ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА ФРАНКА

Факультет прикладної математики та інформатики
Кафедра обчислювальної математики

Курсова робота
на тему:

Метод інтегральних рівнянь для оберненої крайової задачі для бігармонійного рівняння

Студентки IV курсу групи ПМП-41
Напряму підготовки "Прикладна математика"
Багрій А. Г.

Керівник:
проф. Хапко Р. С.

Національна шкала: ____________
Кількість балів: ____________
Оцінка ECTS: ____________

Львів-2020

Зміст

Вступ

Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ двоз'язна область з межею $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, де Γ_1 є внутрішньою межею і Γ_2 - зовнішньою. І нехай Γ_1 невідома.

$$\begin{cases} \Delta^2 u(x) = 0, \quad x \in \Omega, \\ u(x) = \dfrac{\partial u(x)}{\partial n} = 0, \quad x \in \Gamma_1, \\ \dfrac{\partial u(x)}{\partial n} = g(x), \quad x \in \Gamma_2, \\ Mu(x) = q(x), \quad x \in \Gamma_2, \end{cases} \tag{1}$$

$$u(x) = f(x), \quad x \in \Gamma_2, \tag{2}$$

де $\Delta^2 u(x) = \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} u(x) + 2\frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} u(x) + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} u(x) = 0,\ u(x) = u(x_1, x_2),\ n = (n_1, n_2)$ - зовнішня нормаль до Γ, $Mu = \nu\Delta u + (1-\nu)(u_{x_1x_1} n_1^2 + 2u_{x_1x_2} n_1 n_2 + u_{x_2x_2} n_2^2),\ \nu \in (0,1)$ і $g(x), q(x), f(x)$ - деякі задані функції. Розв'язування (1)-(2) складається зі знаходження невідомої Γ_1 для заданих граничних умов. Дана обернена задача є нелінійною.

Розділ 1

Загальні положення

Фундаментальний роз'вязок бігармонійного рівняння має вигляд

$$G(x,y) = \frac{1}{8\pi}|x-y|^2 \ln|x-y|, \quad x,\ y \in \mathbb{R}^2. \tag{1.1}$$

Розглянемо потенціал простого шару для бігармонійного рівняння з густинами φ, ψ, що визначені на Γ:

$$u(x) = \int_\Gamma \left(G(x,y)\varphi(y) + \frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y}\psi(y) \right) d\sigma_y, \quad x \in \Omega.$$

Теорема 1. *Розв'язок прямої крайової задачі* (1) *має вигляд*

$$u(x) = \sum_{k=1}^{2} \int_{\Gamma_k} \left(G(x,y)\varphi_k(y) + \frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y}\psi_k(y) \right) d\sigma_y + \omega(x), \quad x \in \Omega, \tag{1.2}$$

де $\omega(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ $((\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) \in R^3), \varphi_k, \psi_k \in C(\Gamma_k), k = 1, 2,$ *де невідомі густини визначаються із системи інтегральних рівнянь*

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{2} \int_{\Gamma_k} \left(G(x,y)\varphi_k(y) + \frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y}\psi_k(y) \right) d\sigma_y + \omega(x) = 0,\ x \in \Gamma_1, \\ \sum_{k=1}^{2} \int_{\Gamma_k} \left(\frac{\partial G(x,y)}{\partial n_x}\varphi_k(y) + \frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial n_y \partial n_x}\psi_k(y) \right) d\sigma_y + \frac{\partial \omega(x)}{\partial n} = 0,\ x \in \Gamma_1, \\ \sum_{k=1}^{2} \int_{\Gamma_k} \left(\frac{\partial G(x,y)}{\partial n_x}\varphi_k(y) + \frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial n_y \partial n_x}\psi_k(y) \right) d\sigma_y + \frac{\partial \omega(x)}{\partial n} = g(x),\ x \in \Gamma_2, \\ \sum_{k=1}^{2} \int_{\Gamma_k} \left(M_x G(x,y)\varphi_k(y) + \frac{\partial M_x G(x,y)}{\partial n_y}\psi_k(y) \right) d\sigma_y + M_x\omega(x) = q(x),\ x \in \Gamma_2, \\ \sum_{k=1}^{2} \int_{\Gamma_k} \varphi_k(y) d\sigma_y = A_0, \\ \sum_{k=1}^{2} \int_{\Gamma_k} (y_1\varphi_k(y) + n_1(y)\psi_k(y)) d\sigma_y = A_1, \\ \sum_{k=1}^{2} \int_{\Gamma_k} (y_2\varphi_k(y) + n_2(y)\psi_k(y)) d\sigma_y = A_2, \end{cases} \tag{1.3}$$

для заданих $(A_0, A_1, A_2) \in R^3$.

З умови (2) маємо

$$\sum_{k=1}^{2}\int_{\Gamma_k}\left(G(x,y)\varphi_k(y)+\frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y}\psi_k(y)\right)d\sigma_y+\omega(x)=f(x),\ \ x\in\Gamma_2. \tag{1.4}$$

В системі (1.3) ядра мають вигляд

$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial n_x}=\frac{1}{8\pi}n(x)\cdot(x-y)(1+2\ln|x-y|),$$
$$\frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y}=-\frac{1}{8\pi}n(y)\cdot(x-y)(1+2\ln|x-y|),$$

$$\frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial n_x\partial n_y}=\frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial n_y\partial n_x}=-\frac{1}{8\pi}\Bigg(2\frac{n(x)\cdot(x-y)n(y)\cdot(x-y)}{|x-y|^2}$$
$$+n(x)\cdot n(y)(1+2\ln|x-y|)\Bigg),$$

$$M_xG(x,y)=\frac{1+3\nu}{8\pi}+\frac{(1-\nu)(n(x)\cdot(x-y))^2}{4\pi|x-y|^2}+\frac{(1+\nu)\ln|x-y|^2}{8\pi},$$

$$\frac{\partial M_xG(x,y)}{\partial n_y}=\frac{1-\nu}{2\pi}\Big(\frac{(n(x)\cdot(x-y))^2n(y)\cdot(x-y)}{|x-y|^4}-\frac{n(x)\cdot n(y)n(x)\cdot(x-y)}{|x-y|^2}\Big)$$
$$-\frac{(1+\nu)n(y)\cdot(x-y)}{4\pi|x-y|^2}.$$

Теорема 2. *Обернена крайова задача* (1)-(2) *еквівалентна системі інтегральних рівнянь* (1.3)-(3.1).

Теорема 3 (Існування і єдиність розв'язку непрямої задачі)**.** *Нехай* $\tilde{\Gamma}_1$, Γ_1 *- замкнені криві, що містяться всередині* Γ_2, $\tilde{u}$, u *- розв'язки задачі* (1) *для* $\tilde{\Gamma}_1$ *і* Γ_1 *відповідно. Нехай* $g\neq 0, q\neq 0$ *і* $u=\tilde{u}$ *на відкритій підмножині* Γ_2*. Тоді* $\tilde{\Gamma}_1=\Gamma_1$.

Доведення. Доведемо від протилежного. Нехай $\tilde{\Gamma}_1\neq\Gamma_1$. Нехай Ω_2 - область, обмежена Γ_2, Ω_1, $\tilde{\Omega}_1$ - області обмежені Γ_1, $\tilde{\Gamma}_1$ відповідно.

$$W:=\Omega_2\setminus(\Omega_1\cup\tilde{\Omega}_1),\quad \Gamma_2\subset\delta W.$$

За теоремою Гольмгрена маємо $u=\tilde{u}$ в W. Без втрати загальності приспустимо, що $W^*:=(\Omega_2\setminus\overline{W})\setminus\Omega_1$ непорожня множина. Тоді u є визначена в W^* як розв'язок задачі (1) для Γ_1. Вона є неперервною в $\overline{W}^*$ і задовольняє граничні умови на δW^*. Ця гранична умова випливає з того, що кожна точка з W^* належить або Γ_1, або $\delta W\cap\tilde{\Gamma}_1$. Для $x\in\Gamma_1$ маємо $u(x)=0$ як наслідок граничних умов для u, для $x\in\tilde{\Gamma}_1$ маємо $u(x)=\tilde{u}(x)$ і тому $u(x)=0$ як наслідок граничних умов для $\tilde{u}$. Тоді за принципом максимуму $u=0$ в W^* і тому $u=0$ в D. Це суперечить тому, що $g\neq 0, q\neq 0$. □

Алгоритм знаходення розв'язку оберненої крайової задачі

Знаходження розв'язку задачі (1.3)-(3.1) складається з наступного ітераційного процесу:

- Для заданого початкового наближення Γ_1 розв'язуємо пряму задачу для (1.3) і знаходимо невідомі густини.
- Лінеаризуємо рівняння (1.4) і покращуємо Γ_1, розв'язуючи лінеаризоване рівняння (1.4) для фіксованих густин, які є відомими з (1.3).

Розділ 2

Розв'язування прямої задачі

2.1 Параметризація

Припустимо, що криві Γ_1 і Γ_2 достатньо гладкі і їх можна подати у параметричному заданні

$$\Gamma_l = \{x_l(s) = (x_{1l}(s), x_{2l}(s)) \ : \ s \in [0, 2\pi]\}, \tag{2.1}$$

де x_l $(l = 1, 2)$ - аналітична й 2π-періодична функція, $|x'(s)| > 0$. Тоді систему можна записати

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{2}\int_0^{2\pi}\left(H_{1k}(s,\sigma)\varphi_k(\sigma) + \tilde{H}_{1k}(s,\sigma)\psi_k(\sigma)\right)d\sigma + \omega(x_1(s)) = 0, \\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{2}\int_0^{2\pi}\left(\tilde{\tilde{H}}_{1k}(s,\sigma)\varphi_k(\sigma) + \hat{H}_{1k}(s,\sigma)\psi_k(\sigma)\right)d\sigma + \dfrac{\partial\omega(x_1(s))}{\partial n_1} = 0, \\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{2}\int_0^{2\pi}\left(\tilde{\tilde{H}}_{2k}(s,\sigma)\varphi_k(\sigma) + \hat{H}_{2k}(s,\sigma)\psi_k(\sigma)\right)d\sigma + \dfrac{\partial\omega(x_2(s))}{\partial n_2} = g(x_2(s)), \\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{2}\int_0^{2\pi}\left(\hat{\hat{H}}_{2k}(s,\sigma)\varphi_k(\sigma) + \bar{H}_{2k}(s,\sigma)\psi_k(\sigma)\right)d\sigma + M_x\omega(x_2(s)) = q(x_2(s)), \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{2}\int_0^{2\pi}\varphi_k(\sigma)d\sigma = A_0, \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{2}\int_0^{2\pi}(x_{1k}\varphi_k(\sigma) + n_1(x_k(\sigma))\psi_k(\sigma))d\sigma = A_1, \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{2}\int_0^{2\pi}(x_{2k}\varphi_k(\sigma) + n_2(x_k(\sigma))\psi_k(\sigma))d\sigma = A_2, \end{cases} \tag{2.2}$$

Тут $\varphi_l(s) := \varphi_k(x_l(s))|x_l'(s)|$, $\psi_l(s) := \psi_k(x_l(s))|x_l'(s)|$ $-$ невідомі густини і ядра мають вигляд

$$H_{lk}(s,\sigma) = G(x_l(s), x_k(\sigma)), \quad \tilde{H}_{lk}(s,\sigma) = \frac{\partial G(x_l(s), x_k(\sigma))}{\partial n_y},$$

$$\tilde{\tilde{H}}_{lk}(s,\sigma) = \frac{\partial G(x_l(s), x_k(\sigma))}{\partial n_x}, \quad \hat{H}_{lk}(s,\sigma) = \frac{\partial^2 G(x_l(s), x_k(\sigma))}{\partial n_y \partial n_x},$$

$$\hat{\hat{H}}_{lk}(s,\sigma) = M_x G(x_l(s), x_k(\sigma)), \quad \bar{H}_{lk}(s,\sigma) = \frac{\partial M_x G(x_l(s), x_k(\sigma))}{\partial n_y},$$

$$n(x(s)) = \Big(\frac{x_2'(s)}{|x'(s)|}, -\frac{x_1'(s)}{|x'(s)|}\Big).$$

Дані ядра є неперервними в області $\bar{\Omega}$. Але коли точка інтегрування співпадає з точкою спостереження на Γ_l $(l = 1, 2)$ під час диференціювання маємо логарифмічну особливість. Для чисельного розв'язування доцільно виділити цю особливість, виконавши певні перетворення. Отримуємо наступне подання ядер

$$H_{ll}(s,\sigma) = H_{ll}^{(1)}(s,\sigma) \ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{s-\sigma}{2}\right) + H_{ll}^{(2)}(s,\sigma), \tag{2.3}$$

$$\tilde{H}_{ll}(s,\sigma) = \tilde{H}_{ll}^{(1)}(s,\sigma) \ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{s-\sigma}{2}\right) + \tilde{H}_{ll}^{(2)}(s,\sigma), \tag{2.4}$$

$$\tilde{\tilde{H}}_{ll}(s,\sigma) = \tilde{\tilde{H}}_{ll}^{(1)}(s,\sigma) \ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{s-\sigma}{2}\right) + \tilde{\tilde{H}}_{ll}^{(2)}(s,\sigma), \tag{2.5}$$

$$\hat{H}_{ll}(s,\sigma) = \hat{H}_{ll}^{(1)}(s,\sigma) \ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{s-\sigma}{2}\right) + \hat{H}_{ll}^{(2)}(s,\sigma), \tag{2.6}$$

$$\hat{\hat{H}}_{ll}(s,\sigma) = \hat{\hat{H}}_{ll}^{(1)}(s,\sigma) \ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{s-\sigma}{2}\right) + \hat{\hat{H}}_{ll}^{(2)}(s,\sigma), \tag{2.7}$$

$$\bar{H}_{ll}(s,\sigma) = \bar{H}_{ll}^{(1)}(s,\sigma) \ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{s-\sigma}{2}\right) + \bar{H}_{ll}^{(2)}(s,\sigma), \tag{2.8}$$

де

$$H_{ll}^{(1)}(s,\sigma) = \frac{1}{8}|x_l(s) - x_l(\sigma)|^2, \quad H_{ll}^{(2)}(s,\sigma) = \frac{1}{8}|x_l(s) - x_l(\sigma)|^2 \ln\Big(\frac{e|x_l(s) - x_l(\sigma)|^2}{4\sin^2\frac{s-\sigma}{2}}\Big),$$

$$\tilde{H}_{ll}^{(1)}(s,\sigma) = -\frac{1}{4}n(x_l(\sigma)) \cdot (x_l(s) - x_l(\sigma)),$$

$$\tilde{H}_{ll}^{(2)}(s,\sigma) = \frac{1}{4}n(x_l(\sigma)) \cdot (x_l(s) - x_l(\sigma))\Bigg(\ln\Big(\frac{4\sin^2\frac{s-\sigma}{2}}{e|x_l(s) - x_l(\sigma)|^2}\Big) - 1\Bigg),$$

$$\tilde{\tilde{H}}_{ll}^{(1)}(s,\sigma) = \frac{1}{4}n(x_l(s)) \cdot (x_l(s) - x_l(\sigma)),$$

$$\tilde{\tilde{H}}_{ll}^{(2)}(s,\sigma) = \frac{1}{4}n(x_l(s)) \cdot (x_l(s) - x_l(\sigma))\Bigg(\ln\Big(\frac{e|x_l(s) - x_l(\sigma)|^2}{4\sin^2\frac{s-\sigma}{2}}\Big) + 1\Bigg),$$

$$\hat{H}_{ll}^{(1)}(s,\sigma) = -\frac{1}{4}n(x_l(s)) \cdot n(x_l(\sigma)),$$

$$\hat{H}_{ll}^{(2)}(s,\sigma) = \frac{1}{4}n(x_l(s)) \cdot n(x_l(\sigma)) \cdot \Bigg(\ln\Big(\frac{4\sin^2\frac{s-\sigma}{2}}{e|x_l(s) - x_l(\sigma)|^2}\Big) - 2\frac{(x_l(s) - x_l(\sigma))^2}{|x_l(s) - x_l(\sigma)|^2} - 1\Bigg),$$

$$\hat{\hat{H}}_{ll}^{(1)}(s,\sigma) = \frac{1+\nu}{4},$$

$$\hat{\hat{H}}_{ll}^{(2)}(s,\sigma) = \frac{1+3\nu}{8\pi} + \frac{(1-\nu)(n(x_l(s)) \cdot (x_l(s) - x_l(\sigma)))^2}{4\pi|x_l(s) - x_l(\sigma)|^2} + \frac{(1+\nu)\ln|x_l(s) - x_l(\sigma)|^2}{8\pi}$$
$$-\frac{1+\nu}{4}\ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{s-\sigma}{2}\right).$$

При $s = \sigma$ всі ядра дорівнюють нулю, окрім

$$\hat{\hat{H}}_{ll}^{(2)}(s,s) = \frac{1+3\nu}{4} + \frac{1+\nu}{4}\ln(e|x_l^{'}(s)|^2),$$

$$\bar{H}_{ll}(s,s) = \frac{1-3\nu}{4}\frac{n(x_l(s)) \cdot x_l^{''}(s)}{|x_l^{'}(s)|^2}.$$

2.2 Чисельне розв'язування системи інтегральних рівнянь

Для чисельного розв'язування отриманої системи інтегральних рівнянь використуємо метод Нистрьома, який полягає у заміні інтегралу відповідною квадратурною формулою з певними ваговими функціями. Виберемо тригонометричні квадратури та рівновіддалений поділ,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\sigma)d\sigma \approx \frac{1}{2m}\sum_{j=0}^{2m-1} f(s_j), \tag{2.9}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\sigma)\ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{s-\sigma}{2}\right)d\sigma \approx \frac{1}{2m}\sum_{j=0}^{2m-1} R_j(s)f(s_j) \tag{2.10}$$

з вузлами

$$s_k = kh,\ k = 0, ..., 2m-1,\ h = \frac{\pi}{m} \tag{2.11}$$

і ваговими функціями

$$R_k(s) = -\frac{1}{m}\left(\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{j}\cos\frac{jk\pi}{m} + \frac{(-1)^k}{2m}\right). \tag{2.12}$$

Застосувавши даний метод до параметризованої системи інтегральних рівнянь (2.2) із врахованими логарифмічними особливостями ядер, отримаємо повністю дискретизовану систему лінійних рівнянь,

$$\begin{cases}
\sum_{j=0}^{2m-1}\Big((H_{11}^{(1)}(s_i,s_j)R_{|i-j|} + \frac{1}{2m}H_{11}^{(2)}(s_i,s_j))\varphi_{1j} + \frac{1}{2m}H_{12}(s_i,s_j)\varphi_{2j} + (\tilde{H}_{11}^{(1)}(s_i,s_j)R_{|i-j|} \\
+ \frac{1}{2m}\tilde{H}_{11}^{(2)}(s_i,s_j))\psi_{1j} + \frac{1}{2m}\tilde{H}_{12}(s_i,s_j)\psi_{2j}\Big) + \omega_{1i} = 0, \\
\sum_{j=0}^{2m-1}\Big((\tilde{\tilde{H}}_{11}^{(1)}(s_i,s_j)R_{|i-j|} + \frac{1}{2m}\tilde{\tilde{H}}_{11}^{(2)}(s_i,s_j))\varphi_{1j} + \frac{1}{2m}\tilde{\tilde{H}}_{12}\varphi_{2j} + (\hat{H}_{11}^{(1)}(s_i,s_j)R_{|i-j|} \\
+ \frac{1}{2m}\hat{H}_{11}^{(2)}(s_i,s_j))\psi_{1j} + \frac{1}{2m}\hat{H}_{12}\psi_{2j}\Big) + \frac{\partial\omega_{1i}}{\partial n_1} = 0, \\
\sum_{j=0}^{2m-1}\Big(\frac{1}{2m}\tilde{\tilde{H}}_{21}\varphi_{1j} + (\tilde{\tilde{H}}_{22}^{(1)}(s_i,s_j)R_{|i-j|} + \frac{1}{2m}\tilde{\tilde{H}}_{22}^{(2)}(s_i,s_j))\varphi_{2j} + \frac{1}{2m}\hat{H}_{21}(s_i,s_j)\psi_{1j} \\
+ (\hat{H}_{22}^{(1)}(s_i,s_j)R_{|i-j|} + \frac{1}{2m}\hat{H}_{22}^{(2)}(s_i,s_j))\psi_{2j}\Big) + \frac{\partial\omega_{2i}}{\partial n_2} = g_{2i}, \\
\sum_{j=0}^{2m-1}\Big(\frac{1}{2m}\hat{\hat{H}}_{21}(s_i,s_j)\varphi_{1j} + (\hat{\hat{H}}_{22}^{(1)}(s_i,s_j)R_{|i-j|} + \frac{1}{2m}\hat{\hat{H}}_{22}^{(2)}(s_i,s_j))\varphi_{2j} + \frac{1}{2m}(\bar{H}_{21}(s_i,s_j)\psi_{1j} \\
+ \bar{H}_{22}(s_i,s_j)\psi_{2j}) + M\omega_{2i} = q_{2i}, \\
\\
h\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=0}^{2m-1}\varphi_{kj} = A_0, \\
h\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=0}^{2m-1}(x_{1k}(s_j)\varphi_{kj} + n_1(x_k(s_j))\psi_{kj}) = A_1, \\
h\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=0}^{2m-1}(x_{2k}(s_j)\varphi_{kj} + n_2(x_k(s_j))\psi_{kj}) = A_2
\end{cases} \tag{2.13}$$

для $i = 0, ..., 2m-1$. Тут $g_{2i} = g(x_2(s_i))$, $q_{2i} = q(x_2(s_i))$, $\omega_{1i} = \omega(x_1(s_i))$, $\frac{\partial\omega_{li}}{\partial n_l} = \frac{\partial\omega(x_l(s_i))}{\partial n_l}$ $(l = 1, 2)$, $M\omega_{2i} = \omega(x_2(s_i))$, $R_j = R(s_j)$ Розв'язавши систему (2.13), отримаємо шукані коефіцієнти $(a_0, a_1, a_2) \in R^3$ і значення густин потенціалів на вибраному розбитті $\varphi_{kj} \approx \varphi_k(s_j)$, $\psi_{kj} \approx \psi_k(s_j)$, $k = 1, 2$, $j = 0, ..., 2m-1$.

Розділ 3

Знаходження розв'язку оберненої крайової задачі

Ми припускаємо, що крива Γ_1 належить класу так званих "зіркових"кривих. Таким чином, параметризація задається як $x_1(t) = \{r(t)c(t) : t \in [0, 2\pi]\}$, де $c(t) = (\cos(t), \sin(t))$ і $r : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ є 2π-періодичною функцією, яка задає радіус.

Тоді допоміжне рівняння (1.4) можна записати як

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{2} \int_0^{2\pi} \Big(H_{2k}(s,\sigma)\varphi_k(\sigma) + \tilde{H}_{2k}(s,\sigma)\psi_k(\sigma) \Big) d\sigma + \omega(x_2(s)) = f(x_2(s)), \tag{3.1}$$

Подамо рівняння (3.1) через оператори.

$$(S_k\varphi)(s) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_{2k}(s,\sigma)\varphi(\sigma) d\sigma,$$
$$(\tilde{S}_k\psi)(s) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{H}_{2k}(s,\sigma)\psi(\sigma) d\sigma.$$

Нехай $r = 21$. Тоді (3.1) можна записати так

$$S_1\varphi_1 + \tilde{S}_1\psi_1 + S_2\varphi_2 + \tilde{S}_2\psi_2 + \omega = f \quad \text{на } \Gamma_2. \tag{3.2}$$

Лінеаризоване рівняння матиме вигляд

$$\begin{aligned} &(S_1'[r,\varphi]q)(s) + (\tilde{S}_1'[r,\psi]q)(s) = \\ &\quad f(s) - (S_1\varphi_1)(s) - (\tilde{S}_1\psi_1)(s) - (S_2\varphi_2)(s) - (\tilde{S}_2\psi_2)(s) - \omega(s), \end{aligned} \tag{3.3}$$

де q - радіальна функція, що задає покращення для Γ_1, $(S_1'[r,\varphi]q)(s)$, $(\tilde{S}_1'[r,\psi]q)(s)$ - похідні Фреше операторів S і $\tilde{S}$ відповідно, і мають наступний вигляд

$$(S_1'[r,\varphi]q)(s) = \frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} q(\sigma) N_r(s,\sigma)\varphi(\sigma) d\sigma, \tag{3.4}$$

де $N_r(s,\sigma) = c(\sigma) \cdot \nabla_{x_1(\sigma)} |x_2(s) - x_1(\sigma)|^2 \ln |x_2(s) - x_1(\sigma)| = c(\sigma) \cdot (x_1(s) - x_1(\sigma))(\ln |x_2(s) - x_1(\sigma)| + 1)$, $c(\sigma) = (\cos(\sigma), \sin(\sigma))$,

$$(\tilde{S}_1'[r,\psi]q)(s) = -\frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} q(\sigma) \tilde{N}_r(s,\sigma)\psi(\sigma) d\sigma, \tag{3.5}$$

$\tilde{N}_r(s,\sigma) = c(\sigma) n(x_1(\sigma)) \cdot (3 + \ln |x_2(s) - x_1(\sigma)|)$.

Рівняння (3.3) розв'яжемо методом колокацій, апроксимуючи q у вигляді

$$q_m = \sum_{i=0}^{2m} q_{mi} l_i, \quad m \in N, \ n > m,$$

де $l_i(t) = \cos it$, коли $i = 0, ..., m$ і $l_i(t) = \sin(m-i)t$ для $i = m+1, ..., 2m$.
Тоді необхідно розв'язати таку систему лінійних рівнянь

$$\sum_{j=0}^{2m} q_{mj} A_{ij} = b_i, \quad i = 0, ..., 2n-1, \tag{3.6}$$

де

$$A_{ij} = \frac{1}{8n} \sum_{k=0}^{2n-1} \Big(l_j(t_k) N_r(t_i, t_k) \varphi_{1n}(t_k) + l_j(t_k) \tilde{N}_r(t_i, t_k) \psi_{1n}(t_k) \Big)$$

і

$$b_i = f(t_i) - w(t_i) - \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} \Big(H_{21}(t_i, t_k) \varphi_{1n}(t_k) + \tilde{H}_{21}(t_i, t_k) \psi_{1n}(t_k) +$$
$$\big(R_j(t_i) H_{22}^{(1)}(t_i, t_k) + H_{22}^{(2)}(t_i, t_k) \big) \varphi_{2n}(t_k) + \big(R_j(t_i) \tilde{H}_{22}^{(1)}(t_i, t_k) + \tilde{H}_{22}^{(2)}(t_i, t_k) \big) \psi_{2n}(t_k) \Big).$$

Оскільки система (3.6) є погано обумовленою і перевизначеною, то для знаходження її розв'язку застосуємо метод найменших квадратів і регуляризацію Тихонова. Тоді розв'язок матиме такий вигляд

$$q = (A^T A + \lambda I)^{-1} A^T b. \tag{3.7}$$

Нове наближення радіальної функції r обчислюється як $r = r + q$.
Отже, можна сформулювати наступний ітераційний процес.

1. Вибрати початкове наближення для r.
2. Розв'язати дискретизовану систему лінійних рівнянь для знаходження невідомих густин $\varphi_k, \psi_k, \ k = 1, 2$.
3. Для фіксованих $r, \varphi_k, \psi_k, \ k = 1, 2$ розв'язати лінеаризоване рівняння (3.3) відносно функції q, що задає покращення для Γ_1.
4. Обрахувати нове наближення для радіальної функції $r = r + q$.
5. Якщо $||q||_2 < \epsilon$, то наближення до Γ_1 знайдено. Інакше перейти до кроку 2.

Розділ 4

Чисельні експерименти

Висновки

Література

[1] Chen G., Boundary Element Methods with Applications to Nonlinear Problems / Goong Chen, Jianxin Zhou. - Atlantis Press, 2010. - 715 p.

[2] Chapko R. Integral Equations for Biharmonic Data Completion / Roman Chapko, B. Tomas Johansson. - Inverse Problems and Imaging (accepted) - 2019. - 16 p.

[3] Kress R. Linear Integral Equations / Rainer Kress. - New York : Springer, 1989. - 412 p.