

Integral equation method for inverse boundary value problem for biharmonic equation

1 Формулювання

Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ двоз'язна область з межею $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, де Γ_1 є внутрішньою межею and Γ_2 - зовнішньою. І нехай Γ_1 невідома.

$$\begin{cases} \Delta^2 u(x) = 0, & x \in \Omega, \\ u(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial n} = 0, & x \in \Gamma_1, \\ \frac{\partial u(x)}{\partial n} = g(x), & x \in \Gamma_2, \\ Mu(x) = q(x), & x \in \Gamma_2, \end{cases} \quad (1)$$

$$u(x) = f(x), \quad x \in \Gamma_2, \quad (2)$$

де $\Delta^2 u(x) = \frac{\partial^4 u(x)}{\partial x_1^4} + 2 \frac{\partial^4 u(x)}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} + \frac{\partial^4 u(x)}{\partial x_2^4} = 0$, $u(x) = u(x_1, x_2)$, $n = (n_1, n_2)$ - зовнішня нормаль до Γ , $Mu = \nu \Delta u + (1 - \nu)(u_{x_1 x_1} u_1^2 + 2u_{x_1 x_2} n_1 n_2 + u_{x_2 x_2} u_2^2)$, $\nu \in (0, 1)$ і $g(x), q(x), f(x)$ - деякі задані функції. Роз'язування (1)-(2) складається зі знаходження невідомої Γ_1 для заданих граничних умов.

2 Загальні положення

Фундаментальний роз'язок бігармонійного рівняння має вигляд

$$G(x, y) = \frac{1}{8\pi} |x - y|^2 \ln |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}^2. \quad (3)$$

Розглянемо потенціал простого шару для бігармонійного рівняння з густинами φ, ψ , що визначені на Γ :

$$u(x) = \int_{\Gamma} \left(G(x, y) \varphi(y) + \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y} \psi(y) \right) d\sigma_y, \quad x \in \Omega.$$

Теорема 1. *Розв'язок прямої крайової задачі (1) має вигляд*

$$u(x) = \sum_{k=1}^2 \int_{\Gamma_k} \left(G(x, y) \varphi_k(y) + \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y} \psi_k(y) \right) d\sigma_y + \omega(x), \quad x \in \Omega, \quad (4)$$

де $\omega(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ ($(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) \in R^3$), $\varphi_k, \psi_k \in C(\Gamma_k)$, $k = 1, 2$, де невідомі густини визначаються із системи інтегральних рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^2 \int_{\Gamma_k} \left(G(x, y) \varphi_k(y) + \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y} \psi_k(y) \right) d\sigma_y + \omega(x) = 0, \quad x \in \Gamma_1, \\ \sum_{k=1}^2 \int_{\Gamma_k} \left(\frac{\partial G(x, y)}{\partial n_x} \varphi_k(y) + \frac{\partial^2 G(x, y)}{\partial n_y \partial n_x} \psi_k(y) \right) d\sigma_y + \frac{\partial \omega(x)}{\partial n} = 0, \quad x \in \Gamma_1, \\ \sum_{k=1}^2 \int_{\Gamma_k} \left(\frac{\partial G(x, y)}{\partial n_x} \varphi_k(y) + \frac{\partial^2 G(x, y)}{\partial n_y \partial n_x} \psi_k(y) \right) d\sigma_y + \frac{\partial \omega(x)}{\partial n} = g(x), \quad x \in \Gamma_2, \\ \sum_{k=1}^2 \int_{\Gamma_k} \left(M_x G(x, y) \varphi_k(y) + \frac{\partial M_x G(x, y)}{\partial n_y} \psi_k(y) \right) d\sigma_y + M_x \omega(x) = q(x), \quad x \in \Gamma_2, \\ \sum_{k=1}^2 \int_{\Gamma_k} \varphi_k(y) d\sigma_y = A_0, \\ \sum_{k=1}^2 \int_{\Gamma_k} (y_1 \varphi_k(y) + n_1(y) \psi_k(y)) d\sigma_y = A_1, \\ \sum_{k=1}^2 \int_{\Gamma_k} (y_2 \varphi_k(y) + n_2(y) \psi_k(y)) d\sigma_y = A_2, \end{array} \right. \quad (5)$$

для заданих $(A_0, A_1, A_2) \in R^3$.

З умови (2) маємо

$$\sum_{k=1}^2 \int_{\Gamma_k} \left(G(x, y) \varphi_k(y) + \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y} \psi_k(y) \right) d\sigma_y + \omega(x) = f(x), \quad x \in \Gamma_2, \quad (6)$$

Теорема 2. *Обернена крайова задача (1)-(2) еквівалентна системі інтегральних рівнянь (5)-(6).*

Теорема 3 (Існування і єдиність розв'язку непрямої задачі). *Нехай $\tilde{\Gamma}_1$, Γ_1 - замкнені криві, що містяться всередині Γ_2 , \tilde{u} , u - розв'язки задачі (1) для $\tilde{\Gamma}_1$ і Γ_1 відповідно. Нехай $g \neq 0, q \neq 0$ і $u = \tilde{u}$ на відкритій підмножині Γ_2 . Тоді $\tilde{\Gamma}_1 = \Gamma_1$.*

Доведення. Доведемо від протилежного. Нехай $\tilde{\Gamma}_1 \neq \Gamma_1$. Нехай Ω_2 - область, обмежена Γ_2 , Ω_1 , $\tilde{\Omega}_1$ - області обмежені Γ_1 , $\tilde{\Gamma}_1$ відповідно.

$$W := \Omega_2 \setminus (\Omega_1 \cup \tilde{\Omega}_1), \quad \Gamma_2 \subset \delta W.$$

За теоремою Гольмгрена маємо $u = \tilde{u}$ в W . Без втрати загальності припустимо, що $W^* := (\Omega_2 \setminus \overline{W}) \setminus \Omega_1$ непорожня множина. Тоді u є визначена в W^* як розв'язок задачі (1) для Γ_1 . Вона є гармонічною в W^* , неперервною в \overline{W}^* і задовольняє граничні умови на δW^* . Ця гранична умова випливає з того, що кожна точка з W^* належить або Γ_1 , або $\delta W \cap \tilde{\Gamma}_1$. Для $x \in \Gamma_1$ маємо $u(x) = 0$ як наслідок граничних умов для u , для $x \in \tilde{\Gamma}_1$ маємо $u(x) = \tilde{u}(x)$ і тому $u(x) = 0$ як наслідок граничних умов для \tilde{u} . Тоді за принципом максимуму $u = 0$ в W^* і тому $u = 0$ в D . Це суперечить тому, що $g \neq 0, q \neq 0$. \square

3 Параметризація

Припустимо, що дані криві Γ_1 і Γ_2 достатньо гладкі і їх можна подати у параметричному заданні

$$\Gamma_l = \{x_l(s) = (x_{1l}(s), x_{2l}(s)) : s \in [0, 2\pi]\}, \quad (7)$$

де x_l ($l = 1, 2$) - аналітична й 2π -періодична функція, $|x'(s)| > 0$. Тоді систему можна записати

$$\left\{ \begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^2 \int_0^{2\pi} \left(H_{1k}(s, \sigma) \varphi_k(\sigma) + \tilde{H}_{1k}(s, \sigma) \psi_k(\sigma) \right) d\sigma + \omega(x_1(s)) = 0, \\
& \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^2 \int_0^{2\pi} \left(\tilde{\tilde{H}}_{1k}(s, \sigma) \varphi_k(\sigma) + \hat{H}_{1k}(s, \sigma) \psi_k(\sigma) \right) d\sigma + \frac{\partial \omega(x_1(s))}{\partial n_1} = 0, \\
& \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^2 \int_0^{2\pi} \left(\tilde{\tilde{H}}_{2k}(s, \sigma) \varphi_k(\sigma) + \hat{H}_{2k}(s, \sigma) \psi_k(\sigma) \right) d\sigma + \frac{\partial \omega(x_2(s))}{\partial n_2} = g(x_2(s)), \\
& \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^2 \int_0^{2\pi} \left(M_x H_{2k}(s, \sigma) \varphi_k(\sigma) + M_x \tilde{H}_{2k}(s, \sigma) \psi_k(\sigma) \right) d\sigma + M_x \omega(x_2(s)) = q(x_2(s)), \\
& \sum_{k=1}^2 \int_0^{2\pi} \varphi_k(\sigma) d\sigma = A_0, \\
& \sum_{k=1}^2 \int_0^{2\pi} (x_{1k} \varphi_k(\sigma) + n_1(x_k(\sigma)) \psi_k(\sigma)) d\sigma = A_1, \\
& \sum_{k=1}^2 \int_0^{2\pi} (x_{2k} \varphi_k(\sigma) + n_2(x_k(\sigma)) \psi_k(\sigma)) d\sigma = A_2,
\end{aligned} \right. \tag{8}$$

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^2 \int_0^{2\pi} \left(H_{2k}(s, \sigma) \varphi_k(\sigma) + \tilde{H}_{2k}(s, \sigma) \psi_k(\sigma) \right) d\sigma + \omega(x_2(s)) = f(x_2(s)), \tag{9}$$

для $s \in [0, 2\pi]$.

Тут $\varphi_l(s) := \varphi_k(x_l(s))|x'_l(s)|$, $\psi_l(s) := \psi_k(x_l(s))|x'_l(s)|$ — невідомі густини і ядра мають вигляд

$$\begin{aligned}
H_{lk}(s, \sigma) &= G(x_l(s), x_k(\sigma)), \quad \tilde{H}_{lk}(s, \sigma) = \frac{\partial G(x_l(s), x_k(\sigma))}{\partial n_y}, \\
\tilde{\tilde{H}}_{lk}(s, \sigma) &= \frac{\partial G(x_l(s), x_k(\sigma))}{\partial n_x}, \quad \hat{H}_{lk}(s, \sigma) = \frac{\partial^2 G(x_l(s), x_k(\sigma))}{\partial n_y \partial n_x}, \\
n(x(s)) &= \left(\frac{x'_2(s)}{|x'(s)|}, -\frac{x'_1(s)}{|x'(s)|} \right).
\end{aligned}$$

Відомими способами знаходимо невідомі густини з системи (8).

4 Алгоритм знаходення розв'язку оберненої крайової задачі

Знаходження розв'язку задачі (5)-(6) складається з наступного ітераційного процесу:

- Для заданого початкової Γ_1 розв'язуємо пряму задачу для (5) і знаходимо невідомі густини.
- Лінеаризуємо рівняння (6) і покращуємо Γ_1 , розв'язуючи лінеаризоване рівняння (6) для фіксованих густин, які є відомими з (5).

Ми припускаємо, що крива Γ_1 належить класу так званих "зіркових" кривих. Таким чином, параметризація задається як $x_1(t) = \{r(t)c(t) : t \in [0, 2\pi]\}$, де $c(t) = (\cos(t), \sin(t))$ і $r : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ є 2π -періодичною функцією, яка представляє радіус.

4.1 Похідна Фреше

Подано рівняння (6) через оператори.

$$\begin{aligned}(S_k\varphi)(s) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_{2k}(s, \sigma)\varphi(\sigma)d\sigma, \\ (\tilde{S}_k\psi)(s) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{H}_{2k}(s, \sigma)\psi(\sigma)d\sigma.\end{aligned}$$

Нехай $r = 21$. Тоді (6) можна записати так

$$S_1\varphi_1 + \tilde{S}_1\psi_1 + S_2\varphi_2 + \tilde{S}_2\psi_2 + \omega = f \quad \text{на } \Gamma_2. \quad (10)$$

Нехай q радіальна функція, яка задає покращення для Γ_1 . Похідна Фреше для оператора S відносно функції φ_1 матиме вигляд

$$(S'[r, \varphi]q)(s) = \frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} q(\sigma)N_r(s, \sigma)\varphi(\sigma)d\sigma, \quad (11)$$

де $N_r(s, \sigma) = c(\sigma) \cdot \nabla_{x_1(\sigma)} |x_2(s) - x_1(\sigma)|^2 \ln |x_2(s) - x_1(\sigma)|$, $c(\sigma) = (\cos(\sigma), \sin(\sigma))$.

Аналогічно для оператора \tilde{S} ,

$$(\tilde{S}'[r, \psi]q)(s) = \frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} q(\sigma) \tilde{N}_r(s, \sigma) \psi(\sigma) d\sigma, \quad (12)$$

$$\tilde{N}_r(s, \sigma) = \dots$$