

Лабораторная работа №5

Модель хищник-жертва

Астафьева Анна Андреевна, НПИбд-01-18

Содержание

1	Цель работы	5
2	Задание	6
3	Выполнение лабораторной работы	7
3.1	Теоретические сведения	7
3.2	Ход выполнения	9
4	Выводы	13

Список таблиц

Список иллюстраций

3.1	Эволюция популяции жертв и хищников в модели Лотки-Вольтерры	8
3.2	График колебаний изменения числа популяций хищников и жертв с начальными значениями $x=11$, $y=22$	10
3.3	Зависимость изменения численности хищников от изменения численности жертв с начальными значениями $x=11$, $y=22$	10
3.4	Зависимости изменения численности хищников от изменения численности жертв с начальными значениями в стационарном состоянии	11
3.5	График колебаний изменения числа популяций хищников и жертв с начальными значениями в стационарном состоянии	11

1 Цель работы

Цель работы — построение модели хищник-жертва.

2 Задание

Вариант 42

Для модели «хищник-жертва»:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -0.56x(t) + 0.057x(t)y(t) \\ \frac{dy}{dt} = 0.57x(t) - 0.056x(t)y(t) \end{cases}$$

Постройте график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях: $x_0 = 11, y_0 = 22$. Найдите стационарное состояние системы.

3 Выполнение лабораторной работы

3.1 Теоретические сведения

Простейшая модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва» - модель Лотки-Вольтерры. Данная двухвидовая модель основывается на следующих предположениях: 1. Численность популяции жертв x и хищников y зависят только от времени (модель не учитывает пространственное распределение популяции на занимаемой территории). 2. В отсутствии взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса, при этом число жертв увеличивается, а число хищников падает. 3. Естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника считаются несущественными. 4. Эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается. 5. Скорость роста численности жертв уменьшается пропорционально численности хищников.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -ax(t) + bx(t)y(t) \\ \frac{dy}{dt} = cx(t) - dx(t)y(t) \end{cases}$$

В этой модели x – число хищников, y - число жертв. Коэффициент a описывает скорость вымирания хищников, лишенных пищи в виде жертв, $-$ естественный прирост числа жертв в отсутствие хищников. Вероятность взаимодействия жертвы и хищника считается пропорциональной как количеству жертв, так и числу самих хищников (xy). Каждый акт взаимодействия способствует увеличению популяции хищников, но уменьшает популяцию жертв (члены bxy и $-dxy$ в правой

части уравнения).

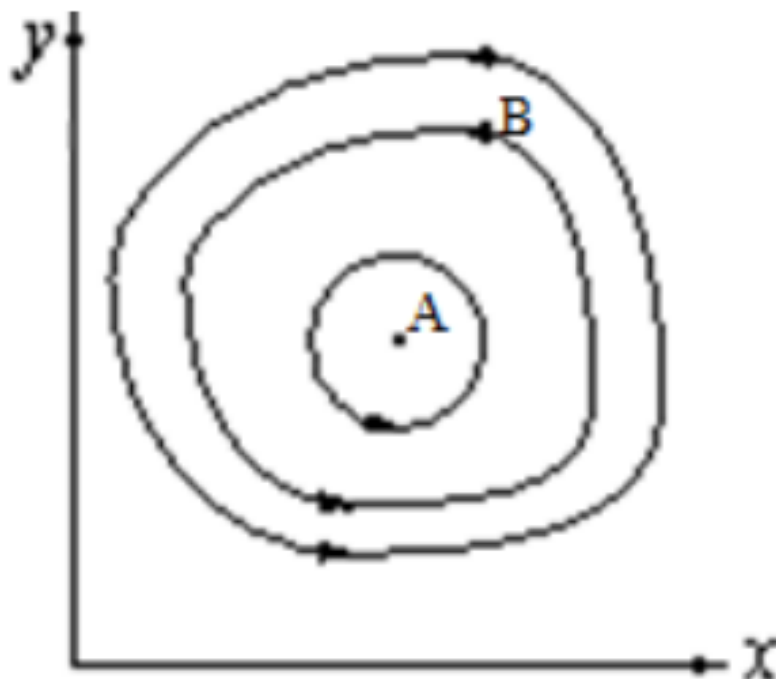


Рис. 3.1: Эволюция популяции жертв и хищников в модели Лотки-Вольтерры

Математический анализ этой (жесткой) модели показывает, что имеется стационарное состояние (A на рис. 3.1), всякое же другое начальное состояние (B) приводит к периодическому колебанию численности как жертв, так и хищников, так что по прошествии некоторого времени система возвращается в состояние B .

Стационарное состояние системы (положение равновесия, не зависящее от времени решение) будет в точке: $x_0 = \frac{c}{d}$, $y_0 = \frac{a}{b}$. Если начальные значения задать в стационарном состоянии $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, то в любой момент времени численность популяций изменяться не будет. При малом отклонении от положения равновесия численности как хищника, так и жертвы с течением времени не возвращаются к равновесным значениям, а совершают периодические колебания вокруг стационарной точки. Амплитуда колебаний и их период

определяется начальными значениями численностей $x(0), y(0)$. Колебания совершаются в противофазе.

3.2 Ход выполнения

Для модели «хищник-жертва»:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -ax(t) + bx(t)y(t) \\ \frac{dy}{dt} = cx(t) - dx(t)y(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -0.56x(t) + 0.057x(t)y(t) \\ \frac{dy}{dt} = 0.57x(t) - 0.056x(t)y(t) \end{cases}$$

$a = 0.56$ (коэффициент естественной смертности хищников)

$c = 0.57$ (коэффициент естественного прироста жертв)

$b = 0.057$ (коэффициент увеличения числа хищников)

$d = 0.056$ (коэффициент смертности жертв)

Начальное число хищников – $x_0 = 11$, начальное число жертв – $y_0 = 22$.

Код программы в Modelica:

```
model Wolfs
parameter Real a = 0.56; // коэффициент естественной смертности хищников
parameter Real c = 0.57; // коэффициент естественного прироста жертв
parameter Real b = 0.057; // коэффициент увеличения числа хищников
parameter Real d = 0.056; // коэффициент смертности жертв
Real x(start = 11.0);
Real y(start = 22.0);
equation
der(x)=-ax+bxy;
der(y)=cy-dxy;
end Wolfs;
```

1. Построение графиков изменения численности хищников (x) и численности жертв (y) (рис. 3.2):

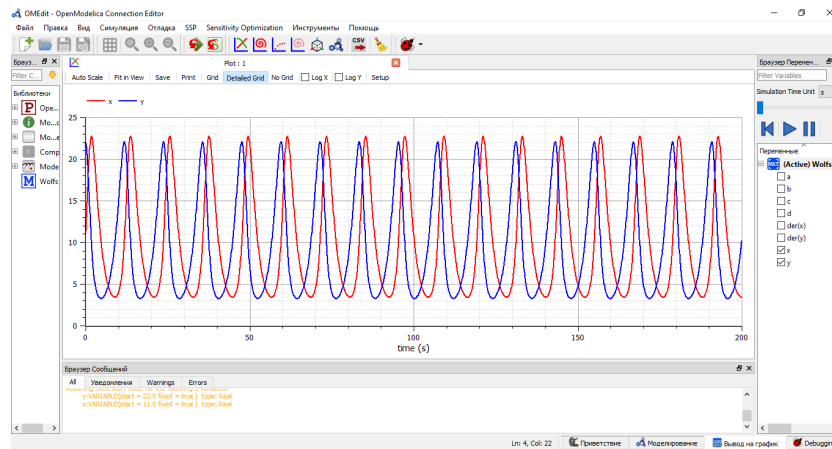


Рис. 3.2: График колебаний изменения числа популяций хищников и жертв с начальными значениями $x=11$, $y=22$

2. Построение зависимости численности популяций хищников и жертв (фазовый портрет системы) (рис. 3.3):

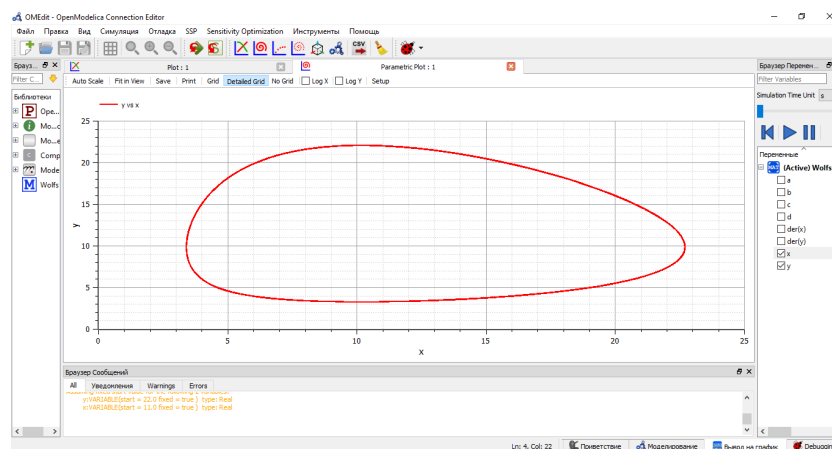


Рис. 3.3: Зависимость изменения численности хищников от изменения численности жертв с начальными значениями $x=11$, $y=22$

3. Стационарное состояние находится в точке: $x_0 = \frac{c}{a}$, $y_0 = \frac{a}{b}$, примерные значения для моего случая $x_0 = \frac{0.57}{0.056} = 10.179$, $y_0 = \frac{0.56}{0.057} = 9.825$. Если начальные значения задать в стационарном состоянии $x(0) = x_0$, $y(0) =$

y_0 , то в любой момент времени численность популяций изменяться не будет (рис. 3.4, 3.5):

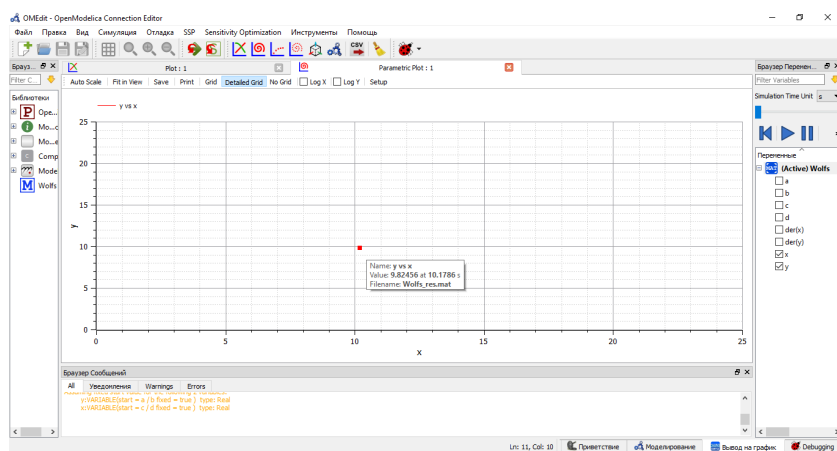


Рис. 3.4: Зависимости изменения численности хищников от изменения численности жертв с начальными значениями в стационарном состоянии

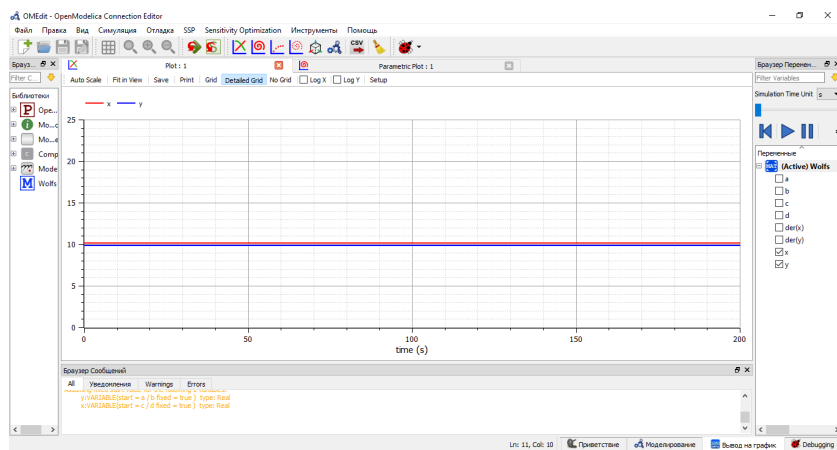


Рис. 3.5: График колебаний изменения числа популяций хищников и жертв с начальными значениями в стационарном состоянии

Код программы в Modelica:

```
model Wolfs
```

```
parameter Real a = 0.56; // коэффициент естественной смертности хищников
```

```
parameter Real c = 0.57; // коэффициент естественного прироста жертв
```

```
parameter Real b = 0.057; // коэффициент увеличения числа хищников
```

```
parameter Real d = 0.056; // коэффициент смертности жертв
Real x(start = c/d);
Real y(start = a/b);
equation
der(x)=-ax+bxy;
der(y)=cy-dxy;
end Wolfs;
```

4 Выводы

Я изучила модель хищник-жертва, построила графики колебаний изменения числа популяций хищников и жертв, а также зависимость изменения численности хищников от изменения численности жертв (фазовый портрет системы).