Integral equation method for inverse boundary value problem for biharmonic equation

1 Формулювання

Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ двоз'язна область з межею $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, де Γ_1 є внутрішньою межею and Γ_2 - зовнішньою. І нехай Γ_1 невідома.

$$\begin{cases} \Delta^2 u(x) = 0, \quad x \in \Omega, \\ u(x) = \dfrac{\partial u(x)}{\partial n} = 0, \quad x \in \Gamma_1, \\ \dfrac{\partial u(x)}{\partial n} = g(x), \quad x \in \Gamma_2, \\ Mu(x) = q(x), \quad x \in \Gamma_2, \end{cases} \tag{1}$$

$$u(x) = f(x), \quad x \in \Gamma_2, \tag{2}$$

де $\Delta^2 u(x) = \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} u(x) + 2 \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} u(x) + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} u(x) = 0$, $u(x) = u(x_1, x_2)$, $n = (n_1, n_2)$ - зовнішня нормаль до Γ, $Mu = \nu \Delta u + (1-\nu)(u_{x_1 x_1} u_1^2 + 2 u_{x_1 x_2} n_1 n_2 + u_{x_2 x_2} u_2^2)$, $\nu \in (0,1)$ і $g(x), q(x), f(x)$ - деякі задані функції. Роз'язування (1)-(2) складається зі знаходження невідомої Γ_1 для заданих граничних умов.

2 Some statements from potential theory

Фундаментальний роз'вязок бігармонійного рівняння має вигляд

$$G(x, y) = \frac{1}{8\pi} |x - y|^2 \ln |x - y|, \quad x,\ y \in \mathbb{R}^2. \tag{3}$$

Розглянемо наступні потенціали з густинами φ визначені на Γ:

$$V_1(\varphi)(x) = \int_\Gamma G(x,y)\varphi(y)d\sigma_y - \text{single-layer potential},$$

$$V_2(\varphi)(x) = \int_\Gamma \frac{\partial}{\partial n_y} G(x,y)\varphi(y)d\sigma_y - \text{double-layer potential},$$

Роз'вязок прямої задачі можна подати як комбінацію потенціалів простого та подвійного шарів. Наступна теорема постулює єдиність розв'язку (1).

Теорема 1. *Розв'язок прямої крайової задачі* (1) *має вигляд*

$$u(x) = \sum_{k=1}^{2} \int_{\Gamma_k} \left(G(x,y)\varphi_k(y) + \frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y}\psi_k(y) \right) d\sigma_y + \omega(x), \quad x \in \Omega, \quad (4)$$

де $\omega(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ $((\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) \in R^3), \varphi_k, \psi_k \in C(\Gamma_k), k = 1, 2,$ *і існує єдиний для системи інтегральних рівнянь*

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{2} \int_{\Gamma_k} \left(G(x,y)\varphi_k(y) + \frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y}\psi_k(y) \right) d\sigma_y + \omega(x) = 0, \ x \in \Gamma_1, \\ \sum_{k=1}^{2} \int_{\Gamma_k} \left(\frac{\partial G(x,y)}{\partial n_x}\varphi_k(y) + \frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial n_y \partial n_x}\psi_k(y) \right) d\sigma_y + \frac{\partial \omega(x)}{\partial n} = 0, \ x \in \Gamma_1, \\ \sum_{k=1}^{2} \int_{\Gamma_k} \left(\frac{\partial G(x,y)}{\partial n_x}\varphi_k(y) + \frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial n_y \partial n_x}\psi_k(y) \right) d\sigma_y + \frac{\partial \omega(x)}{\partial n} = g(x), \ x \in \Gamma_2, \\ \sum_{k=1}^{2} \int_{\Gamma_k} \left(M_x G(x,y)\varphi_k(y) + \frac{\partial M_x G(x,y)}{\partial n_y}\psi_k(y) \right) d\sigma_y + M_x\omega(x) = q(x), \ x \in \Gamma_2, \\ \sum_{k=1}^{2} \int_{\Gamma_k} \varphi_k(y) d\sigma_y = A_0, \\ \sum_{k=1}^{2} \int_{\Gamma_k} (y_1\varphi_k(y) + n_1(y)\psi_k(y)) d\sigma_y = A_1, \\ \sum_{k=1}^{2} \int_{\Gamma_k} (y_2\varphi_k(y) + n_2(y)\psi_k(y)) d\sigma_y = A_2, \end{cases} \quad (5)$$

for given $(A_0, A_1, A_2) \in R^3$.

Для рівняння (2) маємо

$$\sum_{k=1}^{2}\int_{\Gamma_k}\left(G(x,y)\varphi_k(y)+\frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y}\psi_k(y)\right)d\sigma_y+\omega(x)=f(x),\ x\in\Gamma_2, \quad (6)$$

Теорема 2. *Обернена крайова задача* (1)-(2) *еквівалентна системі інтегральних рівнянь* (5)-(9).

Теорема 3 (Існування і єдиність розв'язку непрямої задачі)**.** *Нехай* $\tilde{\Gamma}_1$, Γ_1 *- замкнені криві, що містяться всередині* Γ_2, $\tilde{u}$, u *- розв'язки задачі* (1) *для* $\tilde{\Gamma}_1$ *і* Γ_1 *відповідно. Нехай* $g\neq 0, q\neq 0$ *і* $u=\tilde{u}$ *на відкритій підмножині* Γ_2. *Тоді* $\tilde{\Gamma}_1=\Gamma_1$.

Доведення. Доведемо від протилежного. Нехай $\tilde{\Gamma}_1\neq\Gamma_1$. Нехай Ω_2 - область, обмежена Γ_2, Ω_1, $\tilde{\Omega_1}$ - області обмежені Γ_1, $\tilde{\Gamma_1}$ відповідно.
$W:=\Omega_2\setminus(\Omega_1\cup\tilde{\Omega_1}),\quad \Gamma_2\subset\delta W$
За теоремою Гольгрема маємо $u=\tilde{u}$ в W. Без втрати загальності приспустимо, що $W^*:=(\Omega_2\setminus\overline{W})\setminus\Omega_1$ непорожня множина. Тоді u є визначена в W^* як розв'язок задачі (1) для Γ_1. Вона є гармонічною в W^*, неперервною в $\overline{W}^*$ і задовольняє граничні умови на δW^*. Ця гранична умова випливає з того, що кожна точка з W^* належить або Γ_1, або $\delta W\cap\tilde{\Gamma}_1$. Для $x\in\Gamma_1$ маємо $u(x)=0$ як наслідок граничної умови для u, для $x\in\tilde{\Gamma_1}$ маємо $u(x)=\tilde{u}(x)$ і тому $u(x)=0$ як наслідок граничних умов для $\tilde{u}$. Тоді за принципом максимуму $u=0$ в W^* і тому $u=0$ в D. Це суперечить тому, що $g\neq 0, q\neq 0$. □

3 Параметризація

Припустимо, що дані криві Γ_1 і Γ_2 достатньо гладкі і їх можна подати у параметричному заданні

$$\Gamma_l=\{x_l(s)=(x_{1l}(s),x_{2l}(s))\ :\ s\in[0,2\pi]\}, \quad (7)$$

де x_l $(l=1,2)$ - аналітична й 2π-періодична функція, $|x'(s)|>0$. Тоді систему можна записати

$$
\begin{cases}
\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{2}\int_0^{2\pi}\Big(H_{1k}(s,\sigma)\varphi_k(\sigma)+\tilde{H}_{1k}(s,\sigma)\psi_k(\sigma)\Big)d\sigma+\omega(x_1(s))=0,\\
\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{2}\int_0^{2\pi}\Big(\tilde{\tilde{H}}_{1k}(s,\sigma)\varphi_k(\sigma)+\hat{H}_{1k}(s,\sigma)\psi_k(\sigma)\Big)d\sigma+\dfrac{\partial\omega(x_1(s))}{\partial n_1}=0,\\
\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{2}\int_0^{2\pi}\Big(\tilde{\tilde{H}}_{2k}(s,\sigma)\varphi_k(\sigma)+\hat{H}_{2k}(s,\sigma)\psi_k(\sigma)\Big)d\sigma+\dfrac{\partial\omega(x_2(s))}{\partial n_2}=g(x_2(s)),\\
\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{2}\int_0^{2\pi}\Big(M_xH_{2k}(s,\sigma)\varphi_k(\sigma)+M_x\tilde{H}_{2k}(s,\sigma)\psi_k(\sigma)\Big)d\sigma+M_x\omega(x_2(s))=q(x_2(s)),\\
\displaystyle\sum_{k=1}^{2}\int_0^{2\pi}\varphi_k(\sigma)d\sigma=A_0,\\
\displaystyle\sum_{k=1}^{2}\int_0^{2\pi}(x_{1k}\varphi_k(\sigma)+n_1(x_k(\sigma))\psi_k(\sigma))d\sigma=A_1,\\
\displaystyle\sum_{k=1}^{2}\int_0^{2\pi}(x_{2k}\varphi_k(\sigma)+n_2(x_k(\sigma))\psi_k(\sigma))d\sigma=A_2,
\end{cases}
\tag{8}
$$

$$
\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{2}\int_0^{2\pi}\Big(H_{2k}(s,\sigma)\varphi_k(\sigma)+\tilde{H}_{2k}(s,\sigma)\psi_k(\sigma)\Big)d\sigma+\omega(x_2(s))=f(x_2(s)),
\tag{9}
$$

для $s\in[0,2\pi]$.

Тут $\varphi_l(s):=\varphi_k(x_l(s))|x_l'(s)|,\ \psi_l(s):=\psi_k(x_l(s))|x_l'(s)|$ – невідомі густини і ядра мають вигляд

$$
\begin{aligned}
&H_{lk}(s,\sigma)=G(x_l(s),x_k(\sigma)),\quad \tilde{H}_{lk}(s,\sigma)=\frac{\partial G(x_l(s),x_k(\sigma))}{\partial n_y},\\
&\tilde{\tilde{H}}_{lk}(s,\sigma)=\frac{\partial G(x_l(s),x_k(\sigma))}{\partial n_x},\quad \hat{H}_{lk}(s,\sigma)=\frac{\partial^2 G(x_l(s),x_k(\sigma))}{\partial n_y\partial n_x},\\
&n(x(s))=\Big(\frac{x_2'(s)}{|x'(s)|},-\frac{x_1'(s)}{|x'(s)|}\Big).
\end{aligned}
$$

Відомими способами знаходимо невідомі густини з системи (8).

4 Алгоритм знаходення розв'язку непрямої крайової задачі

Знаходження розв'язку задачі (5)-(9) складається з наступного ітераційного процесу:

- Для заданого початкової Γ_1 розв'язуємо пряму задачу для (5) і знаходимо невідомі густини.
- Лінеаризуємо рівняння (9) і покращуємо Γ_1, розв'язуючи лінеаризоване рівняння (9) для фіксованих густин, які є відомими з (5).

Ми припускаємо, що крива Γ_1 належить класу так званих "зіркових"кривих. Таким чином, параметризація задається як $x_1(t) = \{r(t)c(t) : t \in [0, 2\pi]\}$, де $c(t) = (\cos(t), \sin(t))$ і $r : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ є 2π-періодичною функцією, яка представляє радіус.

4.1 Похідна Фреше

Подамо рівняння (9) через оператори.

$$(S_{2k}\varphi)(s) = \int_0^{2\pi} H_{2k}(s,\sigma)\varphi_k(\sigma)d\sigma,$$
$$(S_{2k}\psi)(s) = \int_0^{2\pi} H_{2k}(s,\sigma)\psi(\sigma)d\sigma.$$

Отже (9) можна записати так

$$S_{21}\varphi_1 + S_{21}\psi_1 + S_{22}\varphi_2 + S_{22}\psi_2 + \Omega = f \quad \text{на } \Gamma_2.$$

Нехай $r = 21$. Тоді

$$S_r\varphi_1 + S_r\psi_1 + S_{22}\varphi_2 + S_{22}\psi_2 + \Omega = f \quad \text{на } \Gamma_2. \tag{10}$$

$$(S'[r,\varphi_1]q)(s) = f - \Omega - S_r\varphi_1 - S_r\psi_1 - S_{22}\varphi_2 - S_{22}\psi_2,$$

$$(S^{'}[r,\varphi]q)(s)=\int_0^{2\pi}q(\sigma)N_r(s,\sigma)\varphi(\sigma)d\sigma, \tag{11}$$

де $N_r(s,\sigma)=x(\sigma)\cdot\nabla_{x_1(\tau)}|x_2(s)-x_1(\sigma)|\ln|x_2(s)-x_1(\sigma)|$.

Аналогічно,

$$(S^{'}[r,\psi_1]q)(s)=f-\Omega-S_r\varphi_1-S_r\psi_1-S_{22}\varphi_2-S_{22}\psi_2,$$

$$(S^{'}[r,\psi]q)(s)=\int_0^{2\pi}q(\sigma)N_r(s,\sigma)\psi(\sigma)d\sigma. \tag{12}$$