ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА
Факультет прикладної математики та інформатики
Кафедра обчислювальної математики

Курсова робота
на тему:

Метод інтегральних рівнянь для оберненої крайової задачі для бігармонійного рівняння

Студентки IV курсу групи ПМП-41
Напряму підготовки “Прикладна математика”
Багрій А. Г.

Керівник:
проф. Хапко Р. С.
Національна шкала: ____________
Кількість балів: ____________
Оцінка ECTS: ____________

Львів-2020

Зміст

Вступ

Обернені задачі, які полягають у реконструкції межі області, є популярним напрямом для дослідження, оскільки такі задачі мають велику кількість застосувань. Реконструкція межі області є нелінійною задачею, що призводить до труднощів як в теоретичних дослідженнях, так і в чисельному розв'язуванні. Найбільш ефективні чисельні методи для даної задачі базуються на інтегральних рівняннях.

У даній роботі розглянуто реконструкцію внутрішньої межі двозв'язної пластини із заданими крайовими умовами, що задають певний фізичний сенс. Оскільки обернені задачі вимагають розв'язності відповідної прямої задачі, то також показано її коректність і наведено чисельні експеременти, що підтверджують теоретичні обґрунтування.

Постановка задачі

Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ деяка двоз'язна область з межею $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, де Γ_1 є внутрішньою межею і Γ_2 - зовнішньою. Розглянемо

$$\begin{cases} \Delta^2 u(x) = 0, \quad x \in \Omega, \\ u(x) = \dfrac{\partial u(x)}{\partial n} = 0, \quad x \in \Gamma_1, \\ \dfrac{\partial u(x)}{\partial n} = g(x), \quad x \in \Gamma_2, \\ Mu(x) = q(x), \quad x \in \Gamma_2, \end{cases} \tag{1}$$

$$u(x) = f(x), \quad x \in \Gamma_2, \tag{2}$$

де

$$\Delta^2 u(x) = \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} u(x) + 2\frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} u(x) + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} u(x) \text{ - бігармонійний оператор,}$$

$$u(x) = u(x_1, x_2) \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) \text{ - функція, що задовольняє рівняння і крайові умови,}$$

$$n = (n_1, n_2) \text{ - зовнішня нормаль до } \Gamma,$$

$$Mu = \nu \Delta u + (1-\nu)(u_{x_1x_1} n_1^2 + 2u_{x_1x_2} n_1 n_2 + u_{x_2x_2} n_2^2) \text{ - згинальний момент пластини } \Omega,$$

$\nu \in (0,1)$ - коефіцієнт Пуассона і $g(x),\ q(x),\ f(x)$ - деякі задані функції, тотожньо відмінні від нуля.

Обернена задача (1)-(2) полягає у знаходженні невідомої межі Γ_1 для заданих функцій $g(x), q(x), f(x)$. Дана задача є нелінійною, оскільки її розв'язок нелінійно залежить від невідомої межі Γ_1, і також некоректною в сенсі відсутності стійкості за вхідними данними.

Перш за все, необхідно розглянути питання існування та єдиності розв'язку оберненої задачі (1)-(2).

Теорема 1 (Існування і єдиність розв'язку оберненої задачі)**.** *Нехай* $\tilde{\Gamma}_1$, Γ_1 *- замкнені криві, що містяться всередині* Γ_2, $\tilde{u}$, u *- розв'язки задачі* (1) *для* $\tilde{\Gamma}_1$ *і* Γ_1 *відповідно. Нехай* $g \neq 0, q \neq 0$ *і* $u = \tilde{u}$ *на відкритій підмножині* Γ_2*. Тоді* $\tilde{\Gamma}_1 = \Gamma_1$.

Доведення. Доведемо від протилежного. Нехай $\tilde{\Gamma}_1 \neq \Gamma_1$. Нехай Ω_2 - область, обмежена Γ_2, Ω_1, $\tilde{\Omega}_1$ - області обмежені Γ_1, $\tilde{\Gamma}_1$ відповідно.

$$W := \Omega_2 \setminus (\Omega_1 \cup \tilde{\Omega}_1), \quad \Gamma_2 \subset \partial W.$$

За теоремою Гольмгрена [4] маємо $u = \tilde{u}$ в W. Без втрати загальності приспустимо, що $W^* := (\Omega_2 \setminus \overline{W}) \setminus \Omega_1$ непорожня множина. Тоді u є визначена в W^* як розв'язок задачі (1) для Γ_1. Вона є неперервною в $\overline{W}^*$ і задовольняє граничні умови на ∂W^*. Ця гранична умова випливає з того, що кожна точка з W^* належить або Γ_1, або $\partial W \cap \tilde{\Gamma}_1$. Для $x \in \Gamma_1$ маємо $u(x) = 0$ як наслідок граничних умов для u, для $x \in \tilde{\Gamma}_1$ маємо $u(x) = \tilde{u}(x)$ і тому $u(x) = 0$ як наслідок граничних умов для $\tilde{u}$. Тоді за принципом максимуму $u = 0$ в W^* і тому $u = 0$ в D. Це суперечить тому, що $g \neq 0, q \neq 0$.

□

Розділ 1

Загальні положення

1.1 Зведення до ІР

Фундаментальний розв'язок бігармонійного рівняння в $\mathbb{R}^2$ має вигляд

$$G(x,y) = \frac{1}{8\pi}|x-y|^2 \ln|x-y|, \quad x,\ y \in \mathbb{R}^2. \tag{1.1}$$

Розглянемо потенціал простого шару для бігармонійного рівняння [1] з густинами φ, ψ, що визначені на Γ:

$$u(x) = \int_\Gamma \left(G(x,y)\varphi(y) + \frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y}\psi(y) \right) d\sigma_y, \quad x \in \Omega.$$

Теорема 2 (Існування і єдиність розв'язку прямої задачі)**.** *Існує єдиний розв'язок прямої крайової задачі* (1)*, який можна подати у вигляді*

$$u(x) = \sum_{k=1}^{2} \int_{\Gamma_k} \left(G(x,y)\varphi_k(y) + \frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y}\psi_k(y) \right) d\sigma_y + \omega(x), \quad x \in \Omega, \tag{1.2}$$

де $\omega(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ $((\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) \in R^3), \varphi_k, \psi_k \in C(\Gamma_k), k = 1, 2,$ *і невідомі густини визначаються з системи інтегральних рівнянь*

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{2} \int_{\Gamma_k} \left(G(x,y)\varphi_k(y) + \frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y}\psi_k(y) \right) d\sigma_y + \omega(x) = 0,\ x \in \Gamma_1, \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{2} \int_{\Gamma_k} \left(\frac{\partial G(x,y)}{\partial n_x}\varphi_k(y) + \frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial n_y \partial n_x}\psi_k(y) \right) d\sigma_y + \frac{\partial \omega(x)}{\partial n} = 0,\ x \in \Gamma_1, \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{2} \int_{\Gamma_k} \left(\frac{\partial G(x,y)}{\partial n_x}\varphi_k(y) + \frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial n_y \partial n_x}\psi_k(y) \right) d\sigma_y + \frac{\partial \omega(x)}{\partial n} = g(x),\ x \in \Gamma_2, \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{2} \int_{\Gamma_k} \left(M_x G(x,y)\varphi_k(y) + \frac{\partial M_x G(x,y)}{\partial n_y}\psi_k(y) \right) d\sigma_y + M_x\omega(x) = q(x),\ x \in \Gamma_2, \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{2} \int_{\Gamma_k} \varphi_k(y) d\sigma_y = A_0, \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{2} \int_{\Gamma_k} (y_1\varphi_k(y) + n_1(y)\psi_k(y)) d\sigma_y = A_1, \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{2} \int_{\Gamma_k} (y_2\varphi_k(y) + n_2(y)\psi_k(y)) d\sigma_y = A_2, \end{cases} \tag{1.3}$$

для заданих $(A_0, A_1, A_2) \in R^3$.

Константи A_0, A_1, A_2 вибираються довільним чином, однак є некоректним брати за значення нулі.

З умови (2) маємо наступне інтегральне рівняння

$$\sum_{k=1}^{2} \int_{\Gamma_k} \left(G(x,y)\varphi_k(y) + \frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y}\psi_k(y) \right) d\sigma_y + \omega(x) = f(x), \; x \in \Gamma_2. \tag{1.4}$$

В системі (1.3) ядра мають вигляд

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y} = -\frac{1}{8\pi} n(y) \cdot (x-y)(1 + 2\ln|x-y|),$$

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial n_x} = \frac{1}{8\pi} n(x) \cdot (x-y)(1 + 2\ln|x-y|),$$

$$\frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial n_x \partial n_y} = \frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial n_y \partial n_x} = -\frac{1}{8\pi}\Bigg(2\frac{n(x)\cdot(x-y)n(y)\cdot(x-y)}{|x-y|^2} + n(x)\cdot n(y)(1+2\ln|x-y|) \Bigg),$$

$$M_x G(x,y) = \frac{1+3\nu}{8\pi} + \frac{(1-\nu)(n(x)\cdot(x-y))^2}{4\pi|x-y|^2} + \frac{(1+\nu)\ln|x-y|^2}{8\pi},$$

$$\frac{\partial M_x G(x,y)}{\partial n_y} = \frac{1-\nu}{2\pi}\left(\frac{(n(x)\cdot(x-y))^2 n(y)\cdot(x-y)}{|x-y|^4} - \frac{n(x)\cdot n(y) n(x)\cdot(x-y)}{|x-y|^2} \right) - \frac{(1+\nu)n(y)\cdot(x-y)}{4\pi|x-y|^2}.$$

Теорема 3. *Обернена крайова задача* (1)-(2) *еквівалентна системі інтегральних рівнянь* (1.3)-(1.4).

1.2 Алгоритм знаходення розв'язку оберненої крайової задачі

Знаходження розв'язку задачі (1.3)-(1.4) складається з наступного ітераційного процесу:

- Для заданого початкового наближення Γ_1 розв'язуємо пряму задачу для (1.3) і знаходимо невідомі густини.
- Лінеаризуємо рівняння (1.4) і покращуємо Γ_1, розв'язуючи лінеаризоване рівняння (1.4) для фіксованих густин, які є відомими з (1.3).
- Умовою зупинки може бути $||q||_2 < \epsilon$, де q - функція, що задає покращення Γ_1, ϵ - задана точність.

Розділ 2

Чисельне розв'язування коректної системи ІР

2.1 Параметризація

Припустимо, що криві Γ_1 і Γ_2 достатньо гладкі і їх можна подати у параметричному заданні

$$\Gamma_l = \{x_l(s) = (x_{1l}(s), x_{2l}(s)) \ : \ s \in [0, 2\pi]\}\,, \tag{2.1}$$

де x_l $(l = 1, 2)$ - аналітична, 2π-періодична функція, $|x'(s)| > 0$. Тоді систему (1.3) можна подати у вигляді

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{2}\int_0^{2\pi}\Big(H_{1k}(s,\sigma)\varphi_k(\sigma) + \tilde{H}_{1k}(s,\sigma)\psi_k(\sigma)\Big)d\sigma + \omega(x_1(s)) = 0, \\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{2}\int_0^{2\pi}\Big(\tilde{\tilde{H}}_{1k}(s,\sigma)\varphi_k(\sigma) + \hat{H}_{1k}(s,\sigma)\psi_k(\sigma)\Big)d\sigma + \dfrac{\partial\omega(x_1(s))}{\partial n_1} = 0, \\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{2}\int_0^{2\pi}\Big(\tilde{\tilde{H}}_{2k}(s,\sigma)\varphi_k(\sigma) + \hat{H}_{2k}(s,\sigma)\psi_k(\sigma)\Big)d\sigma + \dfrac{\partial\omega(x_2(s))}{\partial n_2} = g(x_2(s)), \\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{2}\int_0^{2\pi}\Big(\hat{\hat{H}}_{2k}(s,\sigma)\varphi_k(\sigma) + \bar{H}_{2k}(s,\sigma)\psi_k(\sigma)\Big)d\sigma + M_x\omega(x_2(s)) = q(x_2(s)), \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{2}\int_0^{2\pi}\varphi_k(\sigma)d\sigma = A_0, \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{2}\int_0^{2\pi}(x_{1k}\varphi_k(\sigma) + n_1(x_k(\sigma))\psi_k(\sigma))d\sigma = A_1, \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{2}\int_0^{2\pi}(x_{2k}\varphi_k(\sigma) + n_2(x_k(\sigma))\psi_k(\sigma))d\sigma = A_2, \end{cases} \tag{2.2}$$

Тут $\varphi_l(s) := \varphi_k(x_l(s))|x_l'(s)|$, $\psi_l(s) := \psi_k(x_l(s))|x_l'(s)|$ – невідомі густини і ядра мають вигляд

$$H_{lk}(s,\sigma) = G(x_l(s), x_k(\sigma)), \quad \tilde{H}_{lk}(s,\sigma) = \frac{\partial G(x_l(s), x_k(\sigma))}{\partial n_y},$$
$$\tilde{\tilde{H}}_{lk}(s,\sigma) = \frac{\partial G(x_l(s), x_k(\sigma))}{\partial n_x}, \quad \hat{H}_{lk}(s,\sigma) = \frac{\partial^2 G(x_l(s), x_k(\sigma))}{\partial n_y \partial n_x},$$
$$\hat{\hat{H}}_{lk}(s,\sigma) = M_x G(x_l(s), x_k(\sigma)), \quad \bar{H}_{lk}(s,\sigma) = \frac{\partial M_x G(x_l(s), x_k(\sigma))}{\partial n_y},$$
$$n(x(s)) = \Big(\frac{x_2'(s)}{|x'(s)|}, -\frac{x_1'(s)}{|x'(s)|}\Big).$$

Дані ядра є неперервними в області $\bar{\Omega}$. Але коли точка інтегрування співпадає з точкою спостереження на Γ_l $(l = 1, 2)$ під час диференціювання маємо логарифмічну особливість. Для чисельного розв'язування доцільно виділити цю особливість, виконавши певні перетворення. Отримуємо наступне подання ядер

$$H_{ll}(s,\sigma) = H_{ll}^{(1)}(s,\sigma) \ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{s-\sigma}{2}\right) + H_{ll}^{(2)}(s,\sigma), \tag{2.3}$$
$$\tilde{H}_{ll}(s,\sigma) = \tilde{H}_{ll}^{(1)}(s,\sigma) \ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{s-\sigma}{2}\right) + \tilde{H}_{ll}^{(2)}(s,\sigma), \tag{2.4}$$
$$\tilde{\tilde{H}}_{ll}(s,\sigma) = \tilde{\tilde{H}}_{ll}^{(1)}(s,\sigma) \ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{s-\sigma}{2}\right) + \tilde{\tilde{H}}_{ll}^{(2)}(s,\sigma), \tag{2.5}$$
$$\hat{H}_{ll}(s,\sigma) = \hat{H}_{ll}^{(1)}(s,\sigma) \ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{s-\sigma}{2}\right) + \hat{H}_{ll}^{(2)}(s,\sigma), \tag{2.6}$$
$$\hat{\hat{H}}_{ll}(s,\sigma) = \hat{\hat{H}}_{ll}^{(1)}(s,\sigma) \ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{s-\sigma}{2}\right) + \hat{\hat{H}}_{ll}^{(2)}(s,\sigma). \tag{2.7}$$

де

$$H_{ll}^{(1)}(s,\sigma) = \frac{1}{8}|x_l(s) - x_l(\sigma)|^2, \quad H_{ll}^{(2)}(s,\sigma) = \frac{1}{8}|x_l(s) - x_l(\sigma)|^2 \ln\Big(\frac{e|x_l(s) - x_l(\sigma)|^2}{4\sin^2\frac{s-\sigma}{2}}\Big),$$
$$\tilde{H}_{ll}^{(1)}(s,\sigma) = -\frac{1}{4} n(x_l(\sigma)) \cdot (x_l(s) - x_l(\sigma)),$$
$$\tilde{H}_{ll}^{(2)}(s,\sigma) = \frac{1}{4} n(x_l(\sigma)) \cdot (x_l(s) - x_l(\sigma)) \left(\ln\Big(\frac{4\sin^2\frac{s-\sigma}{2}}{e|x_l(s) - x_l(\sigma)|^2}\Big) - 1\right),$$
$$\tilde{\tilde{H}}_{ll}^{(1)}(s,\sigma) = \frac{1}{4} n(x_l(s)) \cdot (x_l(s) - x_l(\sigma)),$$
$$\tilde{\tilde{H}}_{ll}^{(2)}(s,\sigma) = \frac{1}{4} n(x_l(s)) \cdot (x_l(s) - x_l(\sigma)) \left(\ln\Big(\frac{e|x_l(s) - x_l(\sigma)|^2}{4\sin^2\frac{s-\sigma}{2}}\Big) + 1\right),$$
$$\hat{H}_{ll}^{(1)}(s,\sigma) = -\frac{1}{4} n(x_l(s)) \cdot n(x_l(\sigma)),$$
$$\hat{H}_{ll}^{(2)}(s,\sigma) = \frac{1}{4} n(x_l(s)) \cdot n(x_l(\sigma)) \cdot \left(\ln\Big(\frac{4\sin^2\frac{s-\sigma}{2}}{e|x_l(s) - x_l(\sigma)|^2}\Big) - 2\frac{(x_l(s) - x_l(\sigma))^2}{|x_l(s) - x_l(\sigma)|^2} - 1\right),$$
$$\hat{\hat{H}}_{ll}^{(1)}(s,\sigma) = \frac{1+\nu}{4},$$
$$\hat{\hat{H}}_{ll}^{(2)}(s,\sigma) = \frac{1+3\nu}{8\pi} + \frac{(1-\nu)(n(x_l(s)) \cdot (x_l(s) - x_l(\sigma)))^2}{4\pi|x_l(s) - x_l(\sigma)|^2} + \frac{(1+\nu)\ln|x_l(s) - x_l(\sigma)|^2}{8\pi}$$
$$-\frac{1+\nu}{4}\ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{s-\sigma}{2}\right).$$

При $s=\sigma$ всі ядра дорівнюють нулю, окрім

$$\hat{\hat{H}}_{ll}^{(2)}(s,s) = \frac{1+3\nu}{4} + \frac{1+\nu}{4}\ln(e|x_l^{'}(s)|^2),$$
$$\bar{H}_{ll}(s,s) = \frac{1-3\nu}{4}\frac{n(x_l(s))\cdot x_l^{''}(s)}{|x_l^{'}(s)|^2}.$$

Параметризований розв'язок прямої задачі (2.2) має вигляд

$$\tilde{u}(x) = \sum_{k=1}^{2}\int_{\Gamma_k}\left(H_k(x,\sigma)\varphi_k(\sigma) + \tilde{H}_k(x,\sigma)\psi_k(\sigma)\right)d\sigma_y + \omega(x),\ x=(x_1,x_2)\in\Omega, \tag{2.8}$$

де

$$H_l(x,\sigma) = \frac{1}{8\pi}|x-x_l(\sigma)|^2\ln|x-x_l(\sigma)|,$$
$$\tilde{H}_l(x,\sigma) = \frac{1}{8\pi}n(x_l(\sigma))\cdot(x-x_l(\sigma))(1+2\ln|x-x_l(\sigma)|),\ l=1,2.$$

2.2 Метод Нистрьома

Для чисельного розв'язування отриманої системи інтегральних рівнянь (2.2) використуємо метод Нистрьома, який полягає у заміні інтегралу відповідною квадратурною формулою з певними ваговими функціями [7]. Виберемо тригонометричні квадратури та рівновіддалений поділ,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\sigma)d\sigma \approx \frac{1}{2m}\sum_{j=0}^{2m-1} f(s_j), \tag{2.9}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\sigma)\ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{s-\sigma}{2}\right)d\sigma \approx \frac{1}{2m}\sum_{j=0}^{2m-1} R_j(s)f(s_j) \tag{2.10}$$

з вузлами

$$s_k = kh,\ k=0,...,2m-1,\ h=\frac{\pi}{m}, \tag{2.11}$$

і ваговими функціями

$$R_k(s) = -\frac{1}{m}\left(\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{j}\cos\frac{jk\pi}{m} + \frac{(-1)^k}{2m}\right). \tag{2.12}$$

Вибір даних квадратур дає експоненційну збіжність, якщо підінтегральна функція f є аналітичною [7].

Застосувавши даний метод до параметризованої системи інтегральних рівнянь (2.2) із врахованими логарифмічними особливостями ядер, отримаємо повністю дискретизовану систему лінійних рівнянь

$$
\begin{cases}
\sum_{j=0}^{2m-1}\Bigg((H_{11}^{(1)}(s_i,s_j)R_{|i-j|}+\frac{1}{2m}H_{11}^{(2)}(s_i,s_j))\varphi_{1j}+\frac{1}{2m}H_{12}(s_i,s_j)\varphi_{2j}+(\tilde{H}_{11}^{(1)}(s_i,s_j)R_{|i-j|}\\
+\frac{1}{2m}\tilde{H}_{11}^{(2)}(s_i,s_j))\psi_{1j}+\frac{1}{2m}\tilde{H}_{12}(s_i,s_j)\psi_{2j}\Bigg)+\omega_{1i}=0,\\
\sum_{j=0}^{2m-1}\Bigg((\tilde{\tilde{H}}_{11}^{(1)}(s_i,s_j)R_{|i-j|}+\frac{1}{2m}\tilde{\tilde{H}}_{11}^{(2)}(s_i,s_j))\varphi_{1j}+\frac{1}{2m}\tilde{\tilde{H}}_{12}\varphi_{2j}+(\hat{H}_{11}^{(1)}(s_i,s_j)R_{|i-j|}\\
+\frac{1}{2m}\hat{H}_{11}^{(2)}(s_i,s_j))\psi_{1j}+\frac{1}{2m}\hat{H}_{12}\psi_{2j}\Bigg)+\frac{\partial\omega_{1i}}{\partial n_1}=0,\\
\sum_{j=0}^{2m-1}\Bigg(\frac{1}{2m}\tilde{\tilde{H}}_{21}\varphi_{1j}+(\tilde{\tilde{H}}_{22}^{(1)}(s_i,s_j)R_{|i-j|}+\frac{1}{2m}\tilde{\tilde{H}}_{22}^{(2)}(s_i,s_j))\varphi_{2j}+\frac{1}{2m}\hat{H}_{21}(s_i,s_j)\psi_{1j}\\
+(\hat{H}_{22}^{(1)}(s_i,s_j)R_{|i-j|}+\frac{1}{2m}\hat{H}_{22}^{(2)}(s_i,s_j))\psi_{2j}\Bigg)+\frac{\partial\omega_{2i}}{\partial n_2}=g_{2i},\\
\sum_{j=0}^{2m-1}\Bigg(\frac{1}{2m}\hat{\hat{H}}_{21}(s_i,s_j)\varphi_{1j}+(\hat{\hat{H}}_{22}^{(1)}(s_i,s_j)R_{|i-j|}+\frac{1}{2m}\hat{\hat{H}}_{22}^{(2)}(s_i,s_j))\varphi_{2j}+\frac{1}{2m}(\bar{H}_{21}(s_i,s_j)\psi_{1j}\\
+\bar{H}_{22}(s_i,s_j)\psi_{2j})+M\omega_{2i}=q_{2i},\\
\\
h\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=0}^{2m-1}\varphi_{kj}=A_0,\\
h\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=0}^{2m-1}(x_{1k}(s_j)\varphi_{kj}+n_1(x_k(s_j))\psi_{kj})=A_1,\\
h\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=0}^{2m-1}(x_{2k}(s_j)\varphi_{kj}+n_2(x_k(s_j))\psi_{kj})=A_2
\end{cases}
\tag{2.13}
$$

для $i=0,...,2m-1$. Тут $g_{2i}=g(x_2(s_i))$, $q_{2i}=q(x_2(s_i))$, $\omega_{1i}=\omega(x_1(s_i))$, $\frac{\partial\omega_{li}}{\partial n_l}=\frac{\partial\omega(x_l(s_i))}{\partial n_l}$ $(l=1,2)$, $M\omega_{2i}=\omega(x_2(s_i))$, $R_j=R(s_j)$. Розв'язавши систему (2.13), отримаємо шукані коефіцієнти $(a_0,a_1,a_2)\in R^3$ і значення густин потенціалів на вибраному розбитті $\varphi_{kj}\approx\varphi_k(s_j)$, $\psi_{kj}\approx\psi_k(s_j)$, $k=1,2$, $j=0,...,2m-1$.

Розділ 3

Чисельне розв'язування некоректного ІР

Ми припускаємо, що крива Γ_1 належить класу так званих "зіркових"кривих. Таким чином, параметризація задається як

$$x_1(t) = \{r(t)c(t) : t \in [0, 2\pi]\},$$

де $c(t) = (\cos(t), \sin(t))$ і $r : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ є 2π-періодичною функцією, яка задає радіус від початку координат.

Тоді рівняння (1.4) можна записати як

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{2}\int_0^{2\pi}\left(H_{2k}(s,\sigma)\varphi_k(\sigma) + \tilde{H}_{2k}(s,\sigma)\psi_k(\sigma)\right)d\sigma + \omega(x_2(s)) = f(x_2(s)), \tag{3.1}$$

Подамо рівняння (3.1) через оператори.

$$\begin{aligned}(S_k\varphi)(s) &:= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H_{2k}(s,\sigma)\varphi(\sigma)d\sigma,\\ (\tilde{S}_k\psi)(s) &:= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{H}_{2k}(s,\sigma)\psi(\sigma)d\sigma.\end{aligned}$$

Нехай $r = 21$. Тоді (3.1) можна записати так

$$S_1\varphi_1 + \tilde{S}_1\psi_1 + S_2\varphi_2 + \tilde{S}_2\psi_2 + \omega = f \quad \text{на } \Gamma_2. \tag{3.2}$$

Для лінеаризації необхідно обрахувати похідні Фреше. Після застосування метода Ньютона лінеаризоване рівняння матиме вигляд

$$\begin{aligned}&(S_1'[r,\varphi]q)(s) + (\tilde{S}_1'[r,\psi]q)(s) =\\ &\quad f(s) - (S_1\varphi_1)(s) - (\tilde{S}_1\psi_1)(s) - (S_2\varphi_2)(s) - (\tilde{S}_2\psi_2)(s) - \omega(s),\end{aligned} \tag{3.3}$$

де q - радіальна функція, що задає покращення для Γ_1, $(S_1'[r,\varphi]q)(s)$, $(\tilde{S}_1'[r,\psi]q)(s)$ - похідні Фреше операторів S_1 і $\tilde{S}_1$ відповідно, і мають наступний вигляд

$$(S_1'[r,\varphi]q)(s) = \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi} q(\sigma)N_r(s,\sigma)\varphi(\sigma)d\sigma, \tag{3.4}$$

де $N_r(s,\sigma) = c(\sigma)\cdot\nabla_{x_1(\sigma)}|x_2(s) - x_1(\sigma)|^2 \ln|x_2(s) - x_1(\sigma)| = c(\sigma)\cdot(x_2(s) - x_1(\sigma))(2\ln|x_2(s) - x_1(\sigma)| + 1)$,

$$(\tilde{S}_1'[r,\psi]q)(s) = -\frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi} q(\sigma)\tilde{N}_r(s,\sigma)\psi(\sigma)d\sigma, \tag{3.5}$$

$\tilde{N}_r(s,\sigma) = c(\sigma)\cdot\nabla_{x_1(\sigma)}n(x_1(\sigma))\cdot(x_2(s)-x_1(\sigma))(1+2\ln|x_2(s)-x_1(\sigma)|) = c(\sigma)\cdot n(x_1(\sigma))(-1-\ln|x_2(s)-x_1(\sigma)| + (x_2(s)-x_1(\sigma))(1-\frac{2(x_2(s)-x_1(\sigma))}{|x_2(s)-x_1(\sigma)|^2} - \frac{x_1'(\sigma)x_1''(\sigma)(1+2\ln|x_2(s)-x_1(\sigma)|)}{|x_1'(\sigma)|^2})$.

Рівняння (3.3) розв'яжемо методом колокацій, апроксимуючи q у вигляді

$$q_n(s) = \sum_{i=0}^{2n} q_{ni}l_i(s), \quad n\in N,\ n>m,$$

де $l_i(s) = \cos is$, коли $i=0,...,n$ і $l_i(s) = \sin(n-i)s$ для $i=n+1,...,2n$.

Тоді необхідно розв'язати таку систему лінійних рівнянь

$$\sum_{j=0}^{2n} q_{nj}A_{ij} = b_i, \quad i=0,...,2m-1, \tag{3.6}$$

де

$$A_{ij} = \frac{1}{8m}\sum_{k=0}^{2m-1}\Big(l_j(s_k)N_r(s_i,s_k)\varphi_{1m}(s_k) + l_j(s_k)\tilde{N}_r(s_i,s_k)\psi_{1m}(s_k)\Big)$$

і

$$b_i = f(s_i) - w(s_i) - \sum_{k=0}^{2m-1}\Big(\frac{1}{2m}H_{21}(s_i,s_k)\varphi_{1n}(s_k) + \frac{1}{2m}\tilde{H}_{21}(s_i,s_k)\psi_{1n}(s_k) +$$
$$\big(R_j(s_i)H_{22}^{(1)}(s_i,s_k) + \frac{1}{2m}H_{22}^{(2)}(s_i,s_k)\big)\varphi_{2n}(s_k) + \big(R_j(s_i)\tilde{H}_{22}^{(1)}(s_i,s_k) + \frac{1}{2m}\tilde{H}_{22}^{(2)}(s_i,s_k)\big)\psi_{2n}(s_k)\Big).$$

Оскільки система (3.6) є погано обумовленою і перевизначеною, то для знаходження її розв'язку застосуємо метод найменших квадратів і регуляризацію Тихонова з параметром регуляризації λ. Тоді розв'язок матиме такий вигляд

$$\tilde{q} = (A^TA+\lambda I)^{-1}A^Tb, \quad \tilde{q} = (q_{n,1},...,q_{n,2n})^T. \tag{3.7}$$

Нове наближення радіальної функції r обчислюється як $r = r + q_n$.

Отже, можна сформулювати наступний ітераційний процес.

1. Вибрати початкове наближення для r.
2. Сформувати і розв'язати дискретизовану систему лінійних рівнянь для знаходження невідомих густин $\varphi_k, \psi_k,\ k=1,2$, і констант a_0, a_1, a_2.
3. Для фіксованих $r, a_0, a_1, a_2, \varphi_k, \psi_k,\ k=1,2$ розв'язати лінеаризоване рівняння (3.3) відносно функції q, що задає покращення для Γ_1.
4. Обрахувати нове наближення для радіальної функції $r = r + q_n$.
5. Якщо $||q||_2 < \epsilon$, то наближення до Γ_1 знайдено. Інакше перейти до кроку 2.

Розділ 4

Чисельні експерименти

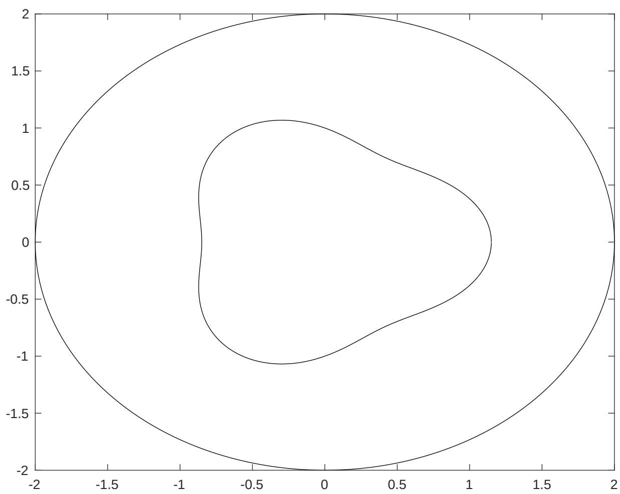
Розглянемо приклади чисельного наближення розв'язку прямої крайової задачі (1) для різних областей, параметрів A_0, A_1, A_2, ν та заданих функцій f, q.

Приклад 1

Розглянемо випадок, коли розв'язок задачі є невідомим.

Нехай на Γ_2 задано функції

$$g(x_1, x_2) = x_1 - x_2,$$
$$q(x_1, x_2) = x_1 + x_2.$$



Параметричне задання області має вигляд

$$\Gamma_1 = \{x(s) = (r(s)\cos(s), r(s)\sin(s)),\ s \in [0, 2\pi]\},$$
$$\Gamma_2 = \{x(s) = (2\cos(s), 2\sin(s)),\ s \in [0, 2\pi]\},$$

де $r(s) = 1 + 0.15\cos(3s)$.

Розв'язок шукатимемо в точці $x = (1, -1.5) \in \Omega$.

$\tilde{u}(x)$		
m	$A_0 = A_1 = A_2 = 1, \nu = 0.5$	$A_0 = 0.1, A_1 = 1, A_2 = 0, \nu = 0.9$
4	2.1772	1.9093
8	2.2293	1.9261
16	2.2374	1.9296
32	2.2369	1.9295
64	2.2369	1.9295
128	2.2369	1.9295

Табл. 4.1: Наближення розв'язку при збільшенні m і зміні основних параметрів

Приклад 2

Розглянемо крайову задачу з точним розв'язком

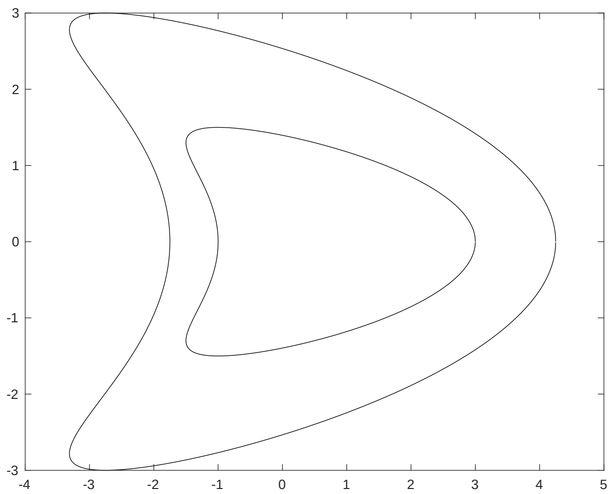
$$u(x) = G(x, y^*),$$

де $G(x, y^*)$ - звуження фундаментального розв'язку бігармонійного рівняння, $y^* \notin \Omega$.

Функції, що задані на Γ_2, мають вигляд

$$g(x) = \frac{\partial G(x, y^*)}{\partial n},$$
$$q(x) = M_x G(x, y^*).$$

Приклад 2.1



Параметричне задання області має вигляд

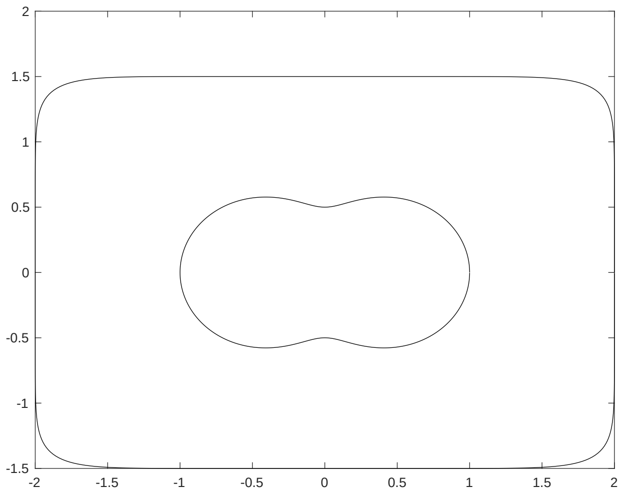
$$\Gamma_1 = \{x(s) = (3\cos(s) + 2\cos(2s) - 0.75, 3\sin(s)),\ s \in [0, 2\pi]\},$$
$$\Gamma_2 = \{x(s) = (2\cos(s) + \cos(2s), 1.5\sin(s)),\ s \in [0, 2\pi]\}.$$

Розв'язок шукатимемо в точці $x = (0, -2) \in \Omega$.

	$\lvert\tilde{u} - u_{ex}\rvert$
m	$A_0 = A_1 = A_2 = 1, \nu = 0.5$
4	0.00100300
8	0.00001130
16	7.0444e-08
32	5.4863e-11
64	6.5824e-15
128	6.5824e-17

Приклад 2.2

$$\Gamma_1 = \{x(s) = (3\cos(s) + 2\cos(2s) - 0.75, 3\sin(s)),\ \ s \in [0, 2\pi]\},$$
$$\Gamma_2 = \{x(s) = (2\cos(s) + \cos(2s), 1.5\sin(s)),\ \ s \in [0, 2\pi]\}.$$



Розв'язок шукатимемо в точці $x = (0, -2) \in \Omega$.

	$\lvert\tilde{u} - u_{ex}\rvert$
m	$A_0 = A_1 = A_2 = 1, \nu = 0.5$
4	0.00100300
8	0.00001130
16	7.0444e-08
32	5.4863e-11
64	6.5824e-15
128	6.5824e-17

Висновки

Література

[1] Chapko R. Integral Equations for Biharmonic Data Completion / Roman Chapko, B. Tomas Johansson. - Inverse Problems and Imaging - 2019. - 16 p.

[2] Chapko R. On The Non-Linear Integral Equation Method For The Reconstruction of The Inclusion in The Elastic Body / Roman Chapko, Vasyl Vavrychuk, Olha Ivanyshyn Yaman. - Lviv, 2019. - 17 p.

[3] Kress R. Inverse Dirichlet Problem and Conformal Mapping / Rainer Kress. - 2004. - 255-265 p.

[4] Hedenmalm H. On the uniqueness theorem of Holmgren / Haakan Hedenmalm. - 2013. - 14 p.

[5] Chapko R. On a Hybrid Method For Shape Reconstruction of a Buried Object in an Elastostatic Half Plane / Roman Chapko. - Lviv, 2009. - 199-210 p.

[6] Kress R. An Inverse Boundary Value Problem for the Oseen Equation / Rainer Kress, Sascha Meyer. - 18 p.

[7] Kress R. Linear Integral Equations / Rainer Kress. - New York : Springer, 1989. - 412 p.