Univerzita Komenského v Bratislave
Fakulta matematiky, fyziky a informatiky
Katedra aplikovanej informatiky

# Zbierka úloh z Logiky pre informatikov

Ján Kľuka, Júlia Pukancová,
Martin Homola, Jozef Šiška

Letný semester 2018/19

Posledná aktualizácia: 18. marca 2019

# Obsah

# 1 Úvod do logiky

**1.0.1** Stav sveta, v ktorom sú pravdivé všetky tvrdenia teórie, je jej

a) formalizácia,
b) dôkaz,
c) model,
d) logický dôsledok,
e) redukcia,
f) interpretácia.

**1.0.2** Tvrdenie, ktoré je pravdivé vo všetkých stavoch sveta, v ktorých je pravdivá teória, je jej

a) premisou,
b) logickým dôsledkom,
c) záverom,
d) implikáciou,
e) kontradikciou,
f) tautológiou.

**1.0.3** Usudzovacie pravidlo je vzorom

a) premís,
b) úsudkov,
c) záverov,
d) tautológií,
e) dôkazov,
f) dedukcií.

**1.0.4** Usudzovacie pravidlá, ktoré z pravdivých premís vždy odvodia pravdivé závery, nazývame

a) induktívne,
b) konkrétne,
c) deduktívne,
d) tautologické,
e) korektné,
f) úplné.

**1.0.5** Usudzovanie, pri ktorom používame iba také pravidlá, ktoré z pravdivých premís vždy odvodia pravdivé závery, sa nazýva:

a) interpretácia,
b) abdukcia,
c) formalizácia,
d) indukcia,
e) dedukcia,
f) inferencia.

**1.0.6** Usudzovanie, pri ktorom odvodzujeme možné príčiny z ich následkov, sa nazýva:

a) interpretácia,
b) abdukcia,
c) formalizácia,
d) indukcia,
e) dedukcia,
f) inferencia.

**1.0.7** Usudzovanie, pri ktorom odvodzujeme všeobecnú vlastnosť z vlastností jednotlivých prípadov, sa nazýva:

a) interpretácia,
b) abdukcia,
c) formalizácia,
d) indukcia,
e) dedukcia,
f) inferencia.

**1.0.8** Usudzovanie, pri ktorom odvodzujeme tvrdenie o jednom prípade na základe iných podobných prípadov, sa nazýva:

a) interpretácia,
b) abdukcia,
c) formalizácia,
d) indukcia,
e) dedukcia,
f) inferencia.

# 2 Výroková logika

## 2.1 Syntax výrokovej logiky

**2.1.1** Rozhodnite, či nasledovné reťazce sú výrokovými formulami nad množinou výrokových premenných $\mathcal{V} = \{p_1, p_2, \dots, p_n, \dots\}$ a svoje rozhodnutie neformálne zdôvodnite:

a) $p_1 \to p_2$

b) $(p_1) \land (p_2)$

c) $(p_1 \lor (\neg p_2))$

d) $(p_1 \lor (p_1 \land p_2))$

e) $(p_1 \land p_2 \land p_3)$

f) $(p_1 \land (u_2 \to p_3))$

g) $((p_1 \land (p_2 \to p_3)) \lor p_1)$

h) $((p_1 \to p_2) \leftrightarrow (p_2 \land p_1))$

i) $((p_1 \lor p_2) \to (p_2 \land p_1))$

j) $((p_1 \to p_2) \leftrightarrow (u_2 \land p_1))$

*Riešenie.* a) Postupnosť symbolov $p_1 \to p_2$ nie je formula nad $\mathcal{V}$, pretože to nie je ani výroková premenná z $\mathcal{V}$, ani nie je v tvare $\neg A$ pre nejakú formulu $A$ (lebo nezačína symbolom „$\neg$“), ani nie je v jednom z tvarov $(A \land B)$, $(A \lor B)$, $(A \to B)$ pre nejaké formuly $A$ a $B$ (lebo nezačína symbolom „(“).

d) Postupnosť symbolov $(p_1 \lor (p_1 \land p_2))$ je formula nad $\mathcal{V}$. Dokazuje to jej vytvárajúca postupnosť: $p_1$, $p_2$, $(p_1 \land p_2)$, $(p_1 \lor (p_1 \land p_2))$. ♮

**2.1.2** Rozhodnite, či nasledovné postupnosti symbolov sú formulami nad nejakou množinou výrokových premenných $\mathcal{V}$. V prípade kladnej odpovede určte množinu $\mathcal{V}$ a nájdite vytvárajúcu postupnosť. Zápornú odpoveď stručne zdôvodnite.

a) $(a \land \neg a)$

b) $(\mathit{tweety\_is\_penguin} \to \neg \mathit{tweety\_flies})$

c) $(\mathit{happy}(\mathit{jack}) \land \mathit{loves}(\mathit{marry}, \mathit{jack}))$

d) $\neg\neg\neg$*koľko_je_hodín?*

e) $\neg\neg\neg p \to \neg\neg q$

f) $(\forall x \lor \neg \exists y)$

g) $(\neg(\neg \mathit{wow}))$

h) $(\neg\neg a \neg \to \neg\neg(b \lor c))$

i) $\forall x \left((\mathit{student}(x) \land \neg \mathit{studies}(x)) \to \mathit{fails\_exam}(x)\right)$

j) $(\mathit{edo} = \mathit{vrátnik} \lor \mathit{edo} = \mathit{otec}(\mathit{ivana}))$

*Riešenie.* b) Postupnosť symbolov $(\mathit{tweety\_is\_penguin} \to \neg \mathit{tweety\_flies})$ je formulou nad každou množinou $\mathcal{V}$, ktorá obsahuje výrokové premenné $\mathit{tweety\_is\_penguin}$, $\mathit{tweety\_flies}$. Jej vytvárajúcou postupnosťou je napríklad:

$$tweety\_flies, tweety\_is\_penguin, \neg tweety\_flies, (tweety\_is\_penguin \rightarrow \neg tweety\_flies).$$

c) Postupnosť symbolov $(happy(jack) \land loves(marry, jack))$ nie je formulou. Má tvar $(A \land B)$, kde $A$ je postupnosť symbolov $happy(jack)$ a $B$ je $loves(marry, jack)$. Avšak $A$ nie je formula: Nezačína symbolom „¬", takže nie je negáciou podľa bodu (ii) definície 2.6. Nezačína ani symbolom „(", takže nie je ani formulou podľa bodu (iii). Musí teda byť výrokovou premennou. Ale výrokové premenné podľa definície 2.3 nemôžu obsahovať symboly zátvoriek ani logických spojok. ♮

**2.1.3** Napíšte po dve rôzne vytvárajúce postupnosti pre formuly:

a) $\neg(q \land p)$

b) $p$

c) $(\neg p \rightarrow q)$

d) $(((p \land q) \lor p) \rightarrow ((p \land q) \lor \neg p))$

e) $(((p \lor p) \rightarrow (p \land q)) \lor (\neg(p \land q) \rightarrow q))$

f) $(((p \land p) \land (p \land q)) \land ((p \land p) \land (p \land p)))$

*Riešenie.* a) Dvoma rôznymi vytvárajúcimi postupnosťami pre formulu $\neg(q \land p)$ sú napríklad:

- $p, q, (q \land p), \neg(q \land p)$;
- $q, p, \neg q, \neg p, (q \land p), \neg q, (q \lor p), \neg(q \land p)$. ♮

**2.1.4** Cieľom tejto úlohy je precvičiť si písanie induktívnych definícií, ktoré sme na prednáške použili na zadefinovanie výrokových formúl.

a) Zadefinujte výrokové formuly s binárnou *Shefferovou spojkou* (NAND, symbol $\uparrow$) nad množinou výrokových premenných $\mathcal{V}$. Vo formulách sa nebudú vyskytovať žiadne ďalšie spojky (ani negácia).
Napríklad postupnosti symbolov

$$\top \qquad kim \qquad (kim \uparrow sarah) \qquad ((jim \uparrow (kim \uparrow jim)) \uparrow (sarah \uparrow sarah))$$

by podľa vašej definície mali byť formulami nad množinou výrokových premenných $\mathcal{V} = \{jim, kim, sarah\}$.

b) Zadefinujte aritmetické výrazy s operátormi súčtu, súčinu a opačného čísla („unárne mínus") nad množinou premenných $\mathcal{V}$.
Napríklad postupnosti symbolov

$$x \qquad -z \qquad (x + x) \qquad (x \times -y) \qquad -(x \times -(-(z \times y) + -(x + y)))$$

by podľa vašej definície mali byť aritmetickými výrazmi nad množinou premenných $\mathcal{V} = \{x, y, z\}$.

c) Zadefinujte aritmetické výrazy s operátormi *rozdielu*, súčinu a opačného čísla („unárne mínus“) nad množinou premenných $\mathcal{V}$. Zamyslite sa nad tým, či vaša definícia umožňuje výrazy jednoznačne rozložiť nad podvýrazy.

d) Zadefinujte výrokové formuly nad množinou výrokových premenných $\mathcal{V}$ s ternárnou spojkou $(\ldots\ \mathbf{?}\ \ldots\ \mathbf{:}\ \ldots)$ (*ak-tak-inak*) a dvoma nulárnymi spojkami (výrokovými konštantami) $\top$ a $\bot$. Iné spojky sa v týchto formulách nemajú vyskytovať.

Príklady formúl nad množinou výrokových premenných $\mathcal{V} = \{\mathit{jim}, \mathit{kim}, \mathit{sarah}, \mathit{mokro}, \mathit{slnečno}, \mathit{polievacie\_auto}, \mathit{prší}\}$:

$$\bot \quad \mathit{prší} \quad (\mathit{kim} \mathrel{?} \mathit{jim} : \mathit{sarah}) \quad (\mathit{mokro} \mathrel{?} (\mathit{slnečno} \mathrel{?} \mathit{polievacie\_auto} : \mathit{prší}) : \top)$$

*Riešenie.* a)

**Definícia.** *Symbolmi jazyka výrokovej logiky so Shefferovou spojkou* sú:

- *výrokové premenné* z nejakej spočítateľnej množiny $\mathcal{V}$, ktorej prvkami nie sú symboly $\uparrow$, ( a ), ani jej prvky tieto symboly neobsahujú;
- *logický* symbol: $\uparrow$ (*Shefferova spojka*);
- *pomocné* symboly: ( a ).

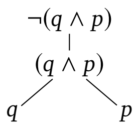
Spojka $\uparrow$ je binárna.

**Definícia.** Množina $\mathcal{E}$ *výrokových formúl so Shefferovou spojkou* nad množinou výrokových premenných $\mathcal{V}$ je najmenšia množina postupností symbolov, pre ktorú platí:

- Každá výroková premenná $p \in \mathcal{V}$ je formulou z $\mathcal{E}$.
- Ak $A$ a $B$ sú formulami z $\mathcal{E}$, tak aj postupnosť $(A \uparrow B)$ je formulou z $\mathcal{E}$. $\natural$

**2.1.5** Zakreslite vytvárajúce stromy pre formuly z úlohy 2.1.3.

*Riešenie.* a)




$\natural$

**2.1.6** Určte stupeň formúl z úlohy 2.1.3.

*Riešenie.* Stupeň formuly $\neg(q \land p)$ je $\deg(\neg(q \land p)) = 1 + \deg((q \land p)) = 1 + (1 + \deg(q) + \deg(p)) = 1 + (1 + 0 + 0) = 2$. $\natural$

**2.1.7** Zadefinujte výrokové „formuly“ so spojkami $\neg$ a $\rightarrow$ tak, aby pre ne *neplatila* veta o jednoznačnosti rozkladu. Nájdite príslušný kontrapríklad, teda „formulu“ $X$, ktorá sa dá rozložiť na priame „podformuly“ viacerými spôsobmi.

**2.1.8** Vypíšte všetky a) priame podformuly a b) podformuly pre formuly z úlohy 2.1.3.

**2.1.9** Zadefinujte nasledujúce funkcie nad výrokovými formulami:

a) $\mathrm{vars}(A)$ — množinu všetkých výrokových premenných formuly $A$;

b) $\mathrm{vcount}(A, p)$ — počet výskytov výrokovej premennej $p$ vo formule $A$;

c) $\mathrm{subfs}(A)$ — množinu všetkých podformúl formuly $A$;

d) $\mathrm{pcount}(A)$ — počet výskytov zátvoriek vo formule $A$;

e) $\mathrm{cons}(A)$ — množina všetkých logických spojok vo formule $A$;

f) $\mathrm{ccount}(A)$ — počet výskytov logických spojok vo formule $A$;

g) $\mathrm{bccount}(A, b)$ — počet výskytov binárnej spojky $b$ vo formule $A$.

*Riešenie.* e)

Funkciu cons zadefinujeme induktívnou definíciou. Musíme *jednoznačne* určiť hodnotu funkcie pre *každý* z možných tvarov formúl. Smieme sa pritom odvolávať na hodnoty tej istej funkcie pre formuly *nižšieho* stupňa. Na začiatku definície musíme deklarovať, aké druhy objektov predstavujú jednotlivé metapremenné (podobne ako sa v mnohých programovacích jazykoch deklarujú typy argumentov funkcií, procedúr, metód).

**Definícia.** Pre každú výrokovú premennú $p \in \mathcal{V}$ a pre všetky formuly $A$, $B$ nad $\mathcal{V}$ definujeme:

$$\begin{aligned}
\mathrm{cons}(p) &= \emptyset\\
\mathrm{cons}(\neg A) &= \{\neg\} \cup \mathrm{cons}(A)\\
\mathrm{cons}((A \wedge B)) &= \{\wedge\} \cup \mathrm{cons}(A) \cup \mathrm{cons}(B)\\
\mathrm{cons}((A \vee B)) &= \{\vee\} \cup \mathrm{cons}(A) \cup \mathrm{cons}(B)\\
\mathrm{cons}((A \rightarrow B)) &= \{\rightarrow\} \cup \mathrm{cons}(A) \cup \mathrm{cons}(B)
\end{aligned}$$

Ak sú prípady pre rôzne binárne výrokové spojky navzájom dostatočne podobné, môžeme ich spojiť napríklad takto:

**Definícia.** Pre všetky výrokové premenné $p \in \mathcal{V}$, všetky formuly $A$, $B$ nad $\mathcal{V}$ a všetky binárne spojky $b \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ definujeme:

$$\begin{aligned}
\mathrm{cons}(p) &= \emptyset\\
\mathrm{cons}(\neg A) &= \{\neg\} \cup \mathrm{cons}(A)\\
\mathrm{cons}((A\, b\, B)) &= \{b\} \cup \mathrm{cons}(A) \cup \mathrm{cons}(B)
\end{aligned}$$

♮

**2.1.10** Vybudujte teóriu syntaxe výrokovej logiky pre nasledujúce kombinácie spojok:

a) jediná binárna spojka $\uparrow$ (*Shefferova spojka*, NAND);

b) jediná binárna spojka $\downarrow$ (*Peircova spojka*, NOR);

c) unárna spojka $\neg$ a binárna spojka $\nrightarrow$ („a nie“);

d) binárne spojky $\nrightarrow$ („a nie“) a $\rightarrow$.

e) binárne spojky $\veebar$ („exkluzívne alebo“, XOR) a $\rightarrow$.

Teória syntaxe pre každú z týchto kombinácií pozostáva z definícií pojmov

i. *symboly* jazyka výrokovej logiky,

ii. *výroková formula* nad množinou výrokových premenných,

iii. *vytvárajúca postupnosť* a *vytvárajúca postupnosť pre formulu*,

iv. *vytvárajúci strom* pre formulu.

Formuly majú obsahovať *iba* spojky z príslušnej kombinácie.

*Riešenie.* a)

Definície i. a ii. sme už uviedli v riešení úlohy 2.1.4 a). Pokračujeme teda bodmi iii. a iv.:

**Definícia.** *Vytvárajúcou postupnosťou* je ľubovoľná konečná postupnosť postupností symbolov, ktorej každý člen je výroková premenná z $\mathcal{V}$, alebo má tvar $(A \uparrow B)$, pričom $A$ a $B$ sú nejaké predchádzajúce členy tejto postupnosti.

*Vytvárajúcou postupnosťou pre* $X$ je ľubovoľná vytvárajúca postupnosť, ktorej posledným prvkom je $X$.

**Definícia.** *Vytvárajúcim stromom* pre formulu $X$ je binárny strom $T$ obsahujúci v každom vrchole formulu, pričom platí:

- v koreni $T$ je formula $X$;
- ak vrchol obsahuje formulu $(A \uparrow B)$, tak má dve deti, pričom ľavé dieťa obsahuje formulu $A$ a pravé formulu $B$;
- vrcholy obsahujúce výrokové premenné sú listami. ♮

**2.1.11** Rozhodnite: Podľa vety o jednoznačnosti rozkladu má každá formula práve jednu priamu podformulu.

**2.1.12** Výpis vytvárajúceho stromu formuly $X$ v poradí:

a) preorder,
b) inorder,
c) postorder,
d) žiadnom z uvedených

je vytvárajúcou postupnosťou pre formulu $X$.

**2.1.13** Dokážte alebo vyvráťte nájdením kontrapríkladu nasledujúce tvrdenia:

a) počet výskytov pravých zátvoriek v $A$ plus počet negácií v $A$ je menší alebo rovný stupňu $A$;
b) ak $A$ je podformulou $B$, tak sa nachádza v každej vytvárajúcej postupnosti pre $B$;
c) ak sa $A$ nachádza vo vytvárajúcej postupnosti pre $B$, tak $A$ je podformulou $B$;
d) ak sa $A$ nachádza pred $B$ vo vytvárajúcej postupnosti pre formulu $X$, tak $A$ je podformulou $B$;
e) všetky vytvárajúce postupnosti pre formulu $A$ majú rovnakú dĺžku;
f) ak $T$ je vytvárajúci strom pre $A$ a $P$ je vytvárajúca postupnosť pre $A$, potom počet vrcholov $T$ je rovnaký ako dĺžka $P$;
g) dĺžka vytvárajúcej postupnosti pre $A$ je rovná stupňu $A$;
h) počet vrcholov vytvárajúceho stromu pre $A$ je rovný stupňu $A$;
i) počet vnútorných vrcholov vytvárajúceho stromu pre $A$ je rovný stupňu $A$.

## 2.2 Formalizácia vo výrokovej logike

**2.2.1** (Smullyan [4]) Sformalizujte nasledujúce tvrdenia pomocou výrokovej logiky.

V prípade lúpeže v klenotníctve predviedli na políciu troch podozrivých Adamsovú, Millsa a Doylea. Počas vyšetrovania sa zistilo:

a) Doyle je vinný, ak je Adamsová vinná a Mills nevinný.
b) Doyle nikdy nepracuje sám.
c) Adamsová nikdy nepracuje s Doyleom.
d) Do prípadu nie je zapletený nikto okrem Adamsovej, Millsa a Doylea a aspoň jeden z nich je vinný.

*Riešenie.*

Najprv prezrieme všetky tvrdenia, určíme množinu potrebných výrokových premenných a popíšeme ich význam. Významom každej premennej je *výrok*, teda tvrdenie, o ktorého pravdivosti má zmysel uvažovať. Navyše sú to *jednoduché* výroky — neobsahujú žiadne prvky, ktoré sa dajú vyjadriť výrokovými spojkami. Následne môžeme sformalizovať tvrdenia spájaním výrokových premenných do formúl.

Majme množinu výrokových premenných $\mathcal{V} = \{a, m, d\}$ s nasledujúcim významom: $a$ — Adamsová je vinná, $m$ — Mills je vinný, $d$ — Doyle je vinný.

Zistenia z vyšetrovania potom sformalizujeme nasledovne:

a) $((a \land \neg m) \to d)$

b) $(d \to (a \lor m))$

c) $(a \to \neg d)$

d) $(a \lor (m \lor d))$ ♮

**2.2.2** (Ghidini a Serafini [1]) Sformalizujte nasledujúce vety v jazyku výrokovej logiky. Zvoľte vhodnú spoločnú množinu výrokových premenných $\mathcal{V}$ a popíšte význam použitých premenných.

a) Aldo nie je Talian.
b) Aldo je Talian, ale Bob je Angličan.
c) Ak Aldo nie je Angličan, potom ani Bob nie je Angličan.
d) Aldo je Talian, alebo ak Aldo nie je Talian, tak Bob je Angličan.
e) Buď je Aldo Talian a Bob je Angličan, alebo ani Aldo nie je Talian, ani Bob nie je Angličan.

**2.2.3** Sformalizujte nasledujúce vety v jazyku výrokovej logiky. Zvoľte vhodnú spoločnú množinu výrokových premenných $\mathcal{V}$ a popíšte význam použitých premenných.

a) Filip hrá futbal a Eva volejbal.
b) Ondrej hrá basketbal, ale Filip nie.
c) Eva nehrá futbal, ak ho nehrá ani Ondrej.
d) Filip hrá futbal, alebo Filip nehrá futbal, iba ak Ondrej hrá basketbal.
e) Buď Filip nehrá futbal, ani Ondrej nehrá basketbal, alebo Filip hrá futbal a Ondrej basketbal.

**2.2.4** Sformalizujte nasledujúce vety vo výrokovej logike nad vhodnou spoločnou množinou výrokových premenných $\mathcal{V}$ a popíšte význam použitých premenných:

a) Hanka príde na párty, ak Dávid nepríde, ale ak Dávid príde, potom Fero nepríde.

b) Môžeme si byť istí, že ak Eva príde na párty, tak ak Fero a Hanka neprídu, potom príde Dávid.

c) Ak ani Eva ani Fero neprídu na párty, potom Dávid príde, iba ak príde Hanka.

**2.2.5** (Voronkov [5]) Sformalizujte nasledujúci problém vo výrokovej logike:

> Máme tri osoby, ktoré sa volajú Stirlitz, Müller a Eismann. Vieme, že práve jeden z nich je Rus, kým ostatní dvaja sú Nemci. Navyše každý Rus musí byť špión.
>
> Keď Stirlitz stretne Müllera na chodbe, zavtipkuje: „Vieš, Müller, ty si taký Nemec, ako som ja Rus.“ Je všeobecne známe, že Stirlitz vždy hovorí pravdu, keď vtipkuje.
>
> Máme rozhodnúť, že Eismann nie je ruský špión.

Pri formalizácii je dôležité zvoliť takú množinu výrokových premenných, aby ste tvrdenia sformalizovali *verne* a príliš *nezjednodušovali*. Napríklad byť Rusom a byť špiónom *nie je* to isté.

Zároveň ale dajte pozor, aby ste vo formalizácii vyjadrili *znalosti na pozadí*, teda aby vaša teória nepripúšťala nejaké nečakané možnosti. Napríklad sa nesmie stať, že niekto nie je ani Rus ani Nemec, alebo niekto je zároveň Rus aj Nemec.

Úlohu budeme na praktických cvičeniach riešiť prostriedkami výpočtovej logiky. Na to je potrebné použiť postup naznačený na prednáške:

1. Uvedomíme si, vyriešeniu akého *logického problému* zodpovedá vyriešenie zadanej úlohy.

   V tomto prípade potrebujeme zistiť, či výrok, o ktorom máme rozhodnúť, je *logickým dôsledkom* teórie opísanej v zadaní, teda či z nej *logicky vyplýva*.

2. *Sformalizujeme* zadanie vo vhodnom logickom jazyku.

   V tomto prípade vyhovuje jazyk výrokovej logiky. Formalizáciou zadania vytvoríme výrokovú *teóriu*, ktorá vyjadruje jednak

   - tvrdenia priamo obsiahnuté v zadaní problému, ale aj
   - naše znalosti o časti sveta, do ktorej je problém zasadený, nazývané *znalosti na pozadí* (angl. background knowledge).

3. *Vyriešime* logický problém. Na to budeme potrebovať niekoľko krokov:

   i. Vyberieme vhodný *výpočtový prostriedok* na riešenie tohto logického problému.

      Problémy vo výrokovej logike sa dajú (po vhodnej úprave) vyriešiť *SAT solverom* — programom, ktorý rieši problém *splniteľnosti* výrokovej teórie, teda hľadá nejaký jej *model*.

ii. *Upravíme* formalizáciu problému logickými metódami tak, aby ho zvolený prostriedok mohol vyriešiť.

SAT solver nevie priamo rozhodovať vyplývanie, ale vyplývanie vieme previesť na splniteľnosť: tvrdenie vyplýva z teórie práve vtedy, keď je zjednotenie teórie s *negáciou* tvrdenia nesplniteľné.

Navyše SAT solver pracuje iba so vstupmi v konjunktívnom normálnom tvare. Zjednotenie teórie s negáciou teda ekvivalentne upravíme do tohto tvaru.

iii. *Vyriešime* logický problém použitím zvoleného výpočtového nástroja.

Spustíme SAT solver na zjednotení teórie a negácie tvrdenia. SAT solver buď zistí, že toto zjednotenie je nesplniteľné, alebo nájde nejaký jeho model.

V prvom prípade tvrdenie je logickým dôsledkom teórie. V druhom prípade logickým dôsledkom nie je.

4. *Interpretujeme* riešenie logického problému ako riešenie zadaného problému.

Ak tvrdenie vyplýva z teórie, interpretujeme to tak, že na základe uvedených informácií *je pravda*, že Eismann nie je ruský špión.

Ak tvrdenie nevyplýva z teórie, interpretujeme to tak, že na základe uvedených informácií *nemôžeme tvrdiť*, že Eismann nie je ruský špión.

*Pozor!* To ešte neznamená, že môžeme tvrdiť, že Eismann *je* ruský špión. Prečo?

**2.2.6** Uvažujme nasledovné tvrdenia o problémoch so štartovaním auta. Navrhnite vhodné výrokové premenné a popíšte ich význam. Následne sformalizujte tvrdenia vo výrokovej logike:

a) Ak je batéria pokazená alebo ak je vybitá, je to príčinou toho, že nepočujeme zvuk štartéra.

b) To, že počujeme zvuk štartéra, ale auto nenaštartuje, môže byť (okrem iného) zapríčinené tým, že batéria je takmer vybitá, alebo tým, že je nádrž prázdna.

c) Ak sa minulo palivo alebo ak je nádrž deravá, tak je nádrž prázdna.

d) Auto nenaštartuje vtedy, keď je nádrž prázdna alebo keď je batéria takmer vybitá.

e) Rovnako platí, že ak sme nepočuli zvuk štartéra, auto nemôže naštartovať.

**2.2.7** V pobočke banky zmizli peniaze zo sejfu. Vo výrokovej logike sformalizujte zistené fakty týkajúce sa viny alebo neviny podozrivých:

a) V čase krádeže bola pobočka zavretá a prístup do nej mali len traja zamestnanci — Atem, Bersičová a Citrák.

b) Ak Atem má alibi, tak má aj Bersičová alibi.

c) Atem nemá kľúč od sejfu, takže sa doň dostal, len ak mu pomohol niekto z dvojice Bersičová a Citrák.

d) Atem bol v čase lúpeže na obede.

## 2.3 Sémantika výrokovej logiky

**2.3.1** Majme danú množinu výrokových premenných $\mathcal{V} = \{p, q, r\}$ a jej ohodnotenie $v = \{p \mapsto t, q \mapsto f, r \mapsto f\}$. Zistite, či ohodnotenie $v$ spĺňa nasledovné formuly:

a) $(p \land (\neg q \to r))$

b) $((r \land q) \to \neg p)$

c) $((\neg p \lor \neg q) \lor \neg r)$

d) $((\neg p \to q) \land \neg(\neg q \lor p))$

e) $\neg(q \to q)$

f) $(p \land p)$

g) $\neg\neg\neg p$

h) $(\neg(p \land p) \lor \neg q)$

i) $(\neg q \to \neg q)$

j) $\big(r \to ((p \lor \neg p) \land \neg(q \to r))\big)$

k) $\big((\neg p \to q) \land \big(\neg q \to (q \lor \neg(q \to r))\big)\big)$

*Riešenie.* a) K úlohe môžeme pristúpiť dvoma spôsobmi:

1. spôsob — zhora nadol: Podľa definícií vzťahu spĺňania ($\models$) a ohodnotenia $v$ platí:

| | | |
|---|---|---|
| $v \models (p \land (\neg q \to r))$ | vtt (podľa def. $\models$) | $v \models p$ a súčasne $v \models (\neg q \to r)$ |
| | vtt (podľa def. $\models$) | $v(p) = t$ a súčasne $v \not\models \neg q$ alebo $v \models r$ |
| | vtt (pretože $v(p) = t$) | $v \not\models \neg q$ alebo $v \models r$ |
| | vtt (podľa def. $\models$) | $v \models q$ alebo $v(r) = t$ |
| | vtt (pretože $v(r) = f$) | $v \models q$ |
| | vtt (podľa def. $\models$) | $v(q) = t$, čo neplatí, lebo $v(q) = f$. |

Konštatujeme teda, že $v \not\models (p \land (\neg q \to r))$.

2. spôsob — zdola nahor: Vyhodnotíme splnenie formuly $A = (p \land (\neg q \to r))$ podľa definície spĺňania pre všetky prvky jej vytvárajúcej postupnosti: $p, q, r, \neg q, (\neg q \to r), (p \land (\neg q \to r))$:

1. $v(p) = t$, teda $v \models p$.
2. $v(q) = f$, teda $v \not\models q$.
3. $v(r) = f$, teda $v \not\models r$.
4. $v \not\models q$, teda $v \models \neg q$.
5. Neplatí ani $v \not\models \neg q$, ani $v \models r$, teda $v \not\models (\neg q \to r)$.
6. Keďže neplatí $v \models (\neg q \to r)$, tak $v \not\models (p \land (\neg q \to r))$.

Tento postup sa dá stručnejšie zapísať do tabuľky, kde v záhlaví si zapíšeme jednotlivé podformuly, ktoré budeme k určeniu splnenia našej formuly potrebovať, a do riadku $v$ poznačíme, či $v$ príslušnú podformulu spĺňa ($\models$) alebo nespĺňa ($\not\models$):

| | $p$ | $q$ | $r$ | $\neg q$ | $(\neg q \to r)$ | $(p \land (\neg q \to r))$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $v$ | $\models$ | $\not\models$ | $\not\models$ | $\models$ | $\not\models$ | $\not\models$ |

$\natural$

**2.3.2** O každej z nasledujúcich formúl nad $\mathcal{V} = \{p, q, r\}$ rozhodnite, či je i. tautológia, ii. splniteľná, iii. falzifikovateľná, iv. nesplniteľná. Rozhodnite o všetkých možnostiach a rozhodnutia zdôvodnite.

a) $(\neg(p \land q) \to (\neg p \land \neg q))$
b) $((p \lor \neg p) \land \neg(q \lor \neg q))$
c) $(p \to (p \to (p \to p)))$
d) $(p \land (q \lor \neg(p \to r)))$
e) $(((p \to p) \to p) \to \neg p)$
f) $\neg(p \leftrightarrow \neg p)$
g) $((p \land \neg p) \lor (p \lor \neg p))$
h) $(p \land \neg p)$
i) $\neg\neg\neg(p \lor p)$
j) $((p \land q) \to (\neg p \land q))$
k) $\neg((p \lor r) \lor (\neg p \lor q))$
l) $\big(((q \lor \neg r) \land (p \to \neg r)) \to (\neg r \to (\neg p \land q))\big)$
m) $\big((p \to (\neg r \to q)) \land ((\neg p \lor \neg q) \land \neg(p \to r))\big)$

*Riešenie.* a) Aby sme rozhodli, akého druhu je formula $A = (\neg(p \land q) \to (\neg p \land \neg q))$, preskúmame všetky rôzne ohodnotenia výrokových premenných, ktoré sa vyskytujú v $A$:

Keďže v $A$ sa vyskytujú dve premenné, takéto ohodnotenia sú štyri. Podobne ako v predchádzajúcej úlohe výsledok nášho skúmania, ako aj čiastkové výsledky, zapíšeme do tabuľky.

| | $v_i$ | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $p$ | $q$ | $p$ | $q$ | $\neg p$ | $\neg q$ | $(p \land q)$ | $\neg(p \land q)$ | $(\neg p \land \neg q)$ | $(\neg(p \land q) \to (\neg p \land \neg q))$ |
| $v_1$ | $f$ | $f$ | $\not\models$ | $\not\models$ | $\models$ | $\models$ | $\not\models$ | $\models$ | $\models$ | $\models$ |
| $v_2$ | $t$ | $f$ | $\models$ | $\not\models$ | $\not\models$ | $\models$ | $\not\models$ | $\models$ | $\not\models$ | $\not\models$ |
| $v_3$ | $f$ | $t$ | $\not\models$ | $\models$ | $\models$ | $\not\models$ | $\not\models$ | $\models$ | $\not\models$ | $\not\models$ |
| $v_4$ | $t$ | $t$ | $\models$ | $\models$ | $\not\models$ | $\not\models$ | $\models$ | $\not\models$ | $\not\models$ | $\models$ |

Keďže máme rozhodnúť o vlastnostiach formuly $A$, nezabudneme vysloviť závery a zdôvodniť ich:

i. Keďže $v_2 \not\models A$, teda *nie všetky* ohodnotenia spĺňajú $A$, tak $A$ *nie je* tautológiou.

ii. Keďže $v_1 \models A$, teda *aspoň jedno* ohodnotenie spĺňa $A$, tak $A$ *je* splniteľná.

iii. Keďže $v_2 \not\models A$, teda *aspoň jedno* ohodnotenie nespĺňa $A$, tak $A$ *je* aj falzifikovateľná.

iv. Keďže $v_1 \models A$, teda *nie je pravda*, že *všetky* ohodnotenia *nespĺňajú* $A$, tak $A$ *nie je* nesplniteľná. ♮

**2.3.3** Zadefinujte vzťah *ohodnotenie v spĺňa formulu X* ($v \models X$) pre výrokovú logiku s nasledujúcimi kombináciami spojok:

a) jediná binárna spojka $\uparrow$ (*Shefferova spojka*, NAND) s neformálnym významom: formula $(A \uparrow B)$ je pravdivá práve vtedy, keď nie je súčasne pravdivá $A$ aj $B$;

b) jediná binárna spojka $\downarrow$ (*Peircova spojka*, NOR) s neformálnym významom: formula $(A \downarrow B)$ je pravdivá práve vtedy, keď nie je pravda, že je pravdivá $A$ alebo je pravdivá $B$;

c) unárna spojka $\neg$ a binárna spojka $\nrightarrow$ („a nie“) s neformálnym významom: formula $(A \nrightarrow B)$ je pravdivá práve vtedy, keď je pravdivá $A$ a nie je pravdivá $B$;

d) binárne spojky $\rightarrow$ a $\nrightarrow$ („a nie“, viď predchádzajúci variant).

e) binárne spojky $\rightarrow$ a $\veebar$ („exkluzívne alebo“, XOR) s neformálnym významom: formula $(A \veebar B)$ je pravdivá práve vtedy, keď je práve jedna z formúl $A$ a $B$ pravdivá.

Definícia syntaxe pre tieto logiky bola predmetom úlohy 2.1.10.

*Riešenie.* a)

**Definícia.** Nech $\mathcal{V}$ je množina výrokových premenných. Nech $v$ je ohodnotenie množiny $\mathcal{V}$. Pre všetky výrokové premenné $p$ z $\mathcal{V}$ a všetky formuly $A$, $B$ nad $\mathcal{V}$ definujeme:

- $v \models p$ vtt $v(p) = t$;
- $v \models (A \uparrow B)$ vtt $v \not\models A$ alebo $v \not\models B$. ♮

**2.3.4** Sformalizujte vo výrokovej logike a naprogramujte riešenie využívajúce SAT solver a vašu formalizáciu pre problém $n$ dám ($n$ queens) pre každé $n \in \mathbb{N}$:

> Ako je možné na šachovnici s rozmermi $n \times n$ políčok rozmiestniť $n$ dám tak, aby sa vzájomne neohrozovali?

Každá dáma ohrozuje na šachovnici všetky ostatné figúrky vo svojom riadku, vo svojom stĺpci a na oboch uhlopriečkach pretínajúcich sa na jej pozícii.

**Pomôcka.** Použite výrokové premenné $q_{i,j}$, $0 \leq i, j < n$, ktorých pravdivostná hodnota bude hovoriť, či je alebo nie je na pozícii $(i, j)$ umiestnená dáma.

Obmedzenia na umiestnenie dám sa dajú sformalizovať jednoduchými implikáciami $(q_{i,j} \to \neg q_{k,\ell})$, kde $(i, j)$ a $(k, \ell)$ sú navzájom sa ohrozujúce pozície dám.

Nemusíme počítať počet dám. Stačí požadovať, že v každom riadku musí byť nejaká dáma (určite nemôžu byť dve dámy v tom istom riadku, keďže ich má byť $n$, musí byť v každom riadku práve jedna).

**2.3.5** Sformalizujte vo výrokovej logike a naprogramujte riešenie využívajúce SAT solver a vašu formalizáciu pre každý vstupný hlavolam Sudoku popísaný maticou $9 \times 9$ čísel $0, 1, \ldots, 9$, pričom $0$ predstavuje prázdne políčko.

Riešenie hlavolamu doplní čísla $1, \ldots, 9$ do prázdnych políčok tak, aby sa všetky tieto čísla vyskytovali v každom riadku, v každom stĺpci a vo všetkých 9 vzájomne sa neprekrývajúcich podmaticiach $3 \times 3$.

**Pomôcka.** Pomocou výrokových premenných $s_{i,j,n}$, $0 \leq i, j \leq 8, 1 \leq n \leq 9$, môžeme sformalizovať, že na súradniciach $(i, j)$ je vpísané číslo $n$. Musíme však sformalizovať obmedzenie, že na každej pozícii musí byť *práve* jedno číslo (teda súčasne najviac jedno a nie dve rôzne). Dá sa to podobne ako pri probléme $n$ dám.

## 2.4 Vyplývanie

**2.4.1** Uvažujme nasledovnú teóriu nad $\mathcal{V} = \{p, r, s\}$:

$$T = \left\{ \begin{array}{l} p, \\ ((p \land r) \to s), \\ (s \lor (r \to p)) \end{array} \right\}$$

Zistite, či z $T$ vyplývajú nasledovné formuly:

a) $(r \land s)$

b) $(r \to s)$

c) $((r \to s) \to \neg p)$

d) $(\neg s \to (\neg r \lor p))$

*Riešenie.* Úlohu vyriešime pre formuly a) a b). Urobíme analýzu všetkých možných ohodnotení $v$ výrokových premenných z teórie $T$, ktoré si zapíšeme do tabuľky. Zistíme, ktoré z týchto ohodnotení sú modelmi $T$. Potom preveríme vyplývanie podľa definície: zistíme, či vo všetkých modeloch $T$ sú formuly a) a b) splnené:

| | $v_i$ | | | $T$ | | | a) | b) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $p$ | $r$ | $s$ | $p$ | $((p \wedge r) \to s)$ | $(s \vee (r \to p))$ | $(r \wedge s)$ | $(r \to s)$ |
| $v_1$ | $f$ | $f$ | $f$ | $\not\models$ | — | — | — | — |
| $v_2$ | $f$ | $f$ | $t$ | $\not\models$ | — | — | — | — |
| $v_3$ | $f$ | $t$ | $f$ | $\not\models$ | — | — | — | — |
| $v_4$ | $f$ | $t$ | $t$ | $\not\models$ | — | — | — | — |
| $v_5$ | $t$ | $f$ | $f$ | $\models$ | $\not\models$ | — | — | — |
| $v_6$ | $t$ | $f$ | $t$ | $\models$ | $\models$ | $\models$ | $\not\models$ | $\models$ |
| $v_7$ | $t$ | $t$ | $f$ | $\models$ | $\not\models$ | — | — | — |
| $v_8$ | $t$ | $t$ | $t$ | $\models$ | $\models$ | $\models$ | $\models$ | $\models$ |

Analýza ohodnotení ukázala, že teória $T$ má dva modely, v tabuľke sú uvedené ako $v_6$ a $v_8$. V prípade a) konštatujeme, že $T \not\models (r \wedge s)$, pretože $v_6 \not\models (r \wedge s)$. V prípade b) naopak $T \models (r \to s)$ keďže $v_6 \models (r \to s)$ aj $v_8 \models (r \to s)$. ♮

Pokiaľ pre niektoré ohodnotenie $v_i$ zistíme, že $v_i \not\models A$, pre hociktorú formulu $A \in T$, tak $v_i$ už modelom $T$ byť podľa definície nemôže. Preto splnenie ostatných formúl v danom riadku už vyhodnocovať netreba. Tieto prípady sme označili znakom „ — “. Ušetrilo nám to množstvo práce.

**2.4.2** Nech $\mathcal{V} = \{p, r\}$. Zistite, či z teórie $S_i$ vyplýva formula $X_i$, pre nasledujúce dvojice $S_i$ a $X_i$, $i \in \{1, 2, 3\}$:

$$S_1 = \{(r \to p),\ (\neg r \to (\neg p \vee p))\} \qquad X_1 = ((p \to r) \to r);$$

$$S_2 = \{(\neg r \to (\neg p \vee r)),\ (p \vee \neg r)\} \qquad X_2 = ((p \vee r) \to p);$$

$$S_3 = \{((p \to r) \to p),\ (p \vee \neg r)\} \qquad X_3 = (\neg p \to (r \wedge p)).$$

**2.4.3** Je daná teória $T$ nad $\mathcal{V} = \{a, b, \ldots, z\}^+$:

$$T = \left\{ \begin{array}{c} (p \to (q \wedge r)), \\ ((q \to p) \vee (s \to r)), \\ (\neg p \to (\neg r \wedge s)) \end{array} \right\}$$

Zistite, či z $T$ vyplývajú nasledovné formuly:

a) $p$,
b) $((p \wedge q) \to r)$,
c) $((s \wedge r) \to \neg p)$,
d) $((\neg p \wedge s) \to (\neg r \wedge \neg q))$,
e) $((p \wedge q) \to s)$,
f) $\neg r$,
g) $((s \vee p) \to r)$,
h) $((p \to r) \wedge (r \to p))$.

**2.4.4** V prípade bankovej lúpeže inšpektor Nick Fishtrawn zaistil štyroch podozrivých Browna, Smitha, Taylora, a McDonnalda, pričom zistil nasledujúce skutočnosti:

($A_1$) Brown a Smith sú súčasne vinní, iba ak je Taylor ich spolupáchateľom.

($A_2$) Ak je Brown vinný, tak aspoň jeden z Smith, Taylor je jeho spolupáchateľom.

($A_3$) Taylor nikdy nepracuje bez McDonnalda.

($A_4$) McDonnald je vinný, ak je Brown nevinný.

Pomôžte inšpektorovi Fishtrawnovi zistiť, kto z podozrivých je určite vinný a má ho obviniť, kto je naopak určite nevinný a má ho oslobodiť, a o koho vine či nevine nemožno rozhodnúť. Svoje odpovede dokážte.

**Pomôcka.** Sformalizujte zistené skutočnosti ako teóriu $T$ nad množinou vhodne zvolených výrokových premenných $\mathcal{V}$. Zistite, či je teória $T$ konzistentná. Následne rozhodnite, koho *vina* ale aj koho *nevina* z $T$ *vyplýva*. Zistite, koho vina a nevina je od $T$ *nezávislá*. Vyvoďte z toho závery o tom, koho je možné obviniť, koho je možné oslobodiť, a o koho vine ani nevine nemožno rozhodnúť.

**2.4.5** V prípade lúpeže v klenotníctve predviedli na políciu troch podozrivých Adamsovú, Millsa a Doylea. Inšpektorka Fishcousová počas vyšetrovania zistila tieto skutočnosti:

($A_1$) Doyle je vinný, ak je Adamsová vinná a Mills nevinný.

($A_2$) Doyle nikdy nepracuje sám.

($A_3$) Adamsová nikdy nepracuje s Doyleom.

($A_4$) Do prípadu nie je zapletený nikto okrem Adamsovej, Millsa a Doylea a aspoň jeden z nich je vinný.

Podobne ako v predchádzajúcej úlohe zistite, koho z podozrivých má inšpektorka obviniť, kto je určite nevinný a o koho vine či nevine nemožno rozhodnúť. Svoje odpovede dokážte.

**2.4.6** Nech $X$ a $Y$ sú ľubovoľné výrokové formuly, nech $T$ je ľubovoľná výroková teória. Dokážte alebo vyvráťte:

a) $\{\} \models X$ vtt $X$ je tautológia.

b) Formuly $X$ a $Y$ sú ekvivalentné vtt $(X \leftrightarrow Y)$ je tautológia.

c) Ak $T \models \neg X$, tak $T \not\models X$.

d) Ak $T \not\models X$, tak $T \models \neg X$.

e) $T \models (X \rightarrow Y)$ vtt $T \cup \{X\} \models Y$.

f) Ak $T \models (X \rightarrow Y)$, tak $T \not\models X$ alebo $T \models Y$.

g) Ak $T \not\models X$ alebo $T \models Y$, tak $T \models (X \rightarrow Y)$.

h) Ak $T \models (X \vee Y)$, tak $T \models X$ alebo $T \models Y$.

i) Ak $T \models X$ alebo $T \models Y$, tak $T \models (X \vee Y)$.

j) $T \models X$ a $T \models Y$ vtt $T \models (X \wedge Y)$.

k) Formula $(X \rightarrow Y)$ je nesplniteľná vtt $X$ je tautológia a $Y$ je nesplniteľná.

l) Formula $X$ je nezávislá od $\{\}$ vtt $X$ je splniteľná a falzifikovateľná.

m) Ak formula $X$ logicky nevyplýva z $T$ a ani nie je nezávislá od $T$, tak $T$ je splniteľná a vyplýva z nej negácia $X$.

n) Ak $T \models (A \rightarrow B)$, tak $T \cup \{\neg B\} \models \neg A$.

o) Ak $T \not\models (A \wedge B)$, tak $T \models \neg A$ alebo $T \models \neg B$.

p) Ak $T \not\models (A \vee B)$, tak $T \not\models A$ a $T \not\models B$.

q) Ak $T \models (A \rightarrow B)$, tak $T \not\models (A \wedge \neg B)$.

*Riešenie.* a)

Tvrdenia, ktoré majú formu ekvivalencie, zvyčajne dokazujeme ako implikácie v oboch smeroch. Inak povedané, musíme dokázať, že $\{\} \models X$ je postačujúcou ($\Rightarrow$) aj nutnou ($\Leftarrow$) podmienkou toho, že $X$ je tautológia, teda:

($\Rightarrow$) ak $\{\} \models X$, tak $X$ je tautológia; ($\Leftarrow$) ak $X$ je tautológia, $\{\} \models X$.

($\Rightarrow$) a ($\Leftarrow$) sú zvyčajné označenia dvoch implikácií, ktoré tvoria ekvivalenciu (*nezamieňajte* ich so symbolom implikácie $\rightarrow$). Obe dokážeme priamymi dôkazmi.

Pri priamom dôkaze implikácie predpokladáme jej antecedent (ľavú stranu) a snažíme sa ukázať, že z jeho platnosti a z doteraz známych definícií a tvrdení vyplýva konzekvent (pravá strana).

($\Rightarrow$) Nech $X$ je ľubovoľná formula. Predpokladajme, že $\{\} \models X$. Chceme ukázať, že potom $X$ je tautológia.

Podľa definície vyplývania teda predpokladáme, že každé ohodnotenie $v$, ktoré spĺňa teóriu $\{\}$, spĺňa aj formulu $X$. Podľa definície tautológie chceme dokázať, že každé ohodnotenie $v$ spĺňa $X$.

Najprv si uvedomíme, ako sú definované pojmy, ktoré sa v tvrdení vyskytujú. Tým si vyjasníme, čo vlastne predpokladáme a čo dokazujeme.

Zoberme teda ľubovoľné ohodnotenie $v$. Pretože teória $\{\}$ neobsahuje žiadne formuly, $v$ spĺňa všetky formuly, ktoré do nej patria, a teda podľa definície splnenia teórie ohodnotením, $v \models \{\}$. Z predpokladu,že z $\{\}$ vyplýva $X$, potom máme, že $v \models X$. Na základe tohto zistenia a preto, že $v$ bolo ľubovoľné, môžeme konštatovať, že každé ohodnotenie $v$ spĺňa $X$, teda $X$ je tautológia, čo bolo treba dokázať.

Keď máme dokázať, že *všetky* objekty nejakého typu (ohodnotenia) majú nejakú vlastnosť (spĺňajú $X$), zoberieme si hocijaký taký objekt a ukážeme, že keď poctivo preskúmame všetky možnosti, ktoré môžu nastať, tento objekt bude vždy mať požadovanú vlastnosť.

($\Leftarrow$) Nech $X$ je ľubovoľná formula. Predpokladajme, že $X$ je tautológia, teda že (podľa definície tautológie) všetky ohodnotenia spĺňajú $X$. Chceme dokázať, že potom $\{\} \models X$ teda, že (podľa definície vyplývania) všetky ohodnotenia, ktoré spĺňajú $\{\}$, spĺňajú aj $X$.

Zoberme teda ľubovoľné ohodnotenie $v$. Predpokladajme, že $v \models \{\}$, a ukážme, že $v \models X$. To však máme priamo z predpokladu, že $X$ je tautológia. Teda konštatujeme, že každé ohodnotenie, ktoré spĺňa $\{\}$, spĺňa aj $X$, teda z $\{\}$ vyplýva $X$, čo bolo treba dokázať.

💡 Jasnejšia formulácia dokazovaného tvrdenia je: *Pre všetky ohodnotenia $v$, ak $v \models \{\}$, tak $v \models X$.* Ide opäť o všeobecne kvantifikovanú implikáciu. Postup na jej dôkaz bude teda: Zobrať ľubovoľný objekt požadovaného typu, predpokladať antecedent a dokázať konzekvent.

Dokázaním tvrdení ($\Rightarrow$) a ($\Leftarrow$) sme dokázali tvrdenie a).

c)

💡 Pokúsme sa tvrdenie dokázať. Je to implikácia, takže predpokladáme pravdivosť jej antecedentu (ľavej strany) a snažíme sa ukázať pravdivosť konzekventu (pravej strany).

Predpokladajme, že $T \models \neg X$. Naším cieľom je dokázať, že potom $T \not\models X$.

Uvedomíme si definíciu vyplývania a aplikujeme ju na náš prípad:

Podľa predpokladu každé ohodnotenie $v$, ktoré spĺňa $T$ spĺňa aj $\neg X$. Máme dokázať, že nie je pravda, že každé ohodnotenie $v$, ktoré spĺňa $T$, spĺňa aj $X$. To znamená, že musíme nájsť nejaké ohodnotenie $v$, ktoré spĺňa $T$, ale nespĺňa $X$.

Zdá sa, že s nájdením ohodnotenia by nám mohol pomôcť nasledujúci rozbor prípadov.

Pre každú teóriu sú dve možnosti: buď existuje ohodnotenie, ktoré ju spĺňa, alebo také ohodnotenie neexistuje.

- Ak existuje $v$, ktoré spĺňa $T$, tak podľa predpokladu $v \models \neg X$, a teda $v \not\models X$. V tomto prípade teda existuje ohodnotenie, ktoré spĺňa $T$, ale nespĺňa $X$.
- Ak neexistuje $v$, ktoré spĺňa $T$, tak neexistuje ani ohodnotenie, ktoré by spĺňalo $T$ a navyše nespĺňalo $X$. Požadovaný cieľ v tomto prípade **nie je možné dosiahnuť**.

  Situáciu by ešte mohlo zachrániť, keby prípad „neexistuje $v$, ktoré spĺňa $T$" nemohol nastať, lebo je v spore s nejakým predchádzajúcim predpokladom. To však nie je pravda, čo dokážeme nájdením *konkrétnej* teórie $T$ a formuly $X$, pre ktoré sú predpoklady pravdivé, ale záver nie.

Zoberme jazyk s množinou výrokových premenných $\mathcal{V} = \{a\}$, teóriu $T = \{(a \wedge \neg a)\}$ a formulu $X = a$. $T$ je nesplniteľná, a preto triviálne platí, že z $T$ vyplýva $\neg X$ (pretože pre každé ohodnotenie $v$ je implikácia „ak $v \models T$, tak $v \models \neg X$" pravdivá, pretože jej antecedent je nepravdivý). Zároveň ale žiadne ohodnotenie nemá vlastnosť, že spĺňa $T$ a nespĺňa $X$.

Konštatujeme teda, že tvrdenie c) **neplatí**. Vyššie uvedená teória a formula tvoria jeden z jeho ***kontrapríkladov***.

d)

Predpokladajme, že $T \not\models X$, a zistime, či $T \models \neg X$. Podľa predpokladu existuje nejaké ohodnotenie $v$, pre ktoré platí $v \models T$, ale $v \not\models X$. Máme dokázať, že potom pre každé ohodnotenie $w$ platí, že ak $w \models T$, tak $w \models \neg X$.

Zoberme teda ľubovoľné ohodnotenie $w$ a predpokladajme, že $w \models T$. Ak $w = v$, tak $w \not\models X$, a teda $w \models \neg X$. Ak však $w \neq v$, túto úvahu uplatniť nemôžeme. Nie je ťažké si uvedomiť, že predpoklad tvrdenia a tento prípad vieme dosiahnuť pre konkrétne $T$, $X$ a ohodnotenie $v$, pričom však nejaké iné ohodnotenie splní $T$ aj $X$, a teda nesplní $\neg X$.

Máme teda dôvod sa domnievať, že tvrdenie neplatí. Potvrdíme to nájdením *konkrétneho* kontrapríkladu.

Zoberme jazyk s dvojprvkovou $\mathcal{V} = \{a, b\}$, teóriu $T = \{a\}$ a formulu $X = b$. Potom $T \not\models X$, lebo pre ohodnotenie $v = \{a \mapsto t, b \mapsto f\}$ máme $v \models T$ a $v \not\models X$. Zároveň pre ohodnotenie $w = \{a \mapsto t, b \mapsto t\}$ máme $w \models T$ a $w \models X$, teda $w \not\models \neg X$. Preto $T \not\models \neg X$. Našli sme kontrapríklad, takže tvrdenie d) **neplatí**. $\natural$

## 2.5 Ekvivalencia a konjunktívny normálny tvar

**2.5.1** Dokážte, že nasledujúce dvojice formúl, ktoré sa zvyčajne používajú na ekvivalentné úpravy formúl, sú (sémanticky) ekvivalentné ($\top$ je ľubovoľná tautológia, $\bot$ je ľubovoľná nesplniteľná formula):

a) asociatívnosť $\land$ a $\lor$:
$(p \land (q \land r))$ a $((p \land q) \land r)$,
$(p \lor (q \lor r))$ a $((p \lor q) \lor r)$;

b) distributívnosť $\land$ cez $\lor$ a $\lor$ cez $\land$:
$(p \land (q \lor r))$ a $((p \land q) \lor (p \land r))$,
$(p \lor (q \land r))$ a $((p \lor q) \land (p \lor r))$;

c) komutatívnosť $\land$ a $\lor$:
$(p \land r)$ a $(r \land p)$,
$(p \lor r)$ a $(r \lor p)$;

d) de Morganove pravidlá:
$\neg(p \land r)$ a $(\neg p \lor \neg r)$,
$\neg(p \lor r)$ a $(\neg p \land \neg r)$;

e) dvojitá negácia:
$\neg\neg p$ a $p$;

f) idempotencia:
$(p \land p)$ a $p$,
$(p \lor p)$ a $p$;

g) identita:
$(p \land \top)$ a $p$,
$(p \lor \bot)$ a $p$;

h) absorpcia:
$(p \lor (p \land r))$ a $p$,
$(p \land (p \lor r))$ a $p$;

i) vylúčenie tretieho:
$(p \lor \neg p)$ a $\top$;

j) spor:
$(p \land \neg p)$ a $\bot$;

k) nahradenie $\rightarrow$:
$(p \rightarrow r)$ a $(\neg p \lor r)$.

*Riešenie.* d) Dokážme ekvivalentnosť formúl de Morganovo pravidla pre konjunkciu. Preverme splnenie formúl $\neg(p \land r)$ a $(\neg p \lor \neg r)$ vo všetkých rôznych ohodnotenia tých výrokových premenných, ktoré sa v skúmaných formulách vyskytujú:

| | $v_i$ | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $p$ | $r$ | $p$ | $r$ | $\neg p$ | $\neg r$ | $(p \wedge r)$ | $\neg(p \wedge r)$ | $(\neg p \vee \neg r)$ |
| $v_1$ | $f$ | $f$ | $\not\models$ | $\not\models$ | $\models$ | $\models$ | $\not\models$ | $\models$ | $\models$ |
| $v_2$ | $t$ | $f$ | $\models$ | $\not\models$ | $\not\models$ | $\models$ | $\not\models$ | $\models$ | $\models$ |
| $v_3$ | $f$ | $t$ | $\not\models$ | $\models$ | $\models$ | $\not\models$ | $\not\models$ | $\models$ | $\models$ |
| $v_4$ | $t$ | $t$ | $\models$ | $\models$ | $\not\models$ | $\not\models$ | $\models$ | $\not\models$ | $\not\models$ |

Z tabuľky vidíme, že skutočne pre každé ohodnotenie $v_i$, $i \in \{1, \ldots, 4\}$, platí $v_i \models \neg(p \wedge r)$ vtt $v_i \models (\neg p \vee \neg r)$. Z toho, z tvrdenia 2.25 z prednášky a z definície ekvivalencie vyplýva, že formuly $\neg(p \wedge r)$ a $(\neg p \vee \neg r)$ sú ekvivalentné.

Podobne ako pri skúmaní sémantických vlastností jednotlivých formúl či overovaní vyplývania, nezabudnime vysloviť záver, ktorý z preskúmania všetkých ohodnotení vyvodzujeme.

♮

**2.5.2** K nasledujúcim formulám nájdite ekvivalentné formuly v CNF pomocou algoritmu CNF:

a) $(\neg(q \vee r) \vee (\neg p \rightarrow s))$
b) $((q \wedge \neg s) \rightarrow (p \wedge r))$
c) $((p \vee q) \rightarrow (\neg q \wedge r))$
d) $((p \vee \neg r) \rightarrow (\neg q \wedge r))$.
e) $((\neg p \vee q) \rightarrow (r \rightarrow s))$
f) $((p \rightarrow p) \rightarrow (p \rightarrow p))$,
g) $((((p \rightarrow p) \rightarrow p) \rightarrow p) \rightarrow p)$,
h) $\big(((r \rightarrow q) \rightarrow (q \wedge \neg p)) \rightarrow (\neg(q \wedge r) \wedge (p \vee s))\big)$

*Riešenie.* a)

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $(\neg(q \vee r) \vee (\neg p \rightarrow s))$ | |
| 2. | $(\neg(q \vee r) \vee (\neg\neg p \vee s))$ | nahradenie implikácie |
| 3. | $(\neg(q \vee r) \vee (p \vee s))$ | odstránenie dvojitej negácie |
| 4. | $((\neg q \wedge \neg r) \vee (p \vee s))$ | de Morganovo pravidlo |
| 5. | $(((\neg q \wedge \neg r) \vee p) \vee s)$ | asociatívnosť $\vee$ |
| 6. | $(((\neg q \vee p) \wedge (\neg r \vee p)) \vee s)$ | distributívnosť $\vee$ cez $\wedge$ |
| 7. | $(((\neg q \vee p) \vee s) \wedge ((\neg r \vee p) \vee s))$ | distributívnosť $\vee$ cez $\wedge$ |

♮

**2.5.3** Pre každú výslednú CNF formulu z úlohy 2.5.2 určte množinu jej klauzúl a mohutnosť tejto množiny.

**2.5.4** Rozhodnite o nasledujúcich formulách, či sú literálmi, klauzulami, v disjunktívnom normálnom tvare, v konjunktívnom normálnom tvare. Pri formulách v konjunktívnom normálnom tvare určte, z koľkých klauzúl sa skladajú.

a) $p$

b) $\neg r$

c) $\neg\neg q$

d) $((p \vee q) \to r)$

e) $((p \vee q) \vee r)$

f) $((p \vee \neg q) \vee (q \vee \neg r))$

g) $((p \wedge q) \wedge \neg(q \wedge \neg r))$

h) $((p \vee q) \wedge (\neg p \wedge r))$

i) $\big(p \wedge (q \wedge (\neg q \wedge \neg r))\big)$

j) $\big(((p \wedge q) \vee (q \wedge \neg r)) \vee (\neg r \wedge \neg p)\big)$

k) $\big(((p \vee q) \wedge (q \vee \neg r)) \wedge (\neg r \vee \neg p)\big)$

l) $\big(\big((p \wedge q) \vee (q \vee \neg(r \wedge p))\big) \vee (\neg r \wedge \neg p)\big)$

m) $\big(\big((p \wedge q) \vee (q \vee (\neg r \wedge \neg p))\big) \vee (\neg r \wedge \neg p)\big)$

n) $\big(\big((p \wedge q) \vee (q \vee (\neg r \vee \neg p))\big) \vee (\neg r \wedge \neg p)\big)$

o) $\big(\big((p \wedge q) \vee (q \wedge (\neg r \vee \neg p))\big) \vee (\neg r \wedge \neg p)\big)$

p) $\big(\big((p \vee q) \wedge (q \vee (\neg r \vee \neg p))\big) \wedge (\neg r \vee \neg p)\big)$

q) $\big(\big((p \wedge q) \vee (q \wedge (\neg r \vee \neg p))\big) \vee \neg(r \wedge \neg p)\big)$

r) $\big(\big((p \vee q) \vee (q \vee (\neg r \vee \neg p))\big) \wedge (\neg r \wedge \neg p)\big)$

**2.5.5** Pre každú formulu $X$ z úlohy 2.5.4, ktorá je v disjunktívnom normálnom tvare, nájdite všetky ohodnotenia výrokových premenných vyskytujúcich sa v $X$, ktoré spĺňajú $X$.

**2.5.6** Nech $A$, $B$, $C$ a $D$ sú formuly. Dokážte priamo z definície ekvivalentnosti formúl alebo vyvráťte:

a) Ak $A$ je ekvivalentná s $C$ a $B$ je ekvivalentná s $D$, tak $(A \wedge B)$ je ekvivalentná s $(C \wedge D)$.

b) Ak $(A \wedge B)$ je ekvivalentná s $(C \wedge D)$, tak $A$ je ekvivalentná s $C$ a $B$ je ekvivalentná s $D$.

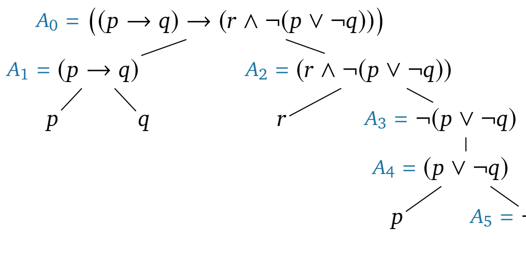
**2.5.7** Nájdite pomocou Cejtinovej transformácie ekvisplniteľné formuly v CNF k nasledujúcim formulám:

a) $(\neg(p \wedge q) \to \neg p)$,

b) $\big((p \to (q \vee \neg r)) \to (r \wedge q)\big)$,

c) $\big((p \to q) \to (r \wedge \neg(p \vee \neg q))\big)$.

*Riešenie.* c) Pre nájdenie ekvisplniteľnej formuly pomocou Cejtinovej transformácie si najprv jednotlivé podformuly okrem atomických označíme pomocou $A_i$. Rozklad a značenie si zakreslíme vo vytvárajucom strome, pričom v koreni sa bude nachádzať formula zo zadania, ktorú označíme $A_0$. K jednotlivým úrovniam stromu si po pravej strane zapíšeme formuly podľa Cejtinovej transformácie z prednášky.




$$x_0$$

$$(x_0 \leftrightarrow (x_1 \to x_2))$$

$$x_1 \leftrightarrow (p \to q) \quad (x_2 \leftrightarrow (r \wedge x_3))$$

$$(x_3 \leftrightarrow \neg x_4)$$

$$(x_4 \leftrightarrow (p \vee x_5))$$

$$(x_5 \leftrightarrow \neg q)$$

Jednotlivé formuly z pravého stĺpca si teraz postupne prevedieme do CNF. Upravené formuly označíme $C_i$.

Úprava formuly $x_0$:

1. $x_0 = C_0$

Úprava formuly $(x_0 \leftrightarrow (x_1 \to x_2))$:

1. $\big((x_0 \to (x_1 \to x_2)) \wedge ((x_1 \to x_2) \to x_0)\big)$
2. $\big((\neg x_0 \vee (\neg x_1 \vee x_2)) \wedge (\neg(\neg x_1 \vee x_2) \vee x_0)\big)$
3. $\big((\neg x_0 \vee \neg x_1 \vee x_2) \wedge ((x_1 \wedge \neg x_2) \vee x_0)\big)$
4. $\big((\neg x_0 \vee \neg x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_0) \wedge (\neg x_2 \vee x_0)\big) = C_1$

Úprava formuly $(x_1 \leftrightarrow (p \to q))$:

1. $\big((x_1 \to (p \to q)) \wedge ((p \to q) \to x_1)\big)$
2. $\big((\neg x_1 \vee (\neg p \vee q)) \wedge (\neg(\neg p \vee q) \vee x_1)\big)$
3. $\big((\neg x_1 \vee \neg p \vee q) \wedge ((p \wedge \neg q) \vee x_1)\big)$
4. $\big((\neg x_1 \vee \neg p \vee q) \wedge (p \vee x_1) \wedge (\neg q \vee x_1)\big) = C_2$

Úprava formuly $(x_2 \leftrightarrow (r \wedge x_3))$:

1. $\big((x_2 \to (r \wedge x_3)) \wedge ((r \wedge x_3) \to x_2)\big)$
2. $\big((\neg x_2 \vee (r \wedge x_3)) \wedge (\neg(r \wedge x_3) \vee x_2)\big)$
3. $\big((\neg x_2 \vee r) \wedge (\neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg r \vee \neg x_3 \vee x_2)\big) = C_3$

Úprava formuly $(x_3 \leftrightarrow \neg x_4)$:

1. $\big((x_3 \to \neg x_4) \wedge (\neg x_4 \to x_3)\big)$
2. $\big((\neg x_3 \vee \neg x_4) \wedge (x_4 \vee x_3)\big) = C_4$

Úprava formuly $(x_4 \leftrightarrow (p \vee x_5))$:

1. $\big((x_4 \to (p \vee x_5)) \wedge ((p \vee x_5) \to x_4)\big)$
2. $\big((\neg x_4 \vee (p \vee x_5)) \wedge (\neg(p \vee x_5) \vee x_4)\big)$

3. $\big((\neg x_4 \lor p \lor x_5) \land ((\neg p \land \neg x_5) \lor x_4)\big)$
4. $\big((\neg x_4 \lor p \lor x_5) \land (\neg p \lor x_4) \land (\neg x_5 \lor x_4)\big) = C_5$

Úprava formuly $(x_5 \leftrightarrow \neg q)$:

1. $\big((x_5 \rightarrow \neg q) \land (\neg q \rightarrow x_5)\big)$
2. $\big((\neg x_5 \lor \neg q) \land (q \lor x_5)\big) = C_6$

Spojením formúl $C_0$ až $C_6$ do konjunkcie získavame formulu, ktorá je ekvisplniteľnou formulou k formule $\big((p \rightarrow q) \rightarrow (r \land \neg(p \lor \neg q))\big)$ zo zadania. Formulu zapíšeme nasledovne:

$$(C_0 \land C_1 \land C_2 \land C_3 \land C_4 \land C_5 \land C_6)$$ ♮

## 2.6 Hilbertovský kalkul

**2.6.1** Uvažujme teóriu

$$T = \left\{ \begin{array}{c} ((p \lor q) \rightarrow \neg s), \\ (\neg r \rightarrow \neg\neg s), \\ \big(r \rightarrow (u \land t)\big), \\ ((r \rightarrow \neg q) \rightarrow u) \end{array} \right\}.$$

Dokážte bez použitia vety o dedukcii:

a) $T \vdash (p \rightarrow \neg s)$,

Dokážte pomocou vety o dedukcii:

b) $T \vdash (p \rightarrow \neg s)$,

c) $T \vdash (p \rightarrow t)$,

d) $T \vdash ((p \lor \neg q) \rightarrow u)$,

e) $T \vdash (q \rightarrow (r \land t))$.

*Riešenie.* a)

O tom, že formula $(p \rightarrow \neg s)$ vyplýva z teórie $T$ sa neformálne vieme presvedčiť takto:

> Zoberme ľubovoľný model $T$. Predpokladajme, že spĺňa aj $p$. Potom spĺňa $(p \lor q)$. Pretože aj formula $((p \lor q) \rightarrow \neg s)$ je splnená (lebo je z $T$), musí byť splnené aj $\neg s$.
>
> Ak $p$ nie je vo zvolenom modeli splnené, $(p \rightarrow \neg s)$ je splnené triviálne.
>
> Teda v každom modeli $T$ je splnené $(p \rightarrow \neg s)$.

Úvahu o nesplnení $p$ v hilbertovskom kalkule priamo nevyjadrujeme. Musíme však zachytiť, že prvá časť dôkazu prebieha za predpokladu $p$:

Odvodenie $\neg s$ z $(p \lor q)$ a $((p \lor q) \rightarrow \neg s)$ za predpokladu $p$ vyjadruje inštancia schémy axióm A2 pre $A = p$, $B = (p \lor q)$, $C = \neg s$:

$$\big((p \rightarrow ((p \lor q) \rightarrow \neg s)) \rightarrow ((p \rightarrow (p \lor q)) \rightarrow (p \rightarrow \neg s))\big)$$

Aby sme ju mohli použiť, musíme pridať predpoklad $p$ k $((p \lor q) \to \neg s)$ z $T$ pomocou schémy A1.
Navyše potrebujeme odvodiť, že $p$ implikuje $(p \lor q)$. To v hilbertovskom kalkule predstavuje schéma axióm A6.

| | | |
|---|---|---|
| $Y_1 =$ | $(p \to (p \lor q))$ | A6 pre $A = p$, $B = q$ |
| $Y_2 =$ | $((p \lor q) \to \neg s)$ | $T$ |
| $Y_3 =$ | $\big(((p \lor q) \to \neg s) \to \big(p \to ((p \lor q) \to \neg s)\big)\big)$ | A1 pre $A = ((p \lor q) \to \neg s)$, $B = p$ |
| $Y_4 =$ | $\big(p \to ((p \lor q) \to \neg s)\big)$ | MP $Y_2, Y_3$ |
| $Y_5 =$ | $\big(\big(p \to ((p \lor q) \to \neg s)\big) \to \big((p \to (p \lor q)) \to (p \to \neg s)\big)\big)$ | A2 pre $A = p$, $B = (p \lor q)$, $C = \neg s$ |
| $Y_6 =$ | $\big((p \to (p \lor q)) \to (p \to \neg s)\big)$ | MP $Y_4, Y_5$ |
| $Y_7 =$ | $(p \to \neg s)$ | MP $Y_1, Y_6$ |

b)

Veta o dedukcii umožňuje dokázať implikáciu $(p \to \neg s)$ hilbertovským dôkazom, ktorý sa veľmi podobá neformálnemu dôkazu z komentára k príkladu a). Vďaka nej sa vyhneme komplikovanému použitiu schém axióm A1 a A2.

Podľa vety o dedukcii $T \vdash (p \to \neg s)$ vtt $T \cup \{p\} \vdash \neg s$. To, že $T \cup \{p\} \vdash \neg s$, ukážeme nasledovne:

| | | |
|---|---|---|
| $Y_1 =$ | $p$ | $T \cup \{p\}$ |
| $Y_2 =$ | $(p \to (p \lor q))$ | A6 pre $A = p$, $B = q$ |
| $Y_3 =$ | $(p \lor q)$ | MP $Y_1, Y_2$ |
| $Y_4 =$ | $((p \lor q) \to \neg s)$ | $T \cup \{p\}$ |
| $Y_5 =$ | $\neg s$ | MP $Y_3, Y_4$ |

$\natural$

## 2.7 Tablový kalkul

### Vyplývanie a tautológie v tablách

**2.7.1** Pripomeňme si prípad lúpeže v klenotníctve z úlohy 2.4.5: Na políciu predviedli troch podozrivých Adamsovú, Millsa a Doylea. Počas vyšetrovania sa zistilo:

a) Doyle je vinný, ak je Adamsová vinná a Mills nevinný.

b) Doyle nikdy nepracuje sám.

c) Adamsová nikdy nepracuje s Doyleom.

d) Do prípadu nie je zapletený nikto okrem Adamsovej, Millsa a Doylea a aspoň jeden z nich je vinný.

Dokážte pomocou tablového kalkulu, že z týchto skutočností vyplýva, že Mills je vinný.

*Riešenie.* Našim cieľom je dokázať, že tvrdenie *Mills je vinný* vyplýva zo sformalizovaných výrokov tvoriacich teóriu. Pri formalizácii sme v úlohe rozpoznali tri atomické výroky, ktoré reprezentujeme výrokovými premennými $\mathcal{V} = \{A, M, D\}$, pričom každá premenná znamená, že príslušný podozrivý je vinný. Zistenia (a–d) sme sformalizovali do nasledovnej teórie:

$$T = \left\{ \begin{array}{c} ((A \land \neg M) \to D)), \\ (D \to (A \lor M)), \\ (A \to \neg D), \\ (A \lor (M \lor D)) \end{array} \right\}.$$

Úlohu riešime tablovým kalkulom. Dokazujeme, že $M$ (teda *Mills je vinný*) vyplýva z teórie $T$, teda že $T \models M$. Platí to, ak sa nám v table pre $T_M^+ = \{\mathbf{T}((A \land \neg M) \to D)), \mathbf{T}(D \to (A \lor M)), \mathbf{T}(A \to \neg D), \mathbf{T}(A \lor (M \lor D)), \mathbf{F}\,M\}$ podarí uzavrieť všetky vetvy.

1. $\mathbf{T}((A \land \neg M) \to D)$ $T_M^+$
2. $\mathbf{T}(D \to (A \lor M))$ $T_M^+$
3. $\mathbf{T}(A \to \neg D)$ $T_M^+$
4. $\mathbf{T}(A \lor (M \lor D))$ $T_M^+$
5. $\mathbf{F}\,M$ $T_M^+$

- 6. $\mathbf{T}\,A$ $\beta 4$
  - 7. $\mathbf{F}\,A$ $\beta 3$
    $*$ 6, 7
  - 8. $\mathbf{T}\,\neg D$ $\beta 3$
    9. $\mathbf{F}\,D$ $\alpha 8$
    - 10. $\mathbf{F}(A \land \neg M)$ $\beta 1$
      - 11. $\mathbf{F}\,A$ $\beta 10$
        $*$ 6, 11
      - 12. $\mathbf{F}\,\neg M$ $\beta 10$
        13. $\mathbf{T}\,M$ $\alpha 12$
        $*$ 5, 13
    - 14. $\mathbf{T}\,D$ $\beta 1$
      $*$ 9, 14
- 15. $\mathbf{T}(M \lor D)$ $\beta 4$
  - 16. $\mathbf{T}\,M$ $\beta 15$
    $*$ 5, 16
  - 17. $\mathbf{T}\,D$ $\beta 15$
    - 18. $\mathbf{F}\,D$ $\beta 2$
      $*$ 17, 18
    - 19. $\mathbf{T}(A \lor M)$ $\beta 2$
      - 20. $\mathbf{T}\,A$ $\beta 19$
        - 21. $\mathbf{F}\,A$ $\beta 3$
          $*$ 20, 21
        - 22. $\mathbf{T}\,\neg D$ $\beta 3$
          23. $\mathbf{F}\,D$ $\alpha 22$
          $*$ 17, 23
      - 24. $\mathbf{T}\,M$ $\beta 19$
        $*$ 5, 24

Podarilo sa nám uzavrieť všetky vetvy tabla, a teda sme dokázali, že $T \models M$. Teda tvrdenie, že Mills je vinný vyplýva zo zadaných tvrdení (a–d). ♮

**2.7.2** Pripomeňme si prípad bankovej lúpeže z úlohy 2.4.4: Inšpektor Nick Fishtrawn zaistil podozrivých Browna, Smitha, Taylora a McDonnalda, pričom zistil, že:

($A_1$) Brown a Smith sú súčasne vinní, iba ak je Taylor ich spolupáchateľom.

($A_2$) Ak je Brown vinný, tak aspoň jeden z Smith, Taylor je jeho spolupáchateľom.

($A_3$) Taylor nikdy nepracuje bez McDonnalda.

($A_4$) McDonnald je vinný, ak je Brown nevinný.

Dokážte pomocou tablového kalkulu, že z týchto skutočností vyplývajú nasledujúce tvrdenia ($X$) a ($Y$).

($X$) Ak je Taylor nevinný, tak je nevinný aj Brown.

($Y$) McDonnald je vinný.

**2.7.3** Dokážte v tablovom kalkule, že nasledujúce formuly sú tautológie:

a) $\big((p \to r) \to ((r \to s) \to (p \to s))\big)$,

b) $((\neg p \to \neg r) \leftrightarrow (r \to p))$,

c) $(\neg\neg p \leftrightarrow p)$,

d) $\big(((p \to r) \land (p \to \neg r)) \to \neg p\big)$,

e) $\big(p \to (\neg r \to \neg(p \to r))\big)$,

f) $\big((p \to (r \to s)) \to ((p \to r) \to (p \to s))\big)$,

g) $\big(p \to (r \to (p \land r))\big)$,

h) $\big(((p \to s) \land (r \to s)) \to ((p \lor r) \to s)\big)$,

i) $(p \to (r \to p))$,

j) $(p \to (p \lor r))$,

k) $(\neg p \to (p \to r))$,

l) $(\neg(p \land r) \leftrightarrow (\neg p \lor \neg r))$,

m) $(\neg(p \lor r) \leftrightarrow (\neg p \land \neg r))$,

n) $(\neg(p \to r) \leftrightarrow (p \land \neg r))$,

o) $\big((p \land (r \lor s)) \leftrightarrow ((p \land r) \lor (p \land s))\big)$,

p) $\big((p \lor (r \land s)) \leftrightarrow ((p \lor r) \land (p \lor s))\big)$,

q) $((p \lor (p \land r)) \leftrightarrow p)$.

r) $\big((p \land (p \to r)) \to r\big)$,

s) $\big((\neg r \land (p \to r)) \to \neg p\big)$.

*Riešenie.* b) Aby sme dokázali, že $((\neg p \to \neg r) \leftrightarrow (r \to p))$ je tautológia, stačí zistiť, či je množina $S^+ = \{\mathbf{F}((\neg p \to \neg r) \leftrightarrow (r \to p))\}$ nesplniteľná, teda či pre ňu existuje uzavreté tablo.

Pre formuly $(A \leftrightarrow B)$ nemáme špeciálne tablové pravidlá, pretože tieto formuly sú iba skratky za $((A \to B) \land (B \to A))$. V table preto pracujeme s neskrátenou verziou.

$$1.\quad \mathbf{F}\big(((\neg p \to \neg r) \to (r \to p)) \land ((r \to p) \to (\neg p \to \neg r))\big) \quad S^+$$

<table>
<tr>
<td>
2. $\mathbf{F}((\neg p \to \neg r) \to (r \to p))$ $\beta 1$<br>
3. $\mathbf{T}(\neg p \to \neg r)$ $\alpha 2$<br>
4. $\mathbf{F}(r \to p)$ $\alpha 2$<br>
5. $\mathbf{T}\, r$ $\alpha 4$<br>
6. $\mathbf{F}\, p$ $\alpha 4$
<table>
<tr>
<td>7. $\mathbf{F}\,\neg p$ $\beta 3$<br>8. $\mathbf{T}\, p$ $\alpha 7$<br>$*$ $6, 8$</td>
<td>9. $\mathbf{T}\,\neg r$ $\beta 3$<br>10. $\mathbf{F}\, r$ $\beta 9$<br>$*$ $6, 10$</td>
</tr>
</table>
</td>
<td>
11. $\mathbf{F}((r \to p) \to (\neg p \to \neg r))$ $\beta 1$<br>
12. $\mathbf{T}(r \to p)$ $\alpha 11$<br>
13. $\mathbf{F}(\neg p \to \neg r)$ $\alpha 11$<br>
14. $\mathbf{T}\,\neg p$ $\alpha 13$<br>
15. $\mathbf{F}\,\neg r$ $\alpha 13$<br>
16. $\mathbf{F}\, p$ $\alpha 14$<br>
17. $\mathbf{T}\, r$ $\alpha 15$
<table>
<tr>
<td>18. $\mathbf{F}\, r$ $\beta 12$<br>$*$ $17, 18$</td>
<td>19. $\mathbf{T}\, p$ $\beta 12$<br>$*$ $19, 16$</td>
</tr>
</table>
</td>
</tr>
</table>

Našli sme uzavreté tablo pre množinu $S^+ = \{\mathbf{F}((\neg p \to \neg r) \leftrightarrow (r \to p))\}$, ktorá je teda nesplniteľná, a preto $((\neg p \to \neg r) \leftrightarrow (r \to p))$ je tautológia. $\natural$

**2.7.4** Dokážte, že z nasledujúcich tvrdení:

($A_1$) Keď mám dáždnik, nikdy neprší.

($A_2$) Cesta je mokrá, iba ak prší alebo prešlo umývacie auto.

($A_3$) Umývacie auto nejazdí cez víkend.

($A_4$) Do práce chodím peši vo všetky pracovné dni okrem utorka, kedy chodím električkou.

($A_5$) Keď idem električkou, dáždnik si neberiem.

vyplýva

($X$) Ak mám dáždnik a je mokrá cesta, nie je víkend.

Tvrdenia sformalizujte a využite tablový kalkul.

**2.7.5** Pomocou tablových dôkazov vyplývania v predchádzajúcich a nasledujúcich úlohách napíšte slovné dôkazy.

*Riešenie pre 2.7.1.* Pripomeňme si znenie úlohy o lúpeži v klenotníctve. Na políciu predviedli troch podozrivých Adamsovú, Millsa a Doylea. Počas vyšetrovania sa zistilo:

a) Doyle je vinný, ak je Adamsová vinná a Mills nevinný.

b) Doyle nikdy nepracuje sám.

c) Adamsová nikdy nepracuje s Doyleom.

d) Do prípadu nie je zapletený nikto okrem Adamsovej, Millsa a Doylea a aspoň jeden z nich je vinný.

Tablovým kalkulom sme dokázali, že z týchto zistení vyplýva, že Mills je vinný, pretože sme našli nasledujúce uzavreté tablo pre $T_M^+ = \{\mathbf{T}((A \wedge \neg M) \to D)), \mathbf{T}(D \to (A \vee M)), \mathbf{T}(A \to \neg D), \mathbf{T}(A \vee (M \vee D)), \mathbf{F}\, M\}$:

1. $\mathbf{T}((A \wedge \neg M) \to D)$ $T_M^+$
2. $\mathbf{T}(D \to (A \vee M))$ $T_M^+$
3. $\mathbf{T}(A \to \neg D)$ $T_M^+$
4. $\mathbf{T}(A \vee (M \vee D))$ $T_M^+$
5. $\mathbf{F}\, M$ $T_M^+$

- 6. $\mathbf{T}\, A$ $\beta 4$
  - 7. $\mathbf{F}\, A$ $\beta 3$
    $*$ 6, 7
  - 8. $\mathbf{T}\, \neg D$ $\beta 3$
    9. $\mathbf{F}\, D$ $\alpha 8$
    - 10. $\mathbf{F}(A \wedge \neg M)$ $\beta 1$
      - 11. $\mathbf{F}\, A$ $\beta 10$
        $*$ 6, 11
      - 12. $\mathbf{F}\, \neg M$ $\beta 10$
        13. $\mathbf{T}\, M$ $\alpha 12$
        $*$ 5, 13
    - 14. $\mathbf{T}\, D$ $\beta 1$
      $*$ 9, 14
- 15. $\mathbf{T}(M \vee D)$ $\beta 4$
  - 16. $\mathbf{T}\, M$ $\beta 15$
    $*$ 5, 16
  - 17. $\mathbf{T}\, D$ $\beta 15$
    - 18. $\mathbf{F}\, D$ $\beta 2$
      $*$ 17, 18
    - 19. $\mathbf{T}(A \vee M)$ $\beta 2$
      - 20. $\mathbf{T}\, A$ $\beta 19$
        - 21. $\mathbf{F}\, A$ $\beta 3$
          $*$ 20, 21
        - 22. $\mathbf{T}\, \neg D$ $\beta 3$
          23. $\mathbf{F}\, D$ $\alpha 22$
          $*$ 17, 23
      - 24. $\mathbf{T}\, M$ $\beta 19$
        $*$ 5, 24

Napíšme teraz s pomocou tohto tabla slovný dôkaz toho, že zo zistení a)–d) vyplýva, že Mills je vinný.

Tablo sa dá priamočiaro čítať ako dôkaz sporom, aj keď toto čítanie môže pôsobiť „umelo" (viď nižšie). Pre lepšiu orientáciu v dôkaze v zátvorkách uvádzame čísla uzlov tabla, ktoré zodpovedajú práve vyjadrenej úvahe.

*Dôkaz (sporom).* Predpokladajme, že zistenia a)–d) sú pravdivé (1–4), ale Mills je nevinný (5).

Podľa d) vieme, že aspoň jeden z trojice Adamsová, Mills, Doyle je vinný — preskúmame teda všetky tri možnosti:

Možnosť, že je vinný Mills (16) je v spore s predpokladom.

V prípade, že je vinná Adamsová (6), podľa c) nie je vinný Doyle (7, 8, 9). Podľa tvrdenia a) však potom nemôže byť pravda, že je vinná Adamsová a Mills nevinný (10, 14). To znamená, že buď nie je Adamsová vinná (11), čo je spor s predpokladom tohto prípadu, alebo nie je Mills nevinný (12), teda Mills je vinný (13), čo je spor s predpokladom celého dôkazu.

Ostala nám posledná možnosť — Doyle je vinný (17). Podľa tvrdenia b) je potom vinná Adamsová alebo Mills (18, 19). Vina

Použitie pravidla $\beta$ na disjunkciu zvyčajne čítame ako rozbor možných prípadov. Viacero použití pravidla $\beta$ na vnorené disjunkcie (napr. $(A \vee (M \vee D))$) spájame v slovnom dôkaze do jedného rozboru.

Použitie pravidla $\beta$ na implikáciu, pri ktorom sa hneď uzavrie ľavá vetva, sa dá čítať ako modus ponens: „Pretože ak $X$, tak $Y$, a platí $X$, platí aj $Y$." V tomto dôkaze sa hodí pri implikáciách b) a c).

Keď sa pravidlo $\beta$ použije na implikáciu a hneď sa uzavrie pravá vetva, môžeme ho čítať ako modus tolens: „Pretože ak $X$, tak $Y$, a neplatí $Y$, neplatí ani $X$." To sa hodí pre implikáciu a).

Millsa (24) je však v spore s úvodným predpokladom. V prípade viny Adamsovej (20) musíme na základe tvrdenia c) uvažovať nevinu Doyla (21, 22), čo je tiež spor.

Preskúmali sme všetky možnosti toho, či by mohol byť Mills nevinný. Keďže žiadna z nich nemôže nastať, pretože viedla k sporu, musí byť Mills určite vinný. Millsova vina teda vyplýva z teórie tvorenej zisteniami a)–d). □

Predchádzajúci dôkaz sporom pôsobil „umelo“. „Skutočné“ dôkazy sporom z negácie dokazovaného tvrdenia odvodia nejaké dôsledky a až o nich ukážu, že sú v spore s dôsledkami predpokladov. My sme však predpoklad dôkazu sporom (Mills je nevinný) použili vždy iba vo chvíli, keď sme úvahou dospeli k opačnému tvrdeniu (Mills je vinný).

Naše tablo je preto „prirodzenejšie“ čítať ako priamy dôkaz. Formulu $M$ označenú znamienkom $\mathbf{F}$ chápeme ako *cieľ*, ktorý chceme dokázať. Formuly označené znamienkom $\mathbf{T}$ stále chápeme ako *predpoklady*.

*Dôkaz (priamy).* Predpokladajme, že zistenia a)–d) sú pravdivé (1–4). Dokážme, že Mills je vinný (5). Podľa tvrdenia d) je vinný niekto z podozrivých Adamsová, Mills, alebo Doyle. V prípade, že je vinný Mills (16), dokazované tvrdenie triviálne platí. Rozoberme teda zvyšné dva prípady:

Prepokladajme najprv, že je vinná Adamsová (6). Podľa c) teda nie je vinný Doyle (7, 8, 9). Preto podľa a) nie je pravda, že Adamsová je vinná a Mills je nevinný (10, 14). Teda Adamsová nie je vinná alebo Mills nie je nevinný. Prvú možnosť (11) vylučuje predpoklad tohto prípadu. Ostáva teda druhá možnosť (12), čiže Mills je vinný (13).

Teraz predpokladajme, že je vinný Doyle (17). Podľa b) je vinná Adamsová alebo je vinný Mills (19). Keby bola vinná Adamsová (20), podľa c) by bol Doyle nevinný (21, 22), čo je však v spore s predpokladom tohto prípadu. Preto opäť ostáva iba možnosť, že Mills je vinný (24).

Z predpokladu pravdivosti zistení a)–d) sme teda vo všetkých možných prípadoch dospeli k tomu, že Mills je vinný, čo bolo treba dokázať. □

V prípade priameho dôkazu je ešte jedna možnosť (okrem vyššie uvedených), ako čítať použitie pravidla $\beta$ na implikáciu $\mathbf{T}(X \rightarrow Y)$ — nahradenie doterajšieho cieľa jeho postačujúcou podmienkou: „Pretože ak $X$, tak $Y$, a máme dokázať $Y$, postačí dokázať $X$.“

Keď naopak *dokazujeme* implikáciu, teda tablo obsahuje označenú formulu $\mathbf{F}(X \rightarrow Y)$, zvyčajne na ňu aplikujeme pravidlá $\alpha$ s dôsledkami $\mathbf{T}X$ a $\mathbf{F}Y$. Obvyklé čítanie týchto krokov je: „Chceme dokázať, že ak $X$, tak $Y$. Predpokladajme teda $X$ a dokážme $Y$.“

Pri našom dôkaze sa síce tieto situácie nevyskytli, ale nájdu využitie napríklad pri čítaní tabiel z úloh 2.7.4, 2.7.11, či v nasledujúcej úlohe. ♮

## Splniteľnosť, falzifikovateľnosť a nesplniteľnosť v tablách

**2.7.6** O nasledujúcich formulách zistite pomocou tablového kalkulu, či sú splniteľné, nesplniteľné, tautológie, alebo falzifikovateľné.

a) $((p \to q) \lor (\neg q \to r))$

b) $((p \to (p \lor r)) \to \neg(\neg p \lor (p \lor r)))$

c) $\big(((p \to s) \land (r \to s)\big) \land \neg\big((p \lor r) \to s)\big)$,

d) $\big(((\neg p \to (p \land q)) \lor ((p \land q) \land \neg q)\big) \lor \big((p \to s) \lor \neg p)\big)$

*Riešenie.* a) Aby sme preverili charakter formuly $((p \to q) \lor (q \to r))$, pokúsime sa najprv podobne ako v úlohe 2.7.3 dokázať, či je táto formula tautológia, teda pokúsime sa uzavrieť tablo pre $S^+ = \{\mathbf{F}((p \to q) \lor (q \to r))\}$. Ak sa tablo uzavrie v každej vetve, formula je tautológia. Naopak, ak nájdeme aspoň jednu úplnú otvorenú vetvu, vieme z nej vyčítať ohodnotenie, ktoré formulu nespĺňa:

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\mathbf{F}\,((p \to q) \lor (q \to r))$ | $S^+$ |
| 2. | $\mathbf{F}\,(p \to q)$ | $\alpha 1$ |
| 3. | $\mathbf{F}\,(\neg q \to r)$ | $\alpha 1$ |
| 4. | $\mathbf{T}\,p$ | $\alpha 2$ |
| 5. | $\mathbf{F}\,q$ | $\alpha 2$ |
| 6. | $\mathbf{T}\,\neg q$ | $\alpha 3$ |
| 7. | $\mathbf{F}\,r$ | $\alpha 3$ |

Zistili sme, že formula *nie je tautológia* — tablo má síce iba jednu vetvu, ale tá je úplná (viď definícia z prednášky) a nie je uzavretá. Z tejto vetvy môžeme vyčítať ohodnotenie $v_1 = \{p \mapsto t, q \mapsto f, r \mapsto f\}$, ktoré našu formulu nespĺňa, teda formula *je falzifikovateľná*.

Ďalej potrebujeme ešte preveriť, či existuje aj nejaké ohodnotenie, ktoré formulu spĺňa (a teda je splniteľná) alebo nie (a teda je to nesplniteľná formula). Aby sme to zistili, pokúsime sa v table pre množinu $S^+ = \{\mathbf{T}((p \to q) \lor (q \to r))\}$, nájsť aspoň jednu úplnú otvorenú vetvu, alebo naopak toto tablo uzavrieť:

<table>
<tr><td colspan="3">1. $\mathbf{T}\,((p \to q) \lor (q \to r))$   $S^+$</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. $\mathbf{T}\,(p \to q)$   $\beta 1$</td><td rowspan="2">5. $\mathbf{T}\,(\neg q \to r)$   $\beta 1$</td></tr>
<tr><td>3. $\mathbf{F}\,p$   $\beta 2$</td><td>4. $\mathbf{T}\,q$   $\beta 2$</td></tr>
</table>

Tablo sme ani nemuseli dokončiť, pretože po aplikovaní dvoch $\beta$-pravidiel (najprv pre disjunkciu, a potom pre implikáciu na ľavej strane) sme našli hneď dve úplné otvorené vetvy (s listami 3 a 4). Z nich vieme vyčítať, že všetky ohodnotenia $v$, pre ktoré $v(p) = f$ alebo $v(q) = t$ formulu spĺňajú, teda napr. ohodnotenie $v_2 = \{p \mapsto f, q \mapsto f, r \mapsto f\}$ formulu spĺňa. Formula teda *je splniteľná* (a nie je nesplniteľná).

Pokiaľ sa nám podarí správne uhádnuť, že je formula $X$ tautológia, postačí, ak urobíme tablo pre $\{\mathbf{F}\,X\}$ (prvé) a všetky vetvy sa nám podarí uzavrieť. Keďže tým dokážeme, že všetky ohodnotenia formulu spĺňajú, nie je už potrebné hľadať nejaké konkrétne, formula je splniteľná, nie je falzifikovateľná ani nesplniteľná. Podobne, ak si myslíme, že je formula zrejme nesplniteľná, môžeme skúsiť šťastie a začať tablom pre $\{\mathbf{T}\,X\}$ (druhým). Ak sa nám ho podarí uzavrieť, nemusíme už robiť prvé tablo, vieme, že všetky ohodnotenia $X$ nespĺňajú, teda je falzifikovateľná, nie je splniteľná ani tautológia. ♮

**2.7.7** Pripomeňme si prípad lúpeže v klenotníctve z úlohy 2.7.1: Na políciu predviedli troch podozrivých Adamsovú, Millsa a Doylea. Počas vyšetrovania sa zistilo:

a) Doyle je vinný, ak je Adamsová vinná a Mills nevinný.

b) Doyle nikdy nepracuje sám.

c) Adamsová nikdy nepracuje s Doyleom.

d) Do prípadu nie je zapletený nikto okrem Adamsovej, Millsa a Doylea a aspoň jeden z nich je vinný.

Pomocou tablového kalkulu rozhodnite, kto z podozrivých je vinný, kto nevinný, a o koho vine alebo nevine nemožno rozhodnúť. Svoje závery slovne zdôvodnite.

*Riešenie.* Našim cieľom je zistiť, ktorého z podozrivých možno obviniť, a ktorý je naopak nevinný. Pri formalizácii sme v úlohe rozpoznali tri atomické výroky, ktoré reprezentujeme výrokovými premennými $\mathcal{V} = \{A, M, D\}$, pričom každá premenná znamená, že príslušný podozrivý je vinný. Zistenia (a–d) sme sformalizovali do nasledovnej teórie:

$$T = \left\{ \begin{array}{c} ((A \land \neg M) \to D)), \\ (D \to (A \lor M)), \\ (A \to \neg D), \\ (A \lor (M \lor D)) \end{array} \right\}.$$

Úlohu riešime tablovým kalkulom. Najprv preveríme, či je $T$ splniteľná, a to tak, že sa v table pre $T^+ = \{\mathbf{T}((A \land \neg M) \to D)), \mathbf{T}(D \to (A \lor M)), \mathbf{T}(A \to \neg D), \mathbf{T}(A \lor (M \lor D))\}$ pokúsime nájsť aspoň jednu úplnú otvorenú vetvu:

1. $\mathbf{T}((A \land \neg M) \to D)$ $T^+$
2. $\mathbf{T}(D \to (A \lor M))$ $T^+$
3. $\mathbf{T}(A \to \neg D)$ $T^+$
4. $\mathbf{T}(A \lor (M \lor D))$ $T^+$

| 5. $\mathbf{F}(A \land \neg M)$ $\beta 1$ | 6. $\mathbf{T} D$ $\beta 1$ |
|---|---|

| 7. $\mathbf{F} D$ $\beta 2$ $*$ 6, 7 | 8. $\mathbf{T}(A \lor M)$ $\beta 2$ |
|---|---|

| 9. $\mathbf{T} A$ $\beta 8$ | 10. $\mathbf{T} M$ $\beta 8$ |
|---|---|

| 11. $\mathbf{F} A$ $\beta 3$ | 16. $\mathbf{T} \neg D$ $\beta 3$<br>17. $\mathbf{F} D$ $\alpha 16$<br>$*$ 6, 17 |
|---|---|

| 12. $\mathbf{T} A$ $\beta 4$ $*$ 11, 12 | 13. $\mathbf{T}(M \lor D)$ $\beta 4$ |
|---|---|

| 14. $\mathbf{T} M$ $\beta 13$ | 15. $\mathbf{T} D$ $\beta 13$ |
|---|---|

Toto sa nám aj podarilo, keďže vetvy končiace v 14 a 15 sú obe úplné a otvorené. Teda $T$ je konzistentná. Na otázku, ktorý z obvinených je vinný či nevinný, môžeme teda zmysluplne odpovedať pomocou vyplývania.

V riešení úlohy 2.7.1 sme už dokázali, že $T \models M$. Presnejšie, podarilo sa nám uzavrieť všetky vetvy tabla pre množinu $T_M^+ = \{\mathbf{T}((A \land \neg M) \to D)), \mathbf{T}(D \to (A \lor M)), \mathbf{T}(A \to \neg D), \mathbf{T}(A \lor (M \lor D)), \mathbf{F}\, M\}$. Keďže $T$ je konzistentná teória, môžeme usúdiť, že Mills je vinný.

O vine, či nevine Adamsovej a Doylea môžeme rozhodnúť obdobným postupom. Pre dôkaz viny Adamsovej, teda vyplývania $T \models A$, by sme potrebovali nájsť uzavreté tablo pre množinu $T_A^+ = \{\mathbf{T}((A \land \neg M) \to D)), \mathbf{T}(D \to (A \lor M)), \mathbf{T}(A \to \neg D), \mathbf{T}(A \lor (M \lor D)), \mathbf{F}\, A\}$, podobne ako pre dôkaz viny Millsa. Ak sa nám tablo nepodarí uzavrieť, teda aspoň jedna vetva tabla bude úplná otvorená, Adamsovú obviniť nemôžeme.

To však ešte nestačí na rozhodnutie o tom, či je Adamsová nevinná. Na to potrebujeme dokázať, že tvrdenie „Adamsová je nevinná“ vyplýva z $T$, čiže $T \models \neg A$. Dosiahneme to nájdením uzavretého tabla pre množinu $T_{\neg A}^+ = \{\mathbf{T}((A \land \neg M) \to D)), \mathbf{T}(D \to (A \lor M)), \mathbf{T}(A \to \neg D), \mathbf{T}(A \lor (M \lor D)), \mathbf{F}\, \neg A\}$.

Ak aj teraz dospejeme k tablu s aspoň jednou úplnou otvorenou vetvou, nemôžeme o Adamsovej na základe našej konzistentnej teórie $T$ rozhodnúť ani to, že je nevinná. Formula $A$ je potom nezávislá od teórie $T$, lebo z úplnej otvorenej vetvy prvého tabla skonštruujeme ohodnotenie, ktoré spĺňa $T$, ale nespĺňa $A$, a z úplnej otvorenej vetvy druhého tabla skonštruujeme iné ohodnotenie, ktoré spĺňa $T$, ale nespĺňa $\neg A$, čiže spĺňa $A$. Adamsovú vtedy nemôžeme s istotou obviniť, ani si nemôžeme byť istí jej nevinou, ale je nutné prepustiť ju pre nedostatok dôkazov. ♮

**2.7.8** Pripomeňme si prípad bankovej lúpeže z úlohy 2.7.2: Inšpektor Nick Fishtrawn zaistil podozrivých Browna, Smitha, Taylora, a McDonnalda, pričom zistil, že:

($A_1$) Brown a Smith sú súčasne vinní, iba ak je Taylor ich spolupáchateľom.

($A_2$) Ak je Brown vinný, tak aspoň jeden z Smith, Taylor je jeho spolupáchateľom.

($A_3$) Taylor nikdy nepracuje bez McDonnalda.

($A_4$) McDonnald je vinný, ak je Brown nevinný.

Zistili sme, že vinný je McDonnald. Dokážte jeho vinu tablovým kalkulom. Podobne dokážte, že Browna nemožno obviniť, ani jeho vinu vyvrátiť. Svoje závery slovne zdôvodnite.

**2.7.9** Inšpektorka Veszprémiová zistila, že lúpež v Budapeštianskej záložni spáchal niekto z dvoch podozrivých: Balogh alebo Cucz. Inšpektorka vie, že Balogh nikdy nepracuje sám. Svedok Nagy vypovedal, že Cucz bol v čase lúpeže spolu s ním v kine Uránia na filme *Čas sa zastaví*.

Koho môže inšpektorka na základe týchto informácií obviniť? Úlohu riešte tablovým kalkulom.

**2.7.10** Londýnsky obchodník, pán McConnor, telefonoval do Scotland Yardu, že sa stal obeťou lúpeže. Detektívi predviedli na výsluch troch podozrivých $X$, $Y$, $Z$ a zistili nasledujúce fakty:

($A_1$) Každý z podozrivých $X, Y, Z$ bol v McConnorovom obchode v deň lúpeže a nik iný tam v ten deň nebol.

($A_2$) $X$ vždy pracuje s práve jedným spoločníkom.

($A_3$) $Z$ nie je vinný alebo je vinný $Y$.

($A_4$) Ak sú vinní práve dvaja, tak $X$ je jedným z nich.

($A_5$) $Y$ je vinný, iba ak je vinný aj $Z$.

Koho má inšpektorka Fishcousová obviniť?

**2.7.11** Pomocou formalizácie a tablového kalkulu vyriešte nasledujúce problémy nájdením dôkazu alebo kontrapríkladu.

a) Chceme na párty pozvať niekoho z trojice Jim, Kim a Sára, bohužiaľ každý z nich má nejaké svoje podmienky: Sára nepôjde na párty, ak pôjde Kim. Jim pôjde na párty, len ak pôjde Kim. Sára nepôjde bez Jima.
Je pravda, že na párty pôjde Kim a nepôjde Sára?

b) Anka ide do práce autom vždy, keď prší. Ak neprší, ide do práce na bicykli. Keď ide do práce na bicykli, má celý deň dobrú náladu.
Je pravda, že ak Anka nejde do práce autom, má celý deň dobrú náladu?

c) Ak by metalová kapela nemohla hrať alebo by občerstvenie nedodali načas, silvestrovská oslava by sa musela zrušiť a Rudy by zúril. Ak by sa oslava musela zrušiť, organizátori by vrátili vstupné. Organizátori vstupné nevrátili.
Je pravda, že metalová kapela mohla hrať?

**2.7.12** Pomocou formalizácie a tablového kalkulu overte správnosť úsudkov a ich zdôvodnení, pričom:

- ak je úsudok chybný, nájdite kontrapríklad;
- ak je chybné zdôvodnenie, vysvetlite, kde a aké sú v ňom chyby;
- ak je úsudok správny, ale zdôvodnenie chybné, napíšte podľa tablového dôkazu správne slovné zdôvodnenie.

Pracujte s nasledujúcimi úsudkami a zdôvodneniami. V prvom prípade sme premisy a záver úsudku a jeho zdôvodnenie vyznačili. V druhom prípade sami rozpoznajte tieto časti.

a) *Premisy:* Do laboratória sa dostanem, ak si nezabudnem čipovú kartu. Vždy, keď si zabudnem čipovú kartu, nemám ani peňaženku.

*Záver:* Takže ak nemám peňaženku, nedostanem sa do laboratória.

*Zdôvodnenie:* Je to tak preto, že keď nemám peňaženku, zabudol som si čipovú kartu, a teda sa nemám ako dostať do laboratória.

b) Ak by na protest neprišli desaťtisíce občanov alebo by boli jeho účastníci agresívni, protest by nebol úspešný a predseda vlády by neodstúpil. Ak by boli účastníci protestu agresívni, zasiahla by polícia. Polícia nezasiahla. Preto ak predseda vlády odstúpil, na protest prišli desaťtisíce občanov.

Pretože polícia nezasiahla, účastníci protestu neboli agresívni. Predpokladajme, že predseda vlády odstúpil. Protest bol teda úspešný, a preto naň prišli desaťtisíce občanov alebo jeho účastníci boli agresívni. Už sme však zistili, že druhá možnosť nenastala. Preto musí platiť prvá, teda na protest prišli desaťtisíce občanov, čo sme chceli dokázať.

**2.7.13** Pomocou tablového kalkulu nájdite aspoň dve ohodnotenia výrokových premenných súčasne spĺňajúce nasledujúce teórie. Vyznačte časť tabla, ktorá dokazuje vašu odpoveď a zdôvodnite ju.

$T_A = \{(p \to (u \lor v)), (p \lor u)\}$, $T_C = \{(p \to (u \lor v)), (\neg u \lor \neg v)\}$.

$T_B = \{((u \land v) \to p), (p \lor u)\}$,

**2.7.14** Nech $\alpha$, $\alpha_1$, $\alpha_2$ sú označené formuly podľa niektorého $\alpha$ pravidla. Nech $\beta$, $\beta_1$, $\beta_2$ sú označené formuly podľa niektorého $\beta$ pravidla. Nech $\pi$ je niektorá vetva tabla $\mathcal{T}$. Dokážte alebo vyvráťte nasledujúce tvrdenia:

a) Ak $\alpha_1, \alpha_2 \in \pi$ a $\pi$ je úplná vetva, tak aj $\alpha \in \pi$.

b) Ak $\beta \in \pi$ a $\pi$ je uzavretá vetva, tak aj $\beta_1, \beta_2 \in \pi$.

c) Ak $\alpha, \beta \in \pi$ a $\pi$ je úplná uzavretá vetva, tak aspoň jedna z $\alpha_1, \beta_1$ je tiež v $\pi$.

## Korektné pravidlá

**2.7.15** Dokážte, že nasledujúce tablové pravidlá sú korektné:

$$\frac{\mathbf{T}(X \to Y) \quad \mathbf{T}\,X}{\mathbf{T}\,Y}\ (\mathrm{MP}) \qquad \frac{\mathbf{T}(X \to Y) \quad \mathbf{F}\,Y}{\mathbf{F}\,X}\ (\mathrm{MT})$$

$$\frac{\mathbf{T}(X \lor Y) \quad \mathbf{F}\,X}{\mathbf{T}\,Y}\ (\mathrm{DS}_1) \qquad \frac{\mathbf{T}(X \lor Y) \quad \mathbf{F}\,Y}{\mathbf{T}\,X}\ (\mathrm{DS}_2)$$

$$\frac{\mathbf{F}(X \land Y) \quad \mathbf{T}\,X}{\mathbf{F}\,Y}\ (\mathrm{NCS}_1) \qquad \frac{\mathbf{F}(X \land Y) \quad \mathbf{T}\,Y}{\mathbf{F}\,X}\ (\mathrm{NCS}_2)$$

$$\frac{}{\mathbf{T}\,X \mid \mathbf{F}\,X}\ (\mathrm{cut}) \qquad \frac{\mathbf{T}(X \to Y) \quad \mathbf{T}(Y \to Z)}{\mathbf{T}(X \to Z)}\ (\mathrm{HS})$$

$$\frac{\begin{array}{c}\mathbf{T}(U \to V) \quad \mathbf{T}(X \to Y) \\ \mathbf{T}(U \lor X)\end{array}}{\mathbf{T}(V \to Y)}\ (\mathrm{CD}) \qquad \frac{\begin{array}{c}\mathbf{T}(U \to V) \quad \mathbf{T}(X \to Y) \\ \mathbf{T}(\neg V \lor \neg Y)\end{array}}{\mathbf{T}(\neg U \lor \neg X)}\ (\mathrm{DD})$$

Tieto pravidlá sa nazývajú: (MP) modus ponens, (MT) modus tolens, ($\mathrm{DS}_i$) disjunktívny sylogizmus, (HS) hypotetický sylogizmus, (cut) rez, (CD) konštruktívna dilema, (DD) deštruktívna dilema. ($\mathrm{NCS}_i$) je forma ($\mathrm{DS}_i$) pre nesplnenú konjunkciu.

V nasledujúcich úlohách môžete použiť tablový kalkul rozšírený o vyššie uvedené pravidlá. Vzniknú tak pravdepodobne prehľadnejšie a menšie tablá, ktoré sa ľahšie interpretujú ako dôkaz v prirodzenom jazyku.

**2.7.16** Prechádzate sa v labyrinte a zrazu sa ocitnete na križovatke, z ktorej vedú tri možné cesty: cesta naľavo je vydláždená zlatom, cesta pred vami je vydláždená mramorom a cesta napravo je vysypaná kamienkami. Každú cestu stráži strážnik a každý z nich vám povie niečo o cestách:

*Strážnik zlatej cesty:* „Táto cesta vedie priamo do stredu labyrintu. Navyše, ak vás kamienky dovedú do stredu, tak vás do stredu dovedie aj mramor.“

*Strážnik mramorovej cesty:* „Ani zlato, ani kamienky nevedú do stredu labyrintu.“

*Strážnik kamienkovej cesty:* „Nasledujte zlato a dosiahnete stred, nasledujte mramor a stratíte sa.“

Viete, že všetci strážnici stále klamú.

i. Môžete si byť istí, že niektoré z ciest vedú do stredu labyrintu? Ak áno, ktorú cestu si vyberiete?

ii. Viete o niektorých cestách s určitosťou povedať, že do stredu labyrintu nevedú? Ak áno, ktoré to sú?

iii. Je o niektorých cestách nemožné povedať, či do stredu labyrintu vedú alebo nevedú? Ak áno, o ktorých?

Vašou úlohou je:

a) Sformalizovať uvedené skutočnosti ako výrokovú teóriu nad vhodnou množinou výrokových premenných, ktorých význam stručne vysvetlíte.

b) Pojmami výrokovej logiky (napr. tautológia, splnenie, vyplývanie a pod.) vyjadriť otázky i–iii.

c) Zodpovedať otázky i–iii a odpovede dokázať *v rozšírenom tablovom kalkule* s pravidlami z predchádzajúcej úlohy a pravidlom ($DS_1$) z prednášky.

**2.7.17** Štyria spolužiaci sa dohadujú, kedy pôjdu na pivo do krčmy Pod Machnáčom:

- Do úvahy pripadajú tri večery, utorok až štvrtok.
- Fero povedal, že v utorok aj v stredu určite príde.
- Zuzka povedala, že vo štvrtok príde.
- Jožo povedal, že pôjde, len ak pôjde aspoň jedno dievča.
- Katka nepôjde, ak pôjde Fero.
- Zuzka pôjde, len ak pôjde Katka.
- Všetci vedia, že Fero chodí do krčmy len v utorok, lebo v stredu je v telke futbal a vo štvrtok má tréning.

Pomocou prostriedkov výrokovej logiky zistite, v ktoré večery a v akom zložení môžu spolužiaci ísť na pivo.

**2.7.18** Malá firma vyrába prístrojové skrinky z viacerých materiálov, s rôznymi povrchovými úpravami a v niekoľkých farbách. Aj keď je zdanlivo možných viac ako tisíc kombinácií, nie všetky sa dajú vyrobiť. Vybavenie firmy, vlastnosti materiálov a výrobné postupy kladú nasledujúce obmedzenia:

($X_1$) Skrinky sa vyrábajú materiálov: hliník, oceľ, plast.

($X_2$) Hliník a oceľ sú kovy.

($X_3$) Iba oceľ sa dá lakovať.

($X_4$) Brúsenú povrchovú úpravu môžu mať iba nelakované kovové skrinky.

($X_5$) Lakované skrinky aj plastové skrinky sú čierne, biele, alebo zelené.

($X_6$) Nelakované oceľové skrinky korodujú.

($X_7$) Koróziu spôsobí aj kombinácia dvoch rôznych kovov.

($X_8$) Eloxovať sa dajú iba hliníkové skrinky a po tejto úprave sú buď sivé alebo čierne.

($X_9$) Korózia je neprípustná.

Zákazník požaduje eloxovanú čierno-bielu skrinku. Môže mu firma vyhovieť? Ak áno, z ktorých materiálov a z ktorých ich kombinácií môže byť taká skrinka vyhotovená?

Obchodný zástupca si chce ujasniť možné kombinácie. Domnieva sa, že skrinka s brúsenou povrchovou úpravou je sivá alebo čierna. Usúdil správne?

Vašou úlohou je:

a) Formalizovať uvedené skutočnosti ako výrokovologickú teóriu a stručne popísať význam použitých výrokových premenných.

b) Pojmami výrokovej logiky (napr. tautológia, splnenie, vyplývanie a pod.) vyjadriť otázky z predloženého problému.

c) Zodpovedať otázky a odpovede dokázať *pomocou tablového kalkulu*.

## 2.8 Rezolvencia

**2.8.1** V rezolvenčnom kalkule dokážte nesplniteľnosť množín klauzúl:

a) $T = \{(a \lor b), (\neg b \lor \neg a), (c \lor \neg d), (\neg c \lor d)\}$

b) $T = \{(a \lor b \lor c), (b \lor \neg c), (\neg a \land \neg b)\}$

c) $T = \{(p \lor q), (\neg p \lor r), (\neg p \lor \neg r), (p \lor \neg q)\}$

d) $T = \{a, (b \lor \neg a), (\neg a \lor \neg b \lor c), (\neg a \lor \neg c)\}$

e) $T = \{(b \lor \neg c), (a \lor \neg b), (b \lor c), (\neg b \lor \neg a)\}$

f) $T = \{(c \lor b), (\neg c \lor a), (c \lor \neg b), (\neg a \lor \neg c)\}$

g) $T = \{(\neg a \lor c), (a \lor b), (\neg a \lor \neg c), (\neg b \lor a)\}$

*Riešenie.* d) Pokúsime sa nájsť rezolvenčné zamietnutie množiny klauzúl $T$:

Pri hľadaní zamietnutia môžeme do rezolvenčného odvodenia kedykoľvek pridávať klauzuly teórie $T$. Ak $T$ nie je príliš veľká, môžeme všetky jej klauzuly pridať hneď na začiatku.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $a$ | $T$ |
| 2. | $b \vee \neg a$ | $T$ |
| 3. | $\neg a \vee \neg b \vee c$ | $T$ |
| 4. | $\neg a \vee \neg c$ | $T$ |

Následne aplikujeme pravidlá rezolvencie a idempotencie. Pretože cieľom je dospieť k prázdnej klauzule, preferujeme rezolvenciu, v ktorej jedna klauzula je jednotková (má iba jeden literál). Rezolventa bude vtedy skrátením druhej klauzuly o jeden literál. Teória $T$ umožňuje takýto postup v každom kroku, ale nie je to tak pri každej teórii.

| | | |
|---|---|---|
| 5. | $b$ | rezolvencia 1 a 2 na $a$ |
| 6. | $\neg a \vee c$ | rezolvencia 3 a 5 na $b$ |
| 7. | $c$ | rezolvencia 1 a 6 na $a$ |
| 8. | $\neg a$ | rezolvencia 4 a 7 na $c$ |
| 9. | $\square$ | rezolvencia 1 a 8 na $a$ |

Keďže sme pomocou rezolvencie dospeli k prázdnej klauzule, množina $T$ je nesplniteľná. ♮

**2.8.2** Je daná teória $T$ nad $\mathcal{V} = \{a, b, \dots, z\}^+$:

$$T = \left\{ \begin{array}{c} (p \to q), \\ ((q \to p) \vee (s \to r)), \\ (\neg p \to (\neg r \wedge s)) \end{array} \right\}$$

Pomocou rezolvenčného kalkulu zistite, či z $T$ vyplýva formula $((p \wedge q) \to r)$.

**2.8.3** Precvičte si rezolvenčný kalkul na ďalších úlohách o vyplývaní z častí 2.4 a 2.7.

*Riešenie pre 2.7.1.* Vráťme sa napríklad k úlohe 2.7.1. Naším cieľom bude dokázať Millsovu vinu pomocou rezolvenčného kalkulu. Pripomeňme si, že slovné znenie úlohy sme formalizovali do teórie:

$$T = \left\{ \begin{array}{c} ((A \wedge \neg M) \to D)), \\ (D \to (A \vee M)), \\ (A \to \neg D), \\ (A \vee (M \vee D)) \end{array} \right\}.$$

Pôjde nám teda o to, aby sme dokázali, že $T \models M$.

Vieme, že $T \models M$ práve vtedy, keď $T' = T \cup \{\neg M\}$ je nesplniteľná teória. Aby sme to dokázali rezolvenčným kalkulom, teóriu $T'$ najprv upravíme na ekvivalentnú množinu klauzúl:

$$T'_\mathrm{c} = \left\{\begin{matrix} (\neg A \lor M \lor D), \\ (\neg D \lor A \lor M), \\ (\neg A \lor \neg D), \\ (A \lor M \lor D), \\ \neg M \end{matrix}\right\}.$$

Teraz dokážme nesplniteľnosť $T'_\mathrm{c}$ rezolvenčným kalkulom:

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\neg A \lor M \lor D$ | $T'_\mathrm{c}$ |
| 2. | $\neg D \lor A \lor M$ | $T'_\mathrm{c}$ |
| 3. | $\neg A \lor \neg D$ | $T'_\mathrm{c}$ |
| 4. | $A \lor M \lor D$ | $T'_\mathrm{c}$ |
| 5. | $\neg M$ | $T'_\mathrm{c}$ |
| 6. | $\neg A \lor D$ | rezolvencia 1 a 5 na $M$ |
| 7. | $\neg A \lor \neg A$ | rezolvencia 3 a 6 na $D$ |
| 8. | $\neg A$ | idempotencia 7 na $\neg A$ |
| 9. | $\neg D \lor A$ | rezolvencia 2 a 5 na $M$ |
| 10. | $\neg D$ | rezolvencia 8 a 9 na $A$ |
| 11. | $M \lor D$ | rezolvencia 4 a 8 na $A$ |
| 12. | $D$ | rezolvencia 5 a 11 na $M$ |
| 13. | $\square$ | rezolvencia 10 a 12 na $D$ |

Podarilo sa nám vyrezolvovať prázdnu klauzulu. Znamená to, že teória $T'_\mathrm{c}$ je nesplniteľná, teda aj s ňou ekvivalentná $T' = T \cup \{\neg M\}$ je nesplniteľná, a teda $T \models M$. ♮

## 2.9 Algoritmus DPLL

**2.9.1** Pomocou algoritmu DPLL rozhodnite o splniteľnosti alebo nesplniteľnosti nasledovnej množiny klauzúl $T$:

$$T = \left\{\begin{matrix} (\neg A \lor M \lor D), \\ (\neg D \lor A \lor M), \\ (\neg A \lor \neg D), \\ (A \lor M \lor D), \\ \neg M \end{matrix}\right\}.$$

Návod na riešenie nájdete v materiáloch z prednášok.

# 3 Logika prvého rádu

## 3.1 Formalizácia v relačnej logike

**3.1.1** Formalizujte nasledovné znalosti z oblasti univerzitného vzdelávania ako teóriu v logike prvého rádu:

a) Každý študent študuje nejaký študijný program.
b) Učiteľ, ktorý je profesorom, musí byť školiteľom aspoň jedného študenta.
c) Evka a Ferko sú študenti. Evka je dievča.
d) Študent absolvuje predmet, iba ak ho má zapísaný.
e) Každý študent má školiteľa.
f) Garantom študijného programu je iba profesor.
g) Každý predmet sa vyučuje v práve jednom semestri.
h) Evkina školiteľka je učiteľka, ale nie je profesorka.
i) Predmet je aktívny, ak sú naň zapísaní aspoň dvaja študenti, alebo ak je naň zapísaný hoc aj len jeden študent a je to dievča.
j) Nikto neučí ani si nezapíše neaktívny predmet.
k) Sú práve dva rôzne semestre – letný a zimný.
l) Študent môže byť hodnotený známkou „Fx“ najviac na dvoch predmetoch v tom istom semestri.
m) Pokiaľ má nejaký študent samé A-čka, učitelia sú spokojní.

*Riešenie.*

a) $\forall x\,(\text{študent}(x) \to \exists y\,(\text{štud-program}(y) \land \text{študuje}(x, y)))$
b) $\forall x\,(\text{učiteľ}(x) \land \text{profesor}(x) \to \exists y\,(\text{študent}(y) \land \text{školiteľ}(x, y)))$
c) $\text{študent}(\text{Evka}) \land \text{študent}(\text{Ferko}) \land \text{dievča}(\text{Evka})$
d) $\forall x \forall y\,((\text{študent}(x) \land \text{predmet}(y) \land \text{absolvuje}(x, y)) \to \text{zapísaný}(x, y))$
e) $\forall x\,\big(\text{študent}(x) \to \exists y\,\text{školiteľ}(y, x)\big)$
f) $\forall x\,(\exists y\,(\text{štud-prog}(y) \land \text{garant}(x, y)) \to \text{profesor}(x))$

g) $\forall x\Big(\text{predmet}(x) \to \exists y\Big(\text{semester}(y) \land \text{vyučuje-v-sem}(x,y) \land$
$\forall z\,\big((\neg z \doteq y \land \text{semester}(z)) \to \neg\text{vyučuje-v-sem}(x,z)\big)\Big)\Big)$

h) $\exists x(\text{školiteľ}(x,\text{Evka}) \land \neg\text{profesor}(x) \land \text{učiteľ}(x))$

i) $\forall x\Bigg(\text{predmet}(x) \land \exists y\Big(\text{študent}(y) \land \text{zapísaný}(y,x) \land$
$\Big(\exists z\big(\text{študent}(z) \land \neg y \doteq z \land \text{zapísaný}(z,x)\big) \lor \text{dievča}(y)\Big)\Big)$
$\to \text{aktívny}(x)\Bigg)$

j) $\forall x\,\big((\text{predmet}(x) \land \neg\text{aktívny}(x)) \to \forall y(\neg\text{učí}(y,x) \land \neg\text{zapísaný}(y,x))\big)$

k) $\forall x\,\big(\text{semester}(x) \leftrightarrow (x \doteq \text{letný} \lor x \doteq \text{zimný})\big) \land \neg\text{letný} \doteq \text{zimný}$

l) $\forall x\Bigg(\text{študent}(x) \to$
$\forall y\Bigg(\text{semester}(y) \to$
$\neg\,\exists z_1\,\exists z_2\,\exists z_3\Big(\text{predmet}(z_1) \land \text{predmet}(z_2) \land \text{predmet}(z_3)$
$\land \text{vyučuje-v-sem}(z_1,y) \land \text{vyučuje-v-sem}(z_2,y) \land \text{vyučuje-v-sem}(z_3,y)$
$\land \text{zapísaný}(x,z_1) \land \text{zapísaný}(x,z_2) \land \text{zapísaný}(x,z_3)$
$\land \text{hodnotený}(x,z_1,\text{Fx}) \land \text{hodnotený}(x,z_2,\text{Fx}) \land \text{hodnotený}(x,z_3,\text{Fx})$
$\land \neg z_1 \doteq z_2 \land \neg z_1 \doteq z_3 \land \neg z_2 \doteq z_3\Big)\Bigg)\Bigg)$

m) $\exists x\Big(\text{študent}(x) \land \forall y\big(\text{predmet}(y) \land \text{zapísaný}(x,y) \to \text{hodnotený}(x,y,\text{A})\big)\Big) \to$
$\forall x\big(\text{učiteľ}(x) \to \text{spokojný}(x)\big)$

$\natural$

**3.1.2** Zadefinujte nasledujúcej pojmy v logike prvého rádu

a) Hovoríme, že učiteľ učí študenta vtedy a len vtedy, keď učí predmet, ktorý má študent zapísaný, alebo je študentovým školiteľom.

b) Povinný predmet v danom študijnom programe je práve taký predmet, ktorý absolvuje každý študent tohto študijného programu.

**3.1.3** Nikto si nezapisuje ťažké predmety, ak nie sú povinné v ich študijnom programe.

**3.1.4** Pojmami prvorádovej logiky vyjadrite nasledujúce otázky. Otázky zodpovedzte a odpovede dokážte.

a) Môže byť profesorom niekto, kto nie je školiteľom žiadneho študenta?

b) Bude predmet Základy základov aktívny, ak sa naň zapíše Evka?

c) Sú všetci školitelia profesormi?

d) Profesor Šašo tvrdí, že jeho predmet sa vyučuje aj v letnom, aj v zimnom semestri. Môžeme mu veriť?

e) Je pravda, že nikto neabsolvuje neaktívny predmet?

**3.1.5** Formalizujte v naznačenom alebo vhodne zvolenom jazyku logiky prvého rádu nasledujúce tvrdenia:

a) Bez práce nie sú koláče. ($\mathtt{má}(kto, čo)$, $\mathtt{práca}(x)$, $\mathtt{koláč}(x)$).

b) Pomôž iným, pomôžeš aj sebe.

c) Kto druhému jamu kope, sám do nej spadne.

d) Tí, čo iným jamy nekopú, nie sú intrigáni.

e) Aký otec, taký syn. ($\mathtt{má\_vlastnosť}(kto, vlastnosť)$, $\mathtt{je\_syn}(kto, koho)$).

f) Nepriatelia mojich nepriateľov sú mojimi priateľmi. ($\mathtt{priateľ}(kto, koho)$)

**3.1.6** (Lenhart K. Schubert prostredníctvom Pelletiera [3]) Zvoľte vhodný jazyk logiky prvého rádu a sformalizujte v ňom nasledujúci detektívny príbeh:

> Someone in Dreadsbury Mansion killed Aunt Agatha. Agatha, the butler, and Charles live in Dreadsbury Mansion, and are the only ones to live there. A killer always hates, and is no richer than his victim. Charles hates no one whom Agatha hates. Agatha hates everybody except the butler. The butler hates everyone not richer than Aunt Agatha. The butler hates everyone whom Agatha hates. No one hates everyone. Who killed Agatha?
>
> Niekto v Dreadsburskom kaštieli zabil tetu Agátu. V Dreadsburskom kaštieli bývajú Agáta, komorník a Karol a nikto iný okrem nich tam nebýva. Vrah vždy nenávidí svoju obeť a nie je od nej bohatší. Karol neprechováva nenávisť k nikomu, koho nenávidí Agáta. Agáta nenávidí každého okrem komorníka. Komorník nenávidí každého, kto nie je bohatší ako Agáta. Komorník nenávidí každého, koho nenávidí Agáta. Niet toho, kto by nenávidel všetkých. Kto zabil Agátu?

**3.1.7** (Novak [2]) Sformalizujte v jazyku logiky prvého rádu.

($A_1$) Každý kojot naháňa nejakého roadrunnera.

($A_2$) Každý roadrunner, ktorý robí „beep-beep“, je múdry.

($A_3$) Žiadny kojot nechytí roadrunnera, ktorý je múdry.

($A_4$) Kojot, ktorý naháňa roadrunnera, a nechytí ho, je frustrovaný

($X$) Ak všetky roadrunnery robia „beep-beep“, tak všetky kojoty sú frustrované.

**3.1.8** Vyjadrite čo najprirodzenejšími slovenskými vetami nasledujúcu formalizáciu zistení o deťoch a Vianociach v jazyku $\mathcal{L}$ s množinami symbolov $\mathcal{V}_{\mathcal{L}} = \{u, v, w, x, y, z\}$, $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\texttt{Vianoce}, \texttt{Ježiško}, \texttt{Santa}, \texttt{Anička}\}$ a $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\texttt{autíčko}^1, \texttt{blud}^1, \texttt{dieťa}^1, \texttt{dobrý}^1, \texttt{dostane}^2, \texttt{chlapec}^1, \texttt{kriticky\_myslí}^1, \texttt{teší\_sa\_na}^2, \texttt{uhlie}^1, \texttt{verí\_v}^2\}$:

($V_1$) $\forall x\Big(\big(\texttt{dieťa}(x) \land (\texttt{verí\_v}(x, \texttt{Ježiško}) \lor \texttt{verí\_v}(x, \texttt{Santa}))\big) \to$
$\texttt{teší\_sa\_na}(x, \texttt{Vianoce})\Big)$,

($V_2$) $\forall x\big(\texttt{dieťa}(x) \land \neg\texttt{verí\_v}(x, \texttt{Santa}) \to (\texttt{verí\_v}(x, \texttt{Ježiško}) \lor \texttt{kriticky\_myslí}(x))\big)$,

($V_3$) $\forall x\big(\texttt{kriticky\_myslí}(x) \to \forall y(\texttt{blud}(y) \to \neg\texttt{verí\_v}(x, y))\big)$,

($V_4$) $\forall x\Big(\neg\texttt{dobrý}(x) \to \big(\neg\exists y\, \texttt{dostane}(x, y) \lor$
$(\texttt{verí\_v}(x, \texttt{Santa}) \to \exists y(\texttt{dostane}(x, y) \land \texttt{uhlie}(y)))\big)\Big)$,

($V_5$) $\forall x\big(\texttt{dobrý}(x) \land \texttt{chlapec}(x) \to \exists y(\texttt{dostane}(x, y) \land \texttt{autíčko}(y))\big)$.

## 3.2 Definície pojmov

**3.2.1** Uvažujme doménu rodinných vzťahov, ktorá už obsahuje predikáty ako $\texttt{žena}^1$, $\texttt{muž}^1$, $\texttt{rodič}^2$, $\texttt{súrodenec}^2$, kde $\texttt{žena}(x)$ znamená, že $x$ je žena, $\texttt{muž}(x)$ znamená, že $x$ je muž, $\texttt{rodič}(x, y)$ znamená, že $x$ je rodičom $y$. V prvorádovej logike napíšte definície nasledovných odvodených pojmov (tak, ako ich poznáte z prirodzeného jazyka):

($D_1$) $\texttt{súrodenec}^2$

($D_2$) $\texttt{starý\_rodič}^2$

($D_3$) $\texttt{prastarý\_rodič}^2$

($D_4$) $\texttt{bratranec}^2$

($D_5$) $\texttt{prasesternica}^2$ (teda sesternica „z druhého kolena“)

($D_6$) $\texttt{nevlastný\_súrodenec}^2$

($D_7$) $\texttt{jedináčik}^1$

*Riešenie.* Napríklad prvé dve definície môžu byť nasledovné:

($D_1$) $\forall x \forall y\big(\texttt{súrodenec}(x, y) \leftrightarrow \big(\neg\, x \doteq y \land \exists z(\texttt{rodič}(z, x) \land \texttt{rodič}(z, y))\big)\big)$,

($D_2$) $\forall x \forall y\big(\texttt{starý\_rodič}(x, y) \leftrightarrow \big(\exists z(\texttt{rodič}(x, z) \land \texttt{rodič}(z, y))\big)\big)$.

♮

## 3.3 Sémantika relačnej logiky prvého rádu

**3.3.1** Zostrojte štruktúru $\mathcal{M} = (M, i)$ pre jazyk z predchádzajúcej úlohy tak, aby:

a) Štruktúra $\mathcal{M}$ splnila nasledujúce formuly v každom ohodnotení:

$(A_1)$ $\exists x \exists y(\mathtt{rodič}(x, \mathtt{Andrea}) \land \mathtt{rodič}(y, \mathtt{Andrea}) \land$
$\mathtt{rodič}(x, \mathtt{Boris}) \land \mathtt{rodič}(y, \mathtt{Boris}))$,

$(A_2)$ $(\mathtt{rodič}(\mathtt{Andrea}, \mathtt{Cyril}) \land \mathtt{rodič}(\mathtt{Boris}, \mathtt{Diana}))$,

$(A_3)$ $\forall x\, \neg\mathtt{rodič}(x, x)$,

$(A_4)$ $\forall x\big((\mathtt{žena}(x) \lor \mathtt{muž}(x)) \land \neg(\mathtt{žena}(x) \land \mathtt{muž}(x))\big)$,

$(A_5)$ $\forall p \forall q \forall r \forall x\big((\mathtt{rodič}(p, x) \land \mathtt{rodič}(q, x) \land \mathtt{žena}(p) \land \mathtt{žena}(q)) \to p \doteq q\big)$,

$(A_6)$ $\forall p \forall q \forall r \forall x\big((\mathtt{rodič}(p, x) \land \mathtt{rodič}(q, x) \land \mathtt{muž}(p) \land \mathtt{muž}(q)) \to p \doteq q\big)$.

b) Štruktúra $\mathcal{M}$ *navyše* splnila nasledujúce formulu a definície v nich použitých pojmov z úlohy 3.2.1:

$(B_1)$ $\exists x \exists y\, \mathtt{prastarý\_rodič}(x, y)$,

$(B_2)$ $\exists x\big(\mathtt{jedináčik}(x) \land \forall y(\mathtt{rodič}(x, y) \to \mathtt{jedináčik}(y))\big)$,

$(B_3)$ $\exists x \exists y(\mathtt{súrodenec}(x, y) \land \mathtt{nevlastný\_súrodenec}(x, y))$.

**3.3.2** Dokážte, že nasledujúce tvrdenia *nie sú* ani platné ani nesplniteľné:

a) $\neg\forall x\, P(x) \to \forall x \neg P(x)$,

b) $\exists x \neg P(x) \to \neg\exists x\, P(x)$,

c) $\forall x(P(x) \lor Q(x)) \to (\forall x\, P(x) \lor \forall x\, Q(x))$,

d) $(\forall x\, P(x) \to \forall x\, Q(x)) \to \forall x(P(x) \to Q(x))$,

e) $(\neg\forall x\, P(x) \lor \forall x\, Q(x)) \to \forall x(P(x) \to Q(x))$,

f) $(\exists x\, P(x) \land \exists x\, Q(x)) \to \exists x(P(x) \land Q(x))$,

g) $\exists x(P(x) \lor Q(x)) \to \exists x\, P(x) \lor \exists x\, Q(x)$,

h) $\neg\forall x(P(x) \land Q(x)) \to \neg\forall x\, P(x) \lor \neg\forall x\, Q(x)$,

i) $\neg\exists x(P(x) \land Q(x)) \to \neg\exists x\, P(x) \lor \neg\exists x\, Q(x)$.

*Riešenie.* Napríklad štruktúra $\mathcal{M}_1 = (M_1, i_1)$, pričom:

$$M_1 = \{1\}$$
$$i_1(P) = \emptyset$$
$$i_1(Q) = \{1\}$$

spĺňa formulu c), ale štruktúra $\mathcal{M}_2 = (M_2, i_2)$, kde:

$$M_2 = \{1, 2\}$$

$$i_2(P) = \{2\}$$
$$i_2(Q) = \{1\}$$

ju nespĺňa. Formula c) teda nie je ani platná, ani nesplniteľná. ♮

## 3.4 Sémantika logiky prvého rádu

**3.4.1** Nájdite štruktúru, ktorá splní prvorádovú teóriu $T = \{A_1, \ldots, A_6\}$ v jazyku $\mathcal{L}$, kde $\mathcal{V}_\mathcal{L} = \{u, v, w, x, y, z\}$,
$\mathcal{C}_\mathcal{L} = \{\mathtt{Andrea}, \mathtt{Danka}, \mathtt{Hanka}, \mathtt{Janka}, \mathtt{Max}, \mathtt{Nikita}\}$,
$\mathcal{F}_\mathcal{L} = \{\mathtt{manžel}^1, \mathtt{manželka}^1, \mathtt{prvorodené\_dieťa}^2\}$,
$\mathcal{P}_\mathcal{L} = \{\mathtt{Lekár}^1, \mathtt{Manželia}^2, \mathtt{Muž}^1, \mathtt{Právnik}^1, \mathtt{Žena}^1\}$.

$(A_1)$ $\forall x \forall y (\mathtt{Manželia}(x, y) \to \mathtt{Manželia}(y, x))$

$(A_2)$ $\forall x \forall y \big(\mathtt{Manželia}(x, y) \to$
$(\mathtt{Muž}(x) \to x \doteq \mathtt{manžel}(y)) \land (\mathtt{Žena}(x) \to x \doteq \mathtt{manželka}(y))\big)$

$(A_3)$ $\forall x \forall y \big(\mathtt{Manželia}(x, y) \land \mathtt{Muž}(x) \land \mathtt{Žena}(y) \to$
$\mathtt{Lekár}(\mathtt{prvorodené\_dieťa}(x, y)) \lor \mathtt{Právnik}(\mathtt{prvorodené\_dieťa}(x, y))\big)$

$(A_4)$ $\mathtt{Manželia}(\mathtt{Hanka}, \mathtt{Max}) \land \mathtt{Žena}(\mathtt{Hanka}) \land \mathtt{Muž}(\mathtt{Max})$

$(A_5)$ $\mathtt{Manželia}(\mathtt{Danka}, \mathtt{Janka}) \land \mathtt{Žena}(\mathtt{Danka}) \land \mathtt{Žena}(\mathtt{Janka})$

$(A_6)$ $\mathtt{Manželia}(\mathtt{Andrea}, \mathtt{Nikita}) \land \mathtt{Muž}(\mathtt{Andrea})$

## 3.5 Substitúcie, voľné a viazané premenné

**3.5.1** Uvažujme nasledujúce postupnosti symbolov:

$(X_1)$ $\mathtt{matka}(\mathtt{matka}(x))$

$(X_2)$ $y \doteq \mathtt{matka}(x)$

$(X_3)$ $\forall x \forall y\, (y \doteq \mathtt{matka}(x) \to \mathtt{dieťa}(x, y))$

$(X_4)$ $\exists x\, (\mathtt{ľúbi}(x, y) \lor \neg \mathtt{ľúbi}(x, y))$

$(X_5)$ $\forall x\, P(x) \land Q(x)$

$(X_6)$ $\exists x \exists y\, R(x, y) \lor \forall y\, S(x, y)$

$(X_7)$ $\exists x \big(P(f(x)) \land$
$\forall x \forall y \big(Q(x, x) \to P(g(x)) \lor R(x, y)\big)\big)$

Pre každú z nich:

a) vyznačte oblasti platnosti kvantifikátorov, ktoré sa v nej vyskytujú;
b) vyznačte voľné a viazané výskyty premenných $x$, $y$;
c) zistite, či je premenná $y$ voľná;
d) určte množinu voľných premenných.

**3.5.2** Zistite, či je v nasledujúcich prípadoch substitúcia aplikovateľná; ak áno, určte výsledok substitúcie:

a) $x\{x \mapsto f(y)\}$

b) $y\{x \mapsto f(y)\}$

c) $g(x,y)\{x \mapsto y\}$

d) $h(x,a,g(x,y))\{x \mapsto f(a)\}$

e) $\big(\neg P(x,y) \lor Q(x,y)\big)\{y \mapsto a\}$

f) $\big(\exists x\, \neg P(x,y) \lor Q(x,y)\big)\{y \mapsto a\}$

g) $\big(\exists x\, P(x,y) \lor Q(x,y)\big)$ $\{x \mapsto g(b,y)\}$

h) $\big(\forall z\,(P(x,z) \land Q(x,g(y,z)))\big)$ $\{x \mapsto f(z), z \mapsto g(x,y)\}$

i) $\big(P(x) \land \exists x\,(Q(x) \lor R(x)) \to S(x)\big)$ $\{x \mapsto c\}$

j) $\big(\forall z\,(P(x,z) \land Q(x,g(y,z)))\big)$ $\{x \mapsto f(y), y \mapsto g(x,y)\}$

## 3.6 Tablá pre logiku prvého rádu

**3.6.1** Dokážte v tablovom kalkule:

a) $\models \exists x\, \mathtt{muž}(x) \land \exists x\, \mathtt{žena}(x) \to \exists x(\mathtt{muž}(x) \lor \mathtt{žena}(x))$

b) $\{\forall x\, \mathtt{hračka}(\mathtt{najhračka}(x)), \neg\exists x(\mathtt{hračka}(x) \land \neg\mathtt{jednorožec}(x))\} \models$
$\forall x\, \mathtt{jednorožec}(\mathtt{najhračka}(x))$

*Riešenie.* a) Máme dokázať, že formula zo zadania je platná. Vybudujeme preto tablo pre množinu označených formúl $S^+ = \{\mathbf{F}\, \exists x\, \mathtt{muž}(x) \land \exists x\, \mathtt{žena}(x) \to \exists x(\mathtt{muž}(x) \lor \mathtt{žena}(x))\}$.

Zápis formuly je zjednodušený podľa pravidiel z prednášky. Jej plne uzátvorkovaný tvar je $\big((\exists x\, \mathtt{muž}(x) \land \exists x\, \mathtt{žena}(x)) \to \exists x(\mathtt{muž}(x) \lor \mathtt{žena}(x))\big)$. Formula je teda **implikáciou**, ktorej antecedent je konjunkcia dvoch existenčne kvantifikovaných formúl a konzekvent je existenčná kvantifikácia disjunkcie. Tablové pravidlá musíme aplikovať **v súlade** s touto štruktúrou.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\mathbf{F}\, \exists x\, \texttt{muž}(x) \land \exists x\, \texttt{žena}(x) \to \exists x(\texttt{muž}(x) \lor \texttt{žena}(x))$ | $S^+$ |
| 2. | $\mathbf{T}\, \exists x\, \texttt{muž}(x) \land \exists x\, \texttt{žena}(x)$ | $\alpha 1$ |
| 3. | $\mathbf{F}\, \exists x(\texttt{muž}(x) \lor \texttt{žena}(x))$ | $\alpha 1$ |
| 4. | $\mathbf{T}\, \exists x\, \texttt{muž}(x)$ | $\alpha 2$ |
| 5. | $\mathbf{T}\, \exists x\, \texttt{žena}(x)$ | $\alpha 2$ |
| 6. | $\mathbf{T}\, \texttt{muž}(y)$ | $\delta 4\{x \mapsto y\}$ |
| 7. | $\mathbf{T}\, \texttt{žena}(z)$ | $\delta 5\{x \mapsto z\}$ |
| 8. | $\mathbf{F}\, \texttt{muž}(z) \lor \texttt{žena}(z)$ | $\gamma 3\{x \mapsto z\}$ |
| 9. | $\mathbf{F}\, \texttt{muž}(z)$ | $\alpha 8$ |
| 10. | $\mathbf{F}\, \texttt{žena}(z)$ | $\alpha 8$ |
| | * | $7, 10$ |

Pravidlo $\boldsymbol{\delta}$ sme (aj keď to nebolo nutné) v table použili dvakrát (uzly 6 a 7). **Vždy** sme za pôvodne viazanú premennú $x$ substituovali **novú** voľnú premennú (v 6 to bola $y$, potom v 7 to bola $z$, lebo v tej chvíli sa už $y$ vo vetve vyskytovala voľná). Bolo by **chybou** použiť premennú, ktorá **sa už predtým** vo vetve tabla **vyskytla voľná**. Dôvod je nasledovný:

O objekte, ktorý existuje podľa formuly 4, je známe **iba** to, že má vlastnosť $\texttt{muž}$. Podobne o objekte, ktorý existuje podľa formuly 5, je známe **iba** to, že má vlastnosť $\texttt{žena}$. Tento objekt pravdepodobne **nebude rovnaký** ako objekt, ktorý má vlastnosť $\texttt{muž}$. **Nesmieme** ich preto označiť rovnakou premennou. Nemohli by sme použiť ani inú premennú, ktorá by sa už v table predtým vyskytla voľná, lebo aj o ňou označenom objekte by už boli známe nejaké ďalšie skutočnosti. Tento princíp platí pri všetkých formulách typu $\delta$.

Formuly typu $\boldsymbol{\gamma}$ hovoria, že nimi opísanú vlastnosť (pozitívnu či negatívnu) majú **všetky** objekty. Preto pri ich použití (8) môžeme za pôvodne viazanú premennú dosadiť **ľubovoľnú premennú**, ale aj **ľubovoľný term** (konštantu, aplikáciu funkčného symbolu na ľubovoľné argumenty).

Tablo je uzavreté, takže množina $S^+$ je nesplniteľná. Neexistuje teda štruktúra, v ktorej by formula $\exists x\, \texttt{muž}(x) \land \exists x\, \texttt{žena}(x) \to \exists x(\texttt{muž}(x) \lor \texttt{žena}(x))$ pri nejakom ohodnotení bola nesplnená, a preto je táto formula platná. $\natural$

**3.6.2** Dokážte v tablovom kalkule:

a) $\{\exists x\big(P(g(x)) \to \neg\, \exists y\, Q(y)\big)\} \models \forall x\, P(x) \to \forall y\, \neg Q(f(y))$

b) $\{\exists x\big(P(g(x)) \to \exists y\, Q(f(y))\big)\} \models \forall x\, P(x) \to \exists y\, Q(y)$

c) $\{\exists x\, \forall y\, Q(x,y), \exists x\, P(f(x))\} \models \exists x\, P(x) \land \forall y\, \exists x\, Q(x,y)$

d) $\{\forall x\big(\, P\big(g(x,x)\big) \to \exists y\, Q\big(g(x, f(y))\big)\,\big)\} \models \exists x\, \neg P(x) \lor \forall y\, \exists z\, Q\big(g(f(y), z)\big)$

e) $\{\forall x\big(P(x) \to \exists y\, R(x,y)\big), \forall x\, \forall y\big(\neg R(x,y) \lor Q(y)\big),$
$\exists x\, \neg\exists y\, \big(Q(y) \land S(y, f(x))\big)\} \models \forall x\, \exists y\big(P(x) \to R(x,y) \land \exists z\, \neg S(y,z)\big)$

f) $\{\forall x\big(P(g(x)) \rightarrow \exists y\, Q(x, g(y))\big)\} \models \exists x\big(P(x) \rightarrow \forall y\, \exists z\, Q(f(y), z)\big)$

*Riešenie.* a) Máme dokázať vyplývanie. Vybudujeme preto tablo pre množinu označených formúl $S^+ = \{\mathbf{T}\,\exists x\big(P(g(x)) \rightarrow \neg\,\exists y\, Q(y)\big), \mathbf{F}\,\forall x\, P(x) \rightarrow \forall y\, \neg Q(f(y))\}$, ktorá vyjadruje, že všetky formuly teórie sú splnené a formula, ktorej vyplývanie dokazujeme, je nesplnená.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\mathbf{T}\,\exists x\big(P(g(x)) \rightarrow \neg\,\exists y\, Q(y)\big)$ | $S^+$ |
| 2. | $\mathbf{F}\,\forall x\, P(x) \rightarrow \forall y\, \neg Q(f(y))$ | $S^+$ |
| 3. | $\mathbf{T}\,\forall x\, P(x)$ | $\alpha 2$ |
| 4. | $\mathbf{F}\,\forall y\, \neg Q(f(y))$ | $\alpha 2$ |
| 5. | $\mathbf{F}\,\neg Q(f(u))$ | $\delta 4\{y \mapsto u\}$ |
| 6. | $\mathbf{T}\, Q(f(u))$ | $\alpha 5$ |
| 7. | $\mathbf{T}\, P(g(v)) \rightarrow \neg\,\exists y\, Q(y)$ | $\delta 1\{x \mapsto v\}$ |

| | | |
|---|---|---|
| 8. | $\mathbf{F}\, P(g(v))$ | $\beta 7$ |
| 9. | $\mathbf{T}\, P(g(v))$ | $\gamma 3\{x \mapsto g(v)\}$ |
| | $*$ | 8, 9 |

| | | |
|---|---|---|
| 10. | $\mathbf{T}\,\neg\,\exists y\, Q(y)$ | $\beta 7$ |
| 11. | $\mathbf{F}\,\exists y\, Q(y)$ | $\alpha 10$ |
| 12. | $\mathbf{F}\, Q(f(u))$ | $\gamma 11\{y \mapsto f(u)\}$ |
| | $*$ | 6, 12 |

Znova pripomíname, že voľná premenná, ktorú dosádzame za viazanú premennú vo formule typu $\delta$ musí byť **nová** — teda nevyskytuje sa vo vetve voľná pred miestom použitia v $\delta$ pravidle. V prípade $\delta$ formuly $\mathbf{T}\,\exists x\, A$ označuje nová premenná *svedka* splnenia formuly $\exists x\, A$, v prípade $\delta$ formuly $\mathbf{F}\,\forall x\, A$ označuje nová premenná *kontrapríklad* splnenia formuly $\forall x\, A$.

Pozor na správne vykonanie substitúcie v $\gamma$ aj v $\delta$ pravidlách. **Dosádzame vždy iba za premenné. Nesmieme** substituovať za konštantu ani za term s funkčným symbolom. Nesmieme ani zmeniť funkčný symbol v terme. Napríklad v 7. kroku nemožno odvodiť $\mathbf{T}\,\cancel{P(v) \rightarrow \exists y\, Q(f(y))}$ či $\cancel{\mathbf{T}\, P(f(v)) \rightarrow \exists y\, Q(f(y))}$.

V tomto table sme do oboch formúl typu $\gamma$ potrebovali za premenné dosadiť termy s funkčnými symbolmi.

Tablo sa nám podarilo uzavrieť, preto je množina $S^+$ nesplniteľná. Neexistuje teda štruktúra, v ktorej by bola pri nejakom ohodnotení teória $\{\exists x\big(P(g(x)) \rightarrow \exists y\, Q(f(y))\big)\}$ splnená a formula $\forall x\, P(g(x)) \rightarrow \exists y\, Q(y)$ nesplnená. Preto $\{\exists x\big(P(g(x)) \rightarrow \exists y\, Q(f(y))\big)\} \models \forall x\, P(g(x)) \rightarrow \exists y\, Q(y)$. ♮

**3.6.3** Dokážte v tablovom kalkule, že nasledujúce formuly sú platné:

a) $\neg\exists y\, P(y) \to \forall y(\exists x\, P(x) \to P(y))$
b) $\forall x\, P(x) \to \forall x\, P(f(x))$
c) $\neg\exists x\, P(x) \to \forall x\, \neg P(x)$
d) $\forall x\, P(x) \to \exists x\, P(x)$
e) $\forall x\, P(x) \to \forall y\, P(y)$
f) $\exists x\, P(x) \to \exists y\, P(y)$
g) $\forall x\, P(x) \to \exists y\, P(y)$
h) $\forall y(\forall x\, P(x) \to P(y))$
i) $\exists y(P(y) \to \forall x\, P(x))$
j) $\neg\forall x\, P(x) \to \exists x\, \neg P(x)$
k) $\exists x(P(x) \land Q(x)) \to \exists x\, P(x) \land \exists x\, Q(x)$
l) $\exists x(P(x) \lor Q(x)) \leftrightarrow \exists x\, P(x) \lor \exists x\, Q(x)$
m) $\forall x(P(x) \land Q(x)) \leftrightarrow \forall x\, P(x) \land \forall x\, Q(x)$
n) $\forall x\, P(x) \lor \forall x\, Q(x) \to \forall x(P(x) \lor Q(x))$
o) $\neg\forall x\, P(x) \leftrightarrow \exists x\, \neg P(x)$
p) $\neg\exists x\, P(x) \leftrightarrow \forall x\, \neg P(x)$
q) $\exists x(P(x) \lor R(y)) \leftrightarrow \exists x\, P(x) \lor R(y)$
r) $\forall x(P(x) \lor R(y)) \leftrightarrow \forall x\, P(x) \lor R(y)$
s) $\forall x(P(x) \land R(y)) \leftrightarrow \forall x\, P(x) \land R(y)$
t) $\exists x(P(x) \land R(y)) \leftrightarrow \exists x\, P(x) \land R(y)$
u) $\exists x\, R(y) \leftrightarrow R(y)$
v) $\forall x\, R(y) \leftrightarrow R(y)$
w) $\exists x(P(x) \to R(y)) \leftrightarrow (\forall x\, P(x) \to R(y))$
x) $\forall x(P(x) \to R(y)) \leftrightarrow (\exists x\, P(x) \to R(y))$
y) $\forall x(R(y) \to P(x)) \leftrightarrow (R(y) \to \forall x\, P(x))$
z) $\exists x(R(y) \to P(x)) \leftrightarrow (R(y) \to \exists x\, P(x))$

**3.6.4** Rozhodnite, či formula vyplýva z teórie. Vyplývanie dokážte tablom, nevyplývanie nájdením štruktúry, ktorá je kontrapríkladom.

a) $\{\exists x\, \neg\mathtt{myš}(x) \lor \forall x\, \mathtt{hlodavec}(x)\} \models \forall x(\mathtt{myš}(x) \to \mathtt{hlodavec}(x))$
b) $\{\forall x(\mathtt{myš}(x) \to \mathtt{hlodavec}(x))\} \models \exists x\, \neg\mathtt{myš}(x) \lor \forall x\, \mathtt{hlodavec}(x)$
c) $\{\forall x\, \exists y(\mathtt{hladný}(x) \land \mathtt{zje}(x, y) \to \mathtt{bude\_sýty}(x))\} \models$
$\forall x(\mathtt{hladný}(x) \land \exists y\, \mathtt{zje}(x, y) \to \mathtt{bude\_sýty}(x))$
d) $\{\forall x(\mathtt{hladný}(x) \land \exists y\, \mathtt{zje}(x, y) \to \mathtt{sýty}(x))\} \models$
$\forall x\, \exists y(\mathtt{hladný}(x) \land \mathtt{zje}(x, y) \to \mathtt{sýty}(x))$
e) $\{\forall x\big(\, P(x) \land \exists y\, \forall z\, Q(f(x, y), z)\,\big)\} \models \exists x\big(\, P(g(x)) \land \forall y\, Q(x, g(y))\,\big)$

## 3.7 Tablové dôkazy s rovnosťou

**3.7.1** Prvorádovými tablami (teda tablami s pravidlami $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, pravidlom reflexivity a Eulerovým pravidlom) dokážte:

a) $\models x \doteq y \land \neg\texttt{študent}(y) \to \neg\texttt{študent}(x)$

b) $\{x \doteq y, \texttt{rodič}(\texttt{matka}(v), x), \neg\texttt{rodič}(\texttt{matka}(w), y)\} \models w \not\doteq v$

c) $\{f(f(f(x))) \doteq x, f(f(f(x))) \doteq f(f(x))\} \models f(x) \doteq x$

**3.7.2** (Smullyan [4]) Nasledujúca úvaha môže vyzerať prekvapujúco:

Každý sa bojí Drakulu. Drakula sa bojí iba mňa. Takže som Drakula.

Sformalizujte úvahu v jazyku logiky prvého rádu $\mathcal{L}$, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\texttt{Drakula}, \texttt{ja}\}$, $\mathcal{F}_{\mathcal{L}} = \emptyset$, $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\texttt{bojí\_sa}^2\}$ a dokážte, že je správna prvorádovým tablom.

**3.7.3** Pripomeňme si formalizáciu záhady vraždy tety Agáty:

($A_1$) $\exists x(\texttt{vDreadbury}(x) \land \texttt{zabil}(x, \texttt{Agáta}))$

($A_2$) $\forall x(\texttt{vDreadbury}(x) \leftrightarrow x \doteq \texttt{Agáta} \lor x \doteq \texttt{Komorník} \lor x \doteq \texttt{Charles})$

($A_3$) $\forall x \forall y(\texttt{zabil}(x, y) \to \texttt{nenávidí}(x, y))$

($A_4$) $\forall x \forall y(\texttt{zabil}(x, y) \to \neg\texttt{bohatší\_ako}(x, y))$

($A_5$) $\forall x(\texttt{nenávidí}(\texttt{Agáta}, x) \to \neg\texttt{nenávidí}(\texttt{Charles}, x))$

($A_6$) $\forall x(\neg x \doteq \texttt{Komorník} \to \texttt{nenávidí}(\texttt{Agáta}, x))$

($A_7$) $\forall x(\neg\texttt{bohatší\_ako}(x, \texttt{Agáta}) \to \texttt{nenávidí}(\texttt{Komorník}, x))$

($A_8$) $\forall x(\texttt{nenávidí}(\texttt{Agáta}, x) \to \texttt{nenávidí}(\texttt{Komorník}, x))$

($A_9$) $\forall x \exists y(\texttt{vDreadbury}(y) \land \neg\texttt{nenávidí}(x, y))$

($A_{10}$) $\neg\texttt{Agáta} \doteq \texttt{Komorník}$

Nech $T = \{A_1, \ldots, A_{10}\}$ (pozor na zmenu vo formulách $A_2$, $A_9$ a $A_{10}$ oproti praktickým cvičeniam). Dokážte tablovým kalkulom, že teta Agáta spáchala samovraždu. Teda formálne zapísané, dokážte že platí $T \models \texttt{zabil}(\texttt{Agáta}, \texttt{Agáta})$.

Symboly predikátov a konštánt si vhodne skráťte. Použite prvorádové tablo rozšírené o pravidlá $\gamma^*$ a $\delta^*$, pravidlá pre ekvivalenciu, a pravidlá z úlohy 2.7.15.

**3.7.4** Dokážte nasledujúce tvrdenia pomocou prvorádových tabiel s pridanými pravidlami $\gamma^*$ a $\delta^*$:

a) Predpokladajme, že vieme iba o vlastnostiach sčítania $+$, ktoré popisuje teória $\{A_1, A_2, A_3\}$. Dokážte, že z nich vyplýva $X$.

($A_1$) $\forall x\, \forall y\, \forall z\, (x + (y + z)) \doteq ((x + y) + z)$

($A_2$) $\exists o_1\, \forall x\, (o_1 + x) \doteq x$

($A_3$) $\exists o_2\, \forall x\, (x + o_2) \doteq x$

($X$) $\exists o\, \forall x\big((o + x) \doteq x \land (x + o) \doteq x\big)$

$A_1$ hovorí, že sčítanie je asociatívne. $A_2$ a $A_3$ hovoria, že existuje „ľavá nula“ $o_1$ a „pravá nula“ $o_2$. $X$ hovorí, že existuje nula $o$, ktorá je pravá aj ľavá.

*Pomôcka:* Odvoďte, že $o_1 \doteq o_2$.

b) Predpokladajme, že vieme iba o vlastnostiach sčítania +, ktoré popisuje teória $\{B_1, B_2, B_3, B_4\}$. Dokážte, že z nich vyplýva $Y$.

($B_1$) $\forall x\, \forall y\, \forall z\, (x + (y + z)) \doteq ((x + y) + z)$

($B_2$) $\forall x\, (x + 0) \doteq x$

($B_3$) $\forall y\, \exists i_1\, (i_1 + y) \doteq 0$

($B_4$) $\forall y\, \exists i_2\, (y + i_2) \doteq 0$

($Y$) $\forall y \exists i\big((i + y) \doteq 0 \land (y + i) \doteq 0\big)$

$B_1$ hovorí, že sčítanie je asociatívne. $B_2$ hovorí, že 0 je pravá nula sčítania (nevieme, či je aj ľavou nulou). $B_3$ a $B_4$ hovoria, že ku každému číslu $y$ existuje ľavé, resp. pravé opačné číslo (ako $-y$). $Y$ hovorí, že ku každému číslu $y$ existuje opačné číslo (je súčasne ľavým aj pravým opačným číslom pre $y$).

*Pomôcka:* Odvoďte najprv využitím asociativity ($B_1$), že pre zvolené číslo $x$, jeho ľavé opačné číslo $u$ a pravé opačné číslo $v$ platí $u \doteq (0 + v)$. Odtiaľ ľahko dostanete, že $u$ je aj pravým opačným číslom k $x$.

c) Predpokladajme, že vieme iba o vlastnostiach sčítania +, ktoré popisuje teória $\{C_1, C_2, C_3\}$. Dokážte, že z nich vyplýva $Z$.

($C_1$) $\forall x\, \forall y\, \forall z\, (x + (y + z)) \doteq ((x + y) + z)$

($C_2$) $\forall x\, (x + 0) \doteq x$

($C_3$) $\forall y\, \exists i((y + i) \doteq 0 \land (i + y) \doteq 0)$

($Z$) $\forall x\, \forall y\, \forall z\big((x + z) \doteq (y + z) \to x \doteq y\big)$ (zákon pravého krátenia)

*Pomôcka:* Začnite tak, že odstránite kvantifikátory a zjednodušíte implikáciu v $Z$, reflexivitou pripočítate vhodný prvok k $(x + z)$, Eulerovým pravidlom nahradíte $(x + z)$ na pravej strane za $(y + z)$.

**3.7.5** V logike prvého rádu môžeme sformalizovať (axiomatizovať) teóriu množín. Úplná formalizácia je pomerne komplikovaná. Pre naše účely postačí nasledujúci fragment $T_{\mathrm{set}}$ so základnými vzťahmi a operáciami v jazyku $\mathcal{L}$, kde $\mathcal{C}_{\mathcal{L}} = \{\emptyset\}$, $\mathcal{P}_{\mathcal{L}} = \{\in^2, \subseteq^2\}$ a $\mathcal{F}_{\mathcal{L}} = \{\cup^2, \cap^2, \setminus^2, \mathsf{P}^2\}$.

$$\forall x\, \forall y(\forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x \doteq y) \qquad \text{(extenzionalita)}$$

$$\forall x\, \forall y(x \subseteq y \leftrightarrow \forall z(z \in x \to z \in y)) \qquad \text{(podmnožina)}$$

$$\forall x\, \forall y\, \forall z(z \in \mathsf{P}(x, y) \leftrightarrow (z \doteq x \lor z \doteq y)) \qquad \text{(dvojica)}$$

$$\forall z\, \neg\, z \in \emptyset \qquad \text{(prázdna mn.)}$$

$$\forall x\, \forall y\, \forall z(z \in (x \cap y) \leftrightarrow (z \in x \land z \in y)) \qquad \text{(prienik)}$$

$$\forall x\, \forall y\, \forall z(z \in (x \cup y) \leftrightarrow (z \in x \lor z \in y)) \qquad \text{(zjednotenie)}$$

$$\forall x\, \forall y\, \forall z(z \in (x \setminus y) \leftrightarrow (z \in x \land \neg\, z \in y)) \qquad \text{(rozdiel)}$$

Prvorádovými tablami rozšírenými o pravidlá $\gamma^*$ a $\delta^*$, pravidlá pre ekvivalenciu, a pravidlá z úlohy 2.7.15 dokážte, že z $T_{\mathrm{set}}$ vyplývajú nasledujúce formuly:

($A_1$) $\forall x\, x \subseteq x$

($A_2$) $\forall x\, \forall y\, \forall z(x \subseteq y \land y \subseteq z \to x \subseteq z)$

($A_3$) $\forall x\, \forall y(x \subseteq y \land y \subseteq x \to x \doteq y)$

($A_4$) $\forall x\, \forall y((x \cup y) \doteq x \to y \subseteq x)$

($A_5$) $\forall x\, \forall y((x \cap y) \doteq y \to y \subseteq x)$

($A_6$) $\forall x\, \forall y((x \setminus y) \doteq \emptyset \to x \subseteq y)$

($A_7$) $\forall x\, \forall y\, (x \cap y) \subseteq x$

($A_8$) $\forall x\, \forall y\, x \subseteq (x \cup y)$

($A_9$) $\forall x\, \forall y\, (x \cap y) \doteq (y \cap x)$

($A_{10}$) $\forall x\, \forall y\, (x \cup y) \doteq (y \cup x)$

($A_{11}$) $\forall x\, \forall y\, \forall z\, (x \cap (y \cup z)) \doteq ((x \cap y) \cup (x \cap z))$

($A_{12}$) $\forall x\, \forall y\, \forall z\, (x \cup (y \cap z)) \doteq ((x \cup y) \cap (x \cup z))$

($A_{13}$) $\forall x\, \forall y\, \forall z\, (x \cap (y \setminus z)) \doteq ((x \cap y) \setminus z)$

($A_{14}$) $\forall u\, \forall x\, \forall y\, (u \setminus (x \cap y)) \doteq ((u \setminus x) \cup (u \setminus y))$

($A_{15}$) $\forall u\, \forall x\, \forall y\, (u \setminus (x \cup y)) \doteq ((u \setminus x) \cap (u \setminus y))$

($A_{16}$) $\forall u\, \forall x\, \forall y\, (u \setminus (x \setminus y)) \doteq ((u \setminus x) \cup (u \cap y))$

($A_{17}$) $\forall x\, \forall y\, \forall z\, (x \subseteq (y \cap z) \leftrightarrow x \subseteq y \land x \subseteq z)$

($A_{18}$) $\forall x\, \forall y\, \forall z(x \subseteq y \lor x \subseteq z \to x \subseteq (y \cup z))$

($A_{19}$) $\neg\, \forall x\, \forall y\, \forall z(x \subseteq (y \cup z) \to x \subseteq y \lor x \subseteq z)$

($A_{20}$) $\neg\, \exists x\, \forall z(z \in x \leftrightarrow \neg\, z \in z)$

($A_{21}$) $\exists x\, \forall z(z \in x \leftrightarrow z \in z) \to \neg\, \forall x\, \exists y\, \forall z(z \in y \leftrightarrow \neg z \in x)$

*Riešenie ($A_4$).* Aby sme dokázali, že $T_{\mathrm{set}} \models A_4$, vybudujeme tablo pre množinu označených formúl $S^+ = \{\, \mathbf{T}\, A \mid A \in T_{\mathrm{set}}\,\} \cup \{\mathbf{F}\, A_4\}$.

⚠ Je dôležité uvedomovať si, čo máme dokázať, prečo by to mala byť to pravda a budovať tablo tak, aby zodpovedalo dôkazu tvrdenia v prirodzenom jazyku. Inak sa v ňom ľahko stratíme a urobíme chybu alebo dôkaz nikam nepovedie.

Tvrdenie $A_4$ hovorí, že ak je zjednotenie množín $x$ a $y$ rovné $x$, musí byť $y$ podmnožinou $x$. Ak totiž $x \cup y = x$, tak v $y$ nie sú žiadne prvky, ktoré by už neboli v $x$, teda každý prvok z $y$ je v $x$, teda $y$ je podmnožinou $x$.

Rovnako ľahko to dokážeme sporom: Nech $x \cup y = x$, ale $y \not\subseteq x$. Potom je nejaký prvok $p$, ktorý patrí do $y$ ($p \in y$), ale $p \notin x$. Pretože ale $p \in y$, tak $p \in (x \cup y)$. Lenže $x \cup y = x$, teda $p \in x$, čo je spor s úvodným predpokladom.

Tento dôkaz sporom teraz podrobne a formálne zapíšeme ako tablo.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\mathbf{F}\,\forall x\,\forall y((x \cup y) \doteq x \rightarrow y \subseteq x)$ | $S^+$ |
| 2. | $\mathbf{F}\,(v \cup w) \doteq v \rightarrow w \subseteq v$ | $\delta^* 1\{x \mapsto v, y \mapsto w\}$ |
| 3. | $\mathbf{T}\,(v \cup w) \doteq v$ | $\alpha 2$ |
| 4. | $\mathbf{F}\,w \subseteq v$ | $\alpha 2$ |
| 5. | $\mathbf{T}\,\forall x\,\forall y(x \subseteq y \leftrightarrow \forall z(z \in x \rightarrow z \in y))$ | $S^+$ |
| 6. | $\mathbf{T}\,w \subseteq v \leftrightarrow \forall z(z \in w \rightarrow z \in v)$ | $\gamma^* 5\{x \mapsto w, w \mapsto v\}$ |
| 7. | $\mathbf{F}\,\forall z(z \in w \rightarrow z \in v)$ | ESTF6, 4 |
| 8. | $\mathbf{F}\,p \in w \rightarrow p \in v$ | $\delta 7\{z \mapsto p\}$ |
| 9. | $\mathbf{T}\,p \in w$ | $\alpha 8$ |
| 10. | $\mathbf{F}\,p \in v$ | $\alpha 8$ |
| 11. | $\mathbf{T}\,(v \cup w) \doteq (v \cup w)$ | Refl |
| 12. | $\mathbf{T}\,v \doteq (v \cup w)$ | Euler3, 11 |
| 13. | $\mathbf{F}\,p \in (v \cup w)$ | Euler12, 10 |
| 14. | $\mathbf{T}\,\forall x\,\forall y\,\forall z(z \in (x \cup y) \leftrightarrow (z \in x \vee z \in y))$ | $S^+$ |
| 15. | $\mathbf{T}\,p \in (v \cup w) \leftrightarrow (p \in v \vee p \in w)$ | $\gamma^* 14\{x \mapsto v, y \mapsto w, z \mapsto p\}$ |
| 16. | $\mathbf{F}\,p \in v \vee p \in w$ | ESTF15, 13 |
| 17. | $\mathbf{F}\,p \in v$ | $\alpha 16$ |
| 18. | $\mathbf{F}\,p \in w$ | $\alpha 16$ |
| | $*\,9, 18$ | |

Tablo začneme priamo formulou $\mathbf{F}\,A_4$, ktorej vyplývanie chceme (sporom) dokázať (1). Ostatné formuly z $S^+$, teda formuly z $T_{\text{set}}$ označené $\mathbf{T}$ budeme pridávať podľa potreby, lebo ich je veľa a nie všetky využijeme.

Tvrdenie $A_4$ je všeobecne kvantifikovaná implikácia. Pretože predpokladáme, že nie je splnené, jeho bezkvantifikátorová podformula je nesplnená pre nejaké konkrétne, ale nie presne známe množiny $v$ a $w$ (2). Teda zjednotením $v$ a $w$ je $v$ (3), ale pritom $w$ nie je podmnožinou $v$ (4).

Aby sme zistili, či sú tieto fakty sporné, potrebujeme vedieť, ako ich naša teória definuje. Väčšinou sa oplatí začať nesplneným faktom, teda faktom 4. Vyberieme si z teórie definíciu vzťahu *byť podmnožinou* (5) a aplikujeme ju na $w$ a $v$ (6). Musí byť nesplnené, že všetky prvky množiny $w$ sú prvkami $v$ (7). Teda niektoré, nie presne známe prvky $w$ nie sú prvkami $v$. Označme niektorý z nich $p$ (8). Teda $p$ patrí do $w$ (9), ale $p$ nepatrí do $v$ (10).

Pretože $(v \cup w)$ sa rovná $v$ (3), zrejme $p$ nepatrí ani do $(v \cup w)$. Odvodiť v table to vieme Eulerovým pravidlom, ktoré ale používa rovnosť iba smere zľava doprava. Odvodíme teda symetrickú rovnosť k rovnosti 3: Reflexivitou pridáme rovnosť $(v \cup w) \doteq (v \cup w)$ (11) a Eulerovým pravidlom podľa 3 jej ľavú stranu nahradíme $v$ (12). Následne ďalším použitím Eulerovho pravidla dostaneme, že nie je splnené $p \in (v \cup w)$ (13).

Podľa definície zjednotenia z teórie (14), je $p$ prvkom zjednotenia množín $v$ a $w$ práve vtedy, keď je prvkom niektorej z nich (15). V našom prípade $p$ nie je prvkom zjednotenia, teda nie je prvkom ani jednej z týchto množín (16), teda ani $w$ (18), čo je ale v spore s tým, že $p \in w$ (9).

Keďže tablo je uzavteté, množina $S^+$ je nesplniteľná, a teda z $T_{\text{set}}$ vyplýva $A_4$. ♮

## 3.8 Rezolvencia v prvorádovej logike

**3.8.1** Zistite, či sú nasledujúce dvojice postupností symbolov unifikovateľné, a nájdite ich najvšeobecnejší unifikátor.

| | | |
|---|---|---|
| a) | $\mathtt{Arabela}$ | $\mathtt{prv\acute{y}\_majite\check{l}}(x)$ |
| b) | $\mathtt{kupuj\acute{u}ci}(\mathtt{Kolobe\check{z}ka6259}, y)$ | $\mathtt{kupuj\acute{u}ci}(t, \mathtt{prv\acute{y}\_majite\check{l}}(t))$ |
| c) | $\mathtt{predaj}(x, \mathtt{prv\acute{y}\_majite\check{l}}(t), t, p)$ | $\mathtt{predaj}(x, y, \mathtt{Kolobe\check{z}ka6259}, \mathtt{35eur})$ |
| d) | $\mathtt{predaj}(u, u, w, r)$ | $\mathtt{predaj}(\mathtt{kupuj\acute{u}ci}(y, t), y, t, p)$ |
| e) | $\mathtt{predaj}(x, \mathtt{Ingrid}, t, \mathtt{cena}(t))$ | $\mathtt{predaj}(\mathtt{kupuj\acute{u}ci}(y, t), y, t, p)$ |

**3.8.2** Sfaktorizujte klauzuly:

a) $\neg\mathtt{d\acute{a}ma}(x) \lor \mathtt{urazil}(y, x) \lor \neg\mathtt{d\acute{a}ma}(\mathtt{Milagros})$

b) $\neg\mathtt{chr\acute{a}ni}(\mathtt{osobn\acute{y}\_str\acute{a}\check{z}ca}(x), x) \lor \neg\mathtt{chr\acute{a}ni}(x, y)$

**3.8.3** Zrezolvujte nasledujúce množiny klauzúl v logike prvého rádu:

a) Každý cvičiaci je buď doktorand alebo asistent. Profesor Krhlička nie je ani doktorand, ani asistent, ale je cvičiaci.
$\{\neg\mathtt{cvi\check{c}iaci}(x) \lor \mathtt{doktorand}(x) \lor \mathtt{asistent}(x),$
$\neg\mathtt{doktorand}(\mathtt{Krhli\check{c}ka}), \quad \neg\mathtt{asistent}(\mathtt{Krhli\check{c}ka}), \quad \mathtt{cvi\check{c}iaci}(\mathtt{Krhli\check{c}ka})\}$

b) Ak má Tom rád Jerryho, potom existuje mačka, ktorá neznáša Toma. Jerryho majú všetci radi.
$\{\neg\mathtt{m\acute{a}\_r\acute{a}d}(\mathtt{Tom}, \mathtt{Jerry}) \lor \mathtt{ma\check{c}ka}(\mathtt{M}_1),$
$\neg\mathtt{m\acute{a}\_r\acute{a}d}(\mathtt{Tom}, \mathtt{Jerry}) \lor \mathtt{nezn\acute{a}\check{s}a}(\mathtt{M}_1, \mathtt{Tom}),$
$\mathtt{m\acute{a}\_r\acute{a}d}(x, \mathtt{Jerry})\}$

c) Kubkovi chutia všetky čokolády. Maťkovi nechutí Milka.
$\{\neg\mathtt{\check{c}okol\acute{a}da}(x) \lor \mathtt{chut\acute{i}}(x, \mathtt{Kubko}), \quad \neg\mathtt{chut\acute{i}}(\mathtt{Milka}, \mathtt{Ma\check{t}ko})\}$

**3.8.4** Prvorádovou rezolvenciou dokážte správnosť nasledujúcich úsudkov:

a) Každý je chlapec alebo dievča. Každé dievča má nejakú bábiku. Janka nie je chlapec. Potom Janka má aspoň jednu bábiku.

Teda formálne: Nech

$$T = \left\{ \begin{matrix} \forall x(\mathtt{chlapec}(x) \lor \mathtt{dievča}(x)), \\ \forall x(\mathtt{dievča}(x) \to \exists y(\mathtt{má}(x,y) \land \mathtt{bábika}(y))), \\ \neg\mathtt{chlapec}(\mathtt{Janka}) \end{matrix} \right\}$$

Dokážte, že $T \models \exists y(\mathtt{má}(\mathtt{Janka}, y) \land \mathtt{bábika}(y))$.

b) Predpokladajme, že všetko je pes alebo mačka, a že každý pes vlastní aspoň jednu pískaciu hračku. Z toho vyplýva, že ak Dunčo nie je mačka, vlastní nejakú pískaciu hračku.

c) Tí, čo nie sú maškrtníci, sú posadnutí štíhlou líniou. Kto nikdy nezjedol nejakú čokoládu, nie je maškrtník. Preto ak Garfield nie je posadnutý štíhlou líniou, tak niekedy zjedol aspoň jednu čokoládu.

d) Každého, kto urazí dámu, potrestá nejaký gentleman. Milagros je dáma. Takže ak Doña Angélica urazí Milagros, niekto ju (Doñu Angélicu) určite potrestá.

*Riešenie.* d) Najprv si sformalizujeme teóriu:

$$T = \left\{ \begin{matrix} \forall x\big(\text{dáma}(x) \to \forall y\big(\text{urazí}(y,x) \to \exists z(\text{potrestá}(z,y) \land \text{gentleman}(z))\big)\big), \\ \text{dáma}(\text{Milagros}) \end{matrix} \right\}$$

Sformalizujeme tiež tvrdenie, ktorého vyplývanie chceme dokázať:

$$X = \text{urazí}(\text{Doña\_Angélica}, \text{Milagros}) \to \exists x\, \text{potrestá}(x, \text{Doña\_Angélica}).$$

Keďže $T \models X$ vtt $T' = T \cup \{\neg X\}$ je nesplniteľné a dôkaz chceme vykonať pomocou rezolvenčného kalkulu, $T'$ si postupne upravíme do ekvisplniteľnej klauzálnej teórie. Úprava formuly $\forall x\big(\text{dáma}(x) \to \forall y\big(\text{urazí}(y,x) \to \exists z(\text{potrestá}(z,y) \land \text{gentleman}(z))\big)\big)$ je nasledujúca:

1. $\forall x\big(\text{dáma}(x) \to \forall y\big(\text{urazí}(y,x) \to \exists z(\text{potrestá}(z,y) \land \text{gentleman}(z))\big)\big)$

2. $\forall x\big(\neg\text{dáma}(x) \lor \forall y\big(\text{urazí}(y,x) \to \exists z(\text{potrestá}(z,y) \land \text{gentleman}(z))\big)\big)$
   (nahradenie implikácie)

3. $\forall x\big(\neg\text{dáma}(x) \lor \forall y\big(\neg\text{urazí}(y,x) \lor \exists z(\text{potrestá}(z,y) \land \text{gentleman}(z))\big)\big)$
   (nahradenie implikácie)

4. $\forall x\big(\neg\text{dáma}(x) \lor \forall y\big(\neg\text{urazí}(y,x) \lor (\text{potrestá}(\text{pomstiteľ}(x,y),y)$
   $\land\ \text{gentleman}(\text{pomstiteľ}(x,y)))\big)\big)$
   (skolemizácia)

5. $\forall x\, \forall y \big(\neg \text{dáma}(x) \lor \big(\neg \text{urazí}(y, x) \lor (\text{potrestá}(\text{pomstiteľ}(x, y), y)$
   $\land\ \text{gentleman}(\text{pomstiteľ}(x, y)))\big)\big)$
   (konverzia do PNF)

6. $\forall x\, \forall y \big(\big(\neg \text{dáma}(x) \lor \neg \text{urazí}(y, x) \lor \text{potrestá}(\text{pomstiteľ}(x, y), y)\big) \land$
   $\land\ \big(\neg \text{dáma}(x) \lor \neg \text{urazí}(y, x) \lor \text{gentleman}(\text{pomstiteľ}(x, y))\big)\big)$
   (distributívnosť)

7. $\{\neg \text{dáma}(x) \lor \neg \text{urazí}(y, x) \lor \text{potrestá}(\text{pomstiteľ}(x, y), y),$
   $\neg \text{dáma}(x) \lor \neg \text{urazí}(y, x) \lor \text{gentleman}(\text{pomstiteľ}(x, y))\}$
   (vytvorenie množiny klauzúl)

Formula $\text{dáma}(\text{Milagros})$ už v CNF je. Ostalo nám teda upraviť do CNF $\neg X$:

1. $\neg(\text{urazí}(\text{Doña\_Angélica}, \text{Milagros}) \to \exists x\, \text{potrestá}(x, \text{Doña\_Angélica}))$
2. $\neg(\neg \text{urazí}(\text{Doña\_Angélica}, \text{Milagros}) \lor \exists x\, \text{potrestá}(x, \text{Doña\_Angélica}))$
   (nahradenie implikácie)
3. $(\text{urazí}(\text{Doña\_Angélica}, \text{Milagros}) \land \forall x\, \neg \text{potrestá}(x, \text{Doña\_Angélica}))$
   (NNF)
4. $\forall x(\text{urazí}(\text{Doña\_Angélica}, \text{Milagros}) \land \neg \text{potrestá}(x, \text{Doña\_Angélica}))$
   (PNF)
5. $\{\text{urazí}(\text{Doña\_Angélica}, \text{Milagros}), \neg \text{potrestá}(x, \text{Doña\_Angélica})\}$
   (vytvorenie množiny klauzúl)

Výsledná ekvisplniteľná teória $T'_c$ je teda nasledujúca:

$$T'_c = \left\{ \begin{array}{l} \neg \text{dáma}(x) \lor \neg \text{urazí}(y, x) \lor \text{potrestá}(\text{pomstiteľ}(x, y), y), \\ \neg \text{dáma}(x) \lor \neg \text{urazí}(y, x) \lor \text{gentleman}(\text{pomstiteľ}(x, y)), \\ \text{dáma}(\text{Milagros}), \\ \text{urazí}(\text{Doña\_Angélica}, \text{Milagros}), \\ \neg \text{potrestá}(x, \text{Doña\_Angélica}) \end{array} \right\}$$

Teraz dokážme nesplniteľnosť $T'_c$ rezolvenčným kalkulom:

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\neg \text{dáma}(x) \lor \neg \text{urazí}(y, x)$ $\lor\ \text{potrestá}(\text{pomstiteľ}(x, y), y)$ | $T'_c$ |
| 2. | $\text{dáma}(\text{Milagros})$ | $T'_c$ |
| 3. | $\text{urazí}(\text{Doña\_Angélica}, \text{Milagros})$ | $T'_c$ |
| 4. | $\neg \text{potrestá}(x, \text{Doña\_Angélica})$ | $T'_c$ |
| 5. | $\neg \text{dáma}(x) \lor \neg \text{urazí}(\text{Doña\_Angélica}, x)$ | rezolvencia 1 a 4$\{x \mapsto z\}$ na potrestá, $\sigma_5 = \{y \mapsto \text{Doña\_Angélica}, z \mapsto \text{pomstiteľ}(x, \text{Doña\_Angélica})\}$ |
| 6. | $\neg \text{dáma}(\text{Milagros})$ | rezolvencia 3 a 5 na urazí, $\sigma_6 = \{x \mapsto \text{Milagros}\}$ |
| 7. | $\square$ | rezolvencia 2 a 6 na dáma, $\sigma_7 = \{\}$ |

⚠ Pri rezolvovaní klauzúl 1 a 4 sme museli premenovať premennú $x$ v jednej z nich na novú premennú $z$. Substitúciou $\sigma_5$ sme potom zunifikovali atómy $\mathrm{potrestá}(\mathrm{pomstiteľ}(x, y), y)$ z klauzuly 1 a $\mathrm{potrestá}(z, \mathrm{Doña\_Angélica})$ z klauzuly $4\{x \mapsto z\}$ (teda 4 po premenovaní).

Takéto premenovanie je štandardnou súčasťou rezolvencie. Na význame klauzúl nič nemení, lebo premenné v rôznych klauzulách sú všeobecne kvantifikované nezávisle od seba a na konkrétnom mene premennej nezáleží (pokiaľ nie je rovné menu inej premennej).

Bez premenovania nie sú atómy $\mathrm{potrestá}(\mathrm{pomstiteľ}(x, y), y)$ a $\mathrm{potrestá}(x, \mathrm{Doña\_Angélica})$ v klauzulách 1 a 4 unifikovateľné. Je to tak preto, lebo nie sú unifikovateľné prvé argumenty predikátového symbolu $\mathrm{potrestá}$. Termy $x$ a $\mathrm{pomstiteľ}(x, \mathrm{Doña\_Angélica})$, kde je premenná $x$ argumentom funkčného symbolu, by boli unifikovateľné, iba keby sme mali nekonečné termy.

Keďže sme pomocou rezolvencie našli zamietnutie pre $T'_c$, čo je ekvisplniteľná klauzálna teória pre teóriu $T \cup \{\neg X\}$, tak $T \models X$, čiže

$$T \models \mathrm{urazí}(\mathrm{Doña\_Angélica}, \mathrm{Milagros}) \to \exists x\, \mathrm{potrestá}(x, \mathrm{Doña\_Angélica}).$$

Teda z teórie $T$ vyplýva, že ak Doña Angélica urazí Milagros, tak niekto Doñu Angélicu potrestá. ♮

**3.8.5** Sformalizujte nasledujúce tvrdenia v jazyku logiky prvého rádu *bez rovnosti*:

($A_1$) Autíčka sú chlapčenské hračky a bábiky sú dievčenské hračky.

($A_2$) Hanka má dve autíčka.

($A_3$) Každá hračka bola zakúpená v hračkárstve.

($A_4$) Každé dievča má aspoň jednu dievčenskú hračku.

($A_5$) Hanka je dievča, ktoré má bábiku, ktorá má červené šaty.

($A_6$) Každá mama kúpi svojmu dieťaťu nejakú hračku.

($A_7$) Dievčatá, ktoré majú nejakú chlapčenskú hračku, sa stanú matfyzáčkami.

Zistite pomocou rezolvencie, či sa Hanka stane matfyzáčkou.

**3.8.6** (Novak [2]) Sformalizujte nasledujúce tvrdenia a dokážte rezolvenčným kalkulom, že $\{A_1, \dots, A_4\} \models X$:

($A_1$) Psy v noci zavýjajú.

($A_2$) Kto má mačku, nemá myši.

($A_3$) Tí, čo majú ľahký spánok, nemajú nič, čo v noci zavýja.

($A_4$) Juro má mačku alebo psa.

($X$) Ak má Juro ľahký spánok, tak nemá myši.

**3.8.7** (Novak [2]) Uvažujme nasledujúce tvrdenia:

($V_1$) Každý vták spí na nejakom strome.

($V_2$) Potápky sú vtáky a sú tiež vodnými živočíchmi.

($V_3$) Strom, na ktorom spí nejaký vodný vták, sa nachádza blízko jazera.

($V_4$) Všetko, čo spí na niečom, čo sa nachádza blízko nejakého jazera, sa živí rybami.

Vyriešte nasledujúce úlohy:

a) Sformalizujte tvrdenia ako teóriu $T = \{V_1, \dots, V_4\}$ vo vhodnom jazyku logiky prvého rádu.

   Zvoľte predikátové a funkčné symboly podľa potreby tak, aby formalizácia dávala zmysel, teda aby sformalizované pojmy neboli izolované a formalizácia bola splniteľná.

b) Upravte teóriu $T$ na ekvisplniteľnú klauzálnu teóriu $T'$.

c) Sformulujte a zodpovedzte pomocou rezolvencie pre logiku prvého rádu nasledujúcu otázku:

   *Je pravda, že každá potápka sa živí rybami?*

**3.8.8** (Pre ambicióznych, „Schubertov parný valec", Schubert [2, 3]) Uvažujme nasledujúci úsudok:

> Wolves, foxes, birds, caterpillars, and snails are animals, and there are some of each of them. Also there are some grains, and grains are plants. Every animal either likes to eat all plants or all animals much smaller than itself that like to eat some plants. Caterpillars and snails are much smaller than birds, which are much smaller than foxes, which in turn are much smaller than wolves. Wolves do not like to eat foxes or grains, while birds like to eat caterpillars but not snails. Caterpillars and snails like to eat some plants.
>
> Therefore there is an animal that likes to eat a grain-eating animal.

Dokážte (napríklad rezolvenciou), že tento úsudok je správny.

## 3.9 Skúškové príklady

**3.9.1** Dokážte alebo vyvráťte:

a) Nech $A$ je prvorádová formula bez kvantifikátorov, rovnosti, premenných a funkčných symbolov (môže obsahovať konštanty). Výrokovú formulu $B$ vytvoríme tak, že každú predikátovú atomickú formulu tvaru $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$ v $A$ nahradíme výrokovou premennou $P\_a_1\_a_2 \dots \_a_n$.

   $B$ je výrokovologicky splniteľná vtt $A$ je prvorádovo splniteľná.

b) Ak vo výrokovologickej tautológii nahradíme všetky výrokové premenné prvorádovými formulami (tak, že za tú istú premennú vždy dosadíme tú istú formulu), dostaneme platnú prvorádovú formulu.

c) Existuje formula s rovnosťou, ktorá je splnená iba v štruktúre, ktorá má:
   (i) najviac trojprvkovú doménu; (ii) aspoň trojprvkovú doménu.

d) Existuje formula bez rovnosti, ktorá je splnená iba v štruktúre, ktorá má:
   (i) najviac trojprvkovú doménu; (ii) aspoň trojprvkovú doménu.

**3.9.2** Zadefinujte syntax logiky prvého rádu s kvantifikátorom $\leqslant 1$ („pre najviac jedno") namiesto klasických kvantifikátorov — teda jazyk a pojmy ako *term*, *formula*. Zadefinujte pojem *splnenia formuly v štruktúre pri ohodnotení* pre formuly v tejto syntaxi.

**3.9.3** Definujte tablové pravidlá pre spojku „a nie" ($\nrightarrow$), pričom $A \nrightarrow B$ je splnené práve vtedy, keď $A$ je splnené a $B$ je nesplnené. Dokážte, Vami definované pravidlá sú korektné.

**3.9.4** Zadefinujte vzťah *z teórie $T$ vyplýva formula $X$* ($T \models X$) a pojem *nesplniteľná formula* vo výrokovej logike.

Dokážte alebo vyvráťte: Nech $S$ je množina výrokových formúl a nech $X$ je výroková formula. Ak $X$ je nesplniteľná a $S \models X$, tak $S$ je nesplniteľná.

**3.9.5** Nech $T$ je teória v logike prvého rádu. Nech $T' = \{ \neg X \mid X \in T \}$. Dokážte alebo vyvráťte: ak $T$ je splniteľná, potom $T'$ je nesplniteľná.

# Literatúra

[1] Chiara Ghidini and Luciano Serafini. *Mathematical Logic Exercises*. University of Trento, 2014. http://disi.unitn.it/~ldkr/ml2014/ExercisesBooklet.pdf.

[2] Gordon S. Novak Jr. Resolution example and exercises. [online]. https://www.cs.utexas.edu/users/novak/reso.html.

[3] Francis Jeffry Pelletier. Seventy-five problems for testing automatic theorem provers. *J. Autom. Reasoning*, 2(2):191–216, 1986.

[4] Raymond M. Smullyan. *What Is the Name of This Book?—The Riddle of Dracula and Other Logical Puzzles*. Prentice-Hall, 1978.

[5] Andrei Voronkov. Logic and modeling 2014. [online]. http://www.voronkov.com/lics.cgi.