значение b_{n-3}, и т. д. Последовательно получим все значения неизвестных b_k (k = 0, 1, ... , n - 1). После этого из первого уравнения сразу находится неизвестное α.

Таким образом, система (21.21) имеет решение при любых значениях a_0, a_1, ... , a_n, поэтому определитель этой системы не равен нулю и указанное решение единственно.

На практике многочлен $P_{n-1}(x)$ в формуле (21.16) пишут с неопределенными коэффициентами, которые находят, решая систему (21.21). Затем вычисление данного интег- сводится к вычислению интеграла $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, который в случае, когда подкоренное выражение положительно на некотором промежутке, легко сводится к табличному (см. п. 18.3).

Интегралы вида $\int \frac{dx}{(x-\lambda)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}$ подстановкой $t = \frac{1}{x-\lambda}$ сводятся к интегралам рассмотренного типа (21.16).

§ 22.
Интегрирование некоторых трансцендентных функций

22.1. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$

Подстановка $u = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, -\pi < x < \pi$, сводит интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x)\, dx$ к интегралу от рациональной дроби. Действительно, имеем

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{2u}{1+u^2}, \qquad (22.1)$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

,

$$x = 2\operatorname{arctg} u, dx = \frac{2du}{1+u^2},$$

поэтому

$$\int R(\sin x, \cos x\, dx = 2\int R(\tfrac{2u}{1+u^2}, \tfrac{1-u^2}{1+u^2})\tfrac{du}{1+u^2}.$$

Таким образом получен интеграл от рациональной функции.

Вычислим указанным методом интеграл $\int \frac{dx}{1+\sin x}$. Используя формулы (22.1), получим

$$\int \frac{dx}{1+\sin x} = 2\int \frac{du}{(1+u)^2} = -\frac{2}{1+u} + C = -\frac{2}{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + C.$$

Следует, однако, иметь в виду, что, хотя с принципиальной точки зрения рассматриваемые интегралы всегда можно привести к интегралу от рационлальной дроби указанным методом, при практическом его применении он часто приводит к громоздким вычислениям; вместе с тем другие методы, в частности подстановки вида

$$u = \sin x, u = \cos x, u = \operatorname{tg} x, \tag{22.2}$$

иногда значительно быстрее позволяют вычислить нужный интеграл.

Примеры. 1. Рассмотрим интеграл $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$. Представим его в виде $\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \frac{1}{\cos^2 x}\frac{dx}{\cos^2 x}$. Сразу видно, что в этом случае очень удобна подстановка $u = \operatorname{tg} x$:

$$\int \tfrac{dx}{\cos^4 x} = \int (1+\operatorname{tg}^2 x) d\operatorname{tg} x = \int (1+u^2)du = \\ = u + \tfrac{u^3}{3} + C = \operatorname{tg} x + \tfrac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C.$$

2. Представляя интеграл $\int \frac{dx}{\sin^3 x \cos x}$ в виде $\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos x} = \int \frac{\sin x dx}{\sin^4 x \cos x}$, убеждаемся в целесообразности подстановки $u = \cos x$. Действительно,

$$\int \tfrac{dx}{\sin^3 x\cos x} = \int \tfrac{\sin x dx}{\sin^4 x\cos x} = -\int \tfrac{d\cos x}{\sin^4 x\cos x} =$$

$$= -\int \tfrac{du}{(1-u^2)^2 u} = -\tfrac{1}{2}\int \tfrac{du^2}{(1-u^2)^2u^2} = -\tfrac{1}{2}\int \tfrac{dv}{(1-v)^2v}^{1} = -\tfrac{1}{2}\int \tfrac{(1-v)+v}{(1-v)^2v}dv$$

$$= -\tfrac{1}{2}\int \tfrac{dv}{(1-v)v} - \tfrac{1}{2}\int \tfrac{dv}{(1-v)^2} = -\tfrac{1}{2}\int \tfrac{(1-v)+v}{(1-v)v}dv - \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{1-v}$$

$$= \tfrac{1}{2}\int \tfrac{dv}{v} - \tfrac{1}{2}\int \tfrac{dv}{1-v} - \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{1-v} = -\tfrac{1}{2}\ln|v| + \tfrac{1}{2}\ln|1-v| - \tfrac{1}{2(1-v)} + C =$$

$$= \ln|\operatorname{tg} x| - \tfrac{1}{2\sin^2 x} + C.$$

1

[1] Здесь сделана подстановка $v = u^2$.