Assignment: Центральная предельная теорема своими руками

В этом задании вам предстоит проверить работу центральной предельной теоремы, а также поработать с генерацией случайных чисел и построением графиков в Питоне.

Выберите ваше любимое непрерывное распределение (чем меньше оно будет похоже на нормальное, тем интереснее; попробуйте выбрать какое-нибудь распределение из тех, что мы не обсуждали в курсе). Сгенерируйте из него выборку объёма 1000, постройте гистограмму выборки и нарисуйте поверх неё теоретическую плотность распределения вашей случайной величины (чтобы величины были в одном масштабе, не забудьте выставить у гистограммы значение параметра normed=true).

Ваша задача — оценить распределение выборочного среднего вашей случайной величины при разных объёмах выборок. Для этого при трёх и более значениях n (например, 5, 10, 50) сгенерируйте 1000 выборок объёма n и постройте гистограммы распределений их выборочных средних. Используя информацию о среднем и дисперсии исходного распределения (её можно без труда найти в википедии), посчитайте значения параметров нормальных распределений, которыми, согласно центральной предельной теореме, приближается распределение выборочных средних. Обратите внимание: для подсчёта значений этих параметров нужно использовать именно теоретические среднее и дисперсию вашей случайной величины, а не их выборочные оценки. Поверх каждой гистограммы нарисуйте плотность соответствующего нормального распределения (будьте внимательны с параметрами функции, она принимает на вход не дисперсию, а стандартное отклонение).

Опишите разницу между полученными распределениями при различных значениях n. Как меняется точность аппроксимации распределения выборочных средних нормальным с ростом n? Review criteriaменьше Решение должно представлять собой IPython-ноутбук, содержащий:

- код, генерирующий выборки и графики;
- краткие описания каждого блока кода, объясняющие, что он делает;
- необходимые графики (убедитесь, что на них подписаны оси);
- выкладки с вычислениями параметров нормальных распределений, аппроксимирующих выборочные средние при различных n;
- выводы по результатам выполнения задания.

In [1]:
```
import matplotlib.pyplot as plt
import scipy.stats as sts
import numpy as np

%matplotlib inline
```

Экспоненциальное распределение

Выбрано экспоненциальное распределение случайной величины.
https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%AD%D0%BA%D1%81%D0%BF%D0%BE%D0%BD%D0%B5%D0%D

Плотность вероятности для экспоненциального распределения:

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}.$$

Математическое ожидание:

$$EX = \lambda^{-1} \tag{1}$$

Дисперсия:

$$DX = \lambda^{-2} \tag{2}$$

Гистограмма выборки и теоретическая плотность распределения

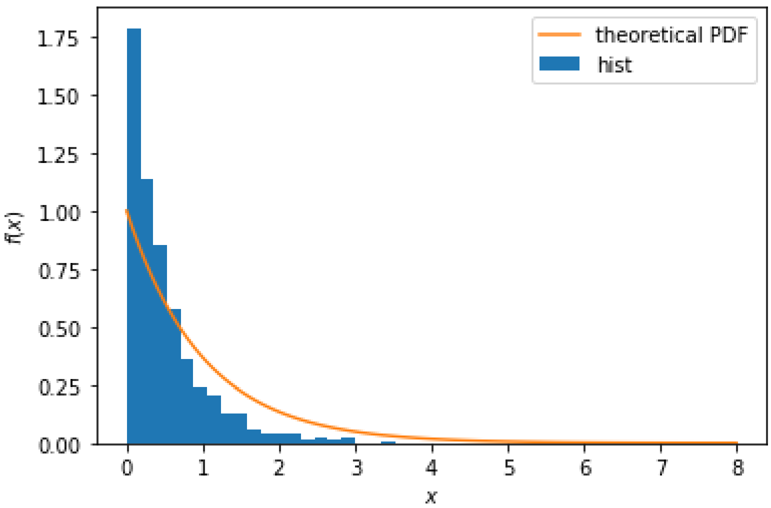
Генерация выборки объёма 1000. Будем рассмотривать экспоненциальное распределение случайно величины с $\lambda = 2$.

и сравним гистограмму выборки и с теоретической плотностью распределения случайной величины.

In [2]:
```
lmbd = 2
n = 1000
rv = sts.expon(scale=1/lmbd)
sample = rv.rvs(size=n)
```

In [3]:
```
plt.hist(sample, bins = 20, density=True, label='hist') #гистограмма распреде

x = np.linspace(0,8,100)
pdf = sts.expon.pdf(x) #теоретическая плотность распределения
plt.plot(x, pdf, label='theoretical PDF')
plt.legend()
plt.ylabel('$f(x)$')
plt.xlabel('$x$')
```

Out[3]: `Text(0.5, 0, '$x$')`



Вывод: гистограмма выборки не вполне совпадает с теоретической оценкой плотности вероятности распределения.

Распределение выборочных средних

Оценка распределения выборочных средних случайной величины.

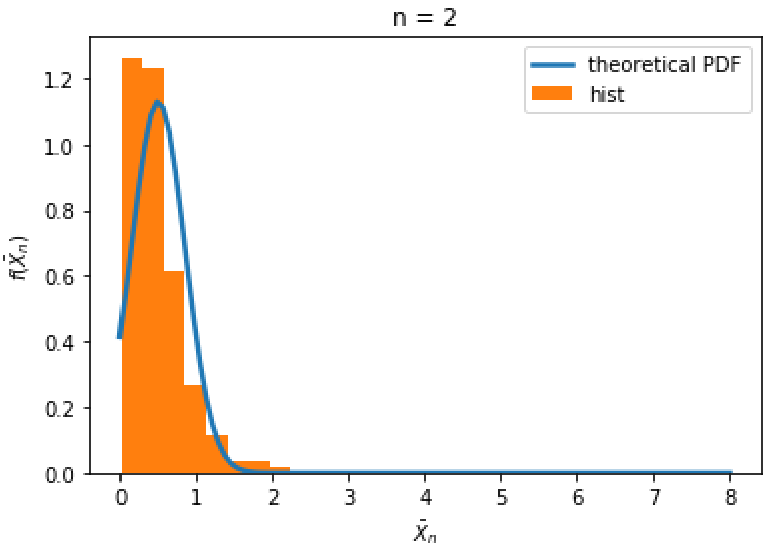
Согласно Центральной Предельной Теореме выборочные средние $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ будут приближаться нормальным распределением $N(\mu = \mathbb{E}X, \sigma^2 = \frac{\mathbb{D}X}{n})$, где n - объем выборки, $\mathbb{E}X$ и $\mathbb{D}X$ соответственно математическое ожидание и дисперсия рассматриваемого исходного распределения.

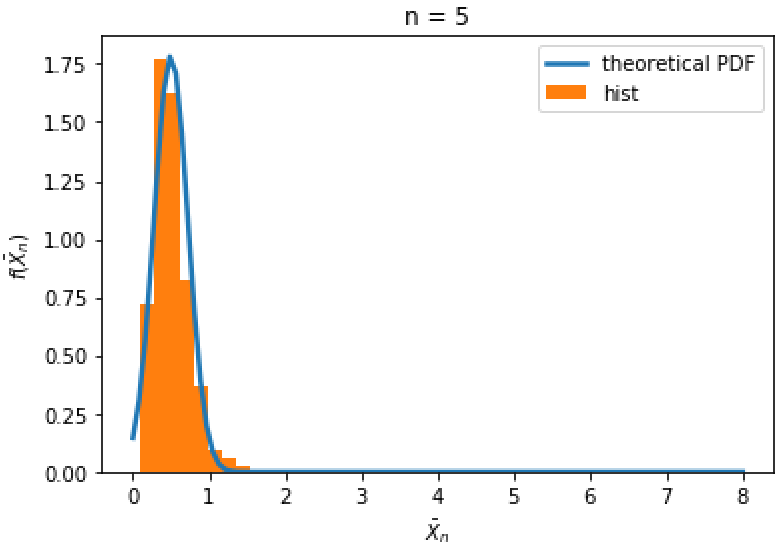
В нашем случае экспоненциального распределения: $\mathbb{E}X = \lambda^{-1} = 0.5$ - *математическое ожидание*, $\mathbb{D}X = \lambda^{-2} = 0.25$ - *дисперсия*.

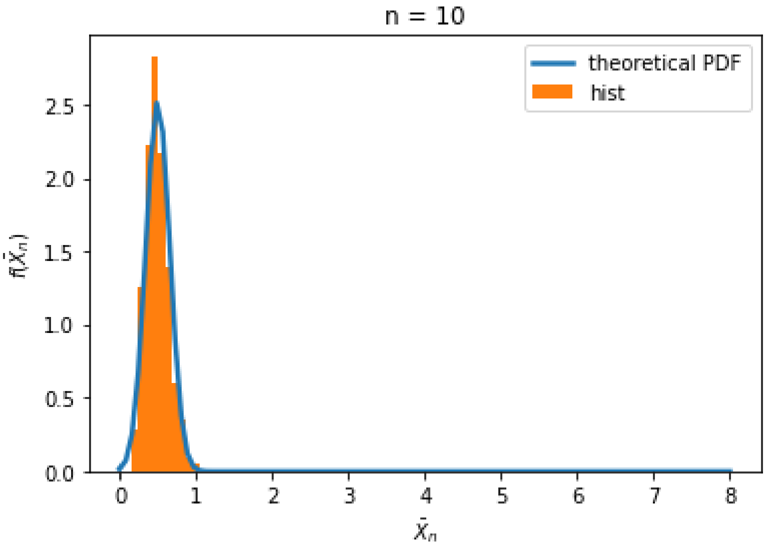
Таким образом, **распределение выборочных средних экспоненциального распределения** с $\lambda = 2$ будет приближаться нормальным распределением $N(\mu = 0.5, \sigma^2 = \frac{1}{4n})$.

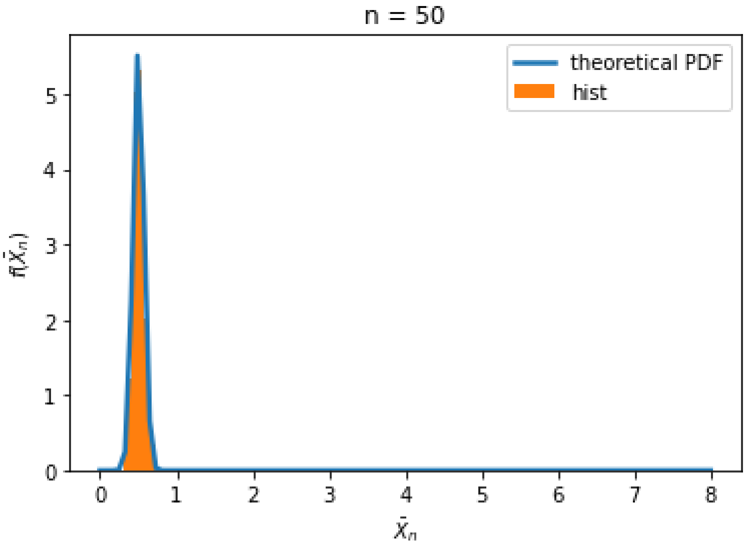
In [4]:
```
def pdf_generator(n):
    means = []
    for i in range(1000):
        sample = rv.rvs(n)
        sample_mean = np.mean(sample)
        means.append(sample_mean)

    mu = 0.5
    sigma = (0.25/n) ** 0.5
    norm_rv = sts.norm(loc=mu, scale=sigma)
    x = np.linspace(0, 8, 100)
    pdf = norm_rv.pdf(x)

    plt.plot(x, pdf, linewidth = 2.5, label='theoretical PDF')
    plt.hist(means, density = True, label='hist')
    plt.legend()
    plt.xlabel('$\\bar{X}_n$')
    plt.ylabel('$f(\\bar{X}_n)$')
    plt.title('n = %d' % n)
    plt.show()

    return
```

In [5]:
```
for n in [2, 5, 10, 50]:
    pdf_generator(n)
```









Выводы: чем больше объем выборки n, тем лучше распределение выборочных средних соответствует приближающему его нормальному распределению. При n=2 и 5 распределение несимметрично и не похожи на нормальные, но при бОльших n распределения всё больше приближаются к нормальному.