Prednášky z Matematiky (4) — Logiky pre informatikov

Ján Kľuka, Jozef Šiška

Katedra aplikovanej informatiky
FMFI UK Bratislava

Letný semester 2018/2019

5. prednáška

Tablový kalkul a jeho korektnosť

18. marca 2019

Obsah 5. prednášky

Tablový kalkul
Korektnosť

Midterm, náhrada praktických cvičení

Midterm

utorok **2. apríla o 18:10 v A**

Mimoriadne konzultácie pred midtermom

utorok **1. apríla o 14:00—16:30 v I-9**

Náhrada praktických cvičení 27. marca, 1. a 8. mája

pravdepodobne konzultácie v piatky v rovnakom týždni

Logické kalkuly (opakovanie)

Logické kalkuly — vyplývanie syntakticky

Logický kalkul je *formálny/syntaktický* systém na dokazovanie vyplývania

- Manipulácia postupnosťami symbolov
- Pri používaní sa netreba odvolávať na sémantiku (ohodnotenia)

Zvyčajne má dve zložky:

***Axiómy* alebo ich schémy** — „základné pravdy“

Napríklad hilbertovské schémy axióm:

- $(A \to (B \to A))$
- $\big((A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))\big)$
- $((\neg A \to \neg B) \to (B \to A))$
- $((A \land B) \to A), \quad ((A \land B) \to B)$
- $(A \to (B \to (A \land B)))$
- $(A \to (A \lor B)), \quad (B \to (A \lor B))$
- $\big((A \to C) \to \big((B \to C) \to ((A \lor B) \to C)\big)\big)$

Pravidlá — „formy správnych úsudkov“, odvodzujú „nové pravdy“ zo základných, obsiahnutých v teórii, už odvodených

Napríklad jediné pravidlo hilbertovského kalkulu:

$$(\mathrm{MP}) \quad \frac{A \quad (A \to B)}{B}$$

Korektnosť a úplnosť

Kalkul je najužitočnejší, keď je súčasne

korektný (angl. sound):

dovoľuje odvodiť **iba** skutočne vyplývajúce formuly,

úplný (angl. complete):

umožňuje odvodiť **všetky** vyplývajúce formuly.

Korektnosť a úplnosť hilbertovského kalkulu

Hilbertovský kalkul je korektný aj úplný

Veta 2.74

Pre každú množinu formúl S a každú formulu X platí:

(korektnosť) *ak je X dokázateľná z S ($S \vdash X$), tak X výrokovologicky vyplýva z S ($S \vDash X$);*

(úplnosť) *ak X výrokovologicky vyplýva z S ($S \vDash X$), tak X je dokázateľná z S ($S \vdash X$).*

- Jednoduchá definícia a dôkazy *jeho* vlastností
- Nie úplne jednoduché použitie

2.9

Tablový kalkul

Dôkaz vyplývania sporom v slovenčine

Príklad 2.75

Dokážme, že z $T'_{\text{party}} = \{ (kim \rightarrow (jim \land \neg sarah)), (eva \rightarrow kim) \}$ vyplýva $(sarah \rightarrow \neg eva)$.

Poďme na to sporom: Predpokladajme, že existuje také ohodnotenie v, že $v \models T'_{\text{party}}$, teda (1) $v \models (kim \rightarrow (jim \land \neg sarah))$ a (2) $v \models (eva \rightarrow kim)$, ale pritom (3) $v \not\models (sarah \rightarrow \neg eva)$.

Podľa definície splnenia implikácie z faktu (3) vyplýva, že (4) $v \models sarah$ a zároveň (5) $v \not\models \neg eva$. Z (5) dostávame, že (6) $v \models eva$.

Podľa (2) máme dve možnosti: (7) $v \not\models eva$ alebo (8) $v \models kim$. Možnosť (7) je v spore s (6).

Platí teda (8) a podľa (1) ďalej môžu nastať dva prípady:
(9) $v \not\models kim$, ktorý je však v spore s (8),
alebo (10) $v \models (jim \land \neg sarah)$. V tom prípade (11) $v \models jim$ a (12) $v \models \neg sarah$, čiže (13) $v \not\models sarah$, čo je zase v spore s (4).

Vo všetkých prípadoch sme prišli k sporu, predpoklad je teda neplatný a každé ohodnotenie, ktoré spĺňa T'_{party}, spĺňa aj $(sarah \rightarrow \neg eva)$. □

Tablová notácia pre dôkazy

Dôkaz stručne zapíšeme v tablovej (tabuľkovej) notácii:

- **T** X označuje v spĺňa X.
- **F** X označuje v nespĺňa X.
- Ak z niektorého predchádzajúceho faktu o formule X priamo *z def. spĺňania vyplýva* fakt (ne)splnenia niektorej *priamej podformuly* X, pridáme ho ako **ďalší riadok** tabla.
  Poznačíme si k nemu písmeno α a číslo zdrojového faktu.
- Ak z niektorého predch. faktu o formule X **vyplýva** o jej *priamych podformulách* fakt F_1 **alebo** fakt F_2, tablo **rozdelíme na dve vzájomne nezávislé vetvy** (stĺpce), pričom prvá začne faktom F_1 a druhá faktom F_2.
  K obom si poznačíme písmeno β a číslo zdrojového faktu.
- Ak nastane **spor** medzi splnením a nesplnením *tej istej* formuly, pridáme riadok so symbolom $*$ a poznačíme si čísla faktov, ktoré sú v spore.

Dôkaz vyplývania sporom v tablovej notácii

Príklad 2.76

1.	$\mathbf{T}(kim \rightarrow (jim \land \neg sarah))$	z T'_{party} †
2.	$\mathbf{T}(eva \rightarrow kim)$	z T'_{party} †
3.	$\mathbf{F}(sarah \rightarrow \neg eva)$	dôkaz sporom†
4.	$\mathbf{T}\, sarah$	$\alpha 3$
5.	$\mathbf{F}\, \neg eva$	$\alpha 3$
6.	$\mathbf{T}\, eva$	$\alpha 5$

Ľavá vetva (z 6):

7.	$\mathbf{F}\, eva$	$\beta 2$
	$*$	6 a 7

Pravá vetva (z 6):

8.	$\mathbf{T}\, kim$	$\beta 2$

Ľavá podvetva (z 8):

9.	$\mathbf{F}\, kim$	$\beta 1$
	$*$	8 a 9

Pravá podvetva (z 8):

10.	$\mathbf{T}(jim \land \neg sarah)$	$\beta 1$
11.	$\mathbf{T}\, jim$	$\alpha 10$
12.	$\mathbf{T}\, \neg sarah$	$\alpha 10$
13.	$\mathbf{F}\, sarah$	$\alpha 12$
	$*$	4 a 13

† Tento zápis nepoužívajte vo svojich riešeniach.

Definícia tablového kalkulu

Tablová *notácia*

- Dohoda o stručnom zápise podrobných úvah v dôkaze sporom
- Neformálna a nie veľmi presná

Tablový *kalkul* — presne matematicky zadefinovaný formálny systém

Zadefinujeme:

- Význam značiek **T** a **F**
- Axiómy a pravidlá kalkulu
- Tablo — formálny dôkaz v tablovom kalkule
- Podmienky úspešného ukončenia dôkazu

Označené formuly a ich sémantika

Definícia 2.77

Nech X je formula výrokovej logiky.
Postupnosti symbolov $\mathbf{T}\,X$ a $\mathbf{F}\,X$ nazývame ***označené formuly***.

Definícia 2.78

Nech v je ohodnotenie výrokových premenných a X je formula. Potom

- ***v spĺňa*** $\mathbf{T}\,\boldsymbol{X}$ vtt v spĺňa X;
- ***v spĺňa*** $\mathbf{F}\,\boldsymbol{X}$ vtt v nespĺňa X.

Dohoda

Pre označené formuly budeme používať veľké písmená zo začiatku a konca abecedy s horným indexom + a prípadne s dolnými indexmi, napr. A^+, X^+_7.
Pre množiny označených formúl budeme používať písmená S, T s horným indexom + a prípadne s dolnými indexmi, napr. S^+, T^+_3.

Splĺňanie a priame podformuly

Nasledujúce fakty vyplývajú **priamo** z definície splnenia formuly ohodnotením:

Pozorovanie 2.79

Nech v je ľubovoľné ohodnotenie výrokových premenných. Nech X a Y sú ľubovoľné formuly.

1. - *Ak v splĺňa $\neg X$, tak v nesplĺňa X.*
   - *Ak v nesplĺňa $\neg X$, tak v splĺňa X.*
2. - *Ak v splĺňa $(X \land Y)$, tak v splĺňa X a v splĺňa Y.*
   - *Ak v nesplĺňa $(X \land Y)$, tak v nesplĺňa X alebo v nesplĺňa Y.*
3. - *Ak v splĺňa $(X \lor Y)$, tak v splĺňa X alebo v splĺňa Y.*
   - *Ak v nesplĺňa $(X \lor Y)$, tak v nesplĺňa X a v nesplĺňa Y.*
4. - *Ak v splĺňa $(X \to Y)$, tak v nesplĺňa X alebo v splĺňa Y.*
   - *Ak v nesplĺňa $(X \to Y)$, tak v splĺňa X a v nesplĺňa Y.*

Tablové pravidlá

Pozorovanie 2.79 — dobrý základ pre odvodzovacie pravidlá

- Základné, ľahko overiteľné fakty
- Závery sú jednoduchšie ako premisy

Splnenie/nesplnenie vyjadríme označenými formulami podľa def. 2.78

$$\frac{\mathbf{T}\,\neg X}{\mathbf{F}\,X} \qquad \frac{\mathbf{T}(X \land Y)}{\mathbf{T}\,X} \qquad \frac{\mathbf{T}(X \lor Y)}{\mathbf{T}\,X \mid \mathbf{T}\,Y} \qquad \frac{\mathbf{T}(X \to Y)}{\mathbf{F}\,X \mid \mathbf{T}\,Y}$$

$$\frac{\mathbf{T}(X \land Y)}{\mathbf{T}\,Y}$$

$$\frac{\mathbf{F}\,\neg X}{\mathbf{T}\,X} \qquad \frac{\mathbf{F}(X \land Y)}{\mathbf{F}\,X \mid \mathbf{F}\,Y} \qquad \frac{\mathbf{F}(X \lor Y)}{\mathbf{F}\,X} \qquad \frac{\mathbf{F}(X \to Y)}{\mathbf{T}\,X}$$

$$\frac{\mathbf{F}(X \lor Y)}{\mathbf{F}\,Y} \qquad \frac{\mathbf{F}(X \to Y)}{\mathbf{F}\,Y}$$

Tablové pravidlá — zjednotenie zápisu

- Nemáme žiadne axiómy
- Pravidiel je veľa
- Sú však zjavne dvoch druhov:
  - $\boldsymbol{\alpha}$: Pravidlá odvodzujúce jeden záver
  - $\boldsymbol{\beta}$: Pravidlá odvodzujúce dva závery, z ktorých platí aspoň jeden
- Zjednoťme zápis pravidiel rovnakého druhu

Jednotný zápis označených formúl typu α

Definícia 2.80 (Jednotný zápis označených formúl typu α)

Označená formula A^+ je ***typu α*** vtt má jeden z tvarov v ľavom stĺpci tabuľky pre nejaké formuly X a Y.
Takéto formuly budeme označovať písmenom α;
α_1 bude označovať príslušnú označenú formulu zo stredného stĺpca,
α_2 príslušnú formulu z pravého stĺpca.

α	α_1	α_2
$\mathbf{T}(X \land Y)$	$\mathbf{T}\,X$	$\mathbf{T}\,Y$
$\mathbf{F}(X \lor Y)$	$\mathbf{F}\,X$	$\mathbf{F}\,Y$
$\mathbf{F}(X \to Y)$	$\mathbf{T}\,X$	$\mathbf{F}\,Y$
$\mathbf{T}\,\neg X$	$\mathbf{F}\,X$	$\mathbf{F}\,X$
$\mathbf{F}\,\neg X$	$\mathbf{T}\,X$	$\mathbf{T}\,X$

Pozorovanie 2.81 (Stručne vďaka jednotnému zápisu)

Nech v je ľubovoľné ohodnotenie výrokových premenných.
Potom v spĺňa α vtt v spĺňa α_1 a v spĺňa α_2.

Jednotný zápis označených formúl typu β

Definícia 2.82 (Jednotný zápis označených formúl typu β)

Označená formula B^+ je ***typu*** $\boldsymbol{\beta}$ vtt má jeden z tvarov v ľavom stĺpci tabuľky pre nejaké formuly X a Y.
Takéto formuly budeme označovať písmenom β;
β_1 bude označovať príslušnú označenú formulu zo stredného stĺpca,
β_2 príslušnú formulu z pravého stĺpca.

β	β_1	β_2
$\mathbf{F}(X \land Y)$	$\mathbf{F}\,X$	$\mathbf{F}\,Y$
$\mathbf{T}(X \lor Y)$	$\mathbf{T}\,X$	$\mathbf{T}\,Y$
$\mathbf{T}(X \to Y)$	$\mathbf{F}\,X$	$\mathbf{T}\,Y$

Pozorovanie 2.83 (Stručne vďaka jednotnému zápisu)

Nech v je ľubovoľné ohodnotenie výrokových premenných.
Potom v spĺňa β vtt v spĺňa β_1 alebo v spĺňa β_2.

Tablo — dôkaz v tablovom kalkule

Akú štruktúru má dôkaz zapísaný v tablovej notácii?

- $\mathbf{T}(kim \longrightarrow (jim \land \neg sarah))$
- $\mathbf{T}(eva \longrightarrow kim)$
- $\mathbf{F}(sarah \longrightarrow \neg eva)$
- $\mathbf{T}\, sarah$
- $\mathbf{F}\, \neg eva$
- $\mathbf{T}\, eva$
  - $\mathbf{F}\, eva$
    - $*$
  - $\mathbf{T}\, kim$
    - $\mathbf{F}\, kim$
      - $*$
    - $\mathbf{T}(jim \land \neg sarah)$
      - $\mathbf{T}\, jim$
      - $\mathbf{T}\, \neg sarah$
      - $\mathbf{F}\, sarah$
      - $*$

Ako opíšeme vznik tabla?

Tablo pre množinu označených formúl

Definícia 2.84

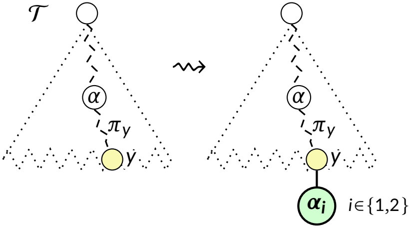
Analytické tablo pre množinu označených formúl S^+ (skrátene ***tablo pre S^+***) je binárny strom, ktorého vrcholy obsahujú označené formuly a ktorý je skonštruovaný podľa nasledovných rekurzívnych pravidiel:

- Strom s jediným vrcholom (koreňom) obsahujúcim niektorú označenú formulu A^+ z S^+ je tablom pre S^+.
- Nech $\mathcal{T}$ je tablo pre S^+ a y je nejaký jeho list. Potom tablom pre S^+ je aj každé ***priame rozšírenie*** $\mathcal{T}$ ktorýmkoľvek z pravidiel:
  - **α** Ak sa na vetve π_y (ceste z koreňa do y) vyskytuje nejaká označená formula α, tak ako jediné dieťa y pripojíme nový vrchol obsahujúci α_1 alebo α_2.
  - **β** Ak sa na vetve π_y (ceste z koreňa do y) vyskytuje nejaká označená formula β, tak ako deti y pripojíme dva nové vrcholy, pričom ľavé dieťa bude obsahovať β_1 a pravé β_2.
  - **S^+** Ako jediné dieťa y pripojíme nový vrchol obsahujúci ľubovoľnú označenú formulu $A^+ \in S^+$.

Nič iné nie je tablom pre S^+.

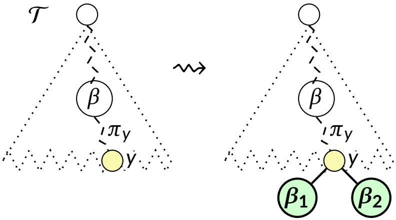
Tablá a tablové pravidlá

Pôvodné tablo **Možné priame rozšírenie** **Pravidlá a označené formuly v nich**



$$\frac{\alpha}{\alpha_1} \qquad \frac{\alpha}{\alpha_2}$$

α	α_1	α_2
$\mathbf{T}(X \land Y)$	$\mathbf{T}\,X$	$\mathbf{T}\,Y$
$\mathbf{F}(X \lor Y)$	$\mathbf{F}\,X$	$\mathbf{F}\,Y$
$\mathbf{F}(X \to Y)$	$\mathbf{T}\,X$	$\mathbf{F}\,Y$
$\mathbf{T}\,\neg X$	$\mathbf{F}\,X$	$\mathbf{F}\,X$
$\mathbf{F}\,\neg X$	$\mathbf{T}\,X$	$\mathbf{T}\,X$



$$\frac{\beta}{\beta_1 \mid \beta_2}$$

β	β_1	β_2
$\mathbf{F}(X \land Y)$	$\mathbf{F}\,X$	$\mathbf{F}\,Y$
$\mathbf{T}(X \lor Y)$	$\mathbf{T}\,X$	$\mathbf{T}\,Y$
$\mathbf{T}(X \to Y)$	$\mathbf{F}\,X$	$\mathbf{T}\,Y$

Legenda: y je list v table $\mathcal{T}$, π_y je cesta od koreňa k y

Uzavretosť a otvorenosť vetvy a tabla

Definícia 2.85

Vetvou tabla $\mathcal{T}$ je každá cesta od koreňa $\mathcal{T}$ k niektorému listu $\mathcal{T}$.

Označená formula X^+ sa ***vyskytuje na vetve*** π v $\mathcal{T}$ vtt sa nachádza v niektorom vrchole na π. Skrátene to budeme zapisovať $X^+ \in \text{formulas}(\pi)$.

Tablo $\sim$ dôkaz sporom. Vetvenie $\sim$ rozbor možných prípadov.

$\Longrightarrow$ Spor musí nastať vo všetkých vetvách.

Definícia 2.86

Vetva π tabla $\mathcal{T}$ ***je uzavretá*** vtt na π sa súčasne vyskytujú označené formuly $\mathbf{F}\,X$ a $\mathbf{T}\,X$ pre nejakú formulu X. Inak je π ***otvorená***.

Tablo $\mathcal{T}$ je uzavreté vtt *každá* jeho vetva je uzavretá.
Naopak, $\mathcal{T}$ je ***otvorené*** vtt *aspoň jedna* jeho vetva je otvorená.

Spomeňte si V.1

1. Má každé tablo *aspoň* jedno priame rozšírenie?
2. Má každé tablo *najviac* jedno priame rozšírenie?

2.9.1
Korektnosť

Korektnosť tablového kalkulu

Veta 2.87 (Korektnosť tablového kalkulu)

Nech S^+ je množina označených formúl a $\mathcal{T}$ je uzavreté tablo pre S^+.
Potom je množina S^+ nesplniteľná.

Dôsledok 2.88

Nech S je množina formúl a X je formula.
Ak existuje uzavreté tablo pre $\{\mathbf{T}\,A \mid A \in S\} \cup \{\mathbf{F}\,X\}$ (skrátene $S \vdash X$),
tak z S vyplýva X ($S \vDash X$).

Dôsledok 2.89

Nech X je formula.
Ak existuje uzavreté tablo pre $\{\mathbf{F}\,X\}$ (skrátene $\vdash X$), tak X je tautológia ($\vDash X$).

Korektnosť — idea dôkazu

Aby sme dokázali korektnosť tabiel, dokážeme postupne dve lemy:

K1 Ak máme tablo pre splniteľnú množinu S^+
s aspoň jednou splniteľnou vetvou,
tak každé jeho priame rozšírenie má tiež splniteľnú vetvu.

K2 Každé tablo pre splniteľnú množinu S^+
má aspoň jednu splniteľnú vetvu.

Z toho ľahko sporom dokážeme, že množina, pre ktorú sme našli uzavreté tablo je nesplniteľná.

Korektnosť — splnenie priameho rozšírenia tabla

Hodí sa nám pomocná definícia:

Definícia 2.90

Nech S^+ je množina označených formúl, nech $\mathcal{T}$ je tablo pre S^+ a nech v je ohodnotenie množiny výrokových premenných. Potom:

- ***v* splĺňa vetvu π** v table $\mathcal{T}$ vtt
  v splĺňa *všetky* označené formuly vyskytujúce sa na na vetve π.
- ***v* splĺňa tablo $\mathcal{T}$** vtt v splĺňa *niektorú* vetvu v table $\mathcal{T}$.

Lema 2.91 (K1)

Nech S^+ je množina označených formúl, nech $\mathcal{T}$ je tablo pre S^+ a nech v je ohodnotenie množiny výrokových premenných. Ak v splĺňa S^+ a v splĺňa $\mathcal{T}$, tak v splĺňa aj každé priame rozšírenie $\mathcal{T}$.

Korektnosť — splnenie priameho rozšírenia tabla

Dôkaz lemy K1.

Nech $v \models S^+$. Nech v spĺňa $\mathcal{T}$ a v ňom vetvu π. Nech $\mathcal{T}_1$ je rozšírenie $\mathcal{T}$. Nastáva jeden z prípadov:

- $\mathcal{T}_1$ vzniklo z $\mathcal{T}$ pravidlom α, pridaním nového dieťaťa z nejakému listu y v $\mathcal{T}$, pričom z obsahuje α_1 alebo α_2 pre nejakú formulu α na vetve π_y. Ak $\pi \neq \pi_y$, tak $\mathcal{T}_1$ obsahuje π a teda je splnené.
  Ak $\pi = \pi_y$, tak v spĺňa aj α, pretože spĺňa π. Potom v musí spĺňať aj α_1 a α_2. Spĺňa teda vetvu π_z v table $\mathcal{T}_1$, ktorá rozširuje splnenú vetvu π o vrchol z obsahujúci splnenú ozn. formulu α_1 alebo α_2. Preto v spĺňa tablo $\mathcal{T}_1$.
- $\mathcal{T}_1$ vzniklo z $\mathcal{T}$ pravidlom β, pridaním detí z_1 a z_2 nejakému listu y v $\mathcal{T}$, pričom z_1 obsahuje β_1 a z_2 obsahuje β_2 pre nejakú formulu β na vetve π_y. Ak $\pi \neq \pi_y$, tak $\mathcal{T}_1$ obsahuje π a teda je splnené.
  Ak $\pi = \pi_y$, tak v spĺňa aj β, pretože spĺňa π. Potom ale v musí spĺňať aj β_1 alebo β_2. Ak v spĺňa β_1, tak spĺňa aj vetvu π_{z_1} v table $\mathcal{T}_1$, a preto v spĺňa tablo $\mathcal{T}_1$. Ak v spĺňa β_2, spĺňa aj π_{z_2}, a teda aj $\mathcal{T}_1$.
- $\mathcal{T}_1$ vzniklo z $\mathcal{T}$ pravidlom S^+, pridaním nového dieťaťa z nejakému listu y v $\mathcal{T}$, pričom z obsahuje formulu $X^+ \in S^+$. Ak $\pi \neq \pi_y$, tak $\mathcal{T}_1$ obsahuje π a teda je splnené.
  Ak $\pi = \pi_y$, tak v spĺňa vetvu π_z v table $\mathcal{T}_1$, pretože je rozšírením splnenej vetvy π o vrchol z obsahujúci splnenú formulu X (pretože $v \models S^+$). Preto v spĺňa tablo $\mathcal{T}_1$. $\square$

Korektnosť — splnenie množiny a tabla pre ňu

Lema 2.92 (K2)

Nech S^+ je množina označených formúl, nech $\mathcal{T}$ je tablo pre S^+ a nech v je ohodnotenie.
Ak v spĺňa S^+, tak v spĺňa $\mathcal{T}$.

Dôkaz lemy K2.

Nech S^+ je množina označených formúl, nech v je ohodnotenie a nech $v \models S^+$.
Úplnou indukciou na počet vrcholov tabla $\mathcal{T}$ dokážeme, že v spĺňa každé tablo $\mathcal{T}$ pre S^+.
Ak má $\mathcal{T}$ jediný vrchol, tento vrchol obsahuje formulu $X^+ \in S^+$, ktorá je splnená pri v. Preto je splnená jediná vetva v $\mathcal{T}$, teda aj $\mathcal{T}$.
Ak $\mathcal{T}$ má viac ako jeden vrchol, je priamym rozšírením nejakého tabla $\mathcal{T}_0$, ktoré má o 1 alebo o 2 vrcholy menej ako $\mathcal{T}$. Podľa indukčného predpokladu teda v spĺňa $\mathcal{T}_0$.
Podľa predchádzajúcej lemy potom v spĺňa aj $\mathcal{T}$. □

Korektnosť — dôkaz

Dôkaz vety o korektnosti.

Nech S^+ je množina označených formúl a $\mathcal{T}$ je uzavreté tablo pre S^+.
Sporom: Predpokladajme, že existuje ohodnotenie, ktoré spĺňa S^+.
Označme ho v.
Potom podľa lemy K2 v spĺňa tablo $\mathcal{T}$, teda v spĺňa niektorú vetvu π v $\mathcal{T}$.
Pretože $\mathcal{T}$ je uzavreté, aj vetva π je uzavretá,
teda π obsahuje označené formuly $\mathbf{T}\,X$ a $\mathbf{F}\,X$ pre nejakú formulu X.
Ale $v \models \mathbf{T}\,X$ vtt $v \models X$ a $v \models \mathbf{F}\,X$ vtt $v \not\models X$, čo je spor. $\square$

Literatúra

Christos H. Papadimitriou. *Computational complexity*. Addison-Wesley, 1994. ISBN 978-0-201-53082-7.

Raymond M. Smullyan. *Logika prvého rádu*. Alfa, 1979. Z angl. orig. *First-Order Logic*, Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 1968 preložil Svätoslav Mathé.

Vítězslav Švejdar. *Logika: neúplnost, složitost, nutnost*. Academia, 2002. Prístupné aj na http://www1.cuni.cz/~svejdar/book/LogikaSve2002.pdf.