**Федеральное государственное образовательное бюджетное**

**учреждение**

**высшего образования**

**«ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»**

**(Финансовый университет)**

**Факультет**

информационных технологий и анализа больших данных

Кафедра «Бизнес-информатика»

**Домашнее задание № 3–4**

«Теория игр»

Студенты группы БИ20-4:

Иванова Ксения

Киракосян Виген

Крылов Никита

Мытарева Ангелина

Петрова Арина

Чайковская Анна

Руководитель:

Аксенов Дмитрий Андреевич

**Москва 2022**

ОГЛАВЛЕНИЕ

[**1. АНТАГОНИСТИЧЕСКИЕ ИГРЫ** 3](#_Toc100874468)

[1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ (ФИЗИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ) 3](#_Toc100874469)

[2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ 3](#_Toc100874470)

[3. АЛГОРИТМ 4](#_Toc100874471)

[4. MS EXCEL 5](#_Toc100874472)

[5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ 7](#_Toc100874473)

[**2. БИМАТРИЧНЫЕ ИГРЫ** 8](#_Toc100874474)

[1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ (ФИЗИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ) 8](#_Toc100874475)

[2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ 9](#_Toc100874476)

[3. АЛГОРИТМ 9](#_Toc100874477)

[4. MS EXCEL 10](#_Toc100874478)

[4.1 Тестирование метода решения в MS Excel с другой физической моделью 12](#_Toc100874479)

[5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ 14](#_Toc100874480)

[**3. РИСК** 15](#_Toc100874481)

[1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ (ФИЗИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ) 15](#_Toc100874482)

[**2. MS EXCEL** 18](#_Toc100874483)

[**3. ЗАДАЧА 2 С КОДОМ** 20](#_Toc100874484)

[***4*. ЗАКЛЮЧЕНИЕ** 22](#_Toc100874485)

[**4. ИГРЫ О ПРИНЯТИИ ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ** 23](#_Toc100874486)

[1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ (ФИЗИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ) 23](#_Toc100874487)

[2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ 23](#_Toc100874488)

[3. АЛГОРИТМ 24](#_Toc100874489)

[4. MS EXCEL 26](#_Toc100874490)

[5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ 29](#_Toc100874491)

**1. АНТАГОНИСТИЧЕСКИЕ ИГРЫ**

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ (ФИЗИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ)

В России проходят выборы в Государственную Думу. Партия А может воспользоваться следующими стратегиями: использовать политическую программу, говорить о дружбе с Китаем, говорить о разрешении локальных конфликтов. Партия В может воспользоваться тремя стратегиями: говорить об ограничениях из-за COVID-19, говорить о введении санкций против США, воспользоваться компроматом против лидера партии А. Ниже представлена матрица, которая отражает % голосов на выборах при использовании той или иной стратегии, каждым игроком. Найдём оптимальные стратегии для игрока А.

Таблица 1 – «Матрица % голосов на выборах»

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| A | 1 | 2 | 3 | min-max |
| 1 | 60 | 45 | 70 | 45 |
| 2 | 40 | 50 | 60 | 40 |
| 3 | 20 | 40 | 80 | 20 |
| max-min | 60 | 50 | 80 |  |

## 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Прямая задача игрока А

**Исходные данные**

Транспонированная платёжная матрица GT.

GT =

где n – количество стратегий игроков.

**Переменные**

Переменные – x1, x2, x3, xn (заменённые на вероятности p1, p2, p3, pn).

Целевая функция – максимальная величина входного/выходного потока:

(1.1.)

**Ограничения**

W11 \* x1 + W21 \* x2 + … + Wn1 \* xn (1.2.)

W12 \* x1 + W22 \* x2 + … + Wn2 \* xn (1.3.)

Wn1 \* x1 + Wn2 \* x2 + … + Wnn \* xn (1.4.)

Обратная замена переменных:

V *=* , p1 = x1 \* V, p2 = x2 \* V, p3 = x3 \* V (1.5.)

В смешанных стратегиях варианты смешиваются в определённых пропорциях для игрока А и В:

Sa = (p1, p2, p3, …, pn), Sb = (p1, p2, p3, …, pn) (1.6.)

**3. АЛГОРИТМ**

Рассмотрим конечную антагонистическую игру двух игроков А и В, в которой участвуют два игрока, множество стратегий каждого игрока конечно, а выигрыш одного игрока равен проигрышу другого (бескоалиционная, конечная, антагонистическая игра двух лиц). Ходы одновременны, а используемые стратегии – смешанные и чистые. Используется платёжная матрица игрока А.

Стратегия «Максимин» обеспечивает максимальный из гарантированных выигрышей игрока A, какие бы стратегии не применял в ответ игрок B. Выбранное по данной стратегии число называется нижней ценой игры – в данной задаче 50. Это означает, что если игрок А будет использовать стратегию 2, то гарантированный процент голосов не будет ниже этой цифры.

Стратегия «Минимакс» обеспечивает минимальный проигрыш игрока B, какие бы стратегии не применял игрок А (обратная стратегия «Максимин»). Выбранное по данной стратегии число называется верхней ценой игры – в данной задаче 45, что означает, что процент голосов за игрока В гарантированно не получится ниже этого значения.

Если бы в примере минимакс совпадал бы с максимином, то такая игра называлась бы игрой с седловой точкой. Седловая точка – это пара оптимальных стратегий (Ai, Bj). этом случае число α = β называется (чистой) ценой игры (нижняя и верхняя цена игры совпадают). Это означает, что матрица содержит такой элемент, который является минимальным в своей строке и одновременно максимальным в своем столбце.

Оптимальные стратегии в любой игре обладают важным свойством, а именно – устойчивостью. Это означает, что каждый из игроков не заинтересован в отходе от своей оптимальной стратегии, т. к. это ему невыгодно. Отклонение от оптимальной стратегии игрока А приводит к уменьшению его выигрыша, а одностороннее отклонение игрока В – к увеличению проигрыша. Говорят, что седловая точка дает положение равновесия.

В нашей задаче минимакс не совпадает с максимином, что свидетельствует об отсутствии седловой точки, так как a ≠ b, тогда необходимо искать решение игры в смешанных стратегиях. Объясняется это тем, что игроки не могут объявить противнику свои чистые стратегии: им следует скрывать свои действия. Игру можно решить, если позволить игрокам выбирать свои стратегии случайным образом (смешивать чистые стратегии).

**4. MS EXCEL**

Запишем исходную матрицу в MS Excel и продублируем соразмерную матрицу без значений. В ячейках С20:Н20 напишем формулу суммы значений соответствующих столбцов, а в ячейках I14:I19 - формулу суммы соответствующих строк. В ячейке с целевой формулой укажем формулу =СУММПРОИЗВ и в качестве аргументов напишем обе матрицы.

Необходимо проверить равновесие по Нэшу: совпадают ли максимальные значения.

В соответствующие ячейки таблицы запишем значения, которая отражает % голосов на выборах при использовании той или иной стратегии, каждой из партий.

Graphical user interface, application, table, Excel

Description automatically generated

Рис 1 – «Матрица % голосов на выборах»

**Принцип max-min:**

По столбцам таблицы найдём максимальное из значений (воспользуемся формулой =МАКС(B16:B18) и далее соответственно для следующих двух столбцов со сдвигом нумерации). Затем из полученных трёх значений выберем минимальное и выделим его цветом.

**Принцип min-max:**

По строкам таблицы найдём минимальное из значений (воспользуемся формулой =МИН(B16:D16) и далее соответственно для следующих двух строк со сдвигом нумерации). Затем из полученных трёх значений выберем максимальное и выделим его цветом.

**Задаём ограничения:**

С использованием формулы =СУММПРОИЗВ(B16:B18;$J$16:$J$18) умножаем каждое значение столбца матрицы на соответствующее значение столбца переменных и далее соответственно для следующих двух столбцов со сдвигом нумерации.

**Используемые формулы:**

Целевая функция находится путём суммирования значений переменных. В ячейки с процентом стратегии вносим. Цена игры равна 1/Целевую функцию. Процент стратегии находится путём умножения соответствующей переменной на цену деления.

После записи каждой из формул в ячейки запускаем Поиск решения:

Graphical user interface, text, application

Description automatically generated

Рисунок 2 — Решение через MS Excel (Антагонистические игры)

По результатам решения данной задачи с помощью Excel получается следующее распределение использования каждой из стратегий игроком A:

Graphical user interface, application, table, Excel

Description automatically generated

Рисунок 3 — Смесь стратегий для игрока

**5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Наша команда решила поставленную задачу при помощи Excel c помощью встроенных функций и поиска решения. Полученные результаты были проверены при помощи «Онлайн калькулятора», который дал аналогичный ответ.

В нашей задаче минимакс не совпадает с максимином, что свидетельствует об отсутствии седловой точки, поэтому необходимо искать решение игры в смешанных стратегиях.

Оптимальными стратегиями, которыми стоит пользоваться партии A для того, чтобы одержать победу на выборах является: использовать политическую программу – 40% и говорить о дружбе с Китаем – 60%.

**2. БИМАТРИЧНЫЕ ИГРЫ**

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ (ФИЗИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ)

В России проходят выборы в Государственную Думу. Партия А может воспользоваться следующими стратегиями: использовать политическую программу, говорить о дружбе с Китаем, говорить о разрешении локальных конфликтов. Партия В может воспользоваться тремя стратегиями: говорить об ограничениях из-за COVID-19, говорить о введении санкций против США, воспользоваться компроматом против лидера партии А. В таблице представлена матрица, которая отражает число занимаемых мест в Думе при использовании той или иной стратегии, каждым игроком. Партии А и Б придерживаются схожих взглядов, но ни разу не входили в состав Государственной Думы. Для того, чтобы исправить ситуацию они решили объединить усилия для противостояния ведущим партиям и отобраться в состав парламента. Необходимо найти оптимальную стратегию для партий А и Б.

Таблица 1 — Платежная матрица партии А

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| А | 1 | 2 | 3 |
| 1 | **50** | 45 | 40 |
| 2 | 40 | **60** | 60 |
| 3 | 20 | 40 | **70** |
| max | **50** | **60** | **70** |

Таблица 2 — Платежная матрица партии Б

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Б | 1 | 2 | 3 | max |
| 1 | 50 | 20 | **70** | **70** |
| 2 | 40 | 35 | **45** | **45** |
| 3 | **30** | 25 | 25 | **30** |

## 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

В представленном случае нам необходимо решить задачу о поиске оптимальной стратегии, при которой игроки не борются друг с другом, а стремятся каждый к своему выигрышу.

Математическая постановка задачи.

Исходные данные

W=

где n – количество стратегий игроков.

Переменные – x1, x2, x3, xn (заменённые на вероятности p1, p2, p3, pn).

Целевая функция – максимальная величина входного/выходного потока:

max (1.1.)

Ограничения

W11 \* x1 + W21 \* x2 + … + Wn1 \* xn (1.2.)

W12 \* x1 + W22 \* x2 + … + Wn2 \* xn (1.3.)

Wn1 \* x1 + Wn2 \* x2 + … + Wnn \* xn (1.4.)

Обратная замена переменных:

V *=* , p1 = x1 \* V, p2 = x2 \* V, p3 = x3 \* V (1.5.)

В смешанных стратегиях варианты смешиваются в определённых пропорциях для игрока А и В:

Sa = (p1, p2, p3, …, pn), Sb = (p1, p2, p3, …, pn) (1.6.)

**3. АЛГОРИТМ**

Рассмотрим биматричную игру. G = {C,U,A,B,m,n} { }m = x , x ,..., x C 1 2 - множество чистых стратегий первого игрока { }n = y , y ,..., y U 1 2 - множество чистых стратегий второго игрока (m,n) – система чисел, определяющая размерность платежных матриц и формат игры.

Все значения выигрышей, которые получат игроки 1 и 2 при выборе ими своих стратегий с номерами i и j определяются из двух матриц А и В, размерностью m× n . Элементы матрицы А определяют выигрыш 1 игрока, а матрицы B – второго.

Решить игру, значит определить пару ( ) \* \* x , y , которая удовлетворяла бы определению ситуации равновесия, и значения выигрышей VA и VB . В чистых стратегиях ситуация равновесия существует не всегда, поэтому при решении конечных игр рассматривают их смешанные расширения и определяют ситуацию равновесия для них.

Смешанным расширением биматричной игры называется игра, где стратегии игроков 1 и 2 определяются двумя векторами: { }m x = x , x ,..., x 1 2 и { }n y = y , y ,..., y 1 2 из фундаментальных симплексов X и Y þ ý ü î í ì C = = ³ £ £ å = = m i m i i x x x x x i m x 1 ( 1, 2 ,..., 0,1 , 1 þ ý ü î í ì U = = ³ £ £ å = = n j n j j y y y y y j n y 1 1 2 ( , ,..., 0,1 , 1 Ситуация равновесия для смешанного расширения определяется неравенствами: 3 ( , ) \* 1 1 1 \* 1 1 \* \* x y a x y a H x y m i n j i j ij m i n j åå i × j × ij ³åå × × = = = = = для "xÎ X ( , ) \* 2 1 1 \* \* 1 1 \* \* x y b x y b H x y m i n j i j ij m i n j åå i × j × ij ³åå × × = = = = = для "y ÎY Функции выигрыша смешанного расширения ( , ) 1 H x y и ( , ) 2 H x y определены на множестве X ´Y . Такие ситуации называют ситуациями равновесия по Нэшу. С содержательной стороны равновесие можно истолковать следующим образом: в случае, если один из игроков не придерживается равновесной стратегии, он получает меньший выигрыш, при условии, что второй участник игры выбирает для себя стратегию равновесия.

## 4. MS EXCEL

Для начала проанализируем стратегии партий А и Б, чтобы объективно расставить показатели в платежных матрицах.

Далее определим чистые стратегии игроков, используя равновесие по Нэшу (такая ситуация, при которой игроки не доверяют друг другу и выбирают такой вариант, который гарантированно позволит им выйти с минимальными потерями). Для этого воспользуемся функцией =МАКС применительно к столбцам матрицы А и строкам матрицы Б. После выберем наибольшее значение в каждой матрице и выделим цветом.

Graphical user interface, application

Description automatically generated

Рисунок 1 — Чистые стратегии

Перейдем к смешанным стратегиям. Скопируем матрицы и добавим поле «смесь стратегий» - р1, р2 и р3 для партии А; q1, q2 и q3 для партии Б. Эти показатели и будут ответом на вопрос задачи.

Составим целевую функцию: сумму выигрыша для обоих игроков. =цена игры партии А + цена игры партии Б.

Для этого узнаем цену игры: для партии А перемножим элемент матрицы (1;1), р1 и q1, при этом закрепим смеси стратегий. Проделаем аналогичные действия с матрицей партии Б.

Рассчитаем ограничения:

* с помощью функции =СУММПРОИЗВ(массив первой строки матрицы партии А; q1-q3). При этом этот показатель должен быть меньше цены игры партии А. Аналогично с остальными строками и матрицей партии Б;
* сумма р = сумме q.

Graphical user interface, application, table, Excel

Description automatically generated

Рисунок 2 — Ограничения

Заключительным этапом задачи будет поиск решения (вкладка «Данные») и анализ результатов. В поле «Оптимизировать целевую функцию» выберем ячейку «целевая функция». До: максимум. Добавим ограничения. Нажмем кнопку «Поиск решения».

A screenshot of a computer

Description automatically generated

Рисунок 3 — Поиск решения

После поиска решения мы получаем ответ, в данной задаче партии А рекомендуется использовать исключительно первую стратегию, а партии Б – 66% первой и 33% второй.

Graphical user interface, application, table, Excel

Description automatically generated

Рисунок 4 — Ответ

# 4.1 Тестирование метода решения в MS Excel с другой физической моделью

Проверим данный способ решения на другом датасете.

4.1.1. Физическая модель

После лесных пожаров государственные структуры и общественные организации занимаются тушением, а также помогают населению и природе реабилитироваться. Государство использует следующие стратегии: вызов наряда пожарных, выплата компенсаций пострадавшим, экологизация почвы. Общественные организации не обладают такими ресурсами, как государство, однако тоже может помочь такими дейтвиями, как: информирование населения о мерах предосторожности, сбор пожертвований и высадка новых растений. Объединив усилия, можно гораздо быстрее и эффективнее прийти к результату, именно поэтому в этой задаче нужно использовать смешанные стратегии. Необходимо найти оптимальную смесь стратегий и государства и ОО при лесных пожарах.

4.1.2. Реализация в MS Excel

Для начала проанализируем стратегий государства и общественной организации, чтобы объективно расставить показатели в платежных матрицах.

Далее определим чистые стратегии игроков, используя равновесие по Нэшу (такая ситуация, при которой игроки не доверяют друг другу и выбирают такой вариант, который гарантированно позволит им выйти с минимальными потерями). Для этого воспользуемся функцией =МАКС применительно к столбцам матрицы А и строкам матрицы Б. После выберем наибольшее значение в каждой матрице и выделим цветом.

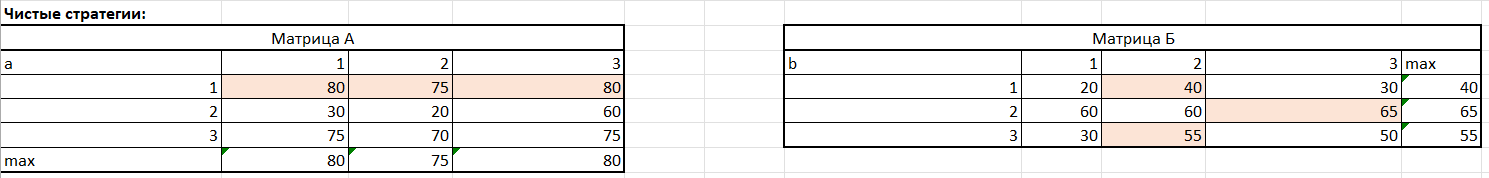


Рисунок 1 — Чистые стратегии

Перейдем к смешанным стратегиям. Скопируем матрицы и добавим поле «смесь стратегий» - р1, р2 и р3 для государства; q1, q2 и q3 для общественной организации. Эти показатели и будут ответом на вопрос задачи.

Составим целевую функцию: сумму выигрыша для обоих игроков. =цена игры государства + цена игры ОО.

Для этого узнаем цену игры: для государства перемножим элемент матрицы (1;1), р1 и q1, при этом закрепим смеси стратегий. Проделаем аналогичные действия с матрицей ОО.

Рассчитаем ограничения:

* с помощью функции =СУММПРОИЗВ(массив первой строки матрицы государства; q1-q3). При этом этот показатель должен быть меньше цены игры государства. Аналогично с остальными строками и матрицей ОО;
* сумма р = сумме q.

Изображение выглядит как стол

Автоматически созданное описание

Рисунок 2 — Ограничения

Заключительным этапом задачи будет поиск решения (вкладка «Данные») и анализ результатов. В поле «Оптимизировать целевую функцию» выберем ячейку «целевая функция». До: максимум. Добавим ограничения. Нажмем кнопку «Поиск решения».

Изображение выглядит как текст

Автоматически созданное описание

Рисунок 3 — Поиск решения

После поиска решения мы получаем ответ, в данной задаче государству рекомендуется использовать исключительно первую стратегию, а ОО – 99,9% первой и приблизительно 0,0001% второй.

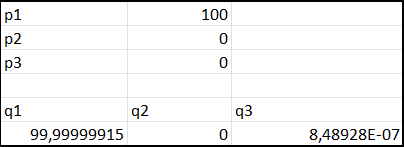


Рисунок 4 — Ответ

**5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

После изучения учебных материалов по теме «Теория игр. Биматричные игры» нашей командой было проведено решение практической задачи в MS Excel, результат решения был апробирован и подтвержден в онлайн-калькуляторах. Можно сделать следующий вывод: в отсутствии равновесия по Нэшу в чистых стратегиях равновесие можно найти в смешанных стратегиях, для этого нужно будет использовать и ту, и другую стратегию. При этом возникает ситуация, при которой максимальные показатели при использовании чистой стратегии каждым игроком превышают целевые функции, однако суммарный результат сотрудничества больше, чем если игроки будут действовать по отдельности.

**3. РИСК**

**1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ (ФИЗИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ)**

Винни-Пуху нужно добраться до улья с медом, который висит высоко на дереве. У него есть выбор как это лучше сделать: он может подняться на воздушном шарике, залезть по дереву самостоятельно или подлететь с помощью пропеллера, одолжив его у Карлсона. Каждое из средств эффективно для определенного типа погоды: на улице может быть безветренно, может быть слабый ветер, сильный ветер или ураган. Ниже представлена матрица, которая отражает % процент успешного подъема к улью при использовании той или иной стратегии в определенную погоду.

Таблица 1 – «Матрица % успешного подъема к улью с медом»

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А | П1 | П2 | П3 | П4 |
| А1 | 90 | 75 | 30 | 10 |
| А2 | 50 | 40 | 25 | 1 |
| А3 | 95 | 90 | 40 | 8 |
| вероятности | 0,1 | 0,1 | 0,7 | 0,1 |

**3. АЛГОРИТМ**

Игры с природой – задачи, в условии которых есть только один участник, максимизирующий свою прибыль. Игры с природой – математические модели, в которых выбор решения зависит об объективной действительности. Например, покупательский спрос, состояние природы и т.д. «Природа» – это обобщенное понятие не преследующего собственных целей противника. В таком случае для выбора оптимальной стратегии используется несколько критериев.

Принятие решений в условиях неопределённости предполагает, что игроку не противостоит разумный противник.

Критерий Вальда

В критерии Вальда максимизируется наихудший из возможных результатов:



Использование критерия страхует от наихудшего результата, но цена такой стратегии – потеря возможности получить наилучший из возможных результатов.

Рассмотрим пример. Для стратегий U1 = (90,75,30,10), U2 = (50,40,25,1), U3 = (95,90,40,8) найдем минимумы и получим следующую тройку S = (10, 1, 8) . Максимумом для указанной тройки будет являться значение 10, следовательно, по критерию Вальда выигрышной стратегией является стратегия U1 = (90,75,30,10), соответствующая стратегии полета на воздушном шаре.

Критерий оптимиста

При использовании критерия оптимиста игрок выбирает решение, дающее лучший результат, при этом оптимист предполагает, что условия игры будут для него наиболее благоприятными:



Стратегия оптимиста может привести к отрицательным последствиям, когда максимальное предложение совпадает с минимальным спросом – фирма может получить убытки при списании нереализованной продукции. В тоже время стратегия оптимиста имеет определённый смысл, например, не нужно заботиться о неудовлетворённых покупателях, поскольку любой возможный спрос всегда удовлетворяется, поэтому нет нужды поддерживать расположения покупателей. Если реализуется максимальный спрос, то стратегия оптимиста позволяет получить максимальную полезность в то время, как другие стратегии приведут к недополученной прибыли. Это даёт определённые конкурентные преимущества.

Рассмотрим пример. Для стратегий U1 = (90,75,30,10), U2 = (50,40,25,1), U3 = (95,90,40,8) найдем максимум и получим следующую тройку S = (90, 50, 95). Максимумом для указанной тройки будет являться значение 95, следовательно, по критерию оптимизма выигрышной стратегией является стратегия U3 = (95,90,40,8), соответствующая стратегии полета на пропеллере.

Критерий пессимизма

Данный критерий предназначен для выбора наименьшего элемента игровой матрицы из ее минимально возможных элементов:



Критерий пессимизма предполагает, что развитие событий будет неблагоприятным для лица, принимающего решение. При использовании этого критерия лицо принимающее решение ориентируется на возможную потерю контроля над ситуацией, поэтому, старается исключить потенциальные риски выбирая вариант с минимальной доходностью.

Рассмотрим пример. Для стратегий U1 = (90,75,30,10), U2 = (50,40,25,1), U3 = (95,90,40,8) найдем минимум и получим следующую тройку S = (10, 1, 8). Минимумом для указанной тройки будет являться значение 1, следовательно, по критерию пессимизма выигрышной стратегией является стратегия U2 = U2 = (50,40,25,1), соответствующая стратегии забраться по дереву.

Критерий Байеса

Критерий Байеса (критерий математического ожидания) используется в задачах принятия решения в условиях риска в качестве оценки стратегии Ui выступает математическое ожидание соответствующей ей случайной величины. В соответствии с этим правилом оптимальная стратегия игрока Uopt находится из условия:

Изображение выглядит как текст

Автоматически созданное описание

Иными словами, показателем неэффективности стратегии Ui по критерию Байеса относительно рисков является среднее значение (математическое ожидание ожидание) рисков i-й строки матрицы U, вероятности которых, совпадают с вероятностями природы. Тогда оптимальной среди чистых стратегий по критерию Байеса относительно рисков является стратегия Uopt, обладающая минимальной неэффективностью то есть минимальным средним риском. Критерий Байеса эквивалентен относительно выигрышей и относительно рисков, т.е. если стратегия Uopt является оптимальной по критерию Байеса относительно выигрышей, то она является оптимальной и по критерию Байеса относительно рисков, и наоборот.

Перейдем к примеру и рассчитаем математические ожидания:

А1=90\*0,1+75\*0,1+30\*0,7+10\*0,1=38,5;

А2=50\*0,1+40\*0,1+25\*0,7+1\*0,1=26,6;

А3=95\*0,1+90\*0,1+40\*0,7+8\*0,1=47,3;

Максимальным математическим ожиданием является А3, следовательно, выигрышной стратегией является стратегия А3.

Критерий Лапласа

Критерий Лапласа представляет упрощенную максимизацию математического ожидания полезности, когда справедливо предположение о равной вероятности уровней спроса, что избавляет от необходимости сбора реальной статистики.

В общем случае при использовании критерия Лапласа матрица ожидаемых полезностей и оптимальный критерий определяются следующим образом:

1. A picture containing diagram

   Description automatically generated

Рассмотрим пример принятия решений по критерию Лапласа. Рассчитаем среднеарифметическое для каждой стратегии:

А1=1/3\*(90+75+30+10)=68,3;

А2=1/3\*(50+40+25+1)=38,6;

А3=1/3\*(50+40+25+1)=77,6;

Таким образом, выигрышной стратегией является стратегия А3.

# **2. MS EXCEL**

Запишем исходную матрицу в MS Excel и продублируем в соответствующие ячейки таблицы значения, которая отражает % успешности всех стратегий, которые может использовать Винни-Пух.

Изображение выглядит как стол

Автоматически созданное описание

Рис 1 – «Матрица % успеха стратегий Винии-Пуха»

**Критерий Байеса:**

Найдем сумму произведений показателя успешности и вероятности каждой стратегии в каждое состояние природы (воспользуемся формулой =СУММПРОИЗВ и далее соответственно для следующих двух столбцов со сдвигом нумерации). Затем из полученных трёх значений выберем средневзвешенное.

**Критерий Лапласа:**

Запишем в строке таблицы «Вероятности» значения, равные 1/кол-во стратегий (в нашем случае 3). Найдем сумму произведений показателя успешности и вероятности каждой стратегии в каждое состояние природы (воспользуемся формулой =СУММПРОИЗВ и далее соответственно для следующих двух столбцов со сдвигом нумерации). Затем из полученных трёх значений выберем средневзвешенное.

**Критерий Гермейера:**

Дублируем исходную матрицу. Создаем одноразмерную матрицу без значений и умножаем каждый показатель успеха стратегии на ее вероятность, заполняя таблицу.

С помощью ранее описанного метода минимакса находим соответствующее значение по строкам заполненной таблицы.

Создаем вспомогательные таблицы ограничений и переменных. В ячейке каждого ограничения запишем формулу умножения столбца соответствующего погодного явления на пустой столбец переменных.

В качестве целевой функции – сумму переменных, цены игры – 1/значение целевой функции. В таблице стратегий запишем формулы умножения соответствующей переменной на значение цены игры.

После записи каждой из формул в ячейки запускаем Поиск решения:

Изображение выглядит как текст

Автоматически созданное описание

Рисунок 2 — Решение через MS Excel (Риски)

По результатам решения данной задачи с помощью Excel получается следующее распределение использования каждой из стратегий игроком A:

Chart, box and whisker chart

Description automatically generated

Рисунок 3 — Смесь стратегий для игрока

# **3. ЗАДАЧА 2 С КОДОМ**

Винни-Пух и Пятачок поспорили, что медведь не сможет угадать по виду, в каком из ульев какое количество меда. Имеется 10 ульев. При этом урны бывают двух типов: в урне типа I находится 5 кг меда, а в урне типа II – 8 кг. Известно, что урн типа I – 7 штук, а урн типа II – 3 штук. Винни-Пух подходит к случайно выбранному улью и должен сказать, какого он типа или отказаться от игры. Если он называет тип I и улей действительно этого типа, то он выигрывает 500 кг меда, если он типа II, то Винни проигрывает 200 кг. Если играющий называет тип II и улей действительно этого типа, то он выигрывает 1000 кг меда, если же он типа I, то герой проигрывает 150. Какое решение должен принять медведь?

Решение.

Множество вариантов решения имеет вид:

d1 – назвать улей типа I;

d2 – назвать улей типа II;

d3 – отказаться от игры.

Множество состояний среды:

s1– улей типа I,

s2 – улей типа II

Тогда таблица выигрышей (полезностей) имеет вид:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Решения | S1 | S2 |
| D1 | 500 | -200 |
| D2 | -150 | 1000 |
| D3 | 0 | 0 |
| Вероятности | 0,7 | 0,3 |

Вычислим ожидаемые полезности каждого решения (критерий Байеса):

D1=500\*0,7+(-200)\*0,3=290,

D2=-150\*0,7+1000\*0,3=195,

D3=0.

Используя критерий ожидаемой полезности, Винни-Пух должен назвать улей типа I

Если использовать критерий дисперсии полезности, то оптимальным решением будет отказ от игры.

Код, выводящий решение задачи представлен в файле с расширением .ipynb «риск код».

import numpy as np

n = 4

matrix =[list(map(float, input().split())) for row in range(n)]

print(\*matrix, sep='\n')

a=matrix

#вычисления ожидаемых полезностей каждого из исходов

d1=a[0][0]\*a[3][0]+a[0][1]\*a[3][1]

d2=a[1][0]\*a[3][0]+a[1][1]\*a[3][1]

d3=a[2][0]\*a[3][0]+a[2][1]\*a[3][1]

b = [d1,d2,d3]

print('используя критерий ожидаемой полезности, Винни-Пух должен принять решение № ', b.index(max(b))+1)

print('используя критерий дисперсии полезности, Винни-Пух должен принять решение № ', b.index(min(b))+1)

print("Ответ:", b.index(max(b))+1)

С клавиатуры вводится значения матрицы размерности 2 столбца 3 строчки в формате float.

Указываем индексы значений матрицы для расчета математического ожидания каждой строки.

Собираем значения математических ожиданий в массив, далее указываем их индекс при выведении максимального и минимального значений из найденных.

Реализация Задачи 2:

Изображение выглядит как текст

Автоматически созданное описание

Рисунок 4 – Реализация Задачи 2 на языке Python

Решение в MS Excel:

Изображение выглядит как стол

Автоматически созданное описание

Рисунок 5 – Реализация Задачи 2 в MS Excel

Задача решается по ранее описанному алгоритму критерия Байеса. Умножаем строку первого исхода D1 на строку вероятностей и т.д. по аналогии спускаясь по ячейкам вниз.

Таким образом, наиболее выигрышной является стратегия D1.

# ***4*. ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Наша команда решила поставленную задачу при помощи Excel c помощью встроенных функций и поиска решения. Полученные результаты были проверены при помощи «Онлайн калькулятора», который дал аналогичный ответ. Оптимальными стратегиями, которыми стоит пользоваться Винни-Пух для того, чтобы добраться до улья с медом – лететь на воздушном шаре.

Для получения наибольшей выгоды при игре с Пятачком, медведю следует назвать улей 1 типа.

Сравнивая результаты, полученные в результате расчета различных критериев, одинаковый ответ дали критерии оптимизма, критерий Байеса и критерий Лапласа – оптимальная стратегия U3. Критерий Вальда и Критерий пессимизма дали результаты U1 и U2 соответственно.

**4. ИГРЫ О ПРИНЯТИИ ОПТИМАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЁННОСТИ**

1. **ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ (ФИЗИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ)**

Сельскохозяственное предприятие "Лепесток" выращивает любую из трех культур - возможных стратегий игрока А1, А2, А3. При наилучших агротехнических мероприятиях урожаи культур зависят, главным образом, от погодных условий - П1, П2, П3. Цены на продукции на протяжении рассматриваемого периода будут оставаться неизменными. Найдём культуру, от выращивания которой игрок А получит максимальный доход.

Таблица 1 – «Платёжная матрица»

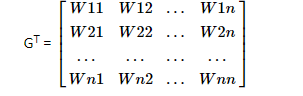
|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| A | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 45 | 30 | 25 |
| 2 | 20 | 40 | 50 |
| 3 | 50 | 45 | 20 |

1. **МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ**

Прямая задача игрока А

**Исходные данные**

Транспонированная платёжная матрица GT.



где n – количество стратегий игроков.

**Переменные**

Переменные – x1, x2, x3, xn (заменённые на вероятности p1, p2, p3, pn).

**Критерий Байеса (максимального математического ожидания)**

Расчет осуществляется по формуле:  
https://www.semestr.ru/images/math/games/g7_image001.gif

Найденные значения заносим в первый столбец и выбираем максимальное, оно и является стратегией игрока А.

**Максиминный критерий Вальда**

В каждой строке таблицы находим минимальный элемент:

https://www.semestr.ru/images/math/games/g7_image006.gif

Найденные значения заносим в третий столбец и выбираем максимальное.

**Критерий пессимизма-оптимизма Гурвица (П-О)**

Для каждой строки рассчитываем значение критерия по формуле:

https://www.semestr.ru/images/math/games/g7_image007.gif

Найденные значения заносим в новую таблицу и выбираем максимальное

**Критерий минимаксного риска Сэвиджа**

Рассчитаем матрицу рисков. Заполнять ее лучше по столбцам. В каждом столбце находим максимальный элемент, и вычитаем из него все остальные элементы столбца, результаты записываем на соответствующих местах:

https://www.semestr.ru/images/math/games/g7_image009.gif

1. **АЛГОРИТМ**

Предположим, что ЛПР (лицо, принимающее решения) рассматривает несколько возможных решений: i = 1,…,m. Ситуация, в которой действует ЛПР, является неопределенной. Известно лишь, что наличествует какой-то из вариантов: j = 1,…, n. Если будет принято *i*-e решение, а ситуация есть *j*-я , то фирма, возглавляемая ЛПР, получит доход qij. Матрица Q = (qij) называется матрицей последствий (возможных решений). Какое же решение нужно принять ЛПР? В этой ситуации полной неопределенности могут быть высказаны лишь некоторые рекомендации предварительного характера. Они не обязательно будут приняты ЛПР. Многое будет зависеть, например, от его склонности к риску. Но как оценить риск в данной схеме?

Допустим, мы хотим оценить риск, который несет i-e решение. Нам неизвестна реальная ситуация. Но если бы ее знали, то выбрали бы наилучшее решение, т.е. приносящее наибольший доход. Т.е. если ситуация есть *j*-я , то было бы принято решение, дающее доход qij.

https://math.semestr.ru/games/images/g6_image004.gif

Правило Вальда (правило крайнего пессимизма). Рассматривая *i*-e решение будем полагать, что на самом деле ситуация складывается самая плохая, т.е. приносящая самый малый доход ai Но теперь уж выберем решение i0 с наибольшим ai0. Итак, правило Вальда рекомендует принять решение i0, такое что   
  Так, в вышеуказанном примере, имеем a1 = 2, a2 = 2, a3 = 3, a4 = 1. Из этих чисел максимальным является число 3. Значит, правило Вальда рекомендует принять 3-е решение.

https://math.semestr.ru/games/images/g6_image005.gif

Правило Сэвиджа (правило минимального риска). При применении этого правила анализируется матрица рисков R = (rij). Рассматривая *i*-e решение будем полагать, что на самом деле складывается ситуация максимального риска bi = max [rij]. Но теперь уж выберем решение i0 с наименьшим bi0. Итак, правило Сэвиджа рекомендует принять решение i0, такое что в рассматриваемом примере имеем b1 = 8, b2 = 6, b3 = 5, b4 = 7. Минимальным из этих чисел является число 5. Т.е. правило Сэвиджа рекомендует принять 3-е решение.

https://math.semestr.ru/games/images/g6_image006.gif

Правило Гурвица (взвешивающее пессимистический и оптимистический подходы к ситуации). Принимается решение i, на котором достигается максимум, где 0 ≤ λ ≤ 1. Значение *λ* выбирается из субъективных соображений. Если *λ* приближается к 1, то правило Гурвица приближается к правилу Вальда, при приближении *λ* к 0, правило Гурвица приближается к правилу "розового оптимизма" (догадайтесь сами, что это значит). В вышеуказанном примере при *λ*= 1/2 правило Гурвица рекомендует 2-е решение.

1. **MS EXCEL**

Возьмем за стратегии игрока: Арбуз, Кукуруза, Сахарная свекла – урожаи культур, которые выращивает сельхозкомпания «Лепесток».

При наилучших агротехнических мероприятиях урожаи культур зависят, главным образом, от погодных условий (состояний природы). Будем считать для простоты, что возможны погодные условия трех типов: П1 - сухое лето, П2 - нормальное лето и П3 - влажное лето, а также предположим, что цены на продукцию на протяжении рассматриваемого периода будут оставаться неизменными. Здесь под cij будем понимать доход (выигрыш) в тысячах рублей при выращивании культуры Ai при состоянии природы Пj на всех имеющихся площадях. Основная сложность состоит в незнании того, какое именно состояние природы Пj будет иметь место. Очевидно, что если бы игрок знал будущее состояние природы, он выбрал бы ту стратегию Ai , при которой его выигрыш (доход) был бы максимален.

Запишем платежную матрицу:

Таблица 2 – «Платёжная матрица»

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| А|П | П1 | П2 | П3 |
| А1 | 45 | 30 | 25 |
| А2 | 20 | 40 | 50 |
| А3 | 50 | 45 | 20 |

Будем анализировать эту игру, используя платёжную матрицу. Предположим, что мы (игрок А) выбирает стратегию А1. Тогда в зависимости от того, какую стратегию изберёт противник, наш выигрыш будет равен либо 20, либо 30, либо 25. Итак, выбирая стратегию А1, мы в худшем случае получаем выигрыш 25. Если же выберем стратегию А2 или А3, то будем иметь в худшем случае выигрыш 20. Запишем минимальные возможные выигрыши для разных стратегий Аi в виде дополнительного столбца платёжной матрицы. Ясно, что следует выбирать ту стратегию, где минимальный возможный выигрыш оказывается наибольшим (по сравнению с остальными стратегиями).

В данном случае это стратегия А3. Выигрыш 30 является максимальным в тройке минимальных выигрышей (в тройке 20, 30, 25). Его называют максиминным выигрышем или, проще, максимином. Есть у него ещё одно название – *нижняя цена игры.*

**Критерий минимаксного сожаления Сэвиджа**

Сожалением r игрока при использовании стратегии A в условиях состояния природы Pj называется разность между выигрышем, который игрок получил бы, если бы состояние окружения Pj было известно, и выигрышем, который он получит, не зная каким будет состояние природы и выбирая стратегию поведения Ai. Если бы состояние природы Pj было известно, то игрок выбрал бы стратегию,дающую maxc. Чтобы вычислить сожаление,нужно из максимального элемента в столбце Pj вычесть фактический выигрыш cij , т.е. r = max c - c . В нашем примере матрица сожалений R = (r ) имеет вид:

Таблица 3 – «Критерий минимаксного сожаления Сэвиджа»

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| А|П | П1 | П2 | П3 | max |
| А1 | 5 | 15 | 25 | 25 |
| А2 | 30 | 5 | 0 | 30 |
| А3 | **0** | **0** | **20** | 20 |

Таким образом, чем больше величина сожаления, тем больше игрок теря- ет в выигрыше от незнания состояния окружения. Далее, применяя принцип га- рантированного результата, в каждой строке находим наихудший результат, то есть максимальное сожаление при применении данной стратегии, и выбираем среди них наилучший результат (минимальное сожаление), который в данном примере достигается при применении стратегии A3. Итак, согласно критерию Сэвиджа оптимальной стратегией является стратегия A3, при которой все поля засеваются третьей культурой.

Критерий Сэвиджа тоже крайне пессимистический, и в смысле «пессимизма» он сходен с критерием Вальда.

**Критерий пессимизма-оптимизма Гурвица**

Этот критерий состоит в следующем. Вместо исходной матрицы выигрышей C (cij ) рассматривается матрица B (bij ) , где

Alpha\*max(Ai)+(1-Alpha)\*min(Ai)

Здесь Alpha некоторое число, 0<Alpha<1, характеризующее степень оптимизма игрока. Тогда число 1 - Alpha можно понимать как степень пессимизма. При Alpha = 0 в каждой строке во всех столбцах стоит одно и то же число, равное мак- симальному выигрышу при выборе соответствующей строке стратегии, то есть самый оптимистичный результат. При Alpha = 1 матрица B совпадает с матрицей выигрышей C, и критерий Гурвица превращается в критерий Вальда; при Alpha = 0 – в критерий «крайнего оптимизма», при других значениях  получается нечто среднее – ближе к оптимизму, если Alpha близко к 0, или ближе к пессимизму, если Alpha близко к 1. Критерий Гурвица заключается в применении принципа гарантированного результата (критерия Вальда) к матрице B .

 Запишем линейную свертку:

Таблица 4 – «Линейная свертка»

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Alpha | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,3 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 0,7 | 0,8 | 0,9 | 1 |
| А1 | 25 | 27 | 29 | 31 | 33 | 35 | 37 | 39 | 41 | 43 | 45 |
| А2 | 20 | 23 | 26 | 29 | 32 | 35 | 38 | 41 | 44 | 47 | 50 |
| А3 | 30 | 32 | 34 | 36 | 38 | 40 | 42 | 44 | 46 | 48 | 50 |

Применяя принцип гарантированного результата, получаем, что по критерию Гурвица наилучшим выбором является выбор второй стратегии A3, то есть засеять все поля следует третьей культурой.

1. **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Мы решили поставленную задачу при помощи Excel. Так, мы пользовались различными критериями оценки неопределённой ситуации (критерий пессимизма-оптимизма Гурвица, критерий минимаксного сожаления Сэвиджа и др.).

В критерии минимаксного сожаления Сэвиджа оптимальной стратегией является А3. Критерий Сэвиджа крайне пессимистический, и в смысле «пессимизма» он сходен с критерием Вальда. В критериии пессимизма-оптимизма Гурвица оптимальной является также стратегия А3.

И таким образом, наилучшей стратегией для игрока А будет А3, т.е. засеять все поля следует сахарной свеклой, так как она по многим показателям превосходит своих соперников.