

## Exercice 2

*Cet exercice porte sur la programmation en général et la récursivité en particulier.*

On considère un tableau de nombres de  $n$  lignes et  $p$  colonnes.

Les lignes sont numérotées de 0 à  $n - 1$  et les colonnes sont numérotées de 0 à  $p - 1$ . La case en haut à gauche est repérée par  $(0, 0)$  et la case en bas à droite par  $(n - 1, p - 1)$ .

On appelle *chemin* une succession de cases allant de la case  $(0, 0)$  à la case  $(n - 1, p - 1)$ , en n'autorisant que des déplacements case par case : soit vers la droite, soit vers le bas.

On appelle *somme* d'un chemin la somme des entiers situés sur ce chemin.

Par exemple, pour le tableau T suivant :

4	1	1	3
2	0	2	1
3	1	5	1

- Un chemin est  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(0, 2)$ ,  $(1, 2)$ ,  $(2, 2)$ ,  $(2, 3)$  (en gras sur le tableau) ;
- La somme du chemin précédent est 14.
- $(0, 0)$ ,  $(0, 2)$ ,  $(2, 2)$ ,  $(2, 3)$  n'est pas un chemin.

L'objectif de cet exercice est de déterminer la somme maximale pour tous les chemins possibles allant de la case  $(0, 0)$  à la case  $(n - 1, p - 1)$ .

**Question 1** On considère tous les chemins allant de la case  $(0, 0)$  à la case  $(2, 3)$  du tableau T donné en exemple.

1. Un tel chemin comprend nécessairement 3 déplacements vers la droite. Combien de déplacements vers le bas comprend-il ?
2. La longueur d'un chemin est égal au nombre de cases de ce chemin. Justifier que tous les chemins allant de  $(0, 0)$  à  $(2, 3)$  ont une longueur égale à 6.

**Question 2** En listant tous les chemins possibles allant de  $(0, 0)$  à  $(2, 3)$  du tableau T, déterminer un chemin qui permet d'obtenir la somme maximale et la valeur de cette somme.

**Question 3** On veut créer le tableau T' où chaque élément  $T'[i][j]$  est la somme maximale pour tous les chemins possibles allant de  $(0, 0)$  à  $(i, j)$ .

1. Compléter et recopier sur votre copie le tableau T' donné ci-dessous associé au tableau

T =

4	1	1	3
2	0	2	1
3	1	5	1

T' =

4	5	6	?
6	?	8	10
9	10	?	16

2. Justifier que si  $j$  est différent de 0, alors :  $T'[0][j] = T[0][j] + T'[0][j-1]$

**Question 4** Justifier que si  $i$  et  $j$  sont différents de 0, alors :  $T'[i][j] = T[i][j] + \max(T'[i-1][j], T'[i][j-1])$ .

**Question 5** On veut créer la fonction récursive `somme_max` ayant pour paramètres un tableau T, un entier  $i$  et un entier  $j$ . Cette fonction renvoie la somme maximale pour tous les chemins possibles allant de la case  $(0, 0)$  à la case  $(i, j)$ .

1. Quel est le cas de base, à savoir le cas qui est traité directement sans faire appel à la fonction `somme_max`? Que renvoie-t-on dans ce cas?
2. À l'aide de la question précédente, écrire en Python la fonction récursive `somme_max`.
3. Quel appel de fonction doit-on faire pour résoudre le problème initial?