

ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА  
ФРАНКА

Факультет прикладної математики та інформатики  
Кафедра обчислювальної математики

Курсова робота  
на тему:

# Метод інтегральних рівнянь для оберненої крайової задачі для бігармонійного рівняння

Студентки IV курсу групи ПМП-41  
Напряму підготовки “Прикладна математика”  
Багрій А. Г.

Керівник:  
проф. Хапко Р. С.  
Національна шкала: \_\_\_\_\_  
Кількість балів: \_\_\_\_\_  
Оцінка ECTS: \_\_\_\_\_

Львів-2020

# Зміст

<b>Вступ</b>	<b>2</b>
<b>1 Загальні положення</b>	<b>3</b>
Алгоритм знаходення розв’язку оберненої крайової задачі . . . . .	4
<b>2 Розв’язування прямої задачі</b>	<b>5</b>
2.1 Параметризація . . . . .	5
2.2 Чисельне розв’язування системи інтегральних рівнянь . . . . .	7
<b>3 Знаходження розв’язку оберненої крайової задачі</b>	<b>9</b>
<b>4 Чисельні експерименти</b>	<b>11</b>
<b>Висновки</b>	<b>12</b>
<b>Література</b>	<b>13</b>

# Вступ

Нехай  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  двоз'язна область з межею  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ , де  $\Gamma_1$  є внутрішньою межею і  $\Gamma_2$  - зовнішньою. І нехай  $\Gamma_1$  невідома.

$$\begin{cases} \Delta^2 u(x) = 0, & x \in \Omega, \\ u(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial n} = 0, & x \in \Gamma_1, \\ \frac{\partial u(x)}{\partial n} = g(x), & x \in \Gamma_2, \\ Mu(x) = q(x), & x \in \Gamma_2, \end{cases} \quad (1)$$

$$u(x) = f(x), \quad x \in \Gamma_2, \quad (2)$$

де  $\Delta^2 u(x) = \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} u(x) + 2 \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} u(x) + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} u(x) = 0$ ,  $u(x) = u(x_1, x_2)$ ,  $n = (n_1, n_2)$  - зовнішня нормаль до  $\Gamma$ ,  $Mu = \nu \Delta u + (1 - \nu)(u_{x_1 x_1} n_1^2 + 2u_{x_1 x_2} n_1 n_2 + u_{x_2 x_2} n_2^2)$ ,  $\nu \in (0, 1)$  і  $g(x), q(x), f(x)$  - деякі задані функції. Розв'язування (1)-(2) складається зі знаходження невідомої  $\Gamma_1$  для заданих граничних умов. Дана обернена задача є нелінійною.

# Розділ 1

## Загальні положення

Фундаментальний розв'язок бігармонійного рівняння має вигляд

$$G(x, y) = \frac{1}{8\pi} |x - y|^2 \ln |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}^2. \quad (1.1)$$

Розглянемо потенціал простого шару для бігармонійного рівняння з густинами  $\varphi, \psi$ , що визначені на  $\Gamma$ :

$$u(x) = \int_{\Gamma} \left( G(x, y) \varphi(y) + \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y} \psi(y) \right) d\sigma_y, \quad x \in \Omega.$$

**Теорема 1.** *Розв'язок прямої крайової задачі (1) має вигляд*

$$u(x) = \sum_{k=1}^2 \int_{\Gamma_k} \left( G(x, y) \varphi_k(y) + \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y} \psi_k(y) \right) d\sigma_y + \omega(x), \quad x \in \Omega, \quad (1.2)$$

де  $\omega(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$  ( $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) \in R^3$ ),  $\varphi_k, \psi_k \in C(\Gamma_k)$ ,  $k = 1, 2$ , де невідомі густини визначаються із системи інтегральних рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^2 \int_{\Gamma_k} \left( G(x, y) \varphi_k(y) + \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y} \psi_k(y) \right) d\sigma_y + \omega(x) = 0, \quad x \in \Gamma_1, \\ \sum_{k=1}^2 \int_{\Gamma_k} \left( \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_x} \varphi_k(y) + \frac{\partial^2 G(x, y)}{\partial n_y \partial n_x} \psi_k(y) \right) d\sigma_y + \frac{\partial \omega(x)}{\partial n} = 0, \quad x \in \Gamma_1, \\ \sum_{k=1}^2 \int_{\Gamma_k} \left( \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_x} \varphi_k(y) + \frac{\partial^2 G(x, y)}{\partial n_y \partial n_x} \psi_k(y) \right) d\sigma_y + \frac{\partial \omega(x)}{\partial n} = g(x), \quad x \in \Gamma_2, \\ \sum_{k=1}^2 \int_{\Gamma_k} \left( M_x G(x, y) \varphi_k(y) + \frac{\partial M_x G(x, y)}{\partial n_y} \psi_k(y) \right) d\sigma_y + M_x \omega(x) = q(x), \quad x \in \Gamma_2, \\ \sum_{k=1}^2 \int_{\Gamma_k} \varphi_k(y) d\sigma_y = A_0, \\ \sum_{k=1}^2 \int_{\Gamma_k} (y_1 \varphi_k(y) + n_1(y) \psi_k(y)) d\sigma_y = A_1, \\ \sum_{k=1}^2 \int_{\Gamma_k} (y_2 \varphi_k(y) + n_2(y) \psi_k(y)) d\sigma_y = A_2, \end{array} \right. \quad (1.3)$$

для заданих  $(A_0, A_1, A_2) \in R^3$ .

З умови (2) маємо

$$\sum_{k=1}^2 \int_{\Gamma_k} \left( G(x, y) \varphi_k(y) + \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y} \psi_k(y) \right) d\sigma_y + \omega(x) = f(x), \quad x \in \Gamma_2. \quad (1.4)$$

В системі (1.3) ядра мають вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_x} &= \frac{1}{8\pi} n(x) \cdot (x - y)(1 + 2 \ln |x - y|), \\ \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y} &= -\frac{1}{8\pi} n(y) \cdot (x - y)(1 + 2 \ln |x - y|), \\ \frac{\partial^2 G(x, y)}{\partial n_x \partial n_y} &= \frac{\partial^2 G(x, y)}{\partial n_y \partial n_x} = -\frac{1}{8\pi} \left( 2 \frac{n(x) \cdot (x - y) n(y) \cdot (x - y)}{|x - y|^2} \right. \\ &\quad \left. + n(x) \cdot n(y)(1 + 2 \ln |x - y|) \right), \\ M_x G(x, y) &= \frac{1 + 3\nu}{8\pi} + \frac{(1 - \nu)(n(x) \cdot (x - y))^2}{4\pi |x - y|^2} + \frac{(1 + \nu) \ln |x - y|^2}{8\pi}, \\ \frac{\partial M_x G(x, y)}{\partial n_y} &= \frac{1 - \nu}{2\pi} \left( \frac{(n(x) \cdot (x - y))^2 n(y) \cdot (x - y)}{|x - y|^4} - \frac{n(x) \cdot n(y) n(x) \cdot (x - y)}{|x - y|^2} \right) \\ &\quad - \frac{(1 + \nu) n(y) \cdot (x - y)}{4\pi |x - y|^2}. \end{aligned}$$

**Теорема 2.** *Обернена крайова задача (1)-(2) еквівалентна системі інтегральних рівнянь (1.3)-(3.1).*

**Теорема 3** (Існування і єдиність розв'язку непрямої задачі). *Нехай  $\tilde{\Gamma}_1, \Gamma_1$  - замкнені криві, що містяться всередині  $\Gamma_2$ ,  $\tilde{u}, u$  - розв'язки задачі (1) для  $\tilde{\Gamma}_1$  і  $\Gamma_1$  відповідно. Нехай  $g \neq 0, q \neq 0$  і  $u = \tilde{u}$  на відкритій підмножині  $\Gamma_2$ . Тоді  $\tilde{\Gamma}_1 = \Gamma_1$ .*

*Доведення.* Доведемо від протилежного. Нехай  $\tilde{\Gamma}_1 \neq \Gamma_1$ . Нехай  $\Omega_2$  - область, обмежена  $\Gamma_2$ ,  $\Omega_1, \tilde{\Omega}_1$  - області обмежені  $\Gamma_1, \tilde{\Gamma}_1$  відповідно.

$$W := \Omega_2 \setminus (\Omega_1 \cup \tilde{\Omega}_1), \quad \Gamma_2 \subset \delta W.$$

За теоремою Гольмгрена маємо  $u = \tilde{u}$  в  $W$ . Без втрати загальності припустимо, що  $W^* := (\Omega_2 \setminus \overline{W}) \setminus \Omega_1$  непорожня множина. Тоді  $u$  є визначена в  $W^*$  як розв'язок задачі (1) для  $\Gamma_1$ . Вона є неперервною в  $\overline{W}^*$  і задовольняє граничні умови на  $\delta W^*$ . Ця гранична умова випливає з того, що кожна точка з  $W^*$  належить або  $\tilde{\Gamma}_1$ , або  $\delta W \cap \tilde{\Gamma}_1$ . Для  $x \in \Gamma_1$  маємо  $u(x) = 0$  як наслідок граничних умов для  $u$ , для  $x \in \tilde{\Gamma}_1$  маємо  $u(x) = \tilde{u}(x)$  і тому  $u(x) = 0$  як наслідок граничних умов для  $\tilde{u}$ . Тоді за принципом максимуму  $u = 0$  в  $W^*$  і тому  $u = 0$  в  $D$ . Це суперечить тому, що  $g \neq 0, q \neq 0$ .  $\square$

## Алгоритм знаходження розв'язку оберненої крайової задачі

Знаходження розв'язку задачі (1.3)-(3.1) складається з наступного ітераційного процесу:

- Для заданого початкового наближення  $\Gamma_1$  розв'язуємо пряму задачу для (1.3) і знаходимо невідомі густини.
- Лінеаризуємо рівняння (1.4) і покращуємо  $\Gamma_1$ , розв'язуючи лінеаризоване рівняння (1.4) для фіксованих густин, які є відомими з (1.3).

## Розділ 2

# Розв'язування прямої задачі

### 2.1 Параметризація

Припустимо, що криві  $\Gamma_1$  і  $\Gamma_2$  достатньо гладкі і їх можна подати у параметричному заданні

$$\Gamma_l = \{x_l(s) = (x_{1l}(s), x_{2l}(s)) : s \in [0, 2\pi]\}, \quad (2.1)$$

де  $x_l$  ( $l = 1, 2$ ) - аналітична й  $2\pi$ -періодична функція,  $|x'(s)| > 0$ . Тоді систему можна записати

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^2 \int_0^{2\pi} \left( H_{1k}(s, \sigma) \varphi_k(\sigma) + \tilde{H}_{1k}(s, \sigma) \psi_k(\sigma) \right) d\sigma + \omega(x_1(s)) = 0, \\ \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^2 \int_0^{2\pi} \left( \tilde{\tilde{H}}_{1k}(s, \sigma) \varphi_k(\sigma) + \hat{H}_{1k}(s, \sigma) \psi_k(\sigma) \right) d\sigma + \frac{\partial \omega(x_1(s))}{\partial n_1} = 0, \\ \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^2 \int_0^{2\pi} \left( \tilde{\tilde{H}}_{2k}(s, \sigma) \varphi_k(\sigma) + \hat{H}_{2k}(s, \sigma) \psi_k(\sigma) \right) d\sigma + \frac{\partial \omega(x_2(s))}{\partial n_2} = g(x_2(s)), \\ \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^2 \int_0^{2\pi} \left( \hat{\hat{H}}_{2k}(s, \sigma) \varphi_k(\sigma) + \bar{H}_{2k}(s, \sigma) \psi_k(\sigma) \right) d\sigma + M_x \omega(x_2(s)) = q(x_2(s)), \\ \sum_{k=1}^2 \int_0^{2\pi} \varphi_k(\sigma) d\sigma = A_0, \\ \sum_{k=1}^2 \int_0^{2\pi} (x_{1k} \varphi_k(\sigma) + n_1(x_k(\sigma)) \psi_k(\sigma)) d\sigma = A_1, \\ \sum_{k=1}^2 \int_0^{2\pi} (x_{2k} \varphi_k(\sigma) + n_2(x_k(\sigma)) \psi_k(\sigma)) d\sigma = A_2, \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Тут  $\varphi_l(s) := \varphi_k(x_l(s))|x'_l(s)|$ ,  $\psi_l(s) := \psi_k(x_l(s))|x'_l(s)|$  - невідомі густини і ядра мають вигляд

$$\begin{aligned}
H_{lk}(s, \sigma) &= G(x_l(s), x_k(\sigma)), \quad \tilde{H}_{lk}(s, \sigma) = \frac{\partial G(x_l(s), x_k(\sigma))}{\partial n_y}, \\
\tilde{\tilde{H}}_{lk}(s, \sigma) &= \frac{\partial G(x_l(s), x_k(\sigma))}{\partial n_x}, \quad \hat{H}_{lk}(s, \sigma) = \frac{\partial^2 G(x_l(s), x_k(\sigma))}{\partial n_y \partial n_x}, \\
\hat{\hat{H}}_{lk}(s, \sigma) &= M_x G(x_l(s), x_k(\sigma)), \quad \bar{H}_{lk}(s, \sigma) = \frac{\partial M_x G(x_l(s), x_k(\sigma))}{\partial n_y}, \\
n(x(s)) &= \left( \frac{x'_2(s)}{|x'(s)|}, -\frac{x'_1(s)}{|x'(s)|} \right).
\end{aligned}$$

Дані ядра є неперервними в області  $\bar{\Omega}$ . Але коли точка інтегрування співпадає з точкою спостереження на  $\Gamma_l$  ( $l = 1, 2$ ) під час диференціювання маємо логарифмічну особливість. Для чисельного розв'язування доцільно виділити цю особливість, виконавши певні перетворення. Отримуємо наступне подання ядер

$$H_{ll}(s, \sigma) = H_{ll}^{(1)}(s, \sigma) \ln \left( \frac{4}{e} \sin^2 \frac{s - \sigma}{2} \right) + H_{ll}^{(2)}(s, \sigma), \quad (2.3)$$

$$\tilde{H}_{ll}(s, \sigma) = \tilde{H}_{ll}^{(1)}(s, \sigma) \ln \left( \frac{4}{e} \sin^2 \frac{s - \sigma}{2} \right) + \tilde{H}_{ll}^{(2)}(s, \sigma), \quad (2.4)$$

$$\tilde{\tilde{H}}_{ll}(s, \sigma) = \tilde{\tilde{H}}_{ll}^{(1)}(s, \sigma) \ln \left( \frac{4}{e} \sin^2 \frac{s - \sigma}{2} \right) + \tilde{\tilde{H}}_{ll}^{(2)}(s, \sigma), \quad (2.5)$$

$$\hat{H}_{ll}(s, \sigma) = \hat{H}_{ll}^{(1)}(s, \sigma) \ln \left( \frac{4}{e} \sin^2 \frac{s - \sigma}{2} \right) + \hat{H}_{ll}^{(2)}(s, \sigma), \quad (2.6)$$

$$\hat{\hat{H}}_{ll}(s, \sigma) = \hat{\hat{H}}_{ll}^{(1)}(s, \sigma) \ln \left( \frac{4}{e} \sin^2 \frac{s - \sigma}{2} \right) + \hat{\hat{H}}_{ll}^{(2)}(s, \sigma), \quad (2.7)$$

$$\bar{H}_{ll}(s, \sigma) = \bar{H}_{ll}^{(1)}(s, \sigma) \ln \left( \frac{4}{e} \sin^2 \frac{s - \sigma}{2} \right) + \bar{H}_{ll}^{(2)}(s, \sigma), \quad (2.8)$$

де

$$\begin{aligned}
H_u^{(1)}(s, \sigma) &= \frac{1}{8}|x_l(s) - x_l(\sigma)|^2, \quad H_u^{(2)}(s, \sigma) = \frac{1}{8}|x_l(s) - x_l(\sigma)|^2 \ln \left( \frac{e|x_l(s) - x_l(\sigma)|^2}{4 \sin^2 \frac{s-\sigma}{2}} \right), \\
\tilde{H}_u^{(1)}(s, \sigma) &= -\frac{1}{4}n(x_l(\sigma)) \cdot (x_l(s) - x_l(\sigma)), \\
\tilde{H}_u^{(2)}(s, \sigma) &= \frac{1}{4}n(x_l(\sigma)) \cdot (x_l(s) - x_l(\sigma)) \left( \ln \left( \frac{4 \sin^2 \frac{s-\sigma}{2}}{e|x_l(s) - x_l(\sigma)|^2} \right) - 1 \right), \\
\tilde{\tilde{H}}_u^{(1)}(s, \sigma) &= \frac{1}{4}n(x_l(s)) \cdot (x_l(s) - x_l(\sigma)), \\
\tilde{\tilde{H}}_u^{(2)}(s, \sigma) &= \frac{1}{4}n(x_l(s)) \cdot (x_l(s) - x_l(\sigma)) \left( \ln \left( \frac{e|x_l(s) - x_l(\sigma)|^2}{4 \sin^2 \frac{s-\sigma}{2}} \right) + 1 \right), \\
\hat{H}_u^{(1)}(s, \sigma) &= -\frac{1}{4}n(x_l(s)) \cdot n(x_l(\sigma)), \\
\hat{H}_u^{(2)}(s, \sigma) &= \frac{1}{4}n(x_l(s)) \cdot n(x_l(\sigma)) \cdot \left( \ln \left( \frac{4 \sin^2 \frac{s-\sigma}{2}}{e|x_l(s) - x_l(\sigma)|^2} \right) - 2 \frac{(x_l(s) - x_l(\sigma))^2}{|x_l(s) - x_l(\sigma)|^2} - 1 \right), \\
\hat{\hat{H}}_u^{(1)}(s, \sigma) &= \frac{1 + \nu}{4}, \\
\hat{\hat{H}}_u^{(2)}(s, \sigma) &= \frac{1 - \nu}{2\pi} \left( \frac{(n(x_l(s)) \cdot (x_l(s) - x_l(\sigma)))^2 n(x_l(\sigma)) \cdot (x_l(s) - x_l(\sigma))}{|x_l(s) - x_l(\sigma)|^4} \right. \\
&\quad \left. - \frac{n(x_l(s)) \cdot n(x_l(\sigma)) n(x_l(s)) \cdot (x_l(s) - x_l(\sigma))}{|x_l(s) - x_l(\sigma)|^2} \right) - \frac{(1 + \nu) n(x_l(\sigma)) \cdot (x_l(s) - x_l(\sigma))}{4\pi |x_l(s) - x_l(\sigma)|^2} \\
&\quad - \frac{1 + \nu}{4} \ln \left( \frac{4}{e} \sin^2 \frac{s - \sigma}{2} \right).
\end{aligned}$$

При  $s = \sigma$  всі ядра дорівнюють нулю, окрім

$$\begin{aligned}
\hat{\hat{H}}_u^{(2)}(s, s) &= \frac{1 + 3\nu}{4} + \frac{1 + \nu}{4} \ln(e|x_l'(s)|^2), \\
\bar{H}_u(s, s) &= \frac{1 - 3\nu}{4} \frac{n(x_l(s)) \cdot x_l''(s)}{|x_l'(s)|^2}.
\end{aligned}$$

## 2.2 Чисельне розв'язування системи інтегральних рівнянь

Для чисельного розв'язування отриманої системи інтегральних рівнянь використовуємо метод Нистрьома, який полягає у заміні інтегралу відповідною квадратурною формулою з певними ваговими функціями. Виберемо тригонометричні квадратури та рівновіддалений поділ,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\sigma) d\sigma \approx \frac{1}{2m} \sum_{j=0}^{2m-1} f(s_j), \quad (2.9)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\sigma) \ln \left( \frac{4}{e} \sin^2 \frac{s - \sigma}{2} \right) d\sigma \approx \frac{1}{2m} \sum_{j=0}^{2m-1} R_j(s) f(s_j) \quad (2.10)$$

з вузлами

$$s_k = kh, \quad k = 0, \dots, 2m - 1, \quad h = \frac{\pi}{m} \quad (2.11)$$



і ваговими функціями

$$R_k(s) = -\frac{1}{m} \left( \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{j} \cos \frac{jk\pi}{m} + \frac{(-1)^k}{2m} \right). \quad (2.12)$$

Застосувавши даний метод до параметризованої системи інтегральних рівнянь (2.2) із врахованими логарифмічними особливостями ядер, отримаємо повністю дискретизовану систему лінійних рівнянь,

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_{j=0}^{2m-1} \left( (H_{11}^{(1)}(s_i, s_j) R_{|i-j|} + \frac{1}{2m} H_{11}^{(2)}(s_i, s_j)) \varphi_{1j} + \frac{1}{2m} H_{12}(s_i, s_j) \varphi_{2j} + (\tilde{H}_{11}^{(1)}(s_i, s_j) R_{|i-j|} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2m} \tilde{H}_{11}^{(2)}(s_i, s_j)) \psi_{1j} + \frac{1}{2m} \tilde{H}_{12}(s_i, s_j) \psi_{2j} \right) + \omega_{1i} = 0, \\ & \sum_{j=0}^{2m-1} \left( (\tilde{H}_{11}^{(1)}(s_i, s_j) R_{|i-j|} + \frac{1}{2m} \tilde{H}_{11}^{(2)}(s_i, s_j)) \varphi_{1j} + \frac{1}{2m} \tilde{H}_{12} \varphi_{2j} + (\hat{H}_{11}^{(1)}(s_i, s_j) R_{|i-j|} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2m} \hat{H}_{11}^{(2)}(s_i, s_j)) \psi_{1j} + \frac{1}{2m} \hat{H}_{12} \psi_{2j} \right) + \frac{\partial \omega_{1i}}{\partial n_1} = 0, \\ & \sum_{j=0}^{2m-1} \left( \frac{1}{2m} \tilde{H}_{21} \varphi_{1j} + (\tilde{H}_{22}^{(1)}(s_i, s_j) R_{|i-j|} + \frac{1}{2m} \tilde{H}_{22}^{(2)}(s_i, s_j)) \varphi_{2j} + \frac{1}{2m} \hat{H}_{21}(s_i, s_j) \psi_{1j} \right. \\ & \quad \left. + (\hat{H}_{22}^{(1)}(s_i, s_j) R_{|i-j|} + \frac{1}{2m} \hat{H}_{22}^{(2)}(s_i, s_j)) \psi_{2j} \right) + \frac{\partial \omega_{2i}}{\partial n_2} = g_{2i}, \\ & \sum_{j=0}^{2m-1} \left( \frac{1}{2m} \hat{H}_{21}(s_i, s_j) \varphi_{1j} + (\hat{H}_{22}^{(1)}(s_i, s_j) R_{|i-j|} + \frac{1}{2m} \hat{H}_{22}^{(2)}(s_i, s_j)) \varphi_{2j} + \frac{1}{2m} (\bar{H}_{21}(s_i, s_j) \psi_{1j} \right. \\ & \quad \left. + \bar{H}_{22}(s_i, s_j) \psi_{2j}) + M \omega_{2i} = q_{2i}, \\ & h \sum_{k=1}^2 \sum_{j=0}^{2m-1} \varphi_{kj} = A_0, \\ & h \sum_{k=1}^2 \sum_{j=0}^{2m-1} (x_{1k}(s_j) \varphi_{kj} + n_1(x_k(s_j)) \psi_{kj}) = A_1, \\ & h \sum_{k=1}^2 \sum_{j=0}^{2m-1} (x_{2k}(s_j) \varphi_{kj} + n_2(x_k(s_j)) \psi_{kj}) = A_2 \end{aligned} \right. \quad (2.13)$$

для  $i = 0, \dots, 2m-1$ . Тут  $g_{2i} = g(x_2(s_i))$ ,  $q_{2i} = q(x_2(s_i))$ ,  $\omega_{1i} = \omega(x_1(s_i))$ ,  $\frac{\partial \omega_{li}}{\partial n_l} = \frac{\partial \omega(x_l(s_i))}{\partial n_l}$  ( $l = 1, 2$ ),  $M \omega_{2i} = \omega(x_2(s_i))$ ,  $R_j = R(s_j)$  Розв'язавши систему (2.13), отримаємо шукані коефіцієнти  $(a_0, a_1, a_2) \in R^3$  і значення густин потенціалів на вибраному розбитті  $\varphi_{kj} \approx \varphi_k(s_j)$ ,  $\psi_{kj} \approx \psi_k(s_j)$ ,  $k = 1, 2$ ,  $j = 0, \dots, 2m-1$ .

## Розділ 3

# Знаходження розв'язку оберненої крайової задачі

Ми припускаємо, що крива  $\Gamma_1$  належить класу так званих "зіркових" кривих. Таким чином, параметризація задається як  $x_1(t) = \{r(t)c(t) : t \in [0, 2\pi]\}$ , де  $c(t) = (\cos(t), \sin(t))$  і  $r : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  є  $2\pi$ -періодичною функцією, яка задає радіус.

Тоді допоміжне рівняння (1.4) можна записати як

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^2 \int_0^{2\pi} \left( H_{2k}(s, \sigma) \varphi_k(\sigma) + \tilde{H}_{2k}(s, \sigma) \psi_k(\sigma) \right) d\sigma + \omega(x_2(s)) = f(x_2(s)), \quad (3.1)$$

Подамо рівняння (3.1) через оператори.

$$\begin{aligned} (S_k \varphi)(s) &:= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_{2k}(s, \sigma) \varphi(\sigma) d\sigma, \\ (\tilde{S}_k \psi)(s) &:= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{H}_{2k}(s, \sigma) \psi(\sigma) d\sigma. \end{aligned}$$

Нехай  $r = 21$ . Тоді (3.1) можна записати так

$$S_1 \varphi_1 + \tilde{S}_1 \psi_1 + S_2 \varphi_2 + \tilde{S}_2 \psi_2 + \omega = f \quad \text{на } \Gamma_2. \quad (3.2)$$

Лінеаризоване рівняння матиме вигляд

$$\begin{aligned} (S'_1[r, \varphi]q)(s) + (\tilde{S}'_1[r, \psi]q)(s) = \\ f(s) - (S_1 \varphi_1)(s) - (\tilde{S}_1 \psi_1)(s) - (S_2 \varphi_2)(s) - (\tilde{S}_2 \psi_2)(s) - \omega(s), \end{aligned} \quad (3.3)$$

де  $q$  - радіальна функція, що задає покращення для  $\Gamma_1$ ,  $(S'_1[r, \varphi]q)(s)$ ,  $(\tilde{S}'_1[r, \psi]q)(s)$  - похідні Фреше операторів  $S$  і  $\tilde{S}$  відповідно, і мають наступний вигляд

$$(S'_1[r, \varphi]q)(s) = \frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} q(\sigma) N_r(s, \sigma) \varphi(\sigma) d\sigma, \quad (3.4)$$

де  $N_r(s, \sigma) = c(\sigma) \cdot \nabla_{x_1(\sigma)} |x_2(s) - x_1(\sigma)|^2 \ln |x_2(s) - x_1(\sigma)| = c(\sigma) \cdot (x_1(s) - x_1(\sigma)) (\ln |x_2(s) - x_1(\sigma)| + 1)$ ,  $c(\sigma) = (\cos(\sigma), \sin(\sigma))$ ,

$$(\tilde{S}'_1[r, \psi]q)(s) = -\frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} q(\sigma) \tilde{N}_r(s, \sigma) \psi(\sigma) d\sigma, \quad (3.5)$$

$$\tilde{N}_r(s, \sigma) = c(\sigma) n(x_1(\sigma)) \cdot (3 + \ln |x_2(s) - x_1(\sigma)|).$$

Рівняння (3.3) розв'яжемо методом колокацій, апроксимуючи  $q$  у вигляді

$$q_m = \sum_{i=0}^{2m} q_{mi} l_i, \quad m \in N, \quad n > m,$$

де  $l_i(t) = \cos it$ , коли  $i = 0, \dots, m$  і  $l_i(t) = \sin(m - i)t$  для  $i = m + 1, \dots, 2m$ .

Тоді необхідно розв'язати таку систему лінійних рівнянь

$$\sum_{k=0}^{2m} q_{mk} A_{ij} = b_i, \quad i = 0, \dots, 2n - 1, \quad (3.6)$$

де

$$A_{ij} = \frac{1}{8n} \sum_{k=0}^{2n-1} \left( l_j(t_k) N_r(t_i, t_k) \varphi_{1n}(t_k) + l_j(t_k) \tilde{N}_r(t_i, t_k) \psi_{1n}(t_k) \right)$$

і

$$b_i = f(t_i) - w(t_i) - \frac{1}{2n} \sum_{n=0}^{2n-1} \left( H_{21}(t_i, t_k) \varphi_{1n}(t_k) + \tilde{H}_{21}(t_i, t_k) \psi_{1n}(t_k) + \right. \\ \left. (R_j(t_i) H_{22}^{(1)}(t_i, t_k) + H_{22}^{(2)}(t_i, t_k)) \varphi_{1n}(t_k) + (R_j(t_i) \tilde{H}_{22}^{(1)}(t_i, t_k) + \tilde{H}_{22}^{(2)}(t_i, t_k)) \psi_{2n}(t_k) \right).$$

Оскільки система (3.6) є погано обумовленою і перевизначеною, то для знаходження її розв'язку застосуємо метод найменших квадратів і регуляризацію Тихонова. Тоді розв'язок матиме такий вигляд

$$q = (A^T A + \lambda I)^{-1} A^T b. \quad (3.7)$$

Нове наближення радіальної функції  $r$  обчислюється як  $r = r + q$ .

Отже, можна сформулювати наступний ітераційний процес.

1. Вибрати початкове наближення для  $r$ .
2. Розв'язати дискретизовану систему лінійних рівнянь для знаходження невідомих густин  $\varphi_k, \psi_k$ ,  $k = 1, 2$ .
3. Для фіксованих  $r, \varphi_k, \psi_k$ ,  $k = 1, 2$  розв'язати лінеаризоване рівняння (3.3) відносно функції  $q$ , що задає покращення для  $\Gamma_1$ .
4. Обрахувати нове наближення для радіальної функції  $r = r + q$ .
5. Якщо  $\|q\|_2 < \epsilon$ , то наближення до  $\Gamma_1$  знайдено. Інакше перейти до кроку 2.

## Розділ 4

### Чисельні експерименти

## Висновки

# Література

- [1] Chen G., Boundary Element Methods with Applications to Nonlinear Problems / Goong Chen, Jianxin Zhou. - Atlantis Press, 2010. - 715 p.
- [2] Chapko R. Integral Equations for Biharmonic Data Completion / Roman Chapko, B. Tomas Johansson. - Inverse Problems and Imaging (accepted) - 2019. - 16 p.
- [3] Kress R. Linear Integral Equations / Rainer Kress. - New York : Springer, 1989. - 412 p.