Лабораторная работа №2

Задача о погоне

Астафьева Анна Андреевна, НПИбд-01-18

Содержание

Список таблиц

Список иллюстраций

1 Цель работы

Цель работы — построение математической модели для решения задачи о погоне.

2 Задача о погоне

Вариант 41

На море в тумане катер береговой охраны преследует лодку браконьеров. Через определенный промежуток времени туман рассеивается, и лодка обнаруживается на расстоянии 17,4 км от катера. Затем лодка снова скрывается в тумане и уходит прямолинейно в неизвестном направлении. Известно, что скорость катера в 4,8 раза больше скорости браконьерской лодки.

3 Задание

1. Записать уравнение, описывающее движение катера, с начальными условиями для двух случаев (в зависимости от расположения катера относительно лодки в начальный момент времени).
2. Построить траекторию движения катера и лодки для двух случаев.
3. Найти точку пересечения траектории катера и лодки.

4 Выполнение лабораторной работы

4.1 Постановка задачи

1. Принимает за $t_0 = 0$, $x_0 = 0$ - место нахождения лодки браконьеров в момент обнаружения, $x_0 = 0$ - место нахождения катера береговой охраны относительно лодки браконьеров в момент обнаружения лодки.

2. Введем полярные координаты. Считаем, что полюс - это точка обнаружения лодки браконьеров $x_0 (= x_0 = 0)$, а полярная ось *r* проходит через точку нахождения катера береговой охраны (Рис. 4.1).

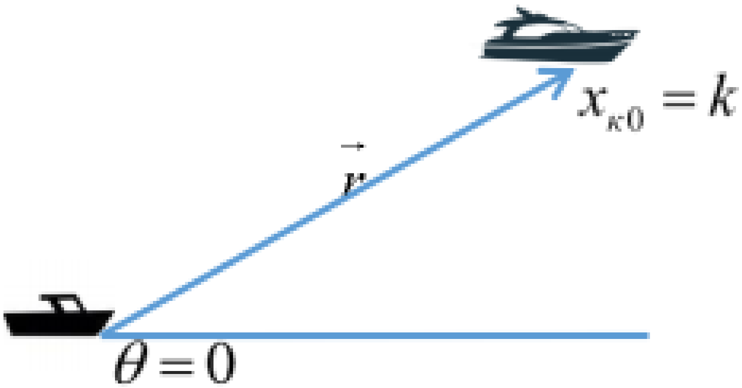

Рис. 4.1: Положение катера и лодки в начальный момент времени

3. Траектория катера должна быть такой, чтобы и катер, и лодка все время были на одном расстоянии от полюса
с траекторией лодки.
Поэтому для начала катер береговой охраны должен двигаться некоторое время прямолинейно, пока не окажется на том же расстоянии от полюса, что и лодка браконьеров. После этого катер береговой охраны должен двигаться вокруг полюса удаляясь от него с той же скоростью, что и лодка браконьеров.

4. Чтобы найти расстояние x (расстояние после которого катер начнет двигаться вокруг полюса), необходимо составить простое уравнение. Пусть через время t катер и лодка окажутся на одном расстоянии x от полюса. За это время лодка пройдет x, а катер k-x (или k+x, в зависимости от начального положения катера относительно полюса). Время, за которое они пройдут это расстояние, вычисляется как x/v или $(k$-$x)/4{,}8v$ (во втором случае $(k+v)/4{,}8v$). Так как время одно и то же, то эти величины одинаковы. $\frac{x}{v}$
Отсюда мы найдем два значения $x_1 = k/5{,}8$ и $x_2 = k/3{,}8$, задачу будем решать для двух случаев.

5. После того, как катер береговой охраны окажется на одном расстоянии от полюса, что и лодка, он должен сменить прямолинейную траекторию и начать двигаться вокруг полюса удаляясь от него со скоростью лодки v. Для этого скорость катера раскладываем на две составляющие: v_r- радиальная скорость и v_t - тангенциальная скорость (рис. 4.2). Радиальная скорость - это скорость, с которой катер удаляется от полюса, $v_r = dr/dt$. Нам нужно, чтобы эта скорость была равна скорости лодки, поэтому полагаем $dr/dt = v$.
Тангенциальная скорость – это линейная скорость вращения катера относительно полюса. Она равна произведению угловой скорости $d\ /dt$ радиус r.радиус

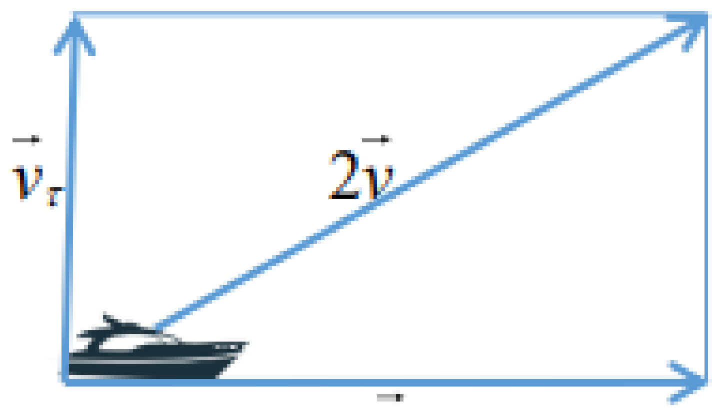

Рис. 4.2: Разложение скорости катера на тангенциальную и радиальную составляющие

Из рисунка видно: $v_r = \sqrt{}(23{,}04v^2$-$v^2) = v\ \sqrt{}22{,}04$ (учитывая, что радиальная скорость равна v).
Тогда получаем $r\frac{d0}{dt} = v\sqrt{}22{,}04$.

6. Решение исходной задачи сводится к решению системы из двух дифференциальных уравнений (рис. 4.3):

$$\begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = v \\ r\dfrac{d\theta}{dt} = \sqrt{22{,}04} \end{cases} \text{ с начальными условиями } \begin{cases} \theta_0 = 0 \\ r_0 = x_1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \theta_0 = -\pi \\ r_0 = x_2 \end{cases}$$

Рис. 4.3: Система уравнений

Исключая из полученной системы производную по t, можно перейти к следующему уравнению (рис. 4.4).

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{r}{\sqrt{22{,}04}}$$

Рис. 4.4: Система уравнений

Начальные условия остаются прежними. Решив это уравнение, получим траекторию движения катера в полярных координатах.

4.2 Моделирование задачи

Изначально планировалось использовать для моделирования язык Modelica, но у меня вызвало затруднение построения в радиальной системе координат в программе OpenModelica. Пример построения траектории движения катера(рис. 4.5):

model FirstModel

//parameter Real tan_fi = -1;

Real r;

parameter Real r0=17.4/5.8;

//constant Real pi=2Modelica.Math.asin(1.0);

initial equation

r=r0;

//tan_fi = Modelica.Math.tan(3180/4);

equation

der(r)=r/sqrt(22.04);

end FirstModel;

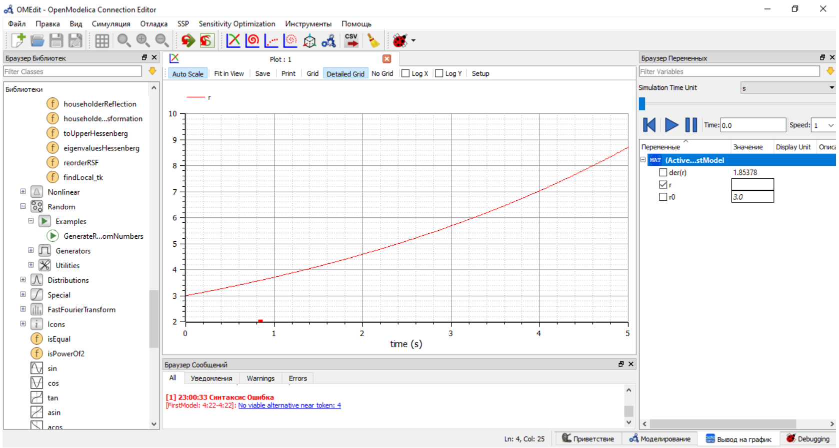

Рис. 4.5: Траектория катера в Modelica

В связи с этим я использовала SciLab, на котором был написан пример в лабораторной.

Код в Scilab:

s=17.4; // начальное расстояние от лодки до катера

*fi=3 * %pi/4;*

//функция, описывающая движение катера береговой охраны

function dr=f(tetha, r)

dr=r/sqrt(3);

endfunction;

//начальные условия в случае 1

r0=s/5.8;

tetha0=0;

//начальные условия в случае 2

//r0=s/3.8;

//tetha0=-%pi;

*tetha=0:0.01:2 * %pi;*

```
r=ode(r0,tetha0,tetha,f);
//        ,
function xt=f2(t)
xt=tan(fi) * t;
endfunction
t=0:1:800;
polarplot(tetha,r,style = color('green')); //
plot2d(t,f2(t),style = color('red'));
```

Для случая 1 получаем точку пересечения примерно (6,85;-6,85) (рис. 4.6).

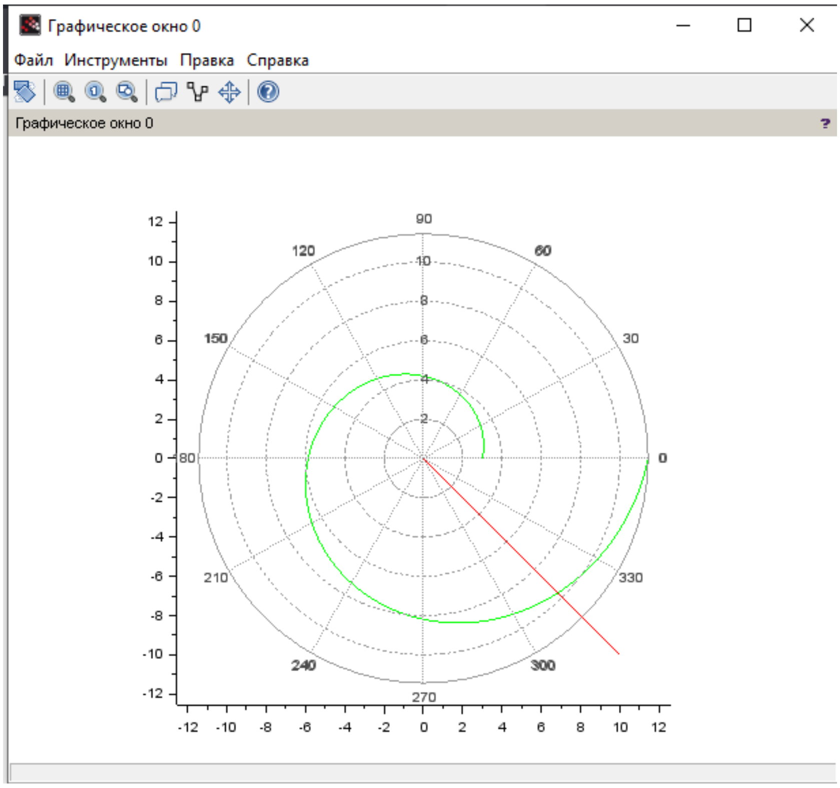

Рис. 4.6: Случай 1

Для случая 2 получаем точку пересечения примерно (20,05; -20,05) (Рис. 4.7).

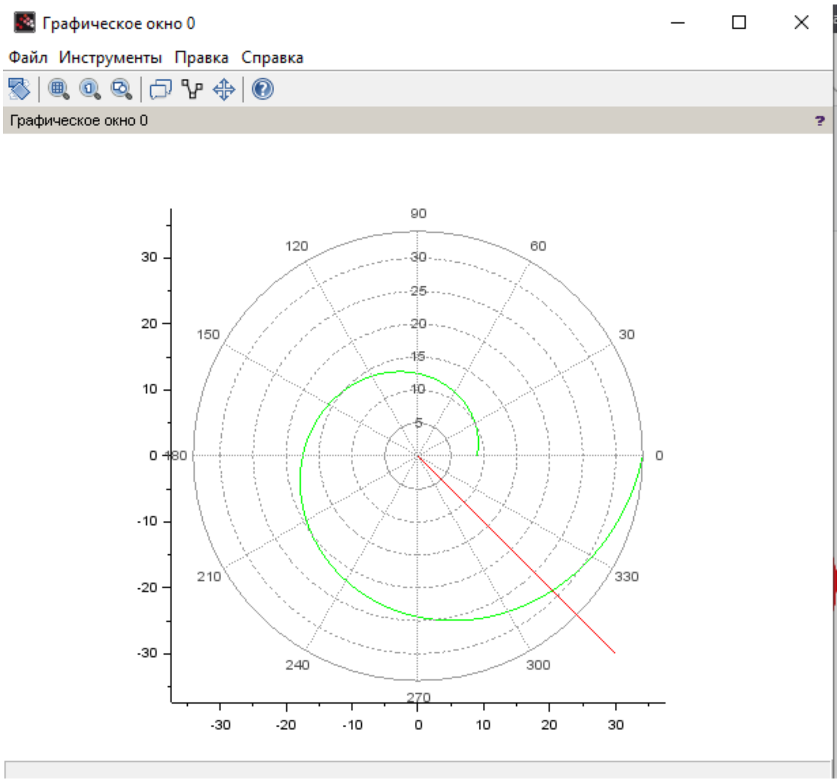

Рис. 4.7: Случай 2

5 Выводы

В ходе выполнения лабораторной работы я научилась решать задачу о погоне с помощью моделирования.