ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА
Факультет прикладної математики та інформатики
Кафедра обчислювальної математики

Курсова робота
на тему:

Метод інтегральних рівнянь для крайових задач для бігармонійного рівняння

Студентки III курсу групи ПМП-31

Напряму підготовки "Прикладна математика"

Багрій А. Г.

Керівник:

проф. Хапко Р. С.

Національна шкала: ____________

Кількість балів: ____________

Оцінка ECTS: ____________

Львів 2019

Зміст

Вступ

Означення 1 *Бігармонійним рівнянням називається рівняння вигляду*

$$\Delta^2 f(x) = \frac{\partial^4 f}{\partial {x_1}^4} + ... + \frac{\partial^4 f}{\partial {x_n}^4} = 0, \quad f(x) = f(x_1, ..., x_n)$$

Нехай Ω - деяка двозв'язна область в R^2, що представляє пластину. І нехай область обмежена кривими $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$ - двозв'язна область в R^2.

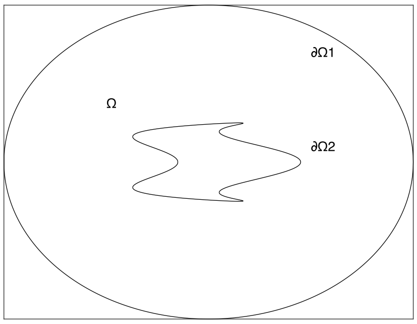


Рис. 1: Деяка пластина

Розглянемо таке рівняння

$$\rho u_{\mathrm{tt}}(x,t) + D\Delta^2 u(x,t) = 0, \quad x \in \Omega \subseteq R^2, t > 0, \tag{1}$$

де $u(x,t)$ - вертикальний відхил пластини відносно координати x в момент часу t, $\rho > 0$ - густина маси на одиницю площі, $D > 0$ - жорсткість згинання пластини, $\Delta^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2}\right)^2$ - бігармонійний оператор.

Це рівняння моделює вібрації тонкої пластини, що піддається вигину з невеликим відхиленням. Ця математична модель є важливою в сейсмології і структурній механіці. Коли пластина перебуває у електростатичній рівновазі, u більше не залежить часу і рівняння (1) набуває вигляду

$$\Delta^2 u(x) = 0, \quad x \in \Omega,$$

де u задовольняє бігармонійне рівняння.

Бігармонійне рівняння (1) є також стандартним рівнянням еластичності пластини, що піддається розтягуванню. Функція u в (1) зазвичай означає функцію, яка не має конкретного фізичного значення.

Розв'язок бігармонічного рівняння можна обчислити методом скінченних елементів для будь-яких коректних крайових умов. Проте в даній ситуації він має певні недоліки і ускладнює процес пошуку розв'язку. Тому доцільно буде розглянути інший метод - метод граничних інтегральних рівнянь.

Метод інтегральних рівнянь полягає у зведені крайової задачі до інтегральних рівнянь на границі області з подальшим чисельним розв'язуванням. Для цього розглядають розв'язок задачі у вигляді потенціалу і використовуючи властивості неперервності потенціалів, отримують потрібні інтегральні рівняння. Потім рівняння параметризують і застосовують певні квадратури, тим самим отримуючи систему лінійних рівнянь, яку можна розв'язати відомими методами.

Для початку розглянемо фізичну структуру крайової задачі з бігармонійним рівнянням.

Нехай тонка пластина з жорсткістю D і коефіцієнтом Пуасона $0 < \nu < \frac{1}{2}$ перебуває в електростатичній рівновазі. Розглянемо нескінченно малий елемент пластини. Нехай M_{x_1} і M_{x_2} - моменти згину на одиницю довжини, що діють на її края.

$$M_{\mathrm{x}_1} = -D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial {x_1}^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial {x_2}^2}\right),$$

$$M_{\mathrm{x}_2} = -D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial {x_2}^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial {x_2}^2}\right),$$

Робота, виконана моментами на нескінченно малому елементі, має вигляд

$$dV_1 = \frac{1}{2}D\left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial {x_1}^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial {x_2}^2}\right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 u}{\partial {x_1}^2}\frac{\partial^2 u}{\partial {x_2}^2}\right).$$

Окрім енергії деформації також робить внесок в енергію деформації момент крутіння

$$M_{\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2} = M_{\mathrm{x}_2\mathrm{x}_1} = D(1-\nu)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

Сума їх внеску в енергію деформації дорівнює

$$dV_2 = D(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2.$$

Загальна енергія деформації дорівнює

$$V(u) = \int_\Omega (dV_1 + dV_2) = \frac{D}{2}\int_\Omega (|\Delta u(x)|^2 + (1-\nu)({u^2}_{\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2}(x) - u_{\mathrm{x}_1\mathrm{x}_1}(x)u_{\mathrm{x}_2\mathrm{x}_2}(x)))dx.$$

Для зручності вважатимемо $D = 1$. Використаємо принцип ймовірних переміщень, згідно з яким для рівноваги механічної системи з ідеальними зв'язками необхідно і достатньо, щоб сума віртуальних робіт тільки активних сил на будь-якому можливому переміщенні системи дорівнювала нулю. Можливими переміщеннями механічної системи називаються уявні нескінченно малі переміщення, які припускаються в даний момент накладеними на систему зв'язками, $\delta V(u) = \delta \int_\Omega q(x)u(x)dx$, u - стан рівноваги пластини, q - зовнішнє навантаження, розподілене по пластині, і на границі області напруги немає.

Маємо

$$0 = \delta V(u) - \delta \int_\Omega q(\delta u)dx =$$

$$\int_\Omega (\Delta u(\delta u) + (1-\nu)(2u_{\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2}(\delta u)_{\mathrm{x}_1\mathrm{x}_2} - u_{\mathrm{x}_1\mathrm{x}_1}(\delta u)_{\mathrm{x}_2\mathrm{x}_2} - (\delta u)_{\mathrm{x}_1\mathrm{x}_1}u_{\mathrm{x}_2\mathrm{x}_2}))dx_1dx_2 - \int_\Omega q(\delta u)dx_1dx_2,$$
$$\forall \delta u.$$

Лема 1 (формула Релея – Гріна) *Визначимо білінійну форму*

$$a(u,\nu) = \int_\Omega (\Delta u \Delta \nu + (1-\nu)(2u_{x_1x_2}\nu_{x_1x_2} - u_{x_1x_1}\nu_{x_2x_2} - u_{x_2x_2}\nu_{x_1x_1}))dx, \quad 0 < \nu < \frac{1}{2}.$$

Тоді для достатньо гладких u, ν

$$a(u,\nu) = \int_\Omega (\Delta^2 u)\nu dx - \int_\Omega ((B_1 u)\nu - (B_2 u)\frac{\partial \nu}{\partial n})),$$

де

$$B_1 = \frac{\partial \Delta u}{\partial n} - (1-\nu)\frac{\partial}{\partial \sigma}\left(n_1 n_2\left(\frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2} + \frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2}\right) - ({n^2}_1 - {n^2}_2)\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\right),$$

$$B_2 = \nu \Delta u + (1-\nu)\left({n^2}_1 \frac{\partial^2}{\partial {x_1}^2} + {n^2}_2 \frac{\partial^2}{\partial {x_2}^2 + 2n_1 n_2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\right),$$

B_1 - поперечна сила, B_2 - момент згину, $n = (n_1, n_2)$ одинична зовнішня нормаль на $\partial\Omega$, $\frac{\partial}{\partial\Omega} = -n_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + n_1 \frac{\partial}{\partial x_2}$ - тангенціальна похідна проти годинникової стрілки вздовж $\partial\Omega$.

З леми отримуємо, що

$$\Delta^2 u(x) = q(x), \quad x \in \Omega.$$

На межі можна ввести декілька різних типів умов. Розглянемо граничні умови у випадку закріпленої пластини.

$$u = 0, \quad x \in \Omega \quad \text{(умова Діріхле)},$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad x \in \Omega \quad \text{(умова Неймана)}.$$

Оскільки навантаження $q(x)$ завжди може бути усунене відніманням потенціалу, то можна просто припустити, що $q(x) = 0$. Тоді

$$\Delta^2 u(x) = 0, \quad x \in \Omega$$

Граничні умови, в свою чергу, стають неоднорідними. В результаті отримуємо таку крайову задачу:

$$\begin{cases} \Delta^2 u(x) = 0, \quad x \in \Omega, \\ u(x) = f(x), \quad x \in \partial\Omega, \\ \dfrac{\partial u(x)}{\partial n} = g(x) \quad x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

Фізичний зміст даної задачі полягає у знаходженні кута зсуву закріпленої пластини.

Отже, розв'язування крайової задачі Діріхле (2) полягає у знаходженні такої функції $u \in C^4(\overline{\Omega})$, що задовольняє бігармонійне рівняння і задані крайові умови.

Розділ 1

Зведення крайової задачі до системи інтегральних рівнянь

1.1 Деякі властивості з теорії потенціалів для бігармонійного рівняння

На основі класичних еліптичних крайових задач, маємо наступну теорему існування та єдиності.

Теорема 1 *Нехай* $(f,g) \in H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega) \oplus H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ *і*

$$\nu \in H_0^2(\Omega) = \left\{ \nu \in H^2(\Omega) \mid \nu = \frac{\partial \nu}{\partial n} = 0 \ on\ \partial\Omega \right\},$$

де H_0^2 *- простір Соболева. Тоді існує єдиний слабкий розв'язок* $w \in H^2(\Omega)$ *для (2), який задовольняє крайові умови на* $\partial\Omega$ *так, що*

$$a(u,\nu) = 0, \quad \forall \nu \in H_0^2(\Omega).$$

Розглянемо одно- та двошарові потенціали як розв'язок бігармонійної крайової задачі. Неважко показати, що фундаментальний розв'язок $G(x,y)$ бігармонійного рівняння

$$\Delta_x^2 G(x,y) = \Delta_y^2 G(x,y) = \delta(x-y), \quad x,\ y \in R^2,$$

має вигляд

$$G(x,y) = \frac{1}{8\pi}|x-y|^2 \ln|x-y|. \tag{1.1}$$

Нехай $x \in \Omega$. Припустимо, що u задовольняє рівняння $\Delta^2 u(x) = 0$ в Ω. За лемою (1) після інтегрування частинами по Ω і $\partial\Omega$ отримуємо

$$\begin{aligned}
u(x) &= \int_\Omega ((\Delta^2 u(y))G(x,y) - (\Delta_y^2 G(x,y))u(y))dy \\
&= \int_\Omega ((B_1 u(y))G(x,y) - (B_2 u(y))\frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y})d\sigma_y + a(u, G(x,\cdot)) \\
&\quad -(\int_\Omega ((B_{1y} G(x,y))u(y) - (B_{2y} G(x,y))\frac{\partial u(y)}{\partial n_y})d\sigma_y + a(G(x,\cdot),u)) \\
&= \int_\Omega (G(x,y)B_1 u(y) - \frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y}B_2 u(y) - (B_{1y}G(x,y))u(y) + (B_{2y}G(x,y))\frac{\partial u(y)}{\partial n_y})d\sigma_y.
\end{aligned}$$

Очевидно, що $u(x)$ можна знайти, якщо відомі $u, \frac{\partial u}{\partial n}, B_1 u, B_2 u$ на $\partial\Omega$. Але з постановки задачі (2) відомі лише $u, \frac{\partial u}{\partial n}$ на $\partial\Omega$.

$$V_1(\varphi)(x) = \int_{\Omega} G(x,y)\varphi(y)d\sigma_y \quad \text{– потенціал простого шару,}$$

$$V_2(\psi)(x) = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial n_y} G(x,y)\psi(y)d\sigma_y \quad \text{– потенціал подвійного шару,}$$

$$V_3(\widetilde{\varphi})(x) = \int_{\Omega} \widetilde{\varphi}(y) B_{2y} G(x,y)d\sigma_y \quad \text{– потенціал потрійного шару,}$$

$$V_4(\widetilde{\psi})(x) = \int_{\Omega} \widetilde{\psi}(y) B_{1y} G(x,y)d\sigma_y \quad \text{– потенціал шару четвертого степеня,}$$

$$\varphi = B_1 u,\ \psi = B_2 u,\ \widetilde{\varphi} = \frac{\partial u(y)}{\partial n_y},\ \widetilde{\psi}(x) = u(y).$$

Дані потенціали $V_1 - V_4$ визначені для $x \notin \partial\Omega$. Коли $x \in \partial\Omega$, $V_1 - V_3$ також є визначені для $\forall x \in \Omega$, але при диференціюванні отримуємо логарифмічну особливість.

Чим більший степінь шару, тим більше сингулярним стає ядро при $x = y \in \partial\Omega$. Оскільки для обчислювань вигідніше використовувати потенціали шарів, які не є надто сингулярними, то для побудови розв'язку візьмемо простий і двошаровий потенціали:

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} (G(x,y)\varphi(y) + \frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y}\psi(y))d\sigma_y, \quad x \in \Omega, \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial n} = \int_{\partial\Omega} (\frac{\partial G(x,y)}{\partial n}\varphi(y) + \frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial n_x \partial n_y}\psi(y))d\sigma_y, \quad x \in \Omega, \tag{1.3}$$

де φ і ψ - густини потенціалів. Також розв'язок даної задачі можна подати у вигляді комбінації й інших потенціалів.

1.2 Непрямий метод інтегральних рівнянь

В цьому розділі сформулюємо граничні інтегральні рівняння для крайової задачі (2). Для того, щоб розв'язок задачі (2) був єдиним, необхідно змодифікувати рівняння.

Ядра в рівняннях (1.2), (1.3) мають вигляд

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial n_x} = \frac{1}{8\pi} n(x)\cdot(x-y)(1 + 2\ln|x-y|), \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y} = -\frac{1}{8\pi} n(y)\cdot(x-y)(1 + 2\ln|x-y|), \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial n_x \partial n_y} = \frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial n_y \partial n_x} = -\frac{1}{8\pi}\Bigg(2\frac{n(x)\cdot(x-y)n(y)\cdot(x-y)}{|x-y|^2} + n(x)\cdot n(y)(1 + 2\ln|x-y|)\Bigg). \tag{1.6}$$

Теорема 2 *Розв'язок крайової задачі* (2) *можна подати у вигляді*

$$u(x) = \sum_{k=1}^{2} \int_{\partial\Omega_k} \left(G(x,y)\varphi_k(y) + \frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y}\psi_k(y)\right)d\sigma_y + \omega(x), \quad x \in \Omega, \tag{1.7}$$

де $\omega(x) = \alpha_0+\alpha_1x_1+\alpha_2x_2$ $((\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) \in R^3)$, $\varphi_k, \psi_k \in C(\partial\Omega_k), k = 1, 2$, *і є єдиним розв'язком системи інтегральних рівнянь*

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{2} \int_{\partial\Omega_k} \left(G(x,y)\varphi_k(y) + \frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y}\psi_k(y) \right) d\sigma_y + \omega(x) = f(x), \ x \in \partial\Omega_l, \ l = 1,2, \\ \sum_{k=1}^{2} \int_{\partial\Omega_k} \left(\frac{\partial G(x,y)}{\partial n_x}\varphi_k(y) + \frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial n_y \partial n_x}\psi_k(y) \right) d\sigma_y + \frac{\partial\omega(x)}{\partial n} = g(x), \ x \in \partial\Omega_l, \ l = 1,2, \\ \sum_{k=1}^{2} \int_{\partial\Omega_k} \varphi_k(y) d\sigma_y = A_0, \\ \sum_{k=1}^{2} \int_{\partial\Omega_k} (y_1\varphi_k(y) + n_1(y)\psi_k(y)) d\sigma_y = A_1, \\ \sum_{k=1}^{2} \int_{\partial\Omega_k} (y_2\varphi_k(y) + n_2(y)\psi_k(y)) d\sigma_y = A_2 \end{cases} \tag{1.8}$$

для заданих $(A_0, A_1, A_2) \in R^3$.

Зауважимо, що константи A_0, A_1, A_2 можна вибрати довільно, але розв'язок системи залежить від вибору цих констант. В загальному, не можна одночасно брати за значення A_0, A_1, A_2 нулі.

Наслідок 1 *Припустимо, що система інтегральних рівнянь*

$$\begin{cases} \int_{\partial\Omega_k} (G(x,y)\eta_{1k}(y) + \frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y}\eta_{2k}(y)) d\sigma_y = a_0 + a_1x_{1k} + a_2x_{2k}, \quad x \in \partial\Omega_k \\ \int_{\partial\Omega_k} (\frac{\partial G(x,y)}{\partial n_x}\eta_{1k}(y) + \frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial n_x n_y}\eta_{2k}(y)) d\sigma_y = a_1n_{1k}(x) + a_2n_{2k}(x), \quad x \in \partial\Omega_k \end{cases}$$

має єдиний розв'язок для $\forall(a_0, a_1, a_2) \in R$ *для заданих* (η_{1l}, η_{2l}), $l = 1, 2$. *Тоді для будь-яких заданих функцій* $(f_l, g_l) \in H^{r+3}(\partial\Omega_l) \oplus H^{r+2}(\partial\Omega_l)$, $l = 1, 2$ *система інтегральних рівнянь*

$$\begin{cases} \int_{\partial\Omega_k} (G(x,y)\varphi_k(y) + \frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y}\psi_k(y)) d\sigma_y = f_k(x), \quad x \in \partial\Omega_k, \\ \int_{\partial\Omega_k} (\frac{\partial G(x,y)}{\partial n_x}\varphi_k(y) + \frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial n_x n_y}\psi_k(y)) d\sigma_y = g_k(x), \quad x \in \partial\Omega_k \end{cases}$$

так само має єдиний розв'язок для $(\varphi_k, \psi_k) \in H^r(\partial\Omega_l) \oplus H^{r+1}(\partial\Omega_l)$, $l = 1, 2$. *Отже, будь-яку бігармонійну функцію в цьому випадку можна подати у вигляді* (1.2).

1.3 Параметризація

Припустимо, що дані криві $\partial\Omega_1$ і $\partial\Omega_2$ достатньо гладкі і їх можна подати у параметричному заданні

$$\partial\Omega_l = \{x_l(s) = (x_{1l}(s), x_{2l}(s)) \ : \ s \in [0, 2\pi]\}, \tag{1.9}$$

де x_l $(l = 1, 2)$ - аналітична й 2π-періодична функція, $|x'(s)| > 0$. Тоді систему (1.8) можна записати

$$
\begin{cases}
\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{2}\int_0^{2\pi}\Big(H_{lk}(s,\sigma)\varphi_k(\sigma)+\tilde{H}_{lk}(s,\sigma)\psi_k(\sigma)\Big)d\sigma+\omega(x_l(s))=f(x_l(s)),\ l=1,2,\\
\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{2}\int_0^{2\pi}\Big(\tilde{\tilde{H}}_{lk}(s,\sigma)\varphi_k(\sigma)+\hat{H}_{lk}(s,\sigma)\psi_k(\sigma)\Big)d\sigma+\dfrac{\partial\omega(x_l(s))}{\partial n_l}=g(x_l(s)),\ l=1,2,\\
\displaystyle\sum_{k=1}^{2}\int_0^{2\pi}\varphi_k(\sigma)d\sigma=A_0,\\
\displaystyle\sum_{k=1}^{2}\int_0^{2\pi}(x_{1k}\varphi_k(\sigma)+n_1(x_k(\sigma))\psi_k(\sigma))d\sigma=A_1,\\
\displaystyle\sum_{k=1}^{2}\int_0^{2\pi}(x_{2k}\varphi_k(\sigma)+n_2(x_k(\sigma))\psi_k(\sigma))d\sigma=A_2,
\end{cases}
\tag{1.10}
$$

для $s\in[0,2\pi]$.

Тут $\varphi_l(s):=\varphi_k(x_l(s))|x_l'(s)|,\quad \psi_l(s):=\psi_k(x_l(s))|x_l'(s)|$ – невідомі густини і ядра мають вигляд

$$
\begin{aligned}
&H_{lk}(s,\sigma)=G(x_l(s),x_k(\sigma)),\quad \tilde{H}_{lk}(s,\sigma)=\frac{\partial G(x_l(s),x_k(\sigma))}{\partial n_y},\\
&\tilde{\tilde{H}}_{lk}(s,\sigma)=\frac{\partial G(x_l(s),x_k(\sigma))}{\partial n_x},\quad \hat{H}_{lk}(s,\sigma)=\frac{\partial^2 G(x_l(s),x_k(\sigma))}{\partial n_y\partial n_x},\\
&n(x(s))=\Big(\frac{x_2'(s)}{|x'(s)|},-\frac{x_1'(s)}{|x'(s)|}\Big)
\end{aligned}
$$

Дані ядра є неперервними в області $\bar{\Omega}$. Але коли точка інтегрування співпадає з точкою спостереження на $\partial\Omega_l$ $(l=k)$ підчас диференціювання маємо логарифмічну особливість. Для подальшого чисельного розв'язування доцільно виділити цю особливість, виконавши певні перетворення. Продемонструємо цей процес на ядрі $H_{ll}(s,\sigma),\ l=1,2$.

$$
\begin{aligned}
H_{ll}(s,\sigma)&=\frac{1}{8}|x_l(s)-x_l(\sigma)|^2\ln|x_l(s)-x_l(\sigma)|^2\pm\frac{1}{8}|x_l(s)-x_l(\sigma)|^2\ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{s-\sigma}{2}\right)\\
&=\frac{1}{8}|x_l(s)-x_l(\sigma)|^2\ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{s-\sigma}{2}\right)+\frac{1}{8}|x_l(s)-x_l(\sigma)|^2\ln\frac{e|x_l(s)-x_l(\sigma)|^2}{4\sin^2\frac{s-\sigma}{2}}.\\
&=H_{ll}^{(1)}(s,\sigma)\ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{s-\sigma}{2}\right)+H_{ll}^{(2)}(s,\sigma)
\end{aligned}
$$

Аналогічні перетворення можна виконати для інших ядер. В результаті, маємо

$$
H_{ll}(s,\sigma)=H_{ll}^{(1)}(s,\sigma)\ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{s-\sigma}{2}\right)+H_{ll}^{(2)}(s,\sigma)\tag{1.11}
$$

$$
\tilde{H}_{lk}(s,\sigma)=\tilde{H}_{lk}^{(1)}(s,\sigma)\ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{s-\sigma}{2}\right)+\tilde{H}_{ll}^{(2)}(s,\sigma)\tag{1.12}
$$

$$
\tilde{\tilde{H}}_{ll}(s,\sigma)=\tilde{\tilde{H}}_{lk}^{(1)}(s,\sigma)\ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{s-\sigma}{2}\right)+\tilde{\tilde{H}}_{ll}^{(2)}(s,\sigma)\tag{1.13}
$$

$$
\hat{H}_{ll}(s,\sigma)=\hat{H}_{ll}^{(1)}(s,\sigma)\ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{s-\sigma}{2}\right)+\hat{H}_{ll}^{(2)}(s,\sigma)\tag{1.14}
$$

де

$$H_{ll}^{(1)}(s,\sigma) = \frac{1}{8}|x_l(s) - x_l(\sigma)|^2, \quad H_{ll}^{(2)}(s,\sigma) = \frac{1}{8}|x_l(s) - x_l(\sigma)|^2 \ln\Big(\frac{e|x_l(s) - x_l(\sigma)|^2}{4\sin^2\frac{s-\sigma}{2}}\Big),$$

$$\tilde{H}_{ll}^{(1)}(s,\sigma) = -\frac{1}{4}n(x_l(\sigma)) \cdot (x_l(s) - x_l(\sigma)),$$

$$\tilde{H}_{ll}^{(2)}(s,\sigma) = \frac{1}{4}n(x_l(\sigma)) \cdot (x_l(s) - x_l(\sigma))\bigg(\ln\Big(\frac{4\sin^2\frac{s-\sigma}{2}}{e|x_l(s) - x_l(\sigma)|^2}\Big) - 1\bigg),$$

$$\tilde{\tilde{H}}_{ll}^{(1)}(s,\sigma) = \frac{1}{4}n(x_l(s)) \cdot (x_l(s) - x_l(\sigma)),$$

$$\tilde{\tilde{H}}_{ll}^{(2)}(s,\sigma) = \frac{1}{4}n(x_l(s)) \cdot (x_l(s) - x_l(\sigma))\bigg(\ln\Big(\frac{e|x_l(s) - x_l(\sigma)|^2}{4\sin^2\frac{s-\sigma}{2}}\Big) + 1\bigg),$$

$$\hat{H}_{ll}^{(1)}(s,\sigma) = -\frac{1}{4}n(x_l(s)) \cdot n(x_l(\sigma)),$$

$$\hat{H}_{ll}^{(2)}(s,\sigma) = \frac{1}{4}n(x_l(s)) \cdot n(x_l(\sigma)) \cdot \bigg(\ln\Big(\frac{4\sin^2\frac{s-\sigma}{2}}{e|x_l(s) - x_l(\sigma)|^2}\Big) - 2\frac{(x_l(s) - x_l(\sigma))^2}{|x_l(s) - x_l(\sigma)|^2} - 1\bigg).$$

Розв'язок системи також необхідно параметризувати. Тоді він приймає вигляд

$$\sum_{k=1}^{2}\int_{\Omega_k}\bigg(H_k(x^*,\sigma)\varphi_k(\sigma) + \tilde{H}_k(x^*,\sigma)\psi_k(\sigma)\bigg)d\sigma_y + \omega(x^*) = f(x^*), \qquad (1.15)$$
$$x^* = (x_1, x_2) - \text{фіксована точка в області } \Omega.$$

Розділ 2

Чисельне розв'язування системи інтегральних рівнянь

2.1 Квадратурні формули

До отриманої системи параметризованих інтегральних рівнянь на даному етапі розв'язування крайової задачі необхідно застосувати квадратурні формули для знаходження наближеного розв'язку системи. В попередньому розділі ми отримали два типи інтегралів: звичайний і з логарифмічною особливістю. Тому необхідно розглянути два типи квадратурних формул. Вони базуватимуться на тригонометричній інтерполяції. Розглянемо рівновіддалений поділ на $[0, 2\pi]$

$$s_k = kh,\ k = 0, ..., 2m-1,\ h = \frac{\pi}{m}$$

Підінтегральна 2π-періодична функція інтерполюється таким тригонометричним поліномом

$$q(s) = \sum_{k=0}^{m} a_k \cos js + \sum_{jk1}^{m-1} b_k \sin js,$$

$$a_j = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{2m-1} g_k \cos jt_k,\ j = 0, ..., m,$$

$$b_j = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{2m-1} g_k \sin jt_k,\ j = 1, ..., m-1,$$

$$\int_0^{2\pi} f(\sigma) d\sigma \approx \int_0^{2\pi} (P_n f)(\sigma) d\sigma = \frac{\pi}{n} \sum_{j=0}^{2m-1} f(s_j) \tag{2.1}$$

$$\int_0^{2\pi} f(\sigma) \ln\Big(\frac{4}{e} \sin^2 \frac{s-\sigma}{2}\Big) d\sigma \approx \int_0^{2\pi} (P_n f) \ln\Big(\frac{4}{e} \sin^2 \frac{s-\sigma}{2}\Big)(\sigma) d\sigma = \sum_{j=0}^{2m-1} R_j(s) f(s_j), \tag{2.2}$$

де $P_n : C[0, 2\pi] \to T_n$ - інтерполяційний оператор, (2.1) - квадратурна формула трапецій для 2π-періодичних функцій, R_j - вагові функції, що неперервно залежать від s. Якщо f- аналітична, то похибка апроксімації квадратури зменшується експоненційно (див. [3]). Ваги можна подати як $R_k(s_j) = R_{k-j}(s_j),\ j, k = 0, ..., 2m-1$

Теорема 3 *Нехай f - аналітична, 2π-періодична функція. Тоді похибку квадратурної* *формули* (2.1) *можна оцінити наступним чином.*

$$|R_T(f)| = \int_0^{2\pi} f(\sigma)d\sigma - \frac{\pi}{n}\sum_{j=0}^{2m-1} f(s_j) \leq Ce^{-2ms}, \tag{2.3}$$

де C, s *- деякі невід'ємні константи, що залежать від* f*. Квадратура трапецій* (2.1) *об'єднює в собі поліноми не стільки степеня менше за* m*, але й поліноми степеня менше або дорівнює* $2m-1$

2.2 Метод Нистрьома

У чисельних методах метод Нистрьома полягає у заміні інтегралу відповідною квадратурною формулою з певними ваговими функціями. Найважливішим етапом методу Нистрьома є вибір розбиття, оскільки кожне розбиття дає різне наближення. Найчастіше використовують рівномірний розподіл. Базуючись на квадратурах з розділу (2.1), маємо наступні наближення,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\sigma)d\sigma \approx \frac{1}{2m}\sum_{j=0}^{2m-1} f(s_j), \tag{2.4}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\sigma)\ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{s-\sigma}{2}\right)d\sigma \approx \frac{1}{2m}\sum_{j=0}^{2m-1} R_j(s)f(s_j) \tag{2.5}$$

з вузлами

$$s_k = kh,\ k = 0, ..., 2m-1,\ h = \frac{\pi}{m} \tag{2.6}$$

і ваговими функціями

$$R_k(s) = -\frac{1}{m}\left(\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{j}\cos\frac{jk\pi}{m} + \frac{(-1)^k}{2m}\right). \tag{2.7}$$

Застосувавши даний метод до системи рівнянь (1.10) і погрупувавши, отримаємо повністю дискретизовану систему лінійних рівнянь,

$$
\begin{cases}
\sum_{j=0}^{2m-1}\Bigg((H_{ll}^{(1)}(s_i,s_j)R_{|i-j|}+\frac{1}{2m}H_{ll}^{(2)}(s_i,s_j))\varphi_{lj}+\frac{1}{2m}H_{l,3-l}(s_i,s_j)\varphi_{3-l,j}+(\tilde{H}_{ll}^{(1)}(s_i,s_j)R_{|i-j|} \\
+\frac{1}{2m}\tilde{H}_{ll}^{(2)}(s_i,s_j))\psi_{lj}+\frac{1}{2m}\tilde{H}_{l,3-l}(s_i,s_j)\psi_{3-l,j}\Bigg)+\omega_{li}=f_{li}, l=1,2, \\
\sum_{j=0}^{2m-1}\Bigg(\frac{1}{2m}\tilde{\tilde{H}}_{l,3-l}\varphi_{3-lj}+(\tilde{\tilde{H}}_{ll}^{(1)}(s_i,s_j)R_{|i-j|}+\frac{1}{2m}\tilde{\tilde{H}}_{ll}^{(2)}(s_i,s_j))\varphi_{lj}+\frac{1}{2m}\hat{H}_{l,3-l}\psi_{3-lj} \\
+(\hat{H}_{ll}^{(1)}(s_i,s_j)R_{|i-j|}+\frac{1}{2m}\hat{H}_{ll}^{(2)}(s_i,s_j))\psi_{lj}\Bigg)+\frac{\partial\omega_{li}}{\partial n_l}=f_{li},\ l=1,2, \\
h\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=0}^{2m-1}\varphi_{kj}=A_0, \\
h\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=0}^{2m-1}(x_{1k}(s_j)\varphi_{kj}+n_1(x_k(s_j))\psi_{kj})=A_1, \\
h\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=0}^{2m-1}(x_{2k}(s_j)\varphi_{kj}+n_2(x_k(s_j))\psi_{kj})=A_2
\end{cases}
\tag{2.8}
$$

для $i=0,...,2m-1$. Тут $f_{li}=f_l(x_l(s_i)),\ g_{li}=g_l(x_l(s_i)),\ \omega_{li}=\omega_l(x_l(s_i)),\ \frac{\partial\omega_{li}}{\partial n_l}=\frac{\partial\omega(x_2(s_i))}{\partial n_l},\ R_j=R(s_j)$ Розв'язавши систему (2.8), отримаємо шукані коефіцієнти $(a_0,a_1,a_2)\in R^3$ і значення густин потенціалів на вибраному розбитті $\varphi_{kj}\approx\varphi_k(s_j),\ \psi_{kj}\approx\psi_k(s_j),\ k=1,2,\ j=0,...,2m-1$.

Для знаходження наближеного розв'язку необхідно застосувати квадратури до подання розв'язку. Оскільки ми шукаємо розв'язок в фіксованій точці області $\Omega\notin\partial\Omega$, а інтегруємо по $\partial\Omega$, то в ядрах не буде логарифмічної особливості. Тоді розв'язок матиме вигляд

$$
\begin{gathered}
u(x)\approx\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=0}^{2m-1}\Bigg(H_k(x,s_j)\varphi_{kj}+\tilde{H}_k(x,s_j)\psi_{kj}\Bigg)+a_0+a_1x_1+a_2x_2, \\
x\in\Omega,\ \varphi_{kj}\approx\varphi_k(s_j),\ \psi_{kj}\approx\psi_k(s_j),\ j=0,...,2m-1.
\end{gathered}
\tag{2.9}
$$

Підставляючи в (2.9) елементи, що були знайдені в (2.8), маємо наближений розв'язок в фіксованій точці $x\in\Omega$.

2.3 Чисельні експерименти

Приклад 1

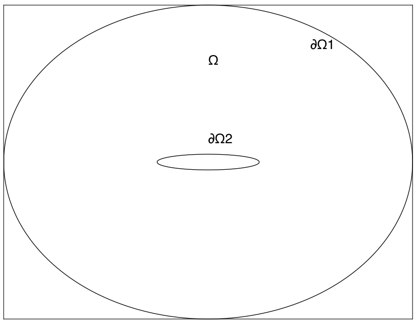
Розглянемо такі крайові умови

$$
\begin{aligned}
f(x_k)&=x_{1k}-2x_{2k},\ x\in\partial\Omega_k, \\
g(x_k)&=\frac{\partial f}{\partial n},\ x\in\partial\Omega_k,\quad k=1,2.
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

Розв'язком задачі (2) з умовами (2.10) є функція $u = x_1 - 2x_2, \quad x \in \Omega$. У цьому прикладі розглянемо відносно просту область.

$$\begin{aligned} &\partial\Omega_1 = \{x(s) = (2\cos(s), 2\sin(s)),\ s \in [0, 2\pi]\}, \\ &\partial\Omega_2 = \{x(s) = (0.5\cos(s), 0.1\sin(s)),\ s \in [0, 2\pi]\}, \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$x = (1.5, 0),$$



m	$E(x)$ $(A_0 = A_1 = A_2 = 1)$
2	0.01003
4	0.0011323
8	5.2492e-05
16	7.0444e-08
32	5.4863e-11
64	6.5824e-15

Приклад 2

В позначеннях (2) розглянемо такі крайові умови

$$\begin{aligned} &f(x_k) = x_{1k} + x_{2k},\ x \in \partial\Omega_k, \\ &g(x_k) = \frac{\partial f}{\partial n},\ x \in \partial\Omega_k, \quad k = 1, 2. \end{aligned} \tag{2.12}$$

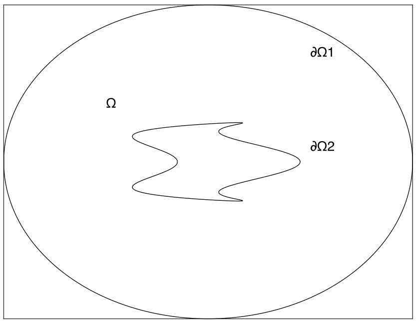
Розв'язком даної задачі є функція $u^*(x) = x_1 + x_2,\ x \in \Omega$. Продемонструємо результати чисельних експерементів для різних областей Ω, параметрів A_0, A_1, A_2 і точок області. Позначимо через $E(x)$ - абсолютну похибку в заданій точці області.

Приклад 2.1

$$\begin{aligned} &\partial\Omega_1 = \{x(s) = (3\cos(s), 3\sin(s)),\ s \in [0, 2\pi]\}, \\ &\partial\Omega_2 = \{x(s) = (\cos(s) + 0.4\cos(4s), \sin(s)),\ s \in [0, 2\pi]\}, \end{aligned} \tag{2.13}$$

$$x = (0, -2),$$

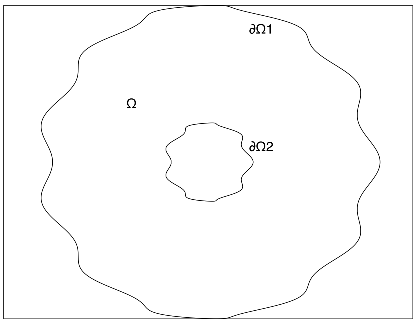
m	$E(x)$ $(A_0 = A_1 = A_2 = 1)$	Похибка $(A_0 = 0.1, A_1 = 1, A_2 = 0)$
2	0.042796	0.010598
4	0.0010295	0.0003469
8	6.8947e-05	4.8885e-06
16	6.6392e-07	5.5934e-07
32	3.2403e-07	3.5371e-07
64	1.6404e-06	8.3151e-07



Приклад 2.2

$$
\begin{aligned}
\partial\Omega_1 &= \{x(s) = (4\cos(s) + 0.2\cos(12s), 4\sin(s)),\ s \in [0, 2\pi]\},\\
\partial\Omega_2 &= \{x(s) = (\cos(s) + 0.1\cos(8s), \sin(s)),\ s \in [0, 2\pi]\},
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

$$x = (3, 0),$$

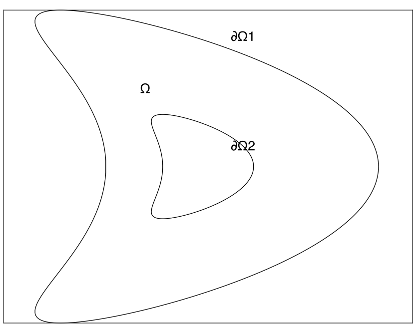


m	$E(x)$ $(A_0 = A_1 = A_2 = 1)$	Похибка $(A_0 = 0.1, A_1 = 1, A_2 = 0)$
2	0.04051	0.010598
4	0.0030993	0.0003469
8	0.0089033	4.8885e-06
16	0.00041034	5.5934e-07
32	0.00010669	3.5371e-07
64	1.6404e-06	8.3151e-07

Приклад 2.3

$$
\begin{aligned}
\partial\Omega_1 &= \{x(s) = (3\cos(s) + 2\cos(2s) - 0.75, 3\sin(s)),\ s \in [0, 2\pi]\},\\
\partial\Omega_2 &= \{x(s) = (0.6\cos(s) + 0.3\cos(4s), \sin(s)),\ s \in [0, 2\pi]\},
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

$$x = (1, -2),$$



m	$E(x)$ $(A_0 = A_1 = A_2 = 1)$	Похибка $(A_0 = 0.1, A_1 = 1, A_2 = 0)$
2	0.09048	0.0051861
4	0.11986	0.00034231
8	0.038803	6.572e-05
16	0.00011939	3.8037e-06
32	0.00016575	1.1088e-05
64	1.9979e-06	1.0813e-06

Як можна бачити, вибір констант A_0, A_1, A_2 впливає на результат.

Висновки

У цій роботі було розглянуто чисельне розв'язування крайової задачі Діріхле для бігармонійного рівняння на двозв'язній області непрямим методом інтегральних рівнянь. Наближений розв'язок подали як комбінацію потенціалів простого та подвійного шару і додаткової лінійної функції, оскільки, як було вияснено в інших роботах, це необхідна умова для існування єдиного розв'язку поставленої задачі. Це, в свою чергу, призвело до додаткових трьох рівнянь.

Отримана система інтегральних рівнянь була параметризована з виділенням особливостей на межах області. До інтегральних рівнянь з виділеною особливістю був застосований метод Нистрьома, який базується на використанні тригонометричних формул з відокремленнмя вагових функцій. В результаті ми отримали дискретну систему лінійних рівнянь, з якої були знайдені невідомі коефіцієнти додаткової функції в рівнянні для знаходження наближеного розв'язку. Після того ми провели такий самий процес параметризації і дискретизації для формули пошуку розв'язку, отримали повністю дискретний метод для розв'язування задачі.

Були проведені чисельні експерименти, з яких ми побачили, що метод збігається добре і також результат залежить від констант, які потрібні для побудови системи лінійних рівнянь, що забезпечує єдиність розв'язку.

Література

[1] Chen G., Boundary Element Methods with Applications to Nonlinear Problems / Goong Chen, Jianxin Zhou. - Atlantis Press, 2010. - 715 p.

[2] Chapko R. Integral Equations for Biharmonic Data Completion / Roman Chapko, B. Tomas Johansson. - Inverse Problems and Imaging (accepted) - 2019. - 16 p.

[3] Kress R. Linear Integral Equations / Rainer Kress. - New York : Springer, 1989. - 412 p.