Лекция 1

Лектор: Кулешов Александр Аркадьевич, БГУ, каф. МК, комн. 407, e-mail: fermi@inbox.ru

Author: KULIASHOU ALIAKSANDR (Kuleshov Alexander)

Belorussian State University, main entry, app. 407, sub-faculty (department) of the mathematical cybernetics

Вывод уравнения теплопроводности.

Рассмотрим металлический стержень, боковая поверхность которого теплоизолирована. Теплоизолированность боковой поверхности ознаяает, что через поверхность не происходит теплообмена с окружающей средой. Если этот стержень в начальном состоянии неравномерно нагрет, то благодаря теплопроводности в нем происходит передача тепла от более нагретых частей к менее нагретым. В простейшем случае, когда притока тепла извне нет и концы стержня тоже теплоизолированы, температура точек стержня с течением времени будет, изменяясь, выравниваться и в конечном итоге станет постоянной во всем стержне. Если возможен теплообмен с окружающей средой через концы стержня (торцевые сечения) или в некоторых участках стержня выделяется тепло, то распределение температуры будет соответственно усложняться.

В задаче линейной теплопроводности стержень предполагается настолько тонким, что в каждый момент времени температура всех точек данного поперечного сечения стержня будет одной и той же. Если принять ось стержня за ось абсцисс, то температура u будет являться функцией координаты x и времени t.

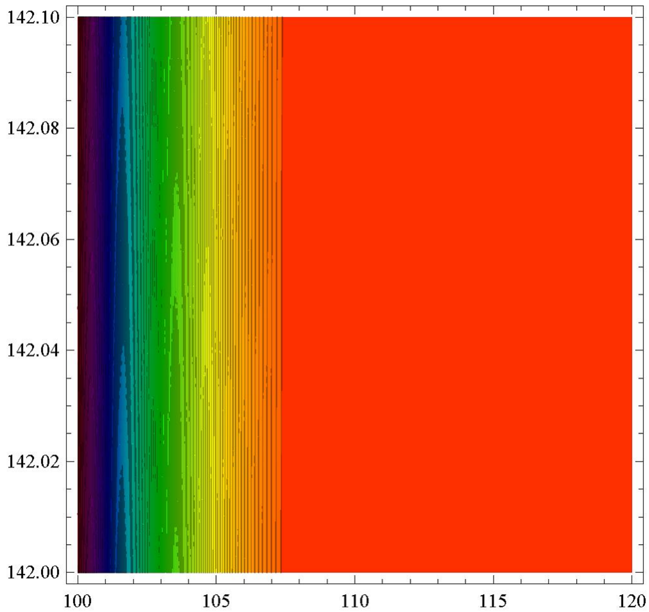

Рис. 1

На Рис. 1 моделируется непрерывное возрастание времени от 142.0 до 142.10 временных единиц. Для визуализации выбран участок стержня [100, 120]. Временные промежутки показаны слева на рамке, ограничивающей изображение. Красный цвет соответствует участкам с большей температурой. На графике изображаются контуры, соединяющие точки с одинаковыми значениями температуры. Цветовая гамма: красный→желтый→зеленый→ синий→ сиреневый цвет соответствует изменению температурного режима от большего к меньшему (справа налево).

При постоянном t функция $u(x,\ t)$ представляет зависимость температуры точек стержня в данный момент времени от их расстояния до начала координат; частная производная $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ выражает при этом скорость изменения температуры в направлении оси Ox. Если зафиксировать абсциссу x, то $u(x,\ t)$ выражает закон изменения температуры в данном сечении стержня с течением времени (см. Рис. 1, где $100 \leq x \leq 120$, а температура показана цветовой гаммой в каждый момент времени $142.0 \leq t \leq 142.10$).

Вывод дифференциального уравнения теплопроводности основан на следующих физических предпосылках:

1. Количество тепла, которое необходимо сообщить однородному телу, чтобы повысить его температуру на $\Delta\ u$, равно

$$c\,\rho\,V\,\Delta\,u, \tag{1}$$

где $V-$объем тела, $\rho-$его плотность, $c-$удельная теплоемкость.

2. Количество тепла, протекающее через поперечное сечение стержня за момент времени Δt (тепловой поток), пропорционально площади сечения, скорости изменения температуры в направлении, перпендикулярном к сечению, и промежутку времени Δt, т. е. равно

$$-k\,S\,\frac{\partial u}{\partial x}\,\Delta\,t, \tag{2}$$

где $S-$площадь поперечного сечения, $k-$коэффициент теплопроводности.

Знак минус в формуле (0.2) объясняется тем, что величину теплового потока будем считать положительной, когда тепло проходит в сторону возрастания x. Если $\frac{\partial u}{\partial x}>0$, то это значитm, что с возрастанием x температура повышается, а так как тепло переходит от более нагретых участков к менее нагретым, то тепловой поток будет направлен в сторону уменьшения x, т. е. его величина будет отрицательной. Считаем коэффициент теплопроводности постоянным; это предположение оправдывается, если стержень однородный и температура меняется в небольших пределах.

Выделим участок стержня, ограниченный поперечными сечениями с абсциссами x и $x+\Delta x$, и составим для него уравнение теплового баланса. По формуле (0.2) количество тепла, входящее через поперечное сечение с абсциссой x за промежуток времени Δt, равно $-k\ S\ \frac{\partial u}{\partial x}\ \Delta\ t$. Если отбросить бесконечно малые величины высших порядков, то значение частной производной по x в точке $x+\Delta x$ будет равно

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,\Delta x.$$

Действительно,

```
Series[D[u[x, t], x] /. {x -> x + Δx}, {Δx, 0, 1}]
```

$$u^{(1,0)}[x,\ t]+u^{(2,0)}[x,\ t]\,\Delta x+O[\Delta x]^2$$

Поэтому величина теплового потока, выходящего через сечение $x+\Delta x$, равна

$$-k\,S\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,\Delta x\right)\Delta\,t.$$

Взяв разность величин входящего и выходящего тепловых потоков, получим количество тепла ΔQ, сообщенное выбранному участку стержня за время Δt:

$$\Delta Q = \ -k\,S\,\frac{\partial u}{\partial x}\,\Delta\,t+k\,S\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,\Delta x\right)\Delta\,t = k\,S\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,\Delta x\,\Delta\,t. \tag{3}$$

С другой стороны, за этот промежуток времени температура изменилась на величину $\frac{\partial u}{\partial t}\Delta t$ (с точностью до бесконечно малых высшего порядка). Поэтому по формуле (0.1) сообщенное количество тепла равно

$$\Delta Q = \ c\,\rho\,V\,\Delta\,u = c\,\rho\,S\,\Delta x\,\frac{\partial u}{\partial t}\,\Delta t,\ V = S\,\Delta x. \tag{4}$$

Из (0.3) и (0.4) находим

$$c\,\rho\,\frac{\partial u}{\partial t}=k\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{5}$$

Введя обозначение

$$\frac{k}{c\,\rho}=a^2,$$

окончательно получим основное урвнение теплопроводности для однородного стержня без тепловых источников:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{6}$$

Постоянную

$$a=\sqrt{\frac{k}{c\,\rho}}$$

называют коэффициентом температуропроводности.

Предположим теперь дополнительно, что в некоторых участках стержня может возникать или поглощаться тепло. Как говорят, внутри стержня имеются тепловые источники. Выделение (или поглощение) тепла очень удобно характеризовать с помощью плотности тепловых источников. Под плотностью тепловых источников понимают функцию $\mathcal{F}(x, t)$ такую, что на малом участке стержня $(x, x+\Delta x)$ за малый промежуток времени $(t, t+\Delta t)$ выделяется количество тепла, равное (с точностью до бесконечно малых высшего порядка)

$$\mathcal{F}(x,t)\,\Delta x\,\Delta t. \tag{7}$$

Если $\mathcal{F}(x, t)<0$, то тепло не выделяется, а поглощается. Например, при пропускании через стержень постоянного электрического тока в нем будет выделяться тепло, причем в этом случае

$$\mathcal{F}(x,t)=I^2\,R,$$

где $I-$ток, а $R-$сопротивление единицы длины стержня.

При составлении уравнения теплового баланса (0.5) надо учесть тепло, возникающее в рассматриваемом участке стержня. Для этого прибавим к правой части уравнения (0.5) величину, определяемую формулой (0.7) и разделенную на

$$S\,\Delta x\,\Delta t.$$

Получим:

$$c\,\rho\,\frac{\partial u}{\partial t}=k\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{S}\mathcal{F}(x,t)$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{c\,\rho\,S}\mathcal{F}(x,t). \tag{8}$$

Краевые условия должны выполняться там, где стержень может иметь теплообмен с окружающей средой, т. е. на торцевых сечениях стержня (боковая поерхность тела по условию теплоизолирована). Пусть начало стержня совпадает с началом координат ($x = 0$), а его конец имеет абсциссу $x=l$. Самый простой случай краевых условий тот, когда концы стержня поддерживаются при постоянной температуре. Это значит, что

$$u(0,t)=\tilde{u}_0,\ u(l,t)=\tilde{u}_l,\ \tilde{u}_0,\ \tilde{u}_l-\text{заданные числа.} \tag{9}$$

Возможны, однако, и более общие краевые условия, когда на торцевых сечениях стержня происходит теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона. Этот закон состоит в том, что поток тепла через единицу поверхности в единицу времени пропорционален разности температур тела и окружающей среды, т. е. равен

$$h\left(u-\tilde{u}\right), \tag{10}$$

где u–температура конца стержня, $\tilde{u}$–температура окружающей среды и h–коэффициент пропорциональности, зависящий от физических свойств стержня и среды.

Коэффициент h называют коэффициентом теплообмена (или еще коэффициентом внешней теплопроводности); будем считать его для данного торцевого сечения стержня постоянным. Условимся также, что $h>0$, т. е. что поток тепла считается положительным, когда тепло уходит из стержня в окружающую среду ($u>\tilde{u}$), и отрицательным в противоположном случае. Количество тепла, передаваемое со всего торцевого сечения за момент Δt, будет равно

$$h\left(u-\tilde{u}\right) S\,\Delta t.$$

По закону сохранения энергии количество уходящего тепла должно быть в точности равно потоку тепла, проходящего через рассматриваемое торцевое сечение в силу теплопроводности стержня.

Согласно формуле (0.2) тепловой поток, проходящий через поперечное сечение стержня в напрвлении оси Ox, равен

$$-k\,S\,\frac{\partial u}{\partial x}\,\Delta t.$$

На правом конце стержня направление потока, идущего во внешнюю среду, совпадает с направлением оси Ox и поток равен

$$-k\,S\,\Delta t\,\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}.$$

На левом конце эти направления противоположны и поэтому поток равен

$$k\,S\,\Delta t\,\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}.$$

Внешние среды могут быть на концах стержня различными, так что могут быть различными h и u; пусть на левом конце

$$h=h_0,\ \tilde{u}=\tilde{u}_0,$$

а на правом

$$h=h_l,\ \tilde{u}=\tilde{u}_l.$$

Краевые условия на торцевых сечениях запишутся в виде

$$k\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=h_0\left\{u(0,t)-\tilde{u}_0\right\}, \tag{11}$$

$$-k\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=h_l\left\{u(l,t)-\tilde{u}_l\right\}, \tag{12}$$

где

$$\tilde{u}_0,\ \tilde{u}_l$$

–заданные температуры внешней среды.