```
> restart;
```

Построим кубический сплайн

```
> n := 10 :;
  h := 1/n :;
> xc := Array(0 ..n, i→i·h) :;
> eqs := [cc[0]=0, cc[n]=0] :;
  for ic from 1 to n − 1 do
    eqs := [op(eqs), cc[ic − 1]·h + 4·h·cc[ic] + cc[ic + 1]·h = 6
         ·((f(xc[ic + 1]) − f(xc[ic]))/h − (f(xc[ic]) − f(xc[ic − 1]))/h)];
  end do:;
  assign(fsolve(eqs)) :;
> ac := Array(1 ..n, i→f(xc[i])) :;
  bc := Array(1 ..n, i→(f(xc[i]) − f(xc[i − 1]))/h + cc[i]·h/3 + cc[i − 1]·h/6) :;
  dc := Array(1 ..n, i→(cc[i] − cc[i − 1])/h) :;
> sc(x, i) := ac[i] + bc[i]·(x − xc[i]) + cc[i]/2·(x − xc[i])^2 + dc[i]/6·(x
      − xc[i])^3 :;
> Cubic :=proc(x, f)
   local i;
   for i from 1 to n do
    if x ≥ xc[i − 1] and x ≤ xc[i] then
     return sc(x, i);
    end if;
   end do;
  end proc:
> Sc(x) := Cubic(x, f) :;
```

Построим B-сплайн

```
> eps := 10^(−8) :;
> xb := [−2·eps, −eps, seq(i·h, i=0 ..n), 1 + eps, 1 + 2·eps] :;
  yb := [f(0), f(0), seq(f(i·h), i=0 ..n), f(1), f(1)] :;
> ab(i) := piecewise(

   i=1, yb[1] ,
```

$$1 < i < n+2,\ \frac{1}{2}\left(-yb[i+1] + 4\cdot f\left(\frac{xb[i+1]+xb[i+2]}{2}\right) - yb[i+2]\right),$$

$$i=n+2, yb[n+3]$$

$$\Big) :;$$

> $B[0](i,x) := piecewise(xb[i] \le x < xb[i+1], 1, 0) :;$
> $B[1](i,x) := \frac{x - xb[i]}{xb[i+1] - xb[i]}\cdot B[0](i,x) + \frac{xb[i+2] - x}{xb[i+2] - xb[i+1]}\cdot B[0](i+1,x) :;$
> $B[2](i,x) := \frac{x - xb[i]}{xb[i+2] - xb[i]}\cdot B[1](i,x) + \frac{xb[i+3] - x}{xb[i+3] - xb[i+1]}\cdot B[1](i+1,x) :;$

> $BSplane(x) := sum(ab(i)\cdot B[2](i,x), i=1..n+2) :;$

> $Sb(x) := BSplane(x) :;$

> $with(CurveFitting) :;$

> $MapleCubic(x) := Spline([seq(i, i=0..1, 0.1)], [seq(f(i), i=0..1, 0.1)], x, degree=3) :;$

```
> MapleBSpline(x) := BSplineCurve(
  [−2·eps, −eps, seq(i, i=0..1, 0.1), 1 + eps, 1 + 2·eps],
  [f(0), f(0), seq(f(i), i=0..1, 0.1), f(1), f(1)],
  x, order=3) :;
```

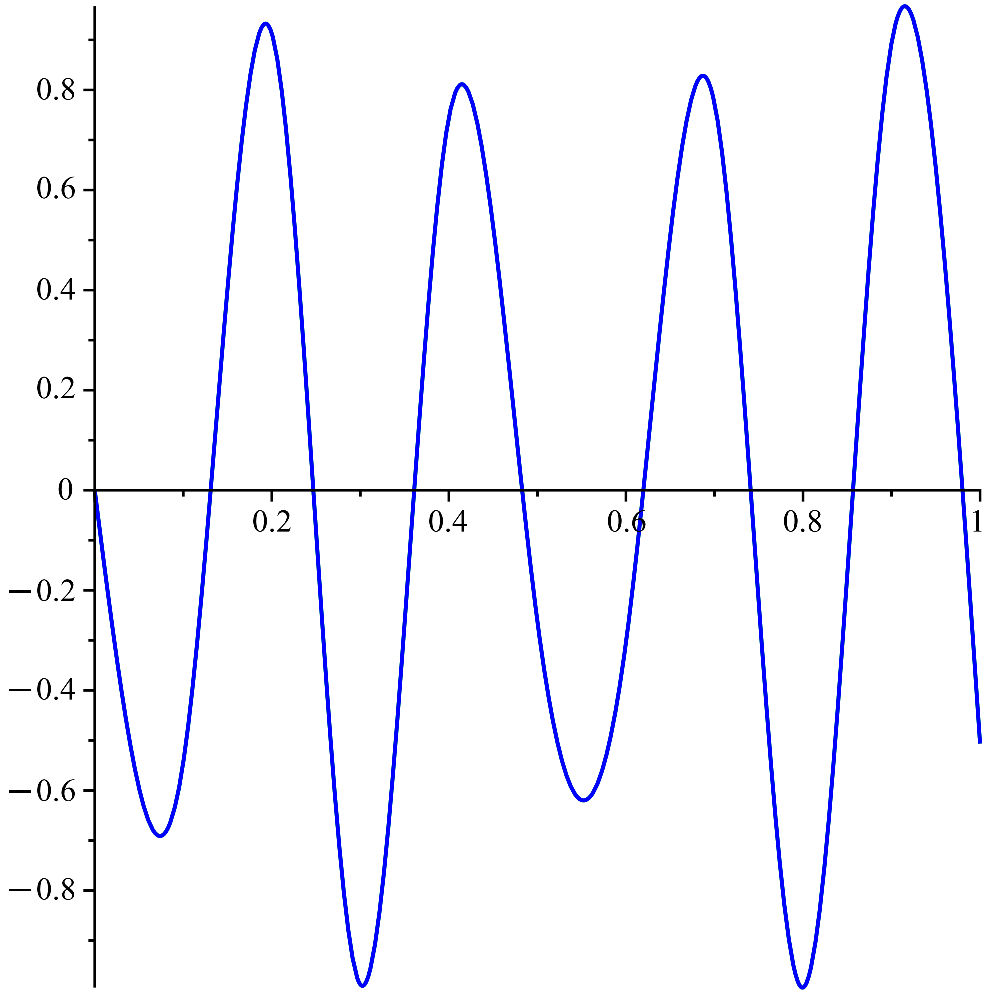
```
>
    # Процедуры вычисления погрешности аппроксимации для заданной
    функции f

computeError := proc(f, interpolator)
local segment := 0..1;
local h := 0.01;
local i;
local xs := [seq(i, i=segment, h)];
local diff := x → abs(interpolator(x) − f(x));
local errors := map(diff, xs);
return evalf(max(errors));
end proc:
```

```
> computeErrors := f → [evalf(computeError(f, Sc)),
      evalf(computeError(f, Sb)) ] :
```

Сравним полученные реализации сплайнов с реализациями Maple

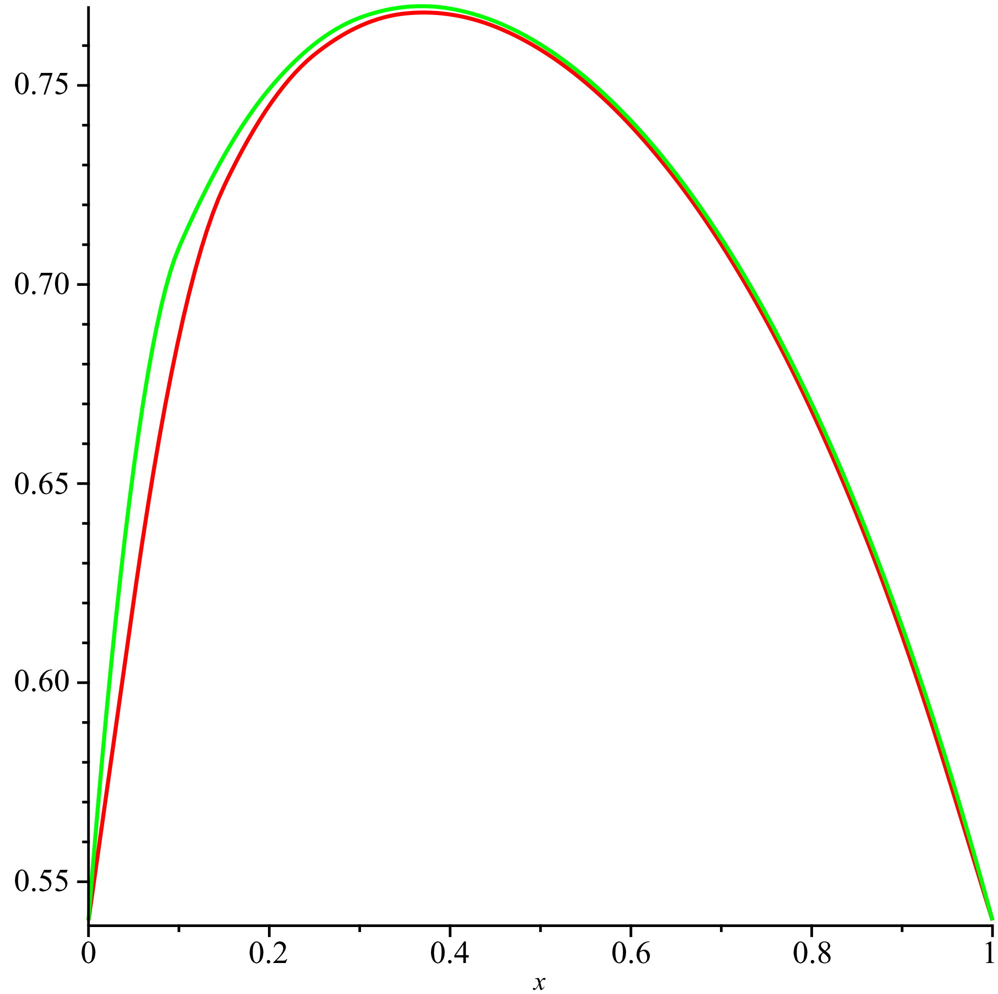
> $f(x) := \sin(100 \cdot x)$:;

> $plot([MapleCubic, Sc], 0..1, color = [green, blue]);$



> $f(x) := \cos(x^x)$:;

> $plot([MapleBSpline(x), Sb(x)], x = 0..1, color = [red, green]);$



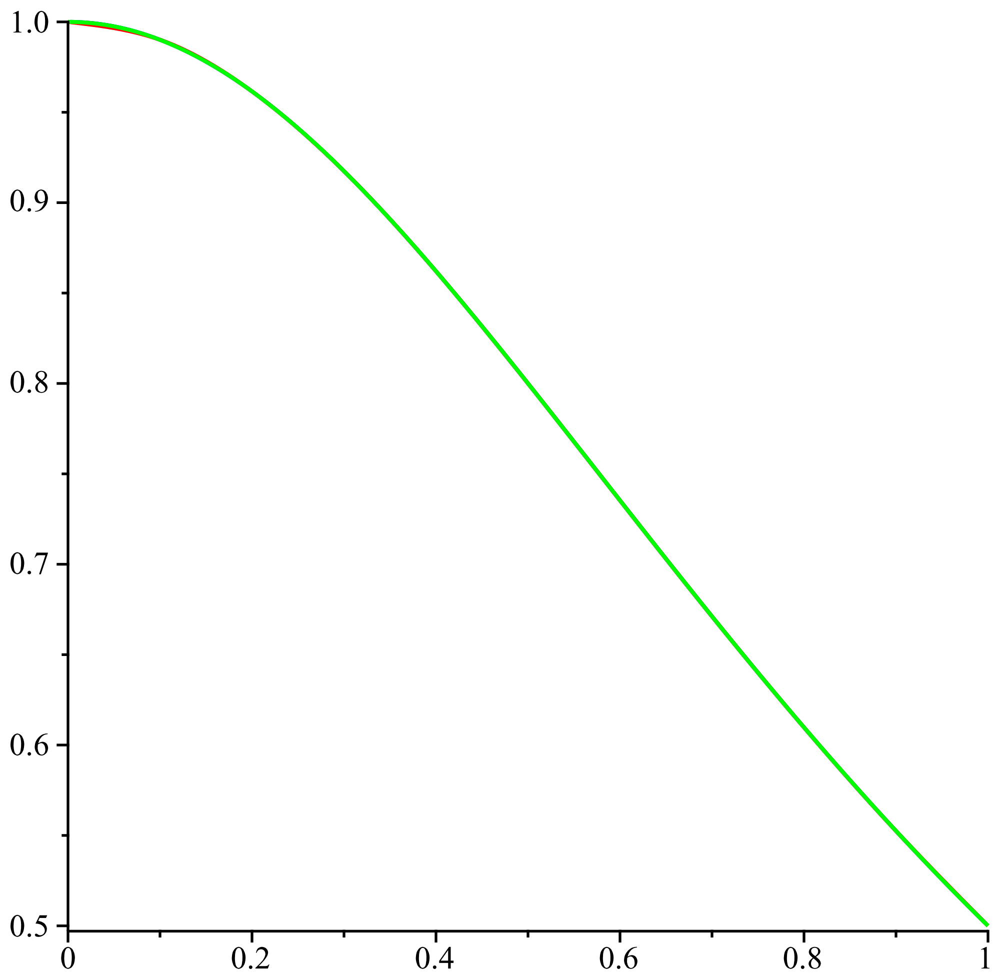
 # Первый график подтверждает корректность реализации кубисечкого сплайна, на втором же можно увидеть некоторую разницу вызванную разным выбром коэфицентов.

Рассмотрим функцию Рунге.

> $f(x) := \frac{1}{1+x^2};$

$$f := x \mapsto \frac{1}{1+x^2} \quad (1)$$

> $plot([f, Sc, Sb], 0..1, color = [blue, red, green]);$



> $computeErrors(f)$;

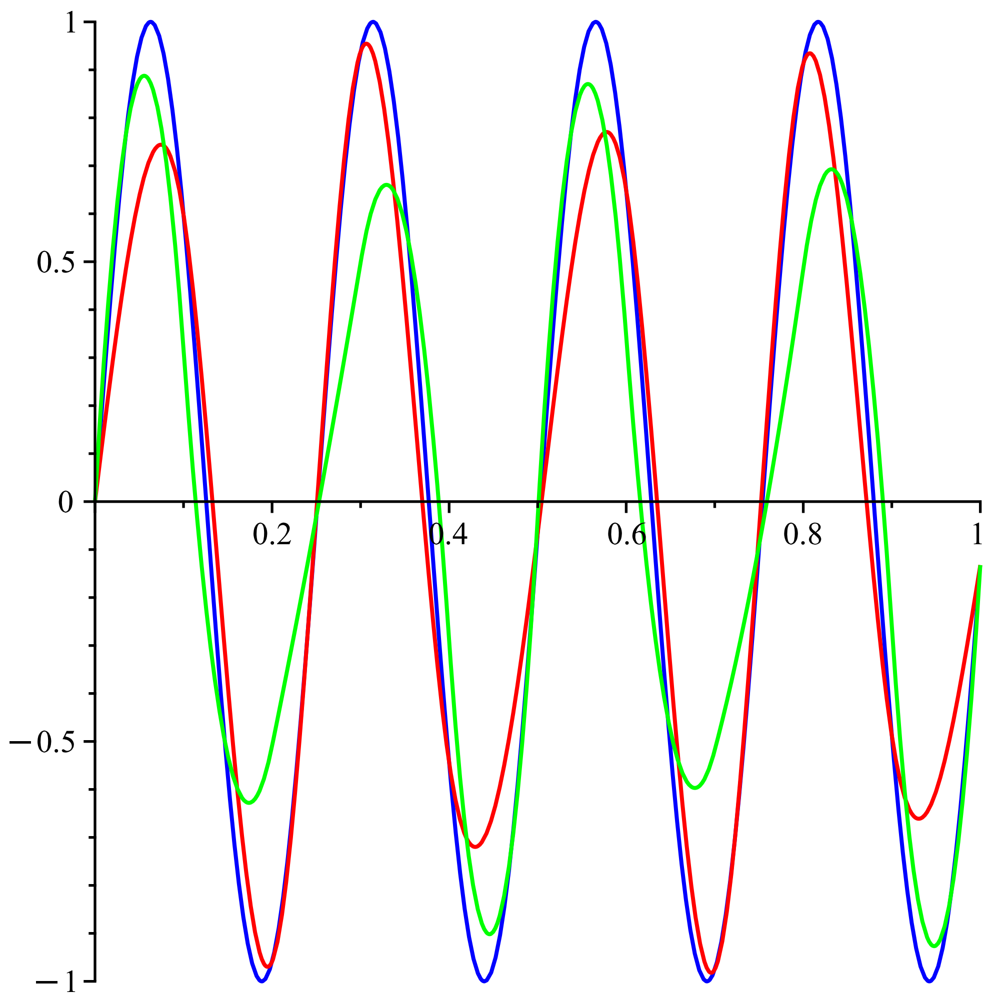
$$[0.0009956981, 0.0000468417] \quad (2)$$

 # Оба сплайна плохо аппроксимируют высокочастоной переодической функцию, потому что коэфиценты не успевают реагировать на постоянно меняющиеся скочки.

> $f(x) := \sin(25\,x)$;

$$f := x \mapsto \sin(25 \cdot x) \quad (3)$$

> $plot([f, Sc, Sb], 0\,..1, color = [blue, red, green])$;



> $computeErrors(f)$;

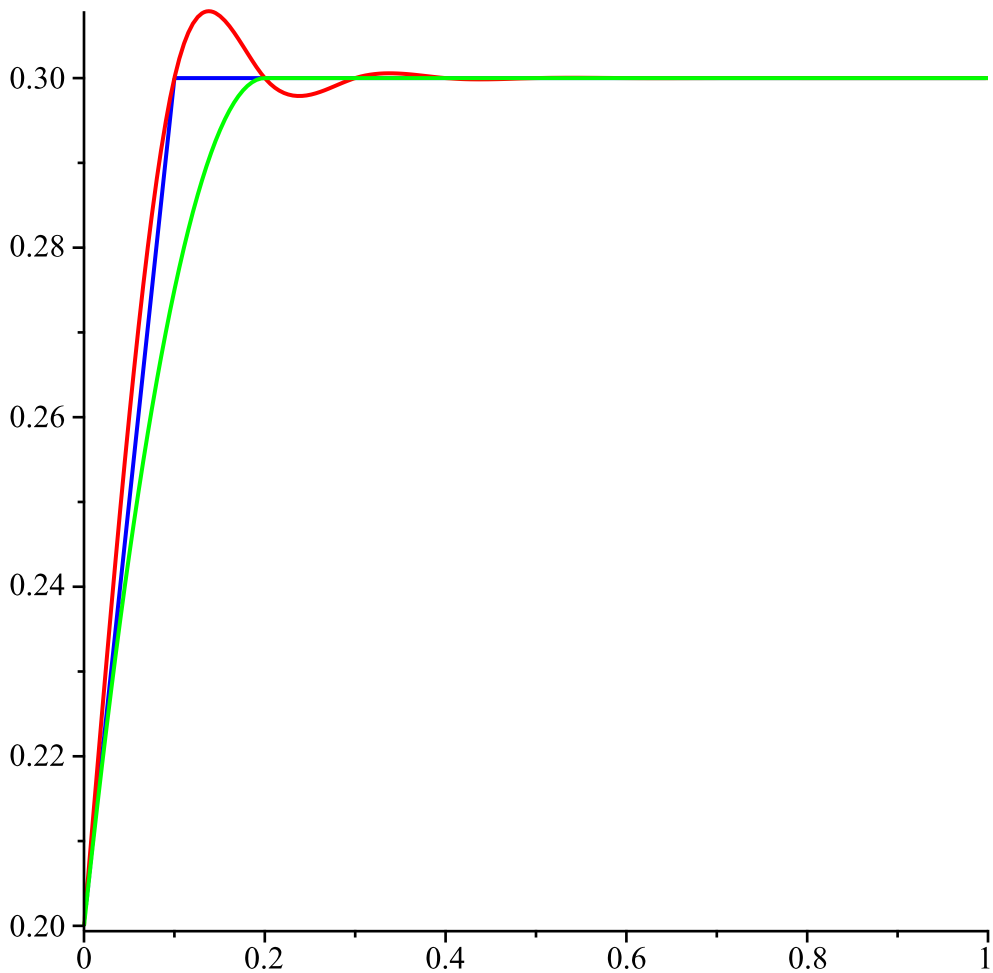
$$[0.3781552551, 0.4573573419] \qquad (4)$$

#Посмотрим нв график кусочно-гладкой функции. Увидим, что оба сплайна плохо аппроксимируют ее в окрестностях точки 'перелома'.

> $f(x) := piecewise(-0.6 \le x < 0.1, x + 0.2, 0.1 \le x, 0.3)$;

$$f := x \mapsto \begin{cases} x + 0.2 & -0.6 \le x < 0.1 \\ 0.3 & 0.1 \le x \end{cases} \qquad (5)$$

> $plot([f, Sc, Sb], 0 ..1, color = [blue, red, green])$;



> $computeErrors(f)$;

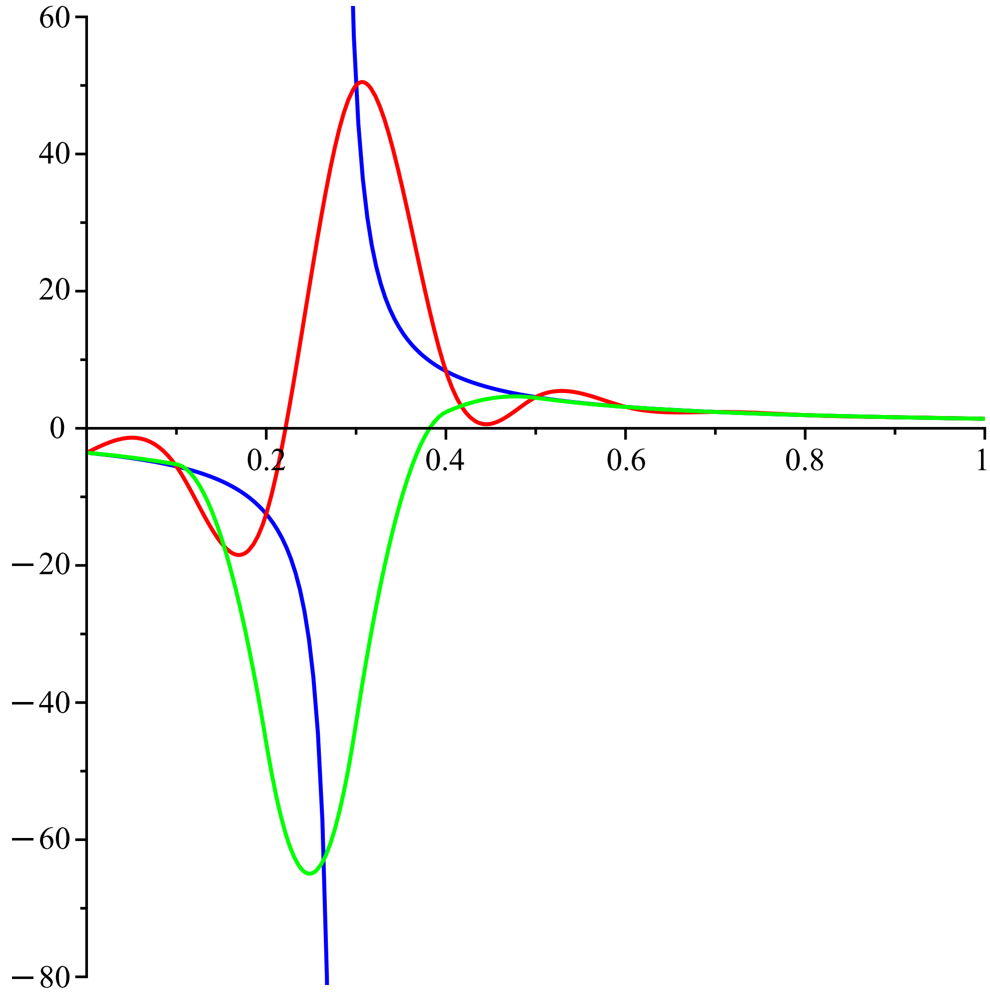
$$[0.0102892490, 0.0250000000] \quad \textbf{(6)}$$

#*Для функций, не принадлежащих* C^2, *сплайн − аппроксимация работает плохо.*

> $f(x) := \dfrac{100}{100\,\mathrm{x} - 28}$;

$$f := x \mapsto \frac{100}{100 \cdot x - 28} \quad \textbf{(7)}$$

> $plot([f, Sc, Sb], 0..1, color = [blue, red, green])$;



> *computeErrors*(*f*) ;

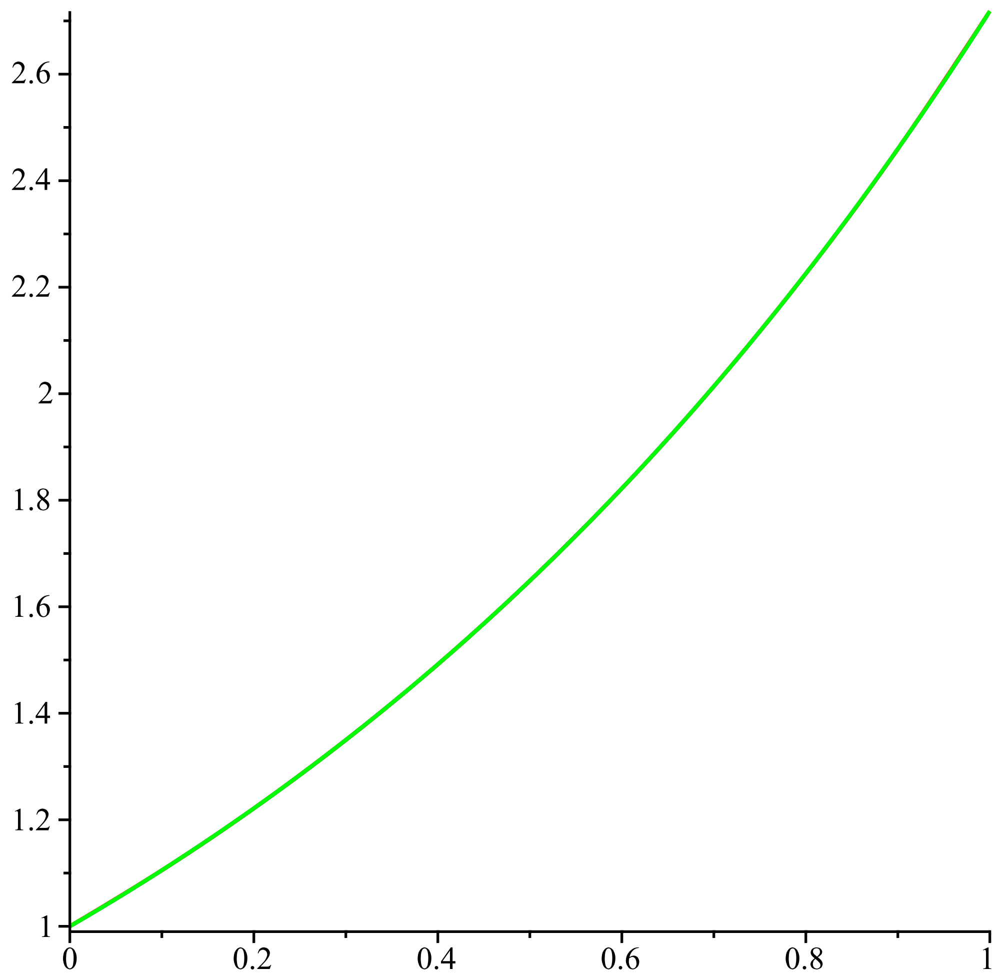
$$[\text{Float}(\infty), \text{Float}(\infty)] \tag{8}$$

 # Оба сплайна достаточно точно апроксимируют экспоненту, но сравнив ошибки можно заметить, что B −сплайн справился с этой задачей лучше.

> $f(x) := \exp(x)$;

$$f := x \mapsto e^x \tag{9}$$

> *plot*([*f*, *Sc*, *Sb*], 0 ..1, *color* = [*blue*, *red*, *green*]);
> *computeErrors*(*f*);



$[0.001330089799, 0.000022996]$ **(10)**

>

>