + \dfrac{\lambda}{\mu_3}(x_3-1) \end{matrix}\right)\right\}.$$

Следовательно,

$$\Phi\left[(x_1-1)e^{-\mu_1 t},(x_2-1)e^{-\mu_2 t},(x_3-1)e^{-\mu_3 t}\right]=$$

$$=\exp\left\{-\left(\begin{aligned}&\frac{\lambda(x_1-1)(x_2-1)(x_3-1)}{\mu_1+\mu_2+\mu_3}e^{-(\mu_1+\mu_2+\mu_3)t}+\\&+\frac{\lambda(x_1-1)(x_2-1)}{\mu_1+\mu_2}e^{-(\mu_1+\mu_2)t}+\frac{\lambda(x_1-1)(x_3-1)}{\mu_1+\mu_3}e^{-(\mu_1+\mu_3)t}+\\&+\frac{\lambda(x_2-1)(x_3-1)}{\mu_2+\mu_3}e^{-(\mu_2+\mu_3)t}+\frac{\lambda}{\mu_1}(x_1-1)e^{-\mu_1 t}+\\&+\frac{\lambda}{\mu_2}(x_2-1)e^{-\mu_2 t}+\frac{\lambda}{\mu_3}(x_3-1)e^{-\mu_3 t}\end{aligned}\right)\right\} \quad (1.7)$$

Подставляя полученное выражение в (1.6), имеем выражение для производящей функции $F(x_1,x_2,x_3,t)$

$$F(x_1,x_2,x_3,t)=$$

$$\begin{aligned}=\exp\Bigg\{&\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2+\mu_3}(x_1-1)(x_2-1)(x_3-1)\left(1-e^{-(\mu_1+\mu_2+\mu_3)t}\right)+\\&+\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}(x_1-1)(x_2-1)\left(1-e^{-(\mu_1+\mu_2)t}\right)+\\&+\frac{\lambda}{\mu_2+\mu_3}(x_2-1)(x_3-1)\left(1-e^{-(\mu_2+\mu_3)t}\right)+\\&+\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_3}(x_1-1)(x_3-1)\left(1-e^{-(\mu_1+\mu_3)t}\right)+\\&+\frac{\lambda}{\mu_1}(x_1-1)\left(1-e^{-\mu_1 t}\right)+\frac{\lambda}{\mu_2}(x_2-1)\left(1-e^{-\mu_2 t}\right)+\frac{\lambda}{\mu_3}(x_3-1)\left(1-e^{-\mu_3 t}\right)\Bigg\}\end{aligned} \quad (1.8)$$

Устремим в (1.8) $t\to\infty$, и получим вид производящей функции стационарного распределения вероятностей

$$F(x_1,x_2,x_3)=\exp\left\{\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2+\mu_3}(x_1-1)(x_2-1)(x_3-1)+\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2}(x_1-1)(x_2-1)+\right.$$

$$+\frac{\lambda}{\mu_2+\mu_3}(x_2-1)(x_3-1)+\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_3}(x_1-1)(x_3-1)+$$
$$\left.+\frac{\lambda}{\mu_1}(x_1-1)+\frac{\lambda}{\mu_2}(x_2-1)+\frac{\lambda}{\mu_3}(x_3-1)\right\} \tag{1.9}$$

Из данного равенства можно сделать вывод, что одномерные маргинальные производящие функции числа занятых приборов в каждом блоке обслуживания являются пуассоновскими и имеют вид

$$f(x_1)=\sum_{i_1} x_1^{i_1} P\{i_1(t)=i_1\}=\exp\left\{\frac{\lambda}{\mu_1}(x_1-1)\right\},$$

$$f(x_2)=\sum_{i_2} x_2^{i_2} P\{i_2(t)=i_2\}=\exp\left\{\frac{\lambda}{\mu_2}(x_2-1)\right\}, \tag{1.10}$$

$$f(x_3)=\sum_{i_3} x_3^{i_3} P\{i_3(t)=i_3\}=\exp\left\{\frac{\lambda}{\mu_3}(x_3-1)\right\}.$$

1.5 Вероятностные характеристики в стационарном режиме

Выражение (1.9) позволяет получить основные характеристики трёхмерной цепи Маркова.

- Математическое ожидание числа занятых приборов в первом, втором, третьем блоках системы имеет вид:

$$Mi_1=\frac{\lambda}{\mu_1}, Mi_2=\frac{\lambda}{\mu_2}, Mi_3=\frac{\lambda}{\mu_3}.$$

- Дисперсия числа занятых приборов в первом, втором, третьем блоках системы имеет вид

$$Di_1=\frac{\lambda}{\mu_1}, Di_2=\frac{\lambda}{\mu_2}, Di_3=\frac{\lambda}{\mu_3}.$$

С помощью явного вида производящей функции (1.9) найдем выражение для коэффициента корреляции между компонентами процесса обслуживания требований в рассматриваемой модели. Определим корреляционные моменты.

$$M\{i_1 i_2\} = \left.\frac{\partial^2 F(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}\right|_{\substack{x_1=1 \\ x_2=1}} = \frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2} + \frac{\lambda}{\mu_1}\frac{\lambda}{\mu_2},$$

$$M\{i_1 i_3\} = \left.\frac{\partial^2 F(x_1, x_3)}{\partial x_1 \partial x_3}\right|_{\substack{x_1=1 \\ x_3=1}} = \frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_3} + \frac{\lambda}{\mu_1}\frac{\lambda}{\mu_3},$$

$$M\{i_2 i_3\} = \left.\frac{\partial^2 F(x_2, x_3)}{\partial x_2 \partial x_3}\right|_{\substack{x_2=1 \\ x_3=1}} = \frac{\lambda}{\mu_2 + \mu_3} + \frac{\lambda}{\mu_2}\frac{\lambda}{\mu_3}.$$

Тогда

$$r(i_1, i_2) = \frac{\operatorname{cov}(i_1, i_2)}{\sqrt{Di_1 Di_2}} = \frac{\dfrac{\lambda}{\mu_1}\dfrac{\lambda}{\mu_2} + \dfrac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2} - \dfrac{\lambda}{\mu_1}\dfrac{\lambda}{\mu_2}}{\sqrt{\dfrac{\lambda}{\mu_1}\dfrac{\lambda}{\mu_2}}} = \frac{\lambda\sqrt{\mu_1\mu_2}}{\lambda(\mu_1 + \mu_2)} = \frac{\sqrt{\mu_1\mu_2}}{\mu_1 + \mu_2},$$

$$r(i_1, i_3) = \frac{\operatorname{cov}(i_1, i_3)}{\sqrt{Di_1 Di_3}} = \frac{\dfrac{\lambda}{\mu_1}\dfrac{\lambda}{\mu_3} + \dfrac{\lambda}{\mu_1 + \mu_3} - \dfrac{\lambda}{\mu_1}\dfrac{\lambda}{\mu_3}}{\sqrt{\dfrac{\lambda}{\mu_1}\dfrac{\lambda}{\mu_3}}} = \frac{\lambda\sqrt{\mu_1\mu_3}}{\lambda(\mu_1 + \mu_3)} = \frac{\sqrt{\mu_1\mu_3}}{\mu_1 + \mu_3},$$

$$r(i_2, i_3) = \frac{\operatorname{cov}(i_2, i_3)}{\sqrt{Di_2 Di_3}} = \frac{\dfrac{\lambda}{\mu_2}\dfrac{\lambda}{\mu_3} + \dfrac{\lambda}{\mu_2 + \mu_3} - \dfrac{\lambda}{\mu_2}\dfrac{\lambda}{\mu_3}}{\sqrt{\dfrac{\lambda}{\mu_2}\dfrac{\lambda}{\mu_3}}} = \frac{\lambda\sqrt{\mu_2\mu_3}}{\lambda(\mu_2 + \mu_3)} = \frac{\sqrt{\mu_2\mu_3}}{\mu_2 + \mu_3}.$$

Рассмотрим изменение значений влияния параметров обслуживания на значение коэффициента корреляции по интенсивности обслуживания μ_1, μ_2. Пусть $\mu_2 = \alpha\mu_1$, где α - представляет неотрицательное число, тогда коэффициент корреляции имеет вид

$$r(i_1, i_2) = \frac{\sqrt{\alpha(\mu_1)^2}}{\mu_1(1+\alpha)} = \frac{\sqrt{\alpha}}{(1+\alpha)}.$$

На рис. 3 видно, что наибольшая зависимость изучаемых процессов достигается при одинаковых параметрах времени обслуживания, то есть $\alpha = 1$, коэффициент корреляции между процессами в этом случае имеет значение 0,5.

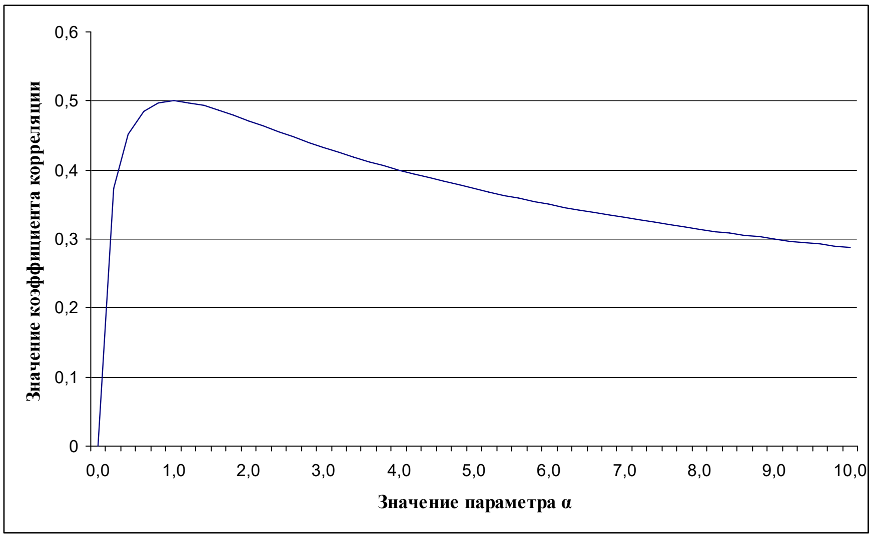


Рисунок 3 – Коэффициент корреляции процессов $\{i_1, i_2\}$

Для двух других пар блоков обслуживания изменение коэффициента корреляции будет аналогичным.

Следуя проведенному анализу, можно сделать вывод о том, что при увеличении разницы между параметрами обслуживания наблюдается уменьшение зависимости между процессами, характеризующими количество занятых приборов в каждом блоке.

1.6 Вероятностные характеристики в нестационарном режиме

Из производящей функции (1.8) получим основные вероятностные характеристики для числа заявок в каждом блоке в момент времени t.

- Математическое ожидание числа заявок:

$$Mi_1 = \frac{\lambda}{\mu_1}\left(1 - e^{-\mu_1 t}\right)$$

$$Mi_2 = \frac{\lambda}{\mu_2}\left(1 - e^{-\mu_2 t}\right),$$

$$Mi_3 = \frac{\lambda}{\mu_3}\left(1 - e^{-\mu_3 t}\right).$$

- Дисперсия числа заявок:

$$Di_1 = \frac{\lambda}{\mu_1}\left(1 - e^{-(\mu_1)t}\right),$$

$$Di_2 = \frac{\lambda}{\mu_2}\left(1 - e^{-\mu_2 t}\right),$$

$$Di_3 = \frac{\lambda}{\mu_3}\left(1 - e^{-\mu_3 t}\right).$$

С помощью (1.8) определим корреляционные моменты для нахождения выражения для коэффициента корреляции между компонентами процесса.

$$M\{i_1 i_2\} = \left.\frac{\partial^2 F(x_1, x_2, t)}{\partial x_1 \partial x_2}\right|_{\substack{x_1=1\\x_2=1}} = \frac{\lambda}{\mu_1}\left(1 - e^{-\mu_1 t}\right)\frac{\lambda}{\mu_2}\left(1 - e^{-\mu_2 t}\right) + \frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2}\left(1 - e^{-(\mu_1+\mu_2)t}\right),$$

$$M\{i_1 i_3\} = \left.\frac{\partial^2 F(x_1, x_3, t)}{\partial x_1 \partial x_3}\right|_{\substack{x_1=1\\x_3=1}} = \frac{\lambda}{\mu_1}\left(1 - e^{-\mu_1 t}\right)\frac{\lambda}{\mu_3}\left(1 - e^{-\mu_3 t}\right) + \frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_3}\left(1 - e^{-(\mu_1+\mu_3)t}\right),$$

$$M\{i_2 i_3\} = \left.\frac{\partial^2 F(x_2, x_3, t)}{\partial x_2 \partial x_3}\right|_{\substack{x_2=1\\x_3=1}} = \frac{\lambda}{\mu_2}\left(1 - e^{-\mu_2 t}\right)\frac{\lambda}{\mu_3}\left(1 - e^{-\mu_3 t}\right) + \frac{\lambda}{\mu_2 + \mu_3}\left(1 - e^{-(\mu_2+\mu_3)t}\right)$$

Тогда

$$r\left(i_1(t), i_2(t)\right) = \frac{\frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2}\left(1 - e^{-(\mu_1+\mu_2)t}\right)}{\sqrt{\left[\frac{\lambda}{\mu_2}\left(1 - e^{-\mu_2 t}\right)\right]\left[\frac{\lambda}{\mu_1}\left(1 - e^{-\mu_1 t}\right)\right]}},$$

$$r\left(i_1(t), i_3(t)\right) = \frac{\dfrac{\lambda}{\mu_1 + \mu_3}\left(1 - e^{-(\mu_1+\mu_3)t}\right)}{\sqrt{\left[\dfrac{\lambda}{\mu_3}\left(1 - e^{-\mu_3 t}\right)\right]\left[\dfrac{\lambda}{\mu_1}\left(1 - e^{-\mu_1 t}\right)\right]}},$$

$$r\left(i_2(t), i_3(t)\right) = \frac{\dfrac{\lambda}{\mu_2 + \mu_3}\left(1 - e^{-(\mu_2+\mu_3)t}\right)}{\sqrt{\left[\dfrac{\lambda}{\mu_3}\left(1 - e^{-\mu_3 t}\right)\right]\left[\dfrac{\lambda}{\mu_2}\left(1 - e^{-\mu_2 t}\right)\right]}}.$$

Далее рассмотрим попарную нормированную корреляционную функцию для блоков обслуживания (рис. 4):

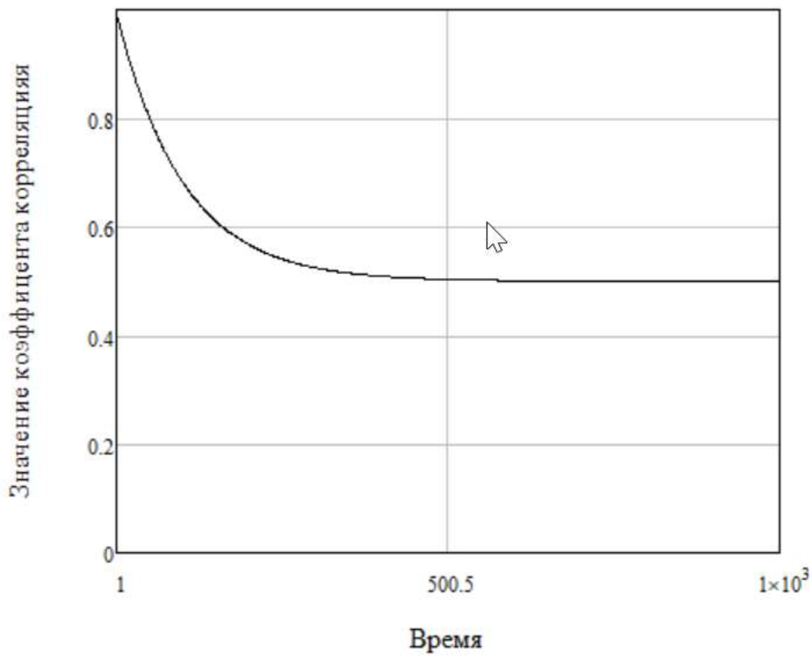


Рисунок 4 – Корреляционная функция процессов $\{i_1(t), i_2(t)\}$

Из графика видно, что с течением времени система стремится к стационарному режиму, это может указывать на ее устойчивость. Устойчивая система способна справиться со внешними возмущениями и возвращаться к состоянию равновесия или стабильному режиму работы.

1.7 Численный анализ для двумерного распределения вероятностей системы

Производящая функция $F(x_1, x_2, t)$ двумерного процесса $\{i_1(t), i_2(t)\}$- числа приборов, занятых в момент времени t в блоках системы $M^{(2)}\left|M_2\right|\infty$ имеет вид[9]:

$$F(x_1, x_2, t) = \exp\left\{\frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2}(x_1 - 1)(x_2 - 1)\left(1 - e^{-(\mu_1 + \mu_2)t}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda}{\mu_1}(x_1 - 1)\left(1 - e^{-\mu_1 t}\right) + \frac{\lambda}{\mu_2}(x_2 - 1)\left(1 - e^{-\mu_2 t}\right)\right\}.$$

Поставим задачу нахождения его явного вида

$$F(x_1, x_2) = \exp\left\{\frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2}(x_1 - 1)(x_2 - 1) + \frac{\lambda}{\mu_1}(x_1 - 1) + \frac{\lambda}{\mu_2}(x_2 - 1)\right\} =$$

$$= \exp\left\{\frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2}(x_1 x_2 - x_1 - x_2 + 1) + \frac{\lambda}{\mu_1}(x_1 - 1) + \frac{\lambda}{\mu_2}(x_2 - 1)\right\} =$$

$$= \exp\left\{\frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2} x_1 x_2 + \left(\frac{\lambda}{\mu_1} - \frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2}\right) x_1 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\lambda}{\mu_2} - \frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2}\right) x_2 - \left(\frac{\lambda}{\mu_1} + \frac{\lambda}{\mu_2} - \frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2}\right)\right\} =$$

$$= \exp\left\{\frac{\lambda}{\mu_1 + \mu_2} x_1 x_2 + \frac{\lambda \mu_2}{\mu_1(\mu_1 + \mu_2)} x_1 + \frac{\lambda \mu_1}{\mu_2(\mu_1 + \mu_2)} x_2 - \frac{\lambda\left[(\mu_1 + \mu_2)^2 - \mu_1 \mu_2\right]}{\mu_1 \mu_2(\mu_1 + \mu_2)}\right\}.$$

Обозначим

$$a = \frac{\lambda \mu_2}{\mu_1(\mu_1 + \mu_2)},\ b = \frac{\lambda \mu_1}{\mu_2(\mu_1 + \mu_2)},$$

$$c=\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2},\; d=\frac{\lambda\left[(\mu_1+\mu_2)^2-\mu_1\mu_2\right]}{\mu_1\mu_2(\mu_1+\mu_2)}. \tag{1.11}$$

Тогда функция $F(x_1,x_2)$ будет иметь вид

$$F(x_1,x_2)=\exp\{cx_1x_2+ax_1+bx_2-d\}.$$

Разложим экспоненту в ряд

$$e^{dx_1x_2}e^{ax_1}e^{bx_2}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c^n}{n!}(x_1x_2)^n\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{k!}x_1{}^k\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{b^m}{m!}x_2{}^m\right)=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{c^n}{n!}\frac{a^k}{k!}\frac{b^m}{m!}x_1{}^{n+k}x_2{}^{n+m}.$$

Введем обозначение $n+k=i,\; n+m=j,\; (i\ge n, j\ge n)$, тогда

$$e^{dx_1x_2}e^{ax_1}e^{bx_2}=\sum_{i=n}^{\infty}\sum_{j=n}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\min(i,j)}\frac{c^n}{n!}\frac{a^{i-n}}{(i-n)!}\frac{b^{j-n}}{(j-n)!}\right)x_1{}^ix_2{}^j.$$

Учитывая производящую функцию двумерного распределения $P(i,j,t)$ в виде

$$F(x_1,x_2,t)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}x_1{}^ix_2{}^jP(i,j,t),$$

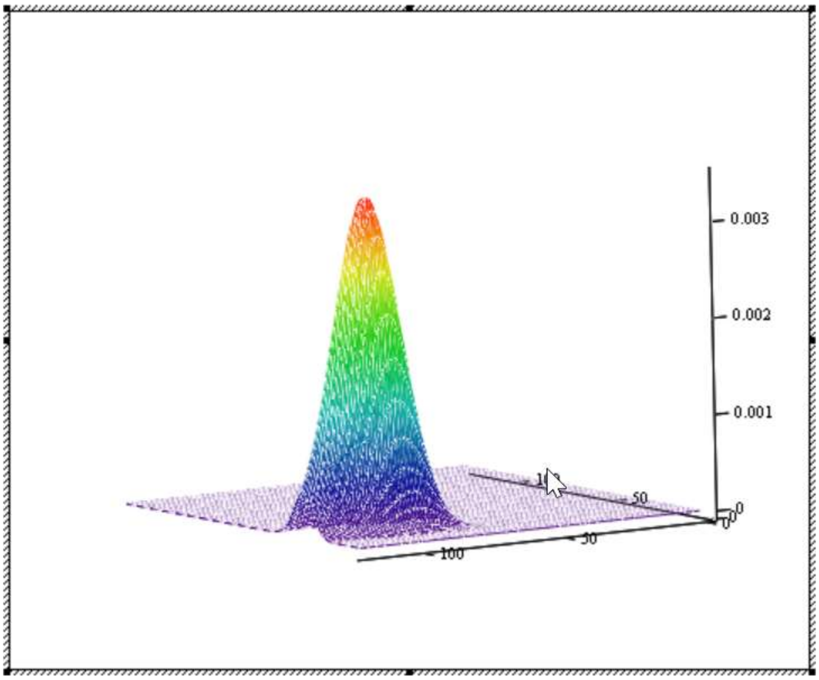
получим вид двумерного пуассоновского распределения для зависимых компонент

$$P(i,j)=\sum_{n=0}^{\min(i,j)}\frac{c^n}{n!}\frac{a^{i-n}}{(i-n)!}\frac{b^{j-n}}{(j-n)!}\cdot e^{-d}, \tag{1.12}$$

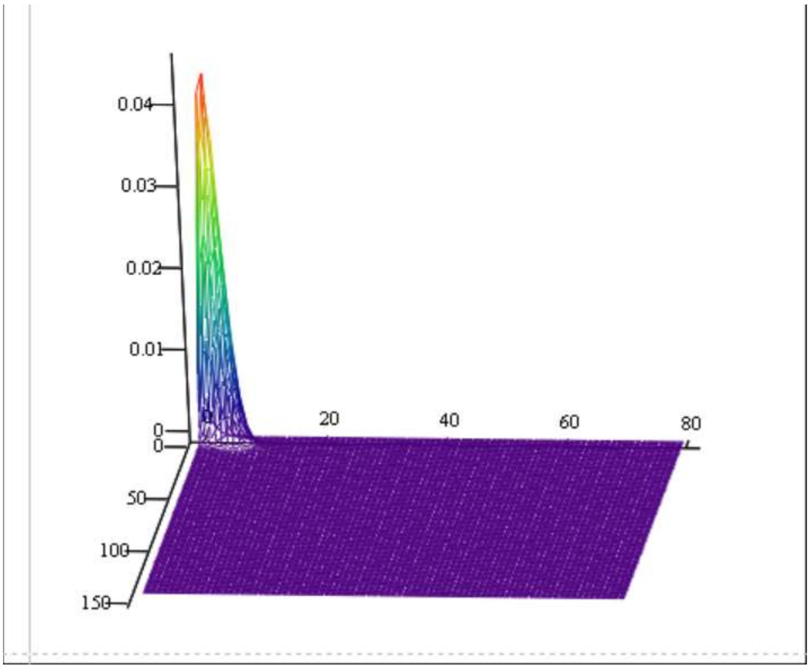
где компоненты a, b, c, d определены выше.

Далее, для наглядности, мы можем провести численный анализ системы параллельного обслуживания кратных заявок на базе представленной математической модели реализовано с помощью программного обеспечения Mathcad.

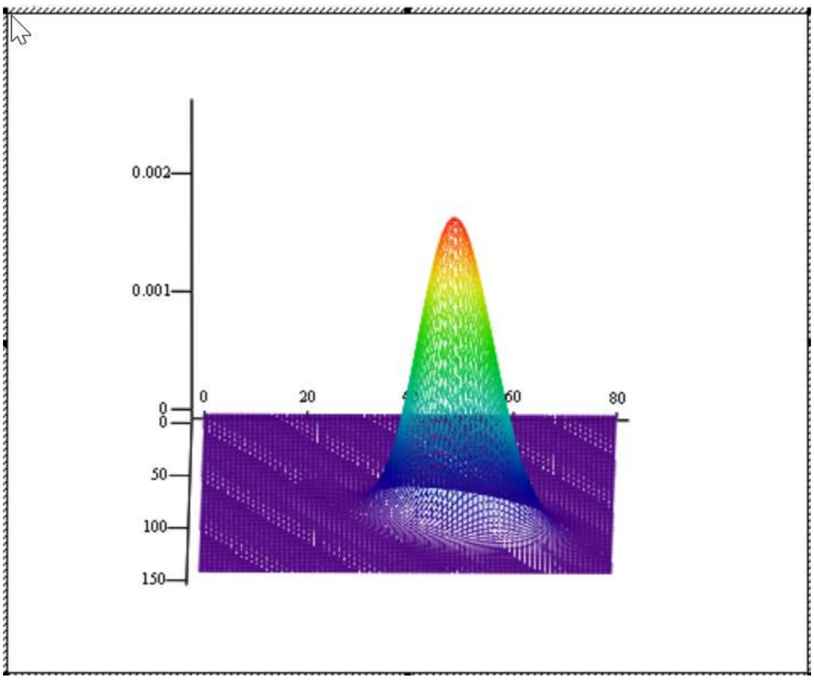
Результат работы программы (рис 5) для нахождения распределения вероятностей числа заявок в системе в нестационарном режиме с пределами разброса значений $i = 0 \ldots 150, j = 0 \ldots 150$, используя коэффициенты из (1.11):



$$\lambda = 1, \mu_1 = 0,04, \mu_2 = 0,01,$$



$\lambda = 1, \mu_1 = 0,2, \mu_2 = 0,3$



$\lambda = 1,\ \mu_1 = 0{,}01,\ \mu_2 = 0{,}02$

Рисунок 5 – Распределение вероятностей системы.

Запишем основные вероятностные характеристики для системы $M^{(2)}\left|M_2\right|\infty$.

$$M\{i_1\} = D\{i_1\} = \frac{\lambda}{\mu_1} = 100\,;\; M\{i_2\} = D\{i_2\} = \frac{\lambda}{\mu_2} = 50\,,\; r(i_1, i_2) = \frac{\sqrt{\mu_1\mu_2}}{\mu_1 + \mu_2} = 0{,}471\,.$$

Одинаковая интенсивность обслуживания показывает наибольшую корреляцию процессов.

1.8 Исследование выходящих потоков в системе параллельного обслуживания кратных заявок

Исследуем трехмерный случайный процесс $\{n_1(t), n_2(t), n_3(t)\}$, представленный на (рис 6), характеризующий число обслуженных приборов каждого блока за время t.

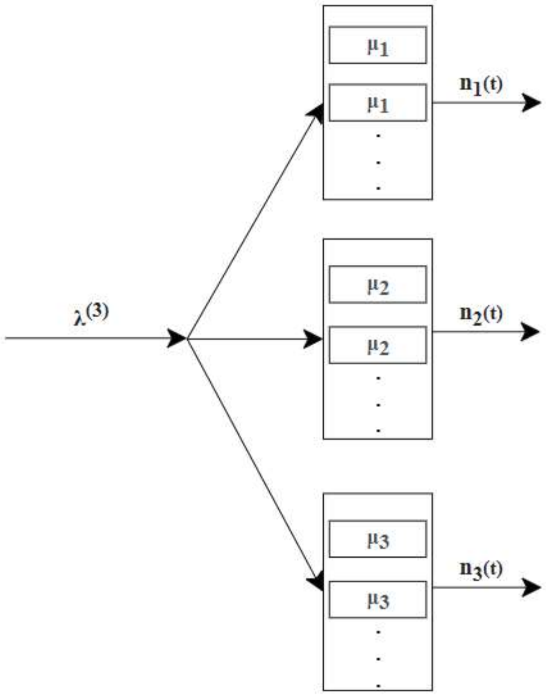


Рисунок 6– СМО параллельного обслуживания строенных заявок

Данный процесс $\{n_1(t), n_2(t), n_3(t)\}$ не является марковским, поэтому следует ввести компоненты числа занятых приборов $i_1(t), i_2(t), i_3(t)$

Рассмотрим шестимерную цепь Маркова

$$\{i_1(t), i_2(t), i_3(t), n_1(t), n_2(t), n_3(t)\}.$$

Определим вероятности:

$$\begin{aligned}
&P\left(i_1,i_2,i_3,n_1,n_2,n_3,t+\Delta t\right)=\lambda\Delta tP(i_1-1,i_2-1,i_3-1,n_1,n_2,n_3,t)+\\
&+(i_1+1)\mu_1\Delta tP\left(i_1+1,i_2,i_3,n_1-1,n_2,n_3,t\right)+\\
&+(i_2+1)\mu_2\Delta tP\left(i_1,i_2+1,i_3,n_1,n_2-1,n_3,t\right)+\\
&+(i_3+1)\mu_3\Delta tP\left(i_1,i_2,i_3+1,n_1,n_2,n_3-1,t\right)+\\
&+(1-\lambda\Delta t)(1-i_1\mu_1\Delta t)(1-i_2\mu_2\Delta t)(1-i_3\mu_3\Delta t)\times\\
&\times P(i_1,i_2,i_3,n_1,n_2,n_3,t)+o(\Delta t)
\end{aligned}.$$

Для распределения вероятностей

$$P\left(i_1,i_2,i_3,n_1,n_2,n_3,t\right)=P\left\{i_1\left(t\right),i_2\left(t\right),i_3\left(t\right),n_1\left(t\right),n_2\left(t\right),n_3\left(t\right)\right\}$$

составим прямую систему дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$\frac{\partial P\left(i_1,i_2,i_3,n_1,n_2,n_3,t\right)}{\partial t}=-\left(\lambda+i_1\mu_1+i_2\mu_2+i_3\mu_3\right)P\left(i_1,i_2,i_3,n_1,n_2,n_3,t\right)+$$
$$+\left(i_1+1\right)\mu_1P\left(i_1+1,i_2,i_3,n_1-1,n_2,n_3,t\right)+\left(i_2+1\right)\mu_2P\left(i_1,i_2+1,i_3,n_1,n_2-1,n_3,t\right)+$$
$$+\left(i_3+1\right)\mu_3P\left(i_1,i_2,i_3+1,n_1,n_2,n_3-1,t\right)+\lambda P\left(i_1-1,i_2-1,i_3-1,n_1,n_2,n_3,t\right).$$

Обозначим совместную производящую функцию процесса $\left\{i_1\left(t\right),i_2\left(t\right),i_3(t),n_1\left(t\right),n_2\left(t\right),n_3\left(t\right)\right\}$:

$$\begin{aligned}
&F\left(x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3,t\right)=\\
&=\sum_{i_1}\sum_{i_2}\sum_{i_3}\sum_{n_1}\sum_{n_2}\sum_{n_3}x_1^{i_1}x_2^{i_2}x_3^{i_3}y_1^{n_1}y_2^{n_2}y_3^{n_3}P\left(i_1,i_2,i_3,n_1,n_2,n_3,t\right)
\end{aligned}$$

Тогда получим дифференциальное уравнение вида:

$$\frac{\partial F\left(x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3,t\right)}{\partial t}+\frac{\partial F\left(x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3,t\right)}{\partial x_1}\left(x_1-y_1\right)\mu_1+$$

$$+\frac{\partial F\left(x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3,t\right)}{\partial x_2}\left(x_2-y_2\right)\mu_2+\frac{\partial F\left(x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3,t\right)}{\partial x_3}\left(x_3-y_3\right)\mu_3=$$

$$=\lambda\left(x_1x_2x_3-1\right)F\left(x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3,t\right).$$

В начальные моменты система функционирует в стационарном режиме, то есть

$$F\left(x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3,0\right)=f\left(x_1,x_2,x_3\right),$$

где функция $f\left(x_1,x_2,x_3\right)$ определяется выражением (2.9).

Решаем дифференциальное уравнение вида

$$\frac{dt}{1}=\frac{dx_1}{\mu_1\left(x_1-y_1\right)}=\frac{dx_2}{\mu_2\left(x_2-y_2\right)}=\frac{dx_3}{\mu_3\left(x_3-y_3\right)}=$$
$$=\frac{dF\left(x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3,t\right)}{\lambda\left(x_1x_2x_3-1\right)F\left(x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3,t\right)}.$$

Найдем три первых интеграла из уравнений:

$$dt=\frac{dx_1}{\mu_1\left(x_1-y_1\right)},$$

$$dt=\frac{dx_2}{\mu_2\left(x_2-y_2\right)},$$

$$dt=\frac{dx_3}{\mu_3\left(x_3-y_3\right)},$$

и получаем, что

$$x_1=y_1+C_1e^{\mu_1t},\ C_1=\left(x_1-y_1\right)e^{-\mu_1t},$$

$$x_2=y_2+C_2e^{\mu_2t},\ C_2=\left(x_2-y_2\right)e^{-\mu_2t},$$

$$x_3=y_3+C_3e^{\mu_3t},\ C_3=\left(x_3-y_3\right)e^{-\mu_3t}.$$

Последний интеграл получим из уравнения

$$dt=\frac{dF\left(x_1,x_2,x_3.y_1,y_2,y_3,t\right)}{\lambda\left(x_1x_2x_3-1\right)F\left(x_1,x_2,x_3.y_1,y_2,y_3,t\right)},$$

откуда получим

$$\ln F = \Phi(C_1C_2C_3)\exp\{\lambda(y_1y_2y_3-1)t + \frac{\lambda y_1y_3C_2}{\mu_2}e^{\mu_2 t} +$$

$$+\frac{\lambda y_2y_3C_1}{\mu_1}e^{\mu_1 t} + \frac{\lambda y_1y_2C_3}{\mu_3}e^{\mu_3 t} +$$

$$+\frac{\lambda y_1C_2C_3}{\mu_2+\mu_3}e^{(\mu_2+\mu_3)t} + \frac{\lambda y_2C_1C_3}{\mu_1+\mu_3}e^{(\mu_1+\mu_3)t} +$$

$$+\frac{\lambda y_3C_1C_2}{\mu_1+\mu_2}e^{(\mu_1+\mu_2)t} + \frac{\lambda C_1C_2C_3}{\mu_1+\mu_2+\mu_3}e^{(\mu_1+\mu_2+\mu_3)t}\} =$$

$$=\Phi\left(\left(x_1-y_1\right)e^{-\mu_1 t},\left(x_2-y_2\right)e^{-\mu_2 t},\left(x_3-y_3\right)e^{-\mu_3 t}\right)\times$$

$$\times\exp\{\lambda(y_1y_2y_3-1)t + \frac{\lambda y_1y_3\left(x_2-y_2\right)}{\mu_2} +$$

$$+\frac{\lambda y_2y_3\left(x_1-y_1\right)}{\mu_1} + \frac{\lambda y_1y_2\left(x_3-y_3\right)}{\mu_3} +$$

$$+\frac{\lambda y_1\left(x_2-y_2\right)\left(x_3-y_3\right)}{\mu_2+\mu_3} + \frac{\lambda y_2\left(x_1-y_1\right)\left(x_3-y_3\right)}{\mu_1+\mu_3} +$$

$$+\frac{\lambda y_3\left(x_1-y_1\right)\left(x_2-y_2\right)}{\mu_1+\mu_2} + \frac{\lambda\left(x_1-y_1\right)\left(x_2-y_2\right)\left(x_3-y_3\right)}{\mu_1+\mu_2+\mu_3}\},$$

где $\Phi\left(C_1,C_2,C_3\right)$ – произвольная функция, определяемая из начальных условий.

$$\Phi\left(\left(x_1-y_1\right),\left(x_2-y_2\right),\left(x_3-y_3\right)\right) =$$

$$=\exp\left\{-\left(\begin{array}{l}\lambda(y_1y_2y_3-1)t + \frac{\lambda y_1y_3\left(x_2-y_2\right)}{\mu_2} + \frac{\lambda y_2y_3\left(x_1-y_1\right)}{\mu_1} + \\ +\frac{\lambda y_1y_2\left(x_3-y_3\right)}{\mu_3} + \frac{\lambda y_1\left(x_2-y_2\right)\left(x_3-y_3\right)}{\mu_2+\mu_3} + \\ +\frac{\lambda y_2\left(x_1-y_1\right)\left(x_3-y_3\right)}{\mu_1+\mu_3} + \frac{\lambda y_3\left(x_1-y_1\right)\left(x_2-y_2\right)}{\mu_1+\mu_2} + \\ +\frac{\lambda\left(x_1-y_1\right)\left(x_2-y_2\right)\left(x_3-y_3\right)}{\mu_1+\mu_2+\mu_3}\end{array}\right)\right\}$$

Тогда выражение для $F\left(x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3,t\right)$ имеет вид

$$F\left(x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3,t\right)=$$
$$=\exp\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\lambda\left(x_1-y_1\right)\left(x_2-y_2\right)\left(x_3-y_3\right)}{\mu_1+\mu_2+\mu_3}\left(1-e^{-(\mu_1+\mu_2+\mu_3)t}\right)+\\ +\lambda(y_1y_2y_3-1)t+\dfrac{\lambda y_1y_3\left(x_2-y_2\right)}{\mu_2}\left(1-e^{-\mu_2t}\right)+\\ +\dfrac{\lambda y_2y_3\left(x_1-y_1\right)}{\mu_1}\left(1-e^{-\mu_1t}\right)+\dfrac{\lambda y_1y_2\left(x_3-y_3\right)}{\mu_3}\left(1-e^{-\mu_3t}\right)+\\ +\dfrac{\lambda y_1\left(x_2-y_2\right)\left(x_3-y_3\right)}{\mu_2+\mu_3}\left(1-e^{-(\mu_2+\mu_3)t}\right)+\\ +\dfrac{\lambda y_2\left(x_1-y_1\right)\left(x_3-y_3\right)}{\mu_1+\mu_3}\left(1-e^{-(\mu_1+\mu_3)t}\right)+\\ +\dfrac{\lambda y_3\left(x_1-y_1\right)\left(x_2-y_2\right)}{\mu_1+\mu_2}\left(1-e^{-(\mu_1+\mu_2)t}\right)\end{array}\right\}$$

Полагая $x_1=x_2=x_3=1$ получаем выражение для маргинальной производящей функции трехмерного выходящего потока

$$F\left(1,1,1,y_1,y_2,y_3,t\right)=F\left(y_1,y_2,y_3,t\right)= \tag{1.13}$$
$$=\exp\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\lambda\left(1-y_1\right)\left(1-y_2\right)\left(1-y_3\right)}{\mu_1+\mu_2+\mu_3}\left(1-e^{-(\mu_1+\mu_2+\mu_3)t}\right)+\\ +\lambda(y_1y_2y_3-1)t+\dfrac{\lambda y_1y_3\left(1-y_2\right)}{\mu_2}\left(1-e^{-\mu_2t}\right)+\\ +\dfrac{\lambda y_2y_3\left(1-y_1\right)}{\mu_1}\left(1-e^{-\mu_1t}\right)+\dfrac{\lambda y_1y_2\left(1-y_3\right)}{\mu_3}\left(1-e^{-\mu_3t}\right)+\\ +\dfrac{\lambda y_1\left(1-y_2\right)\left(1-y_3\right)}{\mu_2+\mu_3}\left(1-e^{-(\mu_2+\mu_3)t}\right)+\\ +\dfrac{\lambda y_2\left(1-y_1\right)\left(1-y_3\right)}{\mu_1+\mu_3}\left(1-e^{-(\mu_1+\mu_3)t}\right)+\\ +\dfrac{\lambda y_3\left(1-y_1\right)\left(1-y_2\right)}{\mu_1+\mu_2}\left(1-e^{-(\mu_1+\mu_2)t}\right)\end{array}\right\}.$$

Следовательно одномерные производящие функции распределения вероятностей числа выходящих заявок являются пуассоновскими и имеют вид

$$f\left(y_1(t)\right)=\exp\left\{\lambda\left(y_1-1\right)t+\frac{\lambda(1-y_1)}{\mu_1}(1-e^{-\mu_1 t})\right\}= \\ =\exp\left\{\lambda\left(y_1-1\right)\left(\frac{e^{-\mu_1 t}+t\mu_1-1}{\mu_1}\right)\right\},$$

$$f\left(y_2(t)\right)=\exp\left\{\lambda\left(y_2-1\right)t+\frac{\lambda(1-y_2)}{\mu_2}(1-e^{-\mu_2 t})\right\}= \\ =\exp\left\{\lambda\left(y_2-1\right)\left(\frac{e^{-\mu_2 t}+t\mu_2-1}{\mu_2}\right)\right\}, \quad (1.14)$$

$$f\left(y_3(t)\right)=\exp\left\{\lambda\left(y_3-1\right)t+\frac{\lambda(1-y_3)}{\mu_3}(1-e^{-\mu_3 t})\right\}= \\ =\exp\left\{\lambda\left(y_3-1\right)\left(\frac{e^{-\mu_3 t}+t\mu_3-1}{\mu_3}\right)\right\}.$$

Из (1.13) следует, что:

- математическое ожидание числа обслуженных заявок в блоках системы имеет вид:

$$M\left\{n_k\left(t\right)\right\}=\left\{\lambda(y_k-1)\left[t-\frac{1-e^{-\mu_k t}}{\mu_k}\right]\right\},\left(k=1,2,3\right).$$

- дисперсия числа обслуженных заявок в блоках системы имеет вид:

$$D\left\{n_k\left(t\right)\right\}=\left\{\lambda(y_k-1)\left[t-\frac{1-e^{-\mu_k t}}{\mu_k}\right]\right\},\left(k=1,2,3\right).$$

Следовательно, выходящие потоки являются пуассоновскими нестационарными.

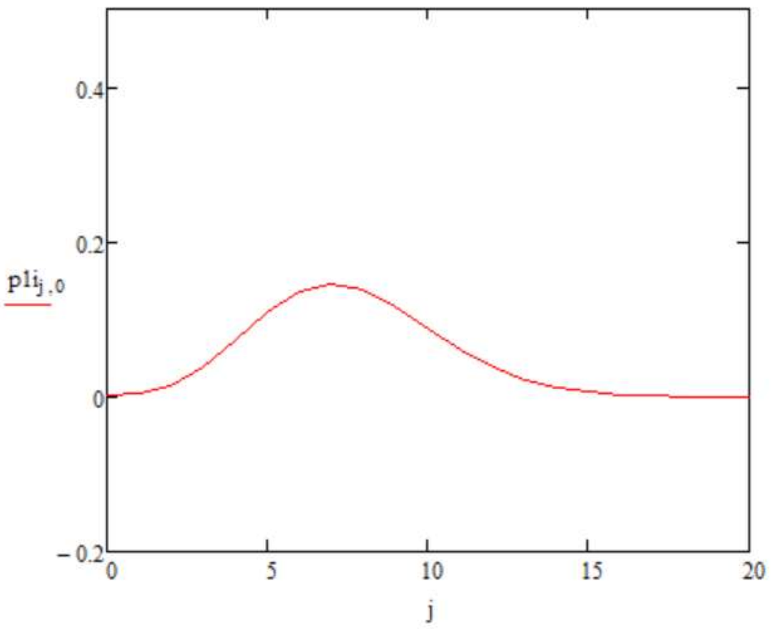
1.9 Распределение числа выходящих заявок

Для одномерных производящих функций (1.14) построим распределение числа выходящих заявок.

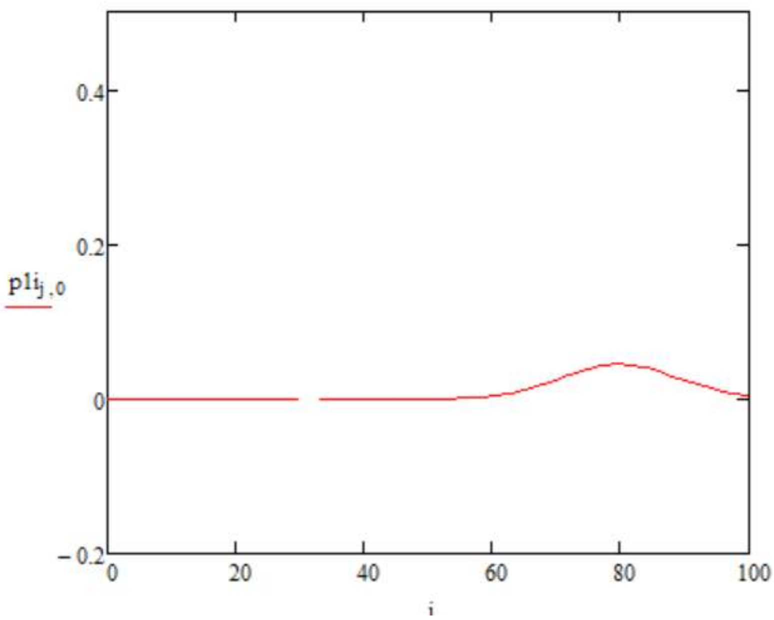
С помощью программного обеспечения Mathcad выполним численный анализ системы. Заменим переменную y на e^{iu}, где $i=\sqrt{-1}$ тогда производящая функция станет характеристической.

Параметры потока	
$\lambda := 1$	– интенсивность входного потока;
$\mu_1 := 0.4$	– интенсивность обслуживания;
$t := 10$	– время обслуживания
$F(y) := e^{\left[\lambda\cdot(y-1)\left(t-\frac{1-e^{-\mu_1 t}}{\mu_1}\right)\right]}$	– характеристическая функция для числа выходящего потока из 1 блока;
Нахождение распределения числа заявок в системе	
$p1i := \left\| \begin{array}{l} \text{for } k \in 0..n \\ \quad pi_{k,0} \leftarrow \frac{1}{2\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\cdot u\cdot k}\cdot H(u)\,du \\ pi \end{array} \right.$	– обратное преобразование Фурье;

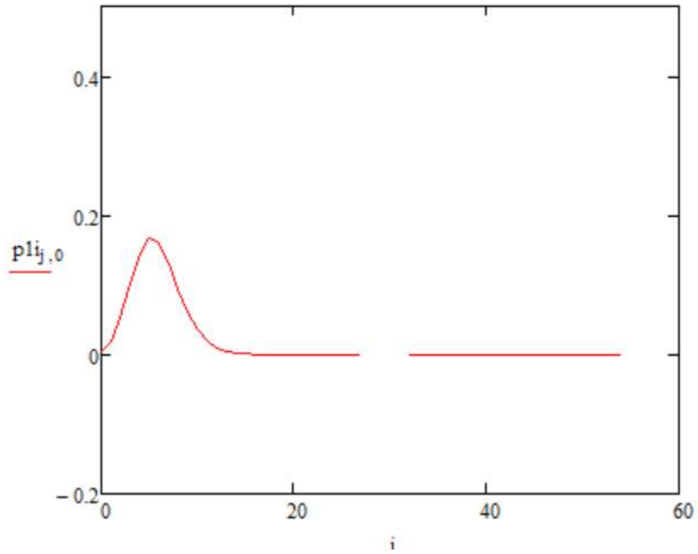
Ниже (рис. 7) представлены графики распределения числа выходящих заявок:



$\lambda = 1, \mu_1 = 0.4, t = 10$



$\lambda = 1, \mu_1 = 0.05, t = 100$



$$\lambda = 2, \mu_1 = 0.01, t = 25$$

Рисунок 7 – Распределение числа выходящих заявок

С ростом времени будет накапливаться больше заявок выходящего потока.

По мере продолжения работы блока и стабилизации процесса обслуживания, количество заявок, находящихся в блоке, будет достигать определенного уровня и стабилизироваться. Это может быть связано с тем, что блок способен обработать определенное количество заявок в единицу времени, и поступление новых заявок компенсируется выходом уже обработанных.

Полученный вид распределения может быть использован для практического результата.

Глава 2 Системы параллельного обслуживания вида $M^n | M_n | \infty$

2.1 Система дифференциальных уравнений Колмогорова

Состояние системы определим вектором $\{i_1(t)\ldots i_n(t)\}$, где i_n – число заявок, находящихся на обслуживании в n-ом блоке в момент времени t.

Ставится задача исследования n-мерного процесса $\{i_1(t)\ldots i_n(t)\}$, а именно нахождения производящей функции и основных вероятностных характеристик.

Случайный процесс $\{i_1(t), i_2(t) \cdots i_n(t)\}$ изменения во времени состояний системы является n-мерной цепью Маркова.

Составим прямую систему дифференциальных уравнений Колмогорова. По формуле полной вероятности запишем равенства:

$$\begin{gathered}
P(i_1, i_2, \ldots i_n, t+\Delta t) = (1-\lambda\Delta t)(1-i_1\mu_1\Delta t)(1-j\mu_2\Delta t)\times\ldots\times \\
\times(1-i_n\mu_n\Delta t)P(i_1, i_2, \ldots i_n, t) + \lambda\Delta t P(i_1-1, i_2-1, \ldots, i_n-1, t) + \\
+(i_1+1)\mu_1\Delta t P(i_1+1, i_2, \ldots i_n, t) + (i_2+1)\mu_2\Delta t P(i_1, i_2+1, \ldots i_n, t) + \ldots + \\
+(i_n+1)\mu_n\Delta t P(i_1, i_2, \ldots i_n+1, t) + o(\Delta t)
\end{gathered} \tag{2.1}$$

Откуда получаем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{gathered}
\frac{\partial P(i_1, i_2, \ldots i_n, t)}{\partial t} = -(\lambda + i_1\mu_1 + i_2\mu_2 + \ldots + i_n\mu_n)P(i_1, i_2, \ldots i_n, t) + \\
+\lambda P(i_1-1, i_2-1, \ldots, i_n-1, t) + \\
+(i_1+1)\mu_1 P(i_1+1, i_2, \ldots i_n, t) + (i_2+1)\mu_2 P(i_1, i_2+1, \ldots i_n, t) + \ldots + \\
+(i_n+1)\mu_n P(i_1, i_2, \ldots i_n+1, t)
\end{gathered} \tag{2.2}$$

с начальными условиями

$$P(i_1, i_2, \ldots i_n, t) = \begin{cases} 1, \text{ если } i_1 = i_2 = \ldots = i_n = 0 \\ 0, \text{ если } i_1, i_2, \ldots i_n > 0 \end{cases},$$

то есть в предположении, что в начальный момент времени система была пуста.

2.2 Производящая функция

Определим производящую функцию n-мерного распределения $P(i_1, i_2, \ldots i_n, t)$ в виде

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n, t) = \sum_{i_1=0}^{\infty}\sum_{i_2=0}^{\infty}\ldots\sum_{i_n=0}^{\infty} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \ldots x_n^{i_n} P(i_1, i_2, \ldots i_n, t),$$

Она удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению в частных производных первого порядка

$$\frac{\partial F\left(x_1,x_2,\ldots,x_n,t\right)}{\partial t}+\mu_1\left(x_1-1\right)\frac{\partial F\left(x_1,x_2,\ldots,x_n,t\right)}{\partial x_1}$$

$$+\mu_2\left(x_2-1\right)\frac{\partial F\left(x_1,x_2,\ldots,x_n,t\right)}{\partial x_2}+\ldots+$$

$$+\mu_n\left(x_n-1\right)\frac{\partial F\left(x_1,x_2,\ldots,x_n,t\right)}{\partial x_n}=$$

$$=\lambda\left(x_1x_2\ldots x_n-1\right)F\left(x_1,x_2,\ldots,x_n,t\right), \tag{2.3}$$

с начальными условиями

$$F\left(x_1,x_2,\ldots,x_n,0\right)=1\,. \tag{2.4}$$

Запишем для дифференциального уравнения (2.3) соответствующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dt}{1}=\frac{dx_1}{\mu_1\left(x_1-1\right)}=\frac{dx_2}{\mu_2\left(x_2-1\right)}=...=\frac{dx_n}{\mu_n\left(x_n-1\right)}=\frac{dF}{\lambda\left(x_1x_2...x_n-1\right)F}$$

Систему обыкновенных дифференциальных уравнений перепишем в следующем виде:

$$\frac{dt}{1}=\frac{dx_1}{\mu_1\left(x_1-1\right)}=\frac{dx_2}{\mu_2\left(x_2-1\right)}=...=\frac{dx_n}{\mu_n\left(x_n-1\right)}=$$

$$=\frac{dF(x_1,x_2,\ldots,x_n)}{\lambda\left(x_1x_2\ldots x_n-1\right)F(x_1,x_2,\ldots,x_n)}$$

где

$$\left(x_1x_2\ldots x_n-1\right)=$$

$$
\begin{aligned}
&=\left(x_1-1\right)\left(x_2-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(x_n-1\right)+\\
&+\left(x_2-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(x_n-1\right)+\ldots+\\
&+\left(x_1-1\right)\left(x_2-1\right)+\ldots+\left(x_{n-1}-1\right)\left(x_n-1\right)+\\
&+\left(x_1-1\right)+\ldots+\left(x_n-1\right)
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

Для данной системы найдем первые интегралы.

$$
\int dt=\int\frac{dx_1}{\mu_1(x_1-1)}\Rightarrow C_1=(x_1-1)e^{-\mu_1 t},
$$

$$\ldots$$

$$
\int dt=\int\frac{dx_n}{\mu_n(x_n-1)}\Rightarrow C_n=(x_n-1)e^{-\mu_n t}. \tag{2.6}
$$

Далее рассмотрим дифференциальное уравнение:

$$
\int dt=\int\frac{dF(x_1,x_2,\ldots,x_n,t)}{\lambda(x_1x_2\ldots x_n-1)F(x_1,x_2,\ldots,x_n,t)}.
$$

Учитывая (2.5), перепишем его в виде:

$$
\ln F(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\widetilde{C}+\int_0^t\begin{bmatrix}\left(x_1-1\right)\left(x_2-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(x_n-1\right)+\left(x_2-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(x_n-1\right)+\\ +\ldots+\left(x_1-1\right)\left(x_2-1\right)+\ldots+\left(x_{n-1}-1\right)\left(x_n-1\right)+\\ +\left(x_1-1\right)+\ldots+\left(x_n-1\right)\end{bmatrix}ds
$$

Теперь с помощью (2.6) выражаем $(x_1-1),\ldots,(x_n-1)$, и получаем:

$$
\ln F(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\widetilde{C}+\int_0^t\lambda\begin{bmatrix}C_1C_2\cdot\ldots\cdot C_n\,\mathrm{e}^{\{\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_n\}s}+C_2\cdot\ldots\times\\ \times C_n\,\mathrm{e}^{\{\mu_2+\ldots+\mu_n\}s}+\\ +\ldots+C_1C_2\,\mathrm{e}^{\{\mu_1+\mu_2\}s}+\ldots+C_{n-1}C_n\,\mathrm{e}^{\{\mu_{n-1}+\mu_n\}}+\\ +C_1\,\mathrm{e}^{\mu_1 s}+\ldots+C_n\,\mathrm{e}^{\mu_n s}\end{bmatrix}ds.
$$

Далее $C_1C_2\ldots C_n$ снова выражаем из (2.6), только теперь с t, т. к. это константа:

$$\ln F(x_1,x_2,\dots,x_n)=\widetilde{C}+\int_0^t \lambda\left[\begin{array}{l}(x_1-1)e^{-\mu_1 t}(x_2-1)e^{-\mu_2 t}\cdot\ldots\cdot(x_n-1)e^{-\mu_n t}e^{\{\mu_1+\ldots+\mu_n\}s}+\\ (x_2-1)e^{-\mu_2 t}\cdot\ldots(x_n-1)e^{-\mu_n t}e^{\{\mu_2+\ldots+\mu_n\}s}+\ldots+\\ +(x_1-1)e^{-\mu_1 t}(x_2-1)e^{-\mu_2 t}e^{\{\mu_1+\mu_2\}s}+\ldots+\\ +(x_{n-1}-1)e^{-\mu_{n-1}t}(x_n-1)e^{-\mu_n t}\,\mathrm{e}^{\{\mu_{n-1}+\mu_n\}s}+\\ +(x_1-1)e^{-\mu_1 t}e^{\mu_1 s}+\ldots+(x_n-1)e^{-\mu_n t}e^{\mu_n s}\end{array}\right]ds$$

Общее решение имеет вид:

$$F(x_1,x_2,...,x_n,t)=\Phi\left((x_1-1)e^{-\mu_1 t},...,(x_n-1)e^{-\mu_n t}\right)\times$$
$$\times\exp\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\lambda(x_1-1)\cdot...\cdot(x_n-1)}{\mu_1+...+\mu_n}+\dfrac{\lambda(x_2-1)\cdot...\cdot(x_n-1)}{\mu_2+...+\mu_n}+\ldots+\\ +\dfrac{\lambda(x_1-1)(x_n-1)}{\mu_1+\mu_n}+\dfrac{\lambda(x_1-1)}{\mu_1}+...+\dfrac{\lambda(x_n-1)}{\mu_n}\end{array}\right\}.$$

где $\Phi(x)$ – произвольная дифференцируемая функция.

Учитывая начальные условия (2.4), получаем:

$$F(x_1,x_2,...,x_n,0)=\Phi\left((x_1-1),(x_2-1),...,(x_n-1)\right)\times$$
$$\times\exp\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\lambda(x_1-1)\cdot...\cdot(x_n-1)}{\mu_1+...+\mu_n}+\dfrac{\lambda(x_2-1)\cdot...\cdot(x_n-1)}{\mu_2+...+\mu_n}+\ldots+\\ +\dfrac{\lambda(x_1-1)(x_n-1)}{\mu_1+\mu_n}+\dfrac{\lambda(x_1-1)}{\mu_1}+...+\dfrac{\lambda(x_n-1)}{\mu_n}\end{array}\right\}=1$$

Откуда определим вид функции $\Phi(\cdots)$,

$$\Phi\left((x_1-1),(x_2-1),...,(x_n-1)\right)=$$
$$\exp\left\{-\left[\begin{array}{l}\dfrac{\lambda(x_1-1)\cdot...\cdot(x_n-1)}{\mu_1+...+\mu_n}+\dfrac{\lambda(x_2-1)\cdot...\cdot(x_n-1)}{\mu_2+...+\mu_n}+\ldots+\\ +\dfrac{\lambda(x_1-1)(x_n-1)}{\mu_1+\mu_n}+\dfrac{\lambda(x_1-1)}{\mu_1}+...+\dfrac{\lambda(x_n-1)}{\mu_n}\end{array}\right]\right\}$$

Следовательно,

$$\Phi\left(\left(x_1-1\right)e^{-\mu_1 t},\left(x_2-1\right)e^{-\mu_2 t},\ldots,\left(x_k-1\right)e^{-\mu_n t}\right)=$$

$$\exp\left\{\begin{array}{l}-\dfrac{\lambda}{\mu_1+\ldots+\mu_n}\left(x_1-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(x_n-1\right)e^{-(\mu_1+\ldots+\mu_n)t}-\\ -\dfrac{\lambda}{\mu_2+\ldots+\mu_n}\left(x_2-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(x_n-1\right)e^{-(\mu_2+\ldots+\mu_n)t}-\ldots-\\ -\dfrac{\lambda}{\mu_1+\mu_n}\left(x_1-1\right)\left(x_n-1\right)e^{-(\mu_2+\mu_n)t}-\ldots-\\ -\dfrac{\lambda\left(x_1-1\right)}{\mu_1}e^{-\mu_1 t}-\ldots-\dfrac{\lambda\left(x_n-1\right)}{\mu_n}e^{-\mu_n t}\end{array}\right\}$$

Выражение для производящей функции имеет вид:

$$F\left(x_1,x_2,\ldots,x_n,t\right)=$$

$$=\exp\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\lambda}{\mu_1+\ldots+\mu_n}\left(x_1-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(x_n-1\right)\left(1-e^{-(\mu_1+\ldots+\mu_n)t}\right)+\\ +\dfrac{\lambda}{\mu_2+\ldots+\mu_n}\left(x_2-1\right)\cdot\ldots\left(x_n-1\right)\left(1-e^{-(\mu_2+\ldots+\mu_n)t}\right)+\ldots+\\ +\dfrac{\lambda}{\mu_1+\mu_n}\left(x_1-1\right)\left(x_n-1\right)\left(1-e^{-(\mu_1+\mu_n)t}\right)+\ldots+\\ +\dfrac{\lambda}{\mu_1}\left(x_1-1\right)\left(1-e^{-\mu_1 t}\right)+\dfrac{\lambda}{\mu_2}\left(x_2-1\right)\left(1-e^{-\mu_2 t}\right)+\ldots+\\ +\dfrac{\lambda}{\mu_n}\left(x_n-1\right)\left(1-e^{-\mu_n t}\right)\end{array}\right\} \quad (2.7)$$

Устремив $t\to\infty$, получим вид производящей функции стационарного распределения вероятностей

$$F\left(x_1,x_2,...,x_n\right)=\exp\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\lambda}{\mu_1+...+\mu_n}\left(x_1-1\right)\cdot...\cdot\left(x_n-1\right)+\\+\dfrac{\lambda}{\mu_2+...+\mu_n}\left(x_2-1\right)\cdot...\left(x_n-1\right)+\ldots+\\+\dfrac{\lambda}{\mu_1+\mu_n}\left(x_1-1\right)\left(x_n-1\right)+\ldots+\\+\dfrac{\lambda}{\mu_1}\left(x_1-1\right)+\dfrac{\lambda}{\mu_2}\left(x_2-1\right)+...+\\+\dfrac{\lambda}{\mu_n}\left(x_n-1\right)\end{array}\right\} \qquad (2.8)$$

Одномерные маргинальные производящие функции числа занятых приборов в каждом блоке обслуживания являются пуассоновскими и имеют вид

$$f(x_1)=\sum_{i_1}x_1^{i_1}P\{i_1(t)=i_1\}=\exp\left\{\frac{\lambda}{\mu_1}(x_1-1)\right\},$$

$$f\left(x_2\right)=\sum_{i_2}x_2^{i_2}P\left\{i_2\left(t\right)=i_2\right\}=\exp\left\{\frac{\lambda}{\mu_2}\left(x_2-1\right)\right\},$$

$$\ldots$$

$$f\left(x_n\right)=\sum_{i_n}x_n^{i_n}P\left\{i_n\left(t\right)=i_n\right\}=\exp\left\{\frac{\lambda}{\mu_n}\left(x_n-1\right)\right\}.$$

2.3 Вероятностные характеристики в стационарном режиме

Из (2.8) получим основные вероятностные характеристики числа заявок в каждом блоке.

- математическое ожидание числа занятых приборов в каждом из блоков системы имеет вид

$$M\left\{i_n\right\}=\frac{\lambda}{\mu_n}.$$

- дисперсия числа занятых приборов в каждом из блоков системы имеет вид

$$D\{i_n\} = \frac{\lambda}{\mu_n}.$$

Используя (2.8), найдем выражение для коэффициента корреляции между компонентами процесса обслуживания требований в рассматриваемой модели. Определим корреляционные моменты.

$$M\{i_1 i_2\} = \left.\frac{\partial^2 F(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}\right|_{\substack{x_1=1 \\ x_2=1}} = \frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2} + \frac{\lambda}{\mu_1}\frac{\lambda}{\mu_2},$$

$$M\{i_1 i_3\} = \left.\frac{\partial^2 F(x_1, x_3)}{\partial x_1 \partial x_3}\right|_{\substack{x_1=1 \\ x_3=1}} = \frac{\lambda}{\mu_1+\mu_3} + \frac{\lambda}{\mu_1}\frac{\lambda}{\mu_3},$$

…

$$M\{i_{n-1} i_n\} = \left.\frac{\partial^2 F(x_{n-1}, x_n)}{\partial x_{n-1} \partial x_n}\right|_{\substack{x_{n-1}=1 \\ x_n=1}} = \frac{\lambda}{\mu_{n-1}+\mu_n} + \frac{\lambda}{\mu_{n-1}}\frac{\lambda}{\mu_n}.$$

Тогда

$$r(i_1, i_2) = \frac{\operatorname{cov}(i_1, i_2)}{\sqrt{Di_1 Di_2}} = \frac{\frac{\lambda}{\mu_1}\frac{\lambda}{\mu_2} + \frac{\lambda}{\mu_1+\mu_2} - \frac{\lambda}{\mu_1}\frac{\lambda}{\mu_2}}{\sqrt{\frac{\lambda}{\mu_1}\frac{\lambda}{\mu_2}}} = \frac{\lambda\sqrt{\mu_1\mu_2}}{\lambda(\mu_1+\mu_2)} = \frac{\sqrt{\mu_1\mu_2}}{\mu_1+\mu_2},$$

$$r(i_1, i_3) = \frac{\operatorname{cov}(i_1, i_3)}{\sqrt{Di_1 Di_3}} = \frac{\frac{\lambda}{\mu_1}\frac{\lambda}{\mu_3} + \frac{\lambda}{\mu_1+\mu_3} - \frac{\lambda}{\mu_1}\frac{\lambda}{\mu_3}}{\sqrt{\frac{\lambda}{\mu_1}\frac{\lambda}{\mu_3}}} = \frac{\lambda\sqrt{\mu_1\mu_3}}{\lambda(\mu_1+\mu_3)} = \frac{\sqrt{\mu_1\mu_3}}{\mu_1+\mu_3},$$

…

$$r(i_1,i_n)=\frac{\operatorname{cov}(i_1,i_n)}{\sqrt{Di_1Di_n}}=\frac{\frac{\lambda}{\mu_1}\frac{\lambda}{\mu_n}+\frac{\lambda}{\mu_1+\mu_n}-\frac{\lambda}{\mu_1}\frac{\lambda}{\mu_n}}{\sqrt{\frac{\lambda}{\mu_1}\frac{\lambda}{\mu_n}}}=\frac{\lambda\sqrt{\mu_1\mu_n}}{\lambda(\mu_1+\mu_n)}=\frac{\sqrt{\mu_1\mu_n}}{\mu_1+\mu_n}.$$

Определим $\mu_n=\alpha\mu_1$, где α - произвольное неотрицательное число, тогда коэффициент корреляции имеет вид

$$r(i_1,i_n)=\frac{\sqrt{\alpha(\mu_1)^2}}{\mu_1(1+\alpha)}=\frac{\sqrt{\alpha}}{(1+\alpha)}.$$

Так же как в исследовании для трехмерного случая, из графика (рис. 8) видно, что наибольшая зависимость изучаемых процессов достигается при $\alpha=1$ То есть при одинаковых параметрах времени обслуживания, коэффициент корреляции равен 0,5.

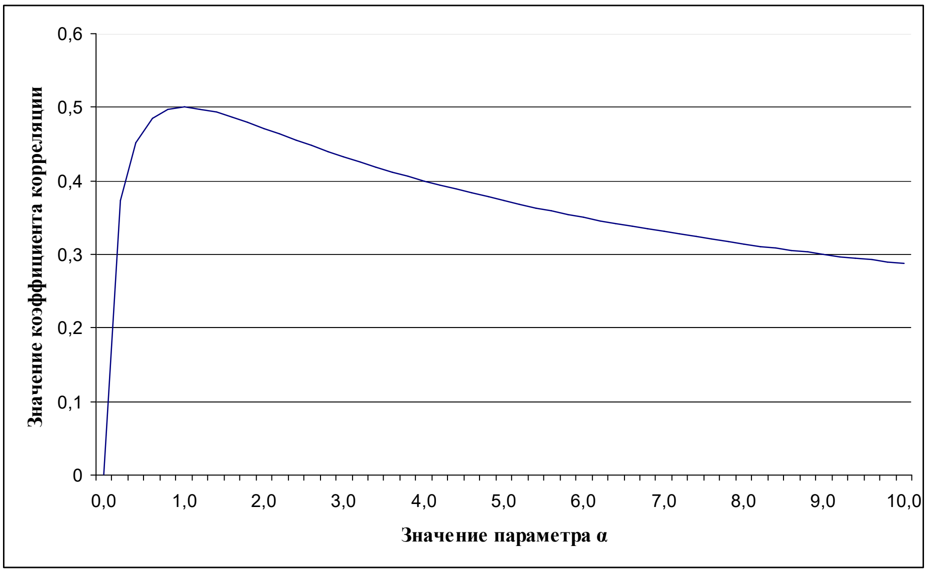


Рисунок 8 – Изменение коэффициента корреляции процессов $\{i_1,i_n\}$

Такие модели параллельного обслуживания с кратными заявками представляют интерес для исследования и оптимизации процессов обслуживания в различных областях, например, в телекоммуникационных сетях или в производственных системах. Анализ таких систем требует учета особенностей дисциплины обслуживания, стохастических характеристик и зависимости параметров распределения от номера блока. Это позволяет разрабатывать эффективные стратегии управления ресурсами и повышать производительность систем обслуживания.

2.4 Вероятностные характеристики в нестационарном режиме

Из производящей функции (2.7) получим основные вероятностные характеристики числа заявок в каждом блоке в момент времени t.

1) математическое ожидание числа заявок в каждом из блоков системы:

$$M\{i_n(t)\} = \frac{\lambda}{\mu_n}\left(1 - e^{-\mu_n t}\right),$$

2) дисперсия числа заявок в каждом из блоков системы:

$$D\{i_n(t)\} = \frac{\lambda}{\mu_n}\left(1 - e^{-(\mu_n)t}\right).$$

С помощью 2.7 найдем выражение для коэффициента корреляции между компонентами процесса обслуживания требований в рассматриваемой модели. Определим корреляционные моменты

$$M\left\{i_{n-1}i_n\right\} = \left.\frac{\partial^2 F\left(x_{n-1}, x_n, t\right)}{\partial x_{n-1}\partial x_n}\right|_{\substack{x_{n-1}=1 \\ x_n=1}} =$$

$$= \frac{\lambda}{\mu_{n-1}}\left(1 - e^{-\mu_{n-1}t}\right)\frac{\lambda}{\mu_n}\left(1 - e^{-\mu_n t}\right) + \frac{\lambda}{\mu_{n-1} + \mu_n}\left(1 - e^{-(\mu_{n-1}+\mu_n)t}\right)$$

Тогда

$$r\left(i_{n-1}(t), i_n(t)\right) = \frac{\frac{\lambda}{\mu_{n-1} + \mu_n}\left(1 - e^{-(\mu_{n-1}+\mu_n)t}\right)}{\sqrt{\left[\frac{\lambda}{\mu_{n-1}}\left(1 - e^{-\mu_{n-1}t}\right)\right]\left[\frac{\lambda}{\mu_n}\left(1 - e^{-\mu_n t}\right)\right]}}.$$

Рассмотрим попарную нормированную корреляционную функцию для блоков обслуживания (рис 9):

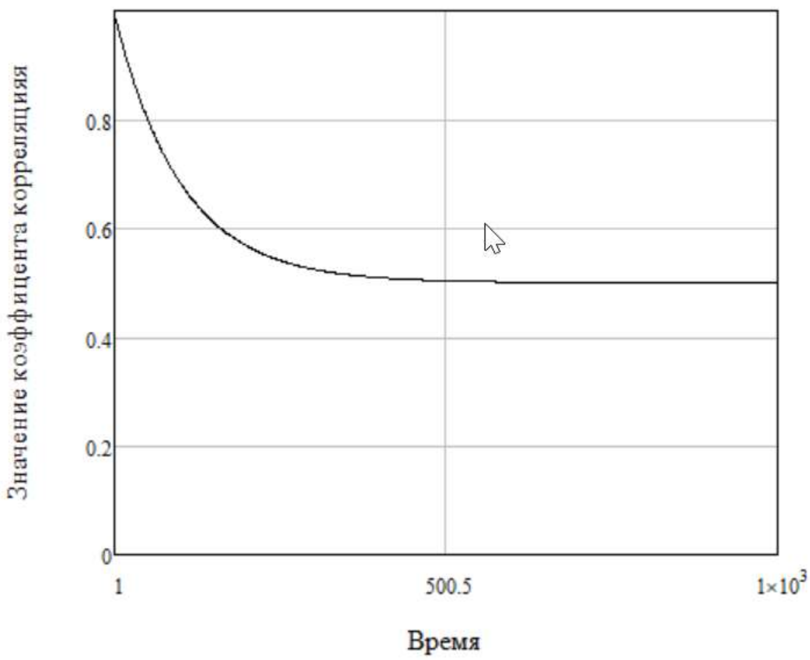


Рисунок 9 – Корреляционная функция процессов $\{i_{n-1}(t), i_n(t)\}$

В этом случае так же с течением времени система стремится к стационарному режиму.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе данного исследования была разработана математическая модель параллельного обслуживания кратных заявок пуассоновского потока. Были рассмотрены основные теоретические сведения, связанные с системами массового обслуживания, и выделены ключевые особенности построения моделей параллельного обслуживания с неограниченным числом обслуживающих приборов и специальными входящими потоками кратных заявок.

Исследование различных случаев математической модели параллельного обслуживания с неограниченным числом обслуживающих приборов, имеющих неограниченное количество блоков обслуживания, позволило выявить важные зависимости и влияние различных параметров на производительность. Построенная модель дала возможность исследовать состояния системы параллельного обслуживания и определить оптимальные стратегии обслуживания.

В результате исследования были получены следующие основные выводы:

1. Математическая модель параллельного обслуживания кратных заявок пуассоновского потока позволяет эффективно описывать и анализировать такие системы обслуживания.
2. Результаты исследования позволяют определить оптимальные стратегии обслуживания, например, оптимальное количество обслуживающих приборов или оптимальное распределение ресурсов между блоками обслуживания.
3. Полученные результаты могут быть применимы в различных областях, где важно эффективное управление параллельными системами обслуживания.

В заключение исследование математической модели параллельного обслуживания кратных заявок пуассоновского потока представляет собой важный шаг в понимании и оптимизации систем обслуживания. Разработанная модель и полученные результаты имеют практическую значимость и могут служить основой для разработки более эффективных стратегий управления параллельными системами обслуживания в реальных условиях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Башарин Г.П., Харкевич А.Д., Шнепс М.А. Массовое обслуживание в телефонии. – М.: Наука, 1968. – 119 с.
2. Бережная Е.В. Бережной В.И. Математические методы моделирования экономических систем – М., 2007.- 432 с.
3. Бочаров П.П., Громов А.И. О пуассоновской двухфазной системе ограниченной емкости // Методы теории телетрафика в системах распределения информации. – М.: Наука, 1975. С. 15-28.
4. Бочаров П.П., Печинкин А.В. Теория массового обслуживания. - М.: Изд-во РУДН. - 1995. – 520 с.
5. Жихарев, А.Г. Разработка средств и методов имитационного моделирования транспортных потоков города / А.Г. Жихарев, С.И. Маторин, Н.О. Зайцева // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия История. Политология. Экономика. Информатика. - 2oi4. - № 1 (172). - Выпуск 29/1. - С. 66-69
6. Назаров А.А., Терпугов А.Ф. Теория массового обслуживания: Учебное пособие. – Томск: Изд-во НТЛ. 2004. – 228 с.
7. Саати Т.Л. Элементы теории массового обслуживания и ее приложения. 2-е изд. – М.: Советское радио, 1971. – 519 с.
8. Севастьянов Б.А. Эргодическая теорема для марковских процессов и ее приложение к телефонным линиям с отказами // Теория вероятностей и ее прим. – 1957. – Т.2. – Вып.1. С. 106-116.
9. Синякова И.А. Математические модели и методы исследования систем параллельного обслуживания сдвоенных заявок случайных потоков [Текст]: дис. … канд. физ.-мат. наук: 05.13.18: защищена 20.06.2013. – Томск, 2013. – 145 с.
10. Солнышкина И.В. Теория систем массового обслуживания. Учебное пособие. – Комскомольск-на-Амуре: ФГБОУ ВПО «КнАГТУ». 2015. – 76 с.

11. Тубольцева, О.М. Моделирование деловых процессов на основе специализированного УФО-метода / О.М. Тубольцева, С.И. Маторин // Научные ведомости Белгородского государственного университета. Серия История. Политология. Экономика. Информатика. - 2014. - № 15 (186). - Выпуск 31/1. - С. 83-89.

12. Толстых О.Д. Цепи Маркова. Системы массового обслуживания. // Учебное пособие для студентов транспортных вузов. − Иркутск: ИрИИТ, 1999. 204 с.

13. Туманбаева К.Х. Моделирование систем телекоммуникаций. Учебное пособие. – Алматы: Изд-во АИЭС. 2007. – 70 с.

14. Хинчин А.Я. Математические методы теории массового обслуживания. – М.: Изд-во Академии наук СССР. 1955. – 120 с.

15. Шкленник М.А. Исследование потоков в неоднородной системе массового обслуживания с неограниченным числом обслуживающих устройств и повторными обращениями / М.А. Шкленник, А.Н. Моисеев // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2018) : материалы XVII Международной конференции имени А.Ф. Терпугова, 10-15 сентября 2018 г. Томск, 2018. С. 156-162.

16. Шульга Ю.Л. Применение объемных стохастических сетей массового обслуживания к моделированию транспортных процессов // АиТ. 1986. № 7. С. 77-85.

17. Юдицкий, С.А. Бинарные сетевые дорожные карты процессов управления проектами / С.А. Юдицкий, В.З. Магергут, А.В. Чуев // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. - 2oi3. - №4. - С. 1-9.

18. Юдицкий, С.А. Моделирование виртуальных систем массового обслуживания на индикаторных сетях Петри / С.А. Юдицкий, В.З. Магергут, А.В. Чуев, Л.В. Желтова // Современные системы искусственного интеллекта и их приложения в науке. Всероссийская научная интернетконференция с международным участием: материалы конф. - 2013. - С.157-162.

19. Artalejo J.R. Accessible bibliography on retrial queues, Mathematical and Computer Modelling. 1999. – Vol. 30. – P. 223-233.

20. Artalejo, J.R. Retrial Queueing Systems: A Computational Approach [Текст] / J. R. Artalejo, A. G´omez-Corral. — Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008. — URL: https://doi.org/10.1007/978-3-540-78725-9.

21. Asmussen, S. Applied probability and queues [Текст] / S. Asmussen. — New York : Springer, 2003.

22. Bocharov, P.P. Queueing Theory [Текст] /P. P. Bocharov, C. D'Apice, A. V. Pechinkin. — DE GRUYTER, 12.2003. — (Modern Probability and Statistics). — URL: https://www.degruyter.com/document/doi/10.1515/ 9783110936025/html (дата обр. 24.01.2022). 243

23. Brill, P.H. Level crossing methods in stochastic models [Текст] / P. H. Brill. — New York, NY : Springer Berlin Heidelberg, 2017.

24. Ganesh, A. A Model of Job Parallelism for Latency Reduction in Large-Scale Systems [Текст] / A. Ganesh, A. Mukhopadhyay // arXiv e-prints. — 2022. — Март. — arXiv:2203.08614. — arXiv: 2203.08614 [math.PR].

25. Jackson J.R. Some Problems in Queuing with Dynamic Priorities, Naval Research Logistics Quarterly. 1960. – Vol. 7. – P. 235-249

26. Harchol-Balter, M. Performance modeling and design of computer systems: queueing theory in action [Текст] / M. Harchol-Balter. — Cambridge: Cambridge University Press, 2013.

АНТИПЛАГИАТ
ОБНАРУЖЕНИЕ ЗАИМСТВОВАНИЙ

Отчет о проверке на заимствования №1

Автор: Шипунова Виктория Александровна
Проверяющий: Моисеева Светлана Владимировна
Организация: Томский Государственный Университет

Отчет предоставлен сервисом «Антиплагиат» - http://tsu.antiplagiat.ru

С результатом ознакомлена
05.06.2023
[signature] / И. А. Туренова

…НФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

№ документа: 360
…чало загрузки: 04.06.2023 16:59:08
…ительность загрузки: 00:00:13
…я исходного файла: ВКР_Шипунова_ВА (1).pdf
…звание документа: ВКР_Шипунова_ВА (1)
…змер текста: 44 кБ
…п документа: Научно-квалификационная работа
…имволов в тексте: 45501
…ов в тексте: 6282
…сло предложений: 330

ИНФОРМАЦИЯ ОБ ОТЧЕТЕ

Начало проверки: 04.06.2023 16:59:22
Длительность проверки: 00:00:17
Комментарии: не указано
Поиск с учетом редактирования: да
Проверенные разделы: основная часть с. 2-4,6-47
Модули поиска: ИПС Адилет, Библиография, Сводная коллекция ЭБС, Сводная коллекция РГБ, eLIBRARY.RU, СПС ГАРАНТ: аналитика, Диссертации НББ, Коллекция НБУ, Перефразирования по eLIBRARY.RU, Перефразирования по Интернету, Перефразирования по Интернету (EN), Перефразирования по коллекции издательства Wiley , Шаблонные фразы, Модуль поиска "tsu", Кольцо вузов

…ВПАДЕНИЯ	САМОЦИТИРОВАНИЯ	ЦИТИРОВАНИЯ	ОРИГИНАЛЬНОСТЬ
…,28%	0%	1,34%	69,38%

…впадения — фрагменты проверяемого текста, полностью или частично сходные с найденными источниками, за исключением фрагментов, которые система отнесла к …итированию или самоцитированию. Показатель «Совпадения» – это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к совпадениям, в общем объеме текста.

Самоцитирования — фрагменты проверяемого текста, совпадающие или почти совпадающие с фрагментом текста источника, автором или соавтором которого является …втор проверяемого документа. Показатель «Самоцитирования» – это доля фрагментов текста, отнесенных к самоцитированию, в общем объеме текста.

…итирования — фрагменты проверяемого текста, которые не являются авторскими, но которые система отнесла к корректно оформленным. К цитированиям относятся также …аблонные фразы; библиография; фрагменты текста, найденные модулем поиска «СПС Гарант: нормативно-правовая документация». Показатель «Цитирования» – это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к цитированию, в общем объеме текста.

…кстовое пересечение — фрагмент текста проверяемого документа, совпадающий или почти совпадающий с фрагментом текста источника.

…точник — документ, проиндексированный в системе и содержащийся в модуле поиска, по которому проводится проверка.

Оригинальный текст — фрагменты проверяемого текста, не обнаруженные ни в одном источнике и не отмеченные ни одним из модулей поиска. Показатель …ригинальность» – это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к оригинальному тексту, в общем объеме текста.

…овпадения», «Цитирования», «Самоцитирования», «Оригинальность» являются отдельными показателями, отображаются в процентах и в сумме дают 100%, что соответствует полному тексту проверяемого документа.

…бращаем Ваше внимание, что система находит текстовые совпадения проверяемого документа с проиндексированными в системе источниками. При этом система является …помогательным инструментом, определение корректности и правомерности совпадений или цитирований, а также авторства текстовых фрагментов проверяемого …кумента остается в компетенции проверяющего.

№	Доля в тексте	Источник	Актуален на	Модуль поиска	Комментарии
[01]	14,91%	Синякова, Ирина Анатольевна диссертация ... кандидата физико-математических наук : 05.13.18 Томск 2013 http://dlib.rsl.ru	29 Ноя 2014	Сводная коллекция РГБ	
[02]	5,52%	44920 http://e.lanbook.com	09 Мар 2016	Сводная коллекция ЭБС	
[03]	5,52%	Материалы первой всероссийской молодежной научной конференции «математическое и программное обеспечение информационных, технических и экономических систем» https://e.lanbook.com	21 Янв 2020	Сводная коллекция ЭБС	
[04]	5,04%	ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛИ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ КРАТНЫХ ЗАЯВОК В НЕСТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ. http://elibrary.ru	раньше 2011	eLIBRARY.RU	
[05]	4,56%	Моисеева, Светлана Петровна Разработка методов исследования математических моделей немарковских систем обслуживания с неограниченным числом приборов и непуассоновскими входящими потоками : диссертация ... доктора физико-математических наук : 05.13.18 То... http://dlib.rsl.ru	12 Окт 2017	Сводная коллекция РГБ	
[06]	4,29%	Исследование бесконечнолинейной СМО с интенсивностью входящего потока, зависящей от состояния системы. https://elibrary.ru	31 Дек 2020	eLIBRARY.RU	
[07]	3,66%	Задиранова, Любовь Александровна Исследование	27 Дек 2019	Сводная коллекция РГБ	