Integral equation method for inverse boundary value problem for biharmonic equation

1 Формулювання

Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ двоз'язна область з межею $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, де Γ_1 є внутрішньою межею and Γ_2 - зовнішньою. І нехай Γ_1 невідома.

$$\begin{cases} \Delta^2 u(x) = 0, \quad x \in \Omega, \\ u(x) = \dfrac{\partial u(x)}{\partial n} = 0, \quad x \in \Gamma_1, \\ \dfrac{\partial u(x)}{\partial n} = g(x), \quad x \in \Gamma_2, \\ Mu(x) = q(x), \quad x \in \Gamma_2, \end{cases} \tag{1}$$

$$u(x) = f(x), \quad x \in \Gamma_2, \tag{2}$$

де $\Delta^2 u(x) = \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} u(x) + 2\frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} u(x) + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} u(x) = 0,\ u(x) = u(x_1, x_2),\ n = (n_1, n_2)$ - зовнішня нормаль до Γ, $Mu = \nu \Delta u + (1-\nu)(u_{x_1 x_1} u_1^2 + 2 u_{x_1 x_2} n_1 n_2 + u_{x_2 x_2} u_2^2),\ \nu \in (0,1)$ і $g(x), q(x), f(x)$ - деякі задані функції. Роз'язування (1)-(2) складається зі знаходження невідомої Γ_1 для заданих граничних умов.

2 Загальні положення

Фундаментальний роз'вязок бігармонійного рівняння має вигляд

$$G(x, y) = \frac{1}{8\pi} |x - y|^2 \ln |x - y|, \quad x,\ y \in \mathbb{R}^2. \tag{3}$$

Розглянемо потенціал простого шару для бігармонійного рівняння з густинами φ, ψ, що визначені на Γ:

$$u(x) = \int_\Gamma \left(G(x,y)\varphi(y) + \frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y}\psi(y) \right) d\sigma_y, \quad x \in \Omega.$$

Теорема 1. *Розв'язок прямої крайової задачі* (1) *має вигляд*

$$u(x) = \sum_{k=1}^{2} \int_{\Gamma_k} \left(G(x,y)\varphi_k(y) + \frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y}\psi_k(y) \right) d\sigma_y + \omega(x), \quad x \in \Omega, \quad (4)$$

де $\omega(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ $((\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) \in R^3), \varphi_k, \psi_k \in C(\Gamma_k), k = 1, 2,,$ *де невідомі густини визначаються із системи інтегральних рівнянь*

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{2} \int_{\Gamma_k} \left(G(x,y)\varphi_k(y) + \frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y}\psi_k(y) \right) d\sigma_y + \omega(x) = 0, \ x \in \Gamma_1, \\ \sum_{k=1}^{2} \int_{\Gamma_k} \left(\frac{\partial G(x,y)}{\partial n_x}\varphi_k(y) + \frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial n_y \partial n_x}\psi_k(y) \right) d\sigma_y + \frac{\partial \omega(x)}{\partial n} = 0, \ x \in \Gamma_1, \\ \sum_{k=1}^{2} \int_{\Gamma_k} \left(\frac{\partial G(x,y)}{\partial n_x}\varphi_k(y) + \frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial n_y \partial n_x}\psi_k(y) \right) d\sigma_y + \frac{\partial \omega(x)}{\partial n} = g(x), \ x \in \Gamma_2, \\ \sum_{k=1}^{2} \int_{\Gamma_k} \left(M_x G(x,y)\varphi_k(y) + \frac{\partial M_x G(x,y)}{\partial n_y}\psi_k(y) \right) d\sigma_y + M_x\omega(x) = q(x), \ x \in \Gamma_2, \\ \sum_{k=1}^{2} \int_{\Gamma_k} \varphi_k(y) d\sigma_y = A_0, \\ \sum_{k=1}^{2} \int_{\Gamma_k} (y_1\varphi_k(y) + n_1(y)\psi_k(y)) d\sigma_y = A_1, \\ \sum_{k=1}^{2} \int_{\Gamma_k} (y_2\varphi_k(y) + n_2(y)\psi_k(y)) d\sigma_y = A_2, \end{cases} \quad (5)$$

для заданих $(A_0, A_1, A_2) \in R^3$.

З умови (2) маємо

$$\sum_{k=1}^{2} \int_{\Gamma_k} \left(G(x,y)\varphi_k(y) + \frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y}\psi_k(y) \right) d\sigma_y + \omega(x) = f(x), \ x \in \Gamma_2, \quad (6)$$

Теорема 2. *Обернена крайова задача* (1)-(2) *еквівалентна системі інтегральних рівнянь* (5)-(6).

Теорема 3 (Існування і єдиність розв'язку непрямої задачі)**.** *Нехай* $\tilde{\Gamma}_1$, Γ_1 *- замкнені криві, що містяться всередині* Γ_2, $\tilde{u}$, u *- розв'язки задачі* (1) *для* $\tilde{\Gamma}_1$ *і* Γ_1 *відповідно. Нехай* $g \neq 0, q \neq 0$ *і* $u = \tilde{u}$ *на відкритій підмножині* Γ_2. *Тоді* $\tilde{\Gamma}_1 = \Gamma_1$.

Доведення. Доведемо від протилежного. Нехай $\tilde{\Gamma}_1 \neq \Gamma_1$. Нехай Ω_2 - область, обмежена Γ_2, Ω_1, $\tilde{\Omega}_1$ - області обмежені Γ_1, $\tilde{\Gamma}_1$ відповідно.

$$W := \Omega_2 \setminus (\Omega_1 \cup \tilde{\Omega}_1), \quad \Gamma_2 \subset \delta W.$$

За теоремою Гольмгрена маємо $u = \tilde{u}$ в W. Без втрати загальності приспустимо, що $W^* := (\Omega_2 \setminus \overline{W}) \setminus \Omega_1$ непорожня множина. Тоді u є визначена в W^* як розв'язок задачі (1) для Γ_1. Вона є неперервною в $\overline{W}^*$ і задовольняє граничні умови на δW^*. Ця гранична умова випливає з того, що кожна точка з W^* належить або Γ_1, або $\delta W \cap \tilde{\Gamma}_1$. Для $x \in \Gamma_1$ маємо $u(x) = 0$ як наслідок граничних умов для u, для $x \in \tilde{\Gamma}_1$ маємо $u(x) = \tilde{u}(x)$ і тому $u(x) = 0$ як наслідок граничних умов для $\tilde{u}$. Тоді за принципом максимуму $u = 0$ в W^* і тому $u = 0$ в D. Це суперечить тому, що $g \neq 0, q \neq 0$. □

3 Параметризація

Припустимо, що дані криві Γ_1 і Γ_2 достатньо гладкі і їх можна подати у параметричному заданні

$$\Gamma_l = \{x_l(s) = (x_{1l}(s), x_{2l}(s)) \ : \ s \in [0, 2\pi]\}, \tag{7}$$

де x_l $(l = 1, 2)$ - аналітична й 2π-періодична функція, $|x'(s)| > 0$. Тоді систему можна записати

$$
\begin{cases}
\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{2}\int_0^{2\pi}\Big(H_{1k}(s,\sigma)\varphi_k(\sigma)+\tilde{H}_{1k}(s,\sigma)\psi_k(\sigma)\Big)d\sigma+\omega(x_1(s))=0,\\
\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{2}\int_0^{2\pi}\Big(\tilde{\tilde{H}}_{1k}(s,\sigma)\varphi_k(\sigma)+\hat{H}_{1k}(s,\sigma)\psi_k(\sigma)\Big)d\sigma+\dfrac{\partial\omega(x_1(s))}{\partial n_1}=0,\\
\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{2}\int_0^{2\pi}\Big(\tilde{\tilde{H}}_{2k}(s,\sigma)\varphi_k(\sigma)+\hat{H}_{2k}(s,\sigma)\psi_k(\sigma)\Big)d\sigma+\dfrac{\partial\omega(x_2(s))}{\partial n_2}=g(x_2(s)),\\
\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{2}\int_0^{2\pi}\Big(M_xH_{2k}(s,\sigma)\varphi_k(\sigma)+M_x\tilde{H}_{2k}(s,\sigma)\psi_k(\sigma)\Big)d\sigma+M_x\omega(x_2(s))=q(x_2(s)),\\
\displaystyle\sum_{k=1}^{2}\int_0^{2\pi}\varphi_k(\sigma)d\sigma=A_0,\\
\displaystyle\sum_{k=1}^{2}\int_0^{2\pi}(x_{1k}\varphi_k(\sigma)+n_1(x_k(\sigma))\psi_k(\sigma))d\sigma=A_1,\\
\displaystyle\sum_{k=1}^{2}\int_0^{2\pi}(x_{2k}\varphi_k(\sigma)+n_2(x_k(\sigma))\psi_k(\sigma))d\sigma=A_2,
\end{cases}
\tag{8}
$$

$$
\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{2}\int_0^{2\pi}\Big(H_{2k}(s,\sigma)\varphi_k(\sigma)+\tilde{H}_{2k}(s,\sigma)\psi_k(\sigma)\Big)d\sigma+\omega(x_2(s))=f(x_2(s)),
\tag{9}
$$

для $s\in[0,2\pi]$.

Тут $\varphi_l(s):=\varphi_k(x_l(s))|x_l'(s)|,\ \psi_l(s):=\psi_k(x_l(s))|x_l'(s)|$ – невідомі густини і ядра мають вигляд

$$
\begin{aligned}
&H_{lk}(s,\sigma)=G(x_l(s),x_k(\sigma)),\quad \tilde{H}_{lk}(s,\sigma)=\frac{\partial G(x_l(s),x_k(\sigma))}{\partial n_y},\\
&\tilde{\tilde{H}}_{lk}(s,\sigma)=\frac{\partial G(x_l(s),x_k(\sigma))}{\partial n_x},\quad \hat{H}_{lk}(s,\sigma)=\frac{\partial^2 G(x_l(s),x_k(\sigma))}{\partial n_y\partial n_x},\\
&n(x(s))=\Big(\frac{x_2'(s)}{|x'(s)|},-\frac{x_1'(s)}{|x'(s)|}\Big).
\end{aligned}
$$

Відомими способами знаходимо невідомі густини з системи (8).

4 Алгоритм знаходення розв'язку оберненої крайової задачі

Знаходження розв'язку задачі (5)-(6) складається з наступного ітераційного процесу:

- Для заданого початкової Γ_1 розв'язуємо пряму задачу для (5) і знаходимо невідомі густини.
- Лінеаризуємо рівняння (6) і покращуємо Γ_1, розв'язуючи лінеаризоване рівняння (6) для фіксованих густин, які є відомими з (5).

Ми припускаємо, що крива Γ_1 належить класу так званих "зіркових"кривих. Таким чином, параметризація задається як $x_1(t) = \{r(t)c(t) : t \in [0, 2\pi]\}$, де $c(t) = (\cos(t), \sin(t))$ і $r : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ є 2π-періодичною функцією, яка представляє радіус.

4.1 Похідна Фреше

Подамо рівняння (6) через оператори.

$$(S_k\varphi)(s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H_{2k}(s,\sigma)\varphi(\sigma)d\sigma,$$
$$(\tilde{S}_k\psi)(s) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{H}_{2k}(s,\sigma)\psi(\sigma)d\sigma.$$

Нехай $r = 21$. Тоді (6) можна записати так

$$S_1\varphi_1 + \tilde{S}_1\psi_1 + S_2\varphi_2 + \tilde{S}_2\psi_2 + \omega = f \quad \text{на } \Gamma_2. \tag{10}$$

Нехай q радіальна функція, яка задає покращення для Γ_1. Похідна Фреше для оператора S відносно функції φ_1 матиме вигляд

$$(S_1^{'}[r,\varphi]q)(s) = \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi} q(\sigma)N_r(s,\sigma)\varphi(\sigma)d\sigma, \tag{11}$$

де $N_r(s,\sigma) = c(\sigma) \cdot \nabla_{x_1(\sigma)} |x_2(s) - x_1(\sigma)|^2 \ln |x_2(s) - x_1(\sigma)| = c(\sigma) \cdot (x_1(s) - x_1(\sigma))(\ln |x_2(s) - x_1(\sigma)| + 1)$, $c(\sigma) = (\cos(\sigma), \sin(\sigma))$.

Аналогічно для оператора $\tilde{S}$,

$$(\tilde{S}_1'[r,\psi]q)(s) = -\frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} q(\sigma) \tilde{N}_r(s,\sigma) \psi(\sigma) d\sigma, \tag{12}$$

$\tilde{N}_r(s,\sigma) = c(\sigma) \cdot n(x_1(\sigma)) \cdot (3 + \ln |x_2(s) - x_1(\sigma)|)$.