

ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА
ФРАНКА

Факультет прикладної математики та інформатики
Кафедра обчислювальної математики

Курсова робота
на тему:

Метод інтегральних рівнянь для крайових задач для бігармонічного рівняння

Студентки III курсу групи ПМП-31
Напряму підготовки “Прикладна математика”
Багрій А. Г.

Керівник:
проф. Хапко Р. С.
Національна шкала: _____
Кількість балів: _____
Оцінка ECTS: _____

Львів 2019

Зміст

Вступ

Означення 1 Бігармонічним рівнянням називається рівняння вигляду

$$\Delta^2 f(x) = \frac{\partial^4 f}{\partial x_1^4} + \dots + \frac{\partial^4 f}{\partial x_n^4} = 0, \quad f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$$

Нехай Ω - деяка двозв'язна область в R^2 , що представляє пластину. І нехай область обмежена кривими $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$ - двозв'язна область в R^2 .

Розглянемо таке рівняння

$$\rho u_{tt}(x, t) + D\Delta^2 u(x, t) = 0, \quad x \in \Omega \subseteq R^2, t > 0, \quad (1)$$

де $u(x, t)$ - вертикальний відхил пластини відносно координати x в момент часу t , $\rho > 0$ - густина маси на одиницю площі, $D > 0$ - жорсткість згинання пластини, $\Delta^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right)^2$ - бігармонічний оператор.

Це рівняння моделює вібрації тонкої пластини, що піддається вигину з невеликим відхиленням. Ця математична модель є важливою в сейсмології і структурній механіці. Коли пластина перебуває у електростатичній рівновазі, u більше не залежить часу і рівняння (??) набуває вигляду

$$\Delta^2 u(x) = 0, \quad x \in \Omega,$$

де u задовольняє бігармонічне рівняння.

Бігармонічне рівняння (??) є також стандартним рівнянням еластичності пластини, що піддається розтягуванню. Функція u в (??) зазвичай означає функцію, яка не має конкретного фізичного значення.

Розв'язок бігармонічного рівняння можна обчислити методом скінченних елементів для будь-яких коректних крайових умов. Проте в даній ситуації він має певні недоліки і ускладнює процес пошуку розв'язку. Тому доцільно буде розглянути інший метод - метод граничних інтегральних рівнянь.

Метод інтегральних рівнянь полягає у зведенні крайової задачі до інтегральних рівнянь на границі області з подальшим чисельним розв'язуванням. Для цього розглядають розв'язок задачі у вигляді потенціалу і використовуючи властивості неперервності потенціалів, отримують потрібні інтегральні рівняння. Потім рівняння параметризують і застосовують певні квадратури, тим самим отримуючи систему лінійних рівнянь, яку можна розв'язати відомими методами.

Для початку розглянемо фізичну структуру крайової задачі з бігармонічним рівнянням.

Нехай тонка пластина з жорсткістю D і коефіцієнтом Пуасона $0 < \nu < \frac{1}{2}$ перебуває в електростатичній рівновазі. Розглянемо нескінченно малий елемент пластини. Нехай M_{x_1} і M_{x_2} - моменти згину на одиницю довжини, що діють на її края.

$$M_{x_1} = -D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right),$$

$$M_{x_2} = -D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right),$$

Робота, виконана моментами на нескінченно малому елементі, має вигляд

$$dV_1 = \frac{1}{2} D \left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right).$$

Окрім енергії деформації також робить внесок в енергію деформації момент крутіння

$$M_{x_1 x_2} = M_{x_2 x_1} = D(1 - \nu) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

Сума їх внеску в енергію деформації дорівнює

$$dV_2 = D(1 - \nu) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2.$$

Загальна енергія деформації дорівнює

$$V(u) = \int_{\Omega} (dV_1 + dV_2) = \frac{D}{2} \int_{\Omega} (|\Delta u(x)|^2 + (1 - \nu)(u_{x_1 x_2}^2(x) - u_{x_1 x_1}(x)u_{x_2 x_2}(x))) dx.$$

Для зручності вважатимемо $D = 1$. Використаємо принцип ймовірних переміщень, згідно з яким для рівноваги механічної системи з ідеальними зв'язками необхідно і достатньо, щоб сума віртуальних робіт тільки активних сил на будь-якому можливому переміщенні системи дорівнювала нулю. Можливими переміщеннями механічної системи називаються уявні нескінченно малі переміщення, які припускаються в даний момент накладеними на систему зв'язками, $\delta V(u) = \delta \int_{\Omega} q(x)u(x)dx$, u - стан рівноваги пластини, q - зовнішнє навантаження, розподілене по пластині, і на границі області напруги немає.

Маємо

$$0 = \delta V(u) - \delta \int_{\Omega} q(\delta u)dx = \int_{\Omega} (\Delta u(\delta u) + (1 - \nu)(2u_{x_1 x_2}(\delta u)_{x_1 x_2} - u_{x_1 x_1}(\delta u)_{x_2 x_2} - (\delta u)_{x_1 x_1} u_{x_2 x_2})) dx_1 dx_2 - \int_{\Omega} q(\delta u)dx_1 dx_2, \\ \forall \delta u.$$

Лема 1 (формула Релея – Гріна) Визначимо білінійну форму

$$a(u, \nu) = \int_{\Omega} (\Delta u \Delta \nu + (1 - \nu)(2u_{x_1 x_2} \nu_{x_1 x_2} - u_{x_1 x_1} \nu_{x_2 x_2} - u_{x_2 x_2} \nu_{x_1 x_1})) dx, \quad 0 < \nu < \frac{1}{2}.$$

Тоді для достатньо гладких u, ν

$$a(u, \nu) = \int_{\Omega} (\Delta^2 u) \nu dx - \int_{\Omega} ((B_1 u) \nu - (B_2 u) \frac{\partial \nu}{\partial n}),$$

де

$$B_1 = \frac{\partial \Delta u}{\partial n} - (1 - \nu) \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(n_1 n_2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \right) - (n_1^2 - n_2^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right),$$

$$B_2 = \nu \Delta u + (1 - \nu) \left(n_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + n_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + 2n_1 n_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \right),$$

B_1 - поперечна сила, B_2 - момент згину, $n = (n_1, n_2)$ одинична зовнішня нормаль на $\partial\Omega$, $\frac{\partial}{\partial \Omega} = -n_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + n_1 \frac{\partial}{\partial x_2}$ - тангенціальна похідна проти годинникової стрілки вздовж $\partial\Omega$.

З леми отримуємо, що

$$\Delta^2 u(x) = q(x), \quad x \in \Omega.$$

На межі можна ввести декілька різних типів умов. Розглянемо граничні умови у випадку закріпленої пластини.

$$\begin{aligned} u &= 0, \quad x \in \Omega \quad (\text{умова Діріхле}), \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0, \quad x \in \Omega \quad (\text{умова Неймана}). \end{aligned}$$

Оскільки навантаження $q(x)$ завжди може бути усунене відніманням потенціалу, то можна просто припустити, що $q(x) = 0$. Тоді

$$\Delta^2 u(x) = 0, \quad x \in \Omega$$

Граничні умови, в свою чергу, стають неоднорідними. В результаті отримуємо таку крайову задачу:

$$\begin{cases} \Delta^2 u(x) = 0, & x \in \Omega, \\ u(x) = f(x), & x \in \partial\Omega, \\ \frac{\partial u(x)}{\partial n} = g(x) & x \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (2)$$

Фізичний зміст даної задачі полягає у знаходженні кута зсуву закріпленої пластини.

Отже, розв'язування крайової задачі Діріхле (??) полягає у знаходженні такої функції $u \in C^4(\bar{\Omega})$, що задовольняє бігармонійне рівняння і задані крайові умови.

Розділ 1

Зведення крайової задачі до системи інтегральних рівнянь

1.1 Деякі властивості з теорії потенціалів для бігармонічного рівняння

На основі класичних еліптичних крайових задач, маємо наступну теорему існування та єдиності.

Теорема 1 Нехай $(f, g) \in H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega) \oplus H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ і

$$\nu \in H_0^2(\Omega) = \left\{ \nu \in H^2(\Omega) \mid \nu = \frac{\partial \nu}{\partial n} = 0 \text{ on } \partial\Omega \right\},$$

де H_0^2 - простір Соболева. Тоді існує єдиний слабкий розв'язок $w \in H^2(\Omega)$ для (??), який задовольняє крайові умови на $\partial\Omega$ так, що

$$a(u, \nu) = 0, \quad \forall \nu \in H_0^2(\Omega).$$

Розглянемо одно- та двошарові потенціали як розв'язок бігармонічної крайової задачі. Неважко показати, що фундаментальний розв'язок $G(x, y)$ бігармонічного рівняння

$$\Delta_x^2 G(x, y) = \Delta_y^2 G(x, y) = \delta(x - y), \quad x, y \in R^2,$$

має вигляд

$$G(x, y) = \frac{1}{8\pi} |x - y|^2 \ln |x - y|. \quad (1.1)$$

Нехай $x \in \Omega$. Припустимо, що u задовольняє рівняння $\Delta^2 u(x) = 0$ в Ω . За лемою (??) після інтегрування частинами по Ω і $\partial\Omega$ отримуємо

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\Omega} ((\Delta^2 u(y))G(x, y) - (\Delta_y^2 G(x, y))u(y))dy \\ &= \int_{\Omega} ((B_1 u(y))G(x, y) - (B_2 u(y))\frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y})d\sigma_y + a(u, G(x, \cdot)) \\ &\quad - (\int_{\Omega} ((B_{1y} G(x, y))u(y) - (B_{2y} G(x, y))\frac{\partial u(y)}{\partial n_y})d\sigma_y + a(G(x, \cdot), u)) \\ &= \int_{\Omega} (G(x, y)B_1 u(y) - \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y} B_2 u(y) - (B_{1y} G(x, y))u(y) + (B_{2y} G(x, y))\frac{\partial u(y)}{\partial n_y})d\sigma_y. \end{aligned}$$

Очевидно, що $u(x)$ можна знайти, якщо відомі $u, \frac{\partial u}{\partial n}, B_1 u, B_2 u$ на $\partial\Omega$. Але з постановки задачі (??) відомі лише $u, \frac{\partial u}{\partial n}$ на $\partial\Omega$.

$$V_1(\varphi)(x) = \int_{\Omega} G(x, y) \varphi(y) d\sigma_y \quad - \text{потенціал простого шару},$$

$$V_2(\psi)(x) = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial n_y} G(x, y) \psi(y) d\sigma_y \quad - \text{потенціал подвійного шару},$$

$$V_3(\tilde{\varphi})(x) = \int_{\Omega} \tilde{\varphi}(y) B_{2y} G(x, y) d\sigma_y \quad - \text{потенціал потрійного шару},$$

$$V_4(\tilde{\psi})(x) = \int_{\Omega} \tilde{\psi}(y) B_{1y} G(x, y) d\sigma_y \quad - \text{потенціал шару четвертого степеня},$$

$$\varphi = B_1 u, \quad \psi = B_2 u, \quad \tilde{\varphi} = \frac{\partial u(y)}{\partial n_y}, \quad \tilde{\psi}(x) = u(y).$$

Дані потенціали $V_1 - V_4$ визначені для $x \notin \partial\Omega$. Коли $x \in \partial\Omega$, $V_1 - V_3$ також є визначені для $\forall x \in \Omega$, але при диференціюванні отримуємо логарифмічну особливість.

Чим більший степінь шару, тим більше сингулярним стає ядро при $x = y \in \partial\Omega$. Оскільки для обчислювань вигідніше використовувати потенціали шарів, які не є надто сингулярними, то для побудови розв'язку візьмемо простий і двошаровий потенціали:

$$u(x) = \int_{\partial\Omega} (G(x, y) \varphi(y) + \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y} \psi(y)) d\sigma_y, \quad x \in \Omega, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial n} = \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial G(x, y)}{\partial n} \varphi(y) + \frac{\partial^2 G(x, y)}{\partial n_x \partial n_y} \psi(y) \right) d\sigma_y, \quad x \in \Omega, \quad (1.3)$$

де φ і ψ - густини потенціалів. Також розв'язок даної задачі можна подати у вигляді комбінації й інших потенціалів.

1.2 Непрямий метод інтегральних рівнянь

В цьому розділі сформулюємо граничні інтегральні рівняння для крайової задачі (??). Для того, щоб розв'язок задачі (??) був єдиним, необхідно змодифікувати рівняння.

Ядра в рівняннях (??), (??) мають вигляд

$$\frac{\partial G(x, y)}{\partial n_x} = \frac{1}{8\pi} n(x) \cdot (x - y)(1 + 2 \ln |x - y|), \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y} = -\frac{1}{8\pi} n(y) \cdot (x - y)(1 + 2 \ln |x - y|), \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G(x, y)}{\partial n_x \partial n_y} = \frac{\partial^2 G(x, y)}{\partial n_y \partial n_x} = & -\frac{1}{8\pi} \left(2 \frac{n(x) \cdot (x - y) n(y) \cdot (x - y)}{|x - y|^2} \right. \\ & \left. + n(x) \cdot n(y)(1 + 2 \ln |x - y|) \right). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Теорема 2 Розв'язок крайової задачі (??) можна подати у вигляді

$$u(x) = \sum_{k=1}^2 \int_{\partial\Omega_k} \left(G(x, y) \varphi_k(y) + \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y} \psi_k(y) \right) d\sigma_y + \omega(x), \quad x \in \Omega, \quad (1.7)$$

де $\omega(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ ($(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) \in R^3$), $\varphi_k, \psi_k \in C(\partial\Omega_k)$, $k = 1, 2$, і є єдиним розв'язком системи інтегральних рівнянь

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^2 \int_{\partial\Omega_k} \left(G(x, y) \varphi_k(y) + \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y} \psi_k(y) \right) d\sigma_y + \omega(x) = f(x), & x \in \partial\Omega_l, \quad l = 1, 2, \\ \sum_{k=1}^2 \int_{\partial\Omega_k} \left(\frac{\partial G(x, y)}{\partial n_x} \varphi_k(y) + \frac{\partial^2 G(x, y)}{\partial n_x \partial n_y} \psi_k(y) \right) d\sigma_y + \frac{\partial \omega(x)}{\partial n} = g(x), & x \in \partial\Omega_l, \quad l = 1, 2, \\ \sum_{k=1}^2 \int_{\partial\Omega_k} \varphi_k(y) d\sigma_y = A_0, \\ \sum_{k=1}^2 \int_{\partial\Omega_k} (y_1 \varphi_k(y) + n_1(y) \psi_k(y)) d\sigma_y = A_1, \\ \sum_{k=1}^2 \int_{\partial\Omega_k} (y_2 \varphi_k(y) + n_2(y) \psi_k(y)) d\sigma_y = A_2 \end{cases} \quad (1.8)$$

для заданих $(A_0, A_1, A_2) \in R^3$.

Зауважимо, що константи A_0, A_1, A_2 можна вибрати довільно, але розв'язок системи залежить від вибору цих констант. В загальному, не можна одночасно брати за значення A_0, A_1, A_2 нулі.

Наслідок 1 Припустимо, що система інтегральних рівнянь

$$\begin{cases} \int_{\partial\Omega_k} \left(G(x, y) \eta_{1k}(y) + \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y} \eta_{2k}(y) \right) d\sigma_y = a_0 + a_1 x_{1k} + a_2 x_{2k}, & x \in \partial\Omega_k \\ \int_{\partial\Omega_k} \left(\frac{\partial G(x, y)}{\partial n_x} \eta_{1k}(y) + \frac{\partial^2 G(x, y)}{\partial n_x \partial n_y} \eta_{2k}(y) \right) d\sigma_y = a_1 n_{1k}(x) + a_2 n_{2k}(x), & x \in \partial\Omega_k \end{cases}$$

має єдиний розв'язок для $\forall (a_0, a_1, a_2) \in R$ для заданих (η_{1l}, η_{2l}) , $l = 1, 2$. Тоді для будь-яких заданих функцій $(f_l, g_l) \in H^{r+3}(\partial\Omega_l) \oplus H^{r+2}(\partial\Omega_l)$, $l = 1, 2$ система інтегральних рівнянь

$$\begin{cases} \int_{\partial\Omega_k} \left(G(x, y) \varphi_k(y) + \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y} \psi_k(y) \right) d\sigma_y = f_k(x), & x \in \partial\Omega_k, \\ \int_{\partial\Omega_k} \left(\frac{\partial G(x, y)}{\partial n_x} \varphi_k(y) + \frac{\partial^2 G(x, y)}{\partial n_x \partial n_y} \psi_k(y) \right) d\sigma_y = g_k(x), & x \in \partial\Omega_k \end{cases}$$

так само має єдиний розв'язок для $(\varphi_k, \psi_k) \in H^r(\partial\Omega_l) \oplus H^{r+1}(\partial\Omega_l)$, $l = 1, 2$. Отже, будь-яку бігармонійну функцію в цьому випадку можна подати у вигляді (??).

1.3 Параметризація

Припустимо, що дані криві $\partial\Omega_1$ і $\partial\Omega_2$ достатньо гладкі і їх можна подати у параметричному заданні

$$\partial\Omega_l = \{x_l(s) = (x_{1l}(s), x_{2l}(s)) : s \in [0, 2\pi]\}, \quad (1.9)$$

де x_l ($l = 1, 2$) - аналітична й 2π -періодична функція, $|x'(s)| > 0$. Тоді систему (??) можна записати

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^2 \int_0^{2\pi} \left(H_{lk}(s, \sigma) \varphi_k(\sigma) + \tilde{H}_{lk}(s, \sigma) \psi_k(\sigma) \right) d\sigma + \omega(x_l(s)) = f(x_l(s)), \quad l = 1, 2, \\ \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^2 \int_0^{2\pi} \left(\tilde{\tilde{H}}_{lk}(s, \sigma) \varphi_k(\sigma) + \hat{H}_{lk}(s, \sigma) \psi_k(\sigma) \right) d\sigma + \frac{\partial \omega(x_l(s))}{\partial n_l} = g(x_l(s)), \quad l = 1, 2, \\ \sum_{k=1}^2 \int_0^{2\pi} \varphi_k(\sigma) d\sigma = A_0, \\ \sum_{k=1}^2 \int_0^{2\pi} (x_{1k} \varphi_k(\sigma) + n_1(x_k(\sigma)) \psi_k(\sigma)) d\sigma = A_1, \\ \sum_{k=1}^2 \int_0^{2\pi} (x_{2k} \varphi_k(\sigma) + n_2(x_k(\sigma)) \psi_k(\sigma)) d\sigma = A_2, \end{array} \right. \quad (1.10)$$

для $s \in [0, 2\pi]$.

Тут $\varphi_l(s) := \varphi_k(x_l(s))|x'_l(s)|$, $\psi_l(s) := \psi_k(x_l(s))|x'_l(s)|$ – невідомі густини і ядра мають вигляд

$$\begin{aligned} H_{lk}(s, \sigma) &= G(x_l(s), x_k(\sigma)), \quad \tilde{H}_{lk}(s, \sigma) = \frac{\partial G(x_l(s), x_k(\sigma))}{\partial n_y}, \\ \tilde{\tilde{H}}_{lk}(s, \sigma) &= \frac{\partial G(x_l(s), x_k(\sigma))}{\partial n_x}, \quad \hat{H}_{lk}(s, \sigma) = \frac{\partial^2 G(x_l(s), x_k(\sigma))}{\partial n_y \partial n_x}, \\ n(x(s)) &= \left(\frac{x'_2(s)}{|x'(s)|}, -\frac{x'_1(s)}{|x'(s)|} \right) \end{aligned}$$

Дані ядра є неперервними в області $\bar{\Omega}$. Але коли точка інтегрування співпадає з точкою спостереження на $\partial\Omega_l$ ($l = k$) підчас диференціювання маємо логарифмічну особливість. Для подальшого чисельного розв'язування доцільно виділити цю особливість, виконавши певні перетворення. Продemonструємо цей процес на ядрі $H_{ll}(s, \sigma)$, $l = 1, 2$.

$$\begin{aligned} H_{ll}(s, \sigma) &= \frac{1}{8} |x_l(s) - x_l(\sigma)|^2 \ln |x_l(s) - x_l(\sigma)|^2 \pm \frac{1}{8} |x_l(s) - x_l(\sigma)|^2 \ln \left(\frac{4}{e} \sin^2 \frac{s - \sigma}{2} \right) \\ &= \frac{1}{8} |x_l(s) - x_l(\sigma)|^2 \ln \left(\frac{4}{e} \sin^2 \frac{s - \sigma}{2} \right) + \frac{1}{8} |x_l(s) - x_l(\sigma)|^2 \ln \frac{e |x_l(s) - x_l(\sigma)|^2}{4 \sin^2 \frac{s - \sigma}{2}}. \\ &= H_{ll}^{(1)}(s, \sigma) \ln \left(\frac{4}{e} \sin^2 \frac{s - \sigma}{2} \right) + H_{ll}^{(2)}(s, \sigma) \end{aligned}$$

Аналогічні перетворення можна виконати для інших ядер. В результаті, маємо

$$H_{ll}(s, \sigma) = H_{ll}^{(1)}(s, \sigma) \ln \left(\frac{4}{e} \sin^2 \frac{s - \sigma}{2} \right) + H_{ll}^{(2)}(s, \sigma) \quad (1.11)$$

$$\tilde{H}_{lk}(s, \sigma) = \tilde{H}_{lk}^{(1)}(s, \sigma) \ln \left(\frac{4}{e} \sin^2 \frac{s - \sigma}{2} \right) + \tilde{H}_{ll}^{(2)}(s, \sigma) \quad (1.12)$$

$$\tilde{\tilde{H}}_{ll}(s, \sigma) = \tilde{\tilde{H}}_{lk}^{(1)}(s, \sigma) \ln \left(\frac{4}{e} \sin^2 \frac{s - \sigma}{2} \right) + \tilde{\tilde{H}}_{ll}^{(2)}(s, \sigma) \quad (1.13)$$

$$\hat{H}_{ll}(s, \sigma) = \hat{H}_{ll}^{(1)}(s, \sigma) \ln \left(\frac{4}{e} \sin^2 \frac{s - \sigma}{2} \right) + \hat{H}_{ll}^{(2)}(s, \sigma) \quad (1.14)$$

де

$$\begin{aligned}
H_u^{(1)}(s, \sigma) &= \frac{1}{8}|x_l(s) - x_l(\sigma)|^2, \quad H_u^{(2)}(s, \sigma) = \frac{1}{8}|x_l(s) - x_l(\sigma)|^2 \ln \left(\frac{e|x_l(s) - x_l(\sigma)|^2}{4 \sin^2 \frac{s-\sigma}{2}} \right), \\
\tilde{H}_u^{(1)}(s, \sigma) &= -\frac{1}{4}n(x_l(\sigma)) \cdot (x_l(s) - x_l(\sigma)), \\
\tilde{H}_u^{(2)}(s, \sigma) &= \frac{1}{4}n(x_l(\sigma)) \cdot (x_l(s) - x_l(\sigma)) \left(\ln \left(\frac{4 \sin^2 \frac{s-\sigma}{2}}{e|x_l(s) - x_l(\sigma)|^2} \right) - 1 \right), \\
\tilde{\tilde{H}}_u^{(1)}(s, \sigma) &= \frac{1}{4}n(x_l(s)) \cdot (x_l(s) - x_l(\sigma)), \\
\tilde{\tilde{H}}_u^{(2)}(s, \sigma) &= \frac{1}{4}n(x_l(s)) \cdot (x_l(s) - x_l(\sigma)) \left(\ln \left(\frac{e|x_l(s) - x_l(\sigma)|^2}{4 \sin^2 \frac{s-\sigma}{2}} \right) + 1 \right), \\
\hat{H}_u^{(1)}(s, \sigma) &= -\frac{1}{4}n(x_l(s)) \cdot n(x_l(\sigma)), \\
\hat{H}_u^{(2)}(s, \sigma) &= \frac{1}{4}n(x_l(s)) \cdot n(x_l(\sigma)) \cdot \left(\ln \left(\frac{4 \sin^2 \frac{s-\sigma}{2}}{e|x_l(s) - x_l(\sigma)|^2} \right) - 2 \frac{(x_l(s) - x_l(\sigma))^2}{|x_l(s) - x_l(\sigma)|^2} - 1 \right).
\end{aligned}$$

Розв'язок системи також необхідно параметризувати. Тоді він приймає вигляд

$$\sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_k} \left(H_k(x^*, \sigma) \varphi_k(\sigma) + \tilde{H}_k(x^*, \sigma) \psi_k(\sigma) \right) d\sigma_y + \omega(x^*) = f(x^*), \quad (1.15)$$

$x^* = (x_1, x_2)$ — фіксована точка в області Ω .

Розділ 2

Чисельне розв'язування системи інтегральних рівнянь

2.1 Квадратурні формули

До отриманої системи параметризованих інтегральних рівнянь на даному етапі розв'язування крайової задачі необхідно застосувати квадратурні формули для знаходження наближеного розв'язку системи. В попередньому розділі ми отримали два типи інтегралів: звичайний і з логарифмічною особливістю. Тому необхідно розглянути два типи квадратурних формул. Вони базуватимуться на тригонометричній інтерполяції. Розглянемо рівновіддалений поділ на $[0, 2\pi]$

$$s_k = kh, \quad k = 0, \dots, 2m-1, \quad h = \frac{\pi}{m}$$

Підінтегральна 2π -періодична функція інтерполюється таким тригонометричним поліномом

$$\begin{aligned} q(s) &= \sum_{k=0}^m a_k \cos js + \sum_{j=1}^{m-1} b_j \sin js, \\ a_j &= \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{2m-1} g_k \cos jt_k, \quad j = 0, \dots, m, \\ b_j &= \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{2m-1} g_k \sin jt_k, \quad j = 1, \dots, m-1, \end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi} f(\sigma) d\sigma \approx \int_0^{2\pi} (P_n f)(\sigma) d\sigma = \frac{\pi}{n} \sum_{j=0}^{2m-1} f(s_j) \quad (2.1)$$

$$\int_0^{2\pi} f(\sigma) \ln \left(\frac{4}{e} \sin^2 \frac{s-\sigma}{2} \right) d\sigma \approx \int_0^{2\pi} (P_n f) \ln \left(\frac{4}{e} \sin^2 \frac{s-\sigma}{2} \right) (\sigma) d\sigma = \sum_{j=0}^{2m-1} R_j(s) f(s_j), \quad (2.2)$$

де $P_n : C[0, 2\pi] \rightarrow T_n$ - інтерполяційний оператор, (??) - квадратурна формула трапецій для 2π -періодичних функцій, R_j - вагові функції, що неперервно залежать від s . Якщо f -аналітична, то похибка апроксимації квадратури зменшується експоненційно (див. [?]). Ваги можна подати як $R_k(s_j) = R_{k-j}(s_j)$, $j, k = 0, \dots, 2m-1$

Теорема 3 Нехай f - аналітична, 2π -періодична функція. Тоді похибку квадратурної

формули (??) можна оцінити наступним чином.

$$|R_T(f)| = \int_0^{2\pi} f(\sigma) d\sigma - \frac{\pi}{n} \sum_{j=0}^{2m-1} f(s_j) \leq C e^{-2ms}, \quad (2.3)$$

де C, s - деякі невід'ємні константи, що залежать від f . Квадратура трапецій (??) об'єднує в собі поліноми не стільки степеня менше за m , але й поліноми степеня менше або дорівнює $2m - 1$

2.2 Метод Нистрьома

У чисельних методах метод Нистрьома полягає у заміні інтегралу відповідною квадратурною формулою з певними ваговими функціями. Найважливішим етапом методу Нистрьома є вибір розбиття, оскільки кожне розбиття дає різне наближення. Найчастіше використовують рівномірний розподіл. Базуючись на квадратурах з розділу (??), маємо наступні наближення,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\sigma) d\sigma \approx \frac{1}{2m} \sum_{j=0}^{2m-1} f(s_j), \quad (2.4)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\sigma) \ln \left(\frac{4}{e} \sin^2 \frac{s - \sigma}{2} \right) d\sigma \approx \frac{1}{2m} \sum_{j=0}^{2m-1} R_j(s) f(s_j) \quad (2.5)$$

з вузлами

$$s_k = kh, \quad k = 0, \dots, 2m - 1, \quad h = \frac{\pi}{m} \quad (2.6)$$

і ваговими функціями

$$R_k(s) = -\frac{1}{m} \left(\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{j} \cos \frac{jk\pi}{m} + \frac{(-1)^k}{2m} \right). \quad (2.7)$$

Застосувавши даний метод до системи рівнянь (??) і погрупувавши, отримаємо повністю дискретизовану систему лінійних рівнянь,

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=0}^{2m-1} \left((H_{ll}^{(1)}(s_i, s_j) R_{|i-j|} + \frac{1}{2m} H_{ll}^{(2)}(s_i, s_j)) \varphi_{lj} + \frac{1}{2m} H_{l,3-l}(s_i, s_j) \varphi_{3-l,j} + (\tilde{H}_{ll}^{(1)}(s_i, s_j) R_{|i-j|} \right. \\ \left. + \frac{1}{2m} \tilde{H}_{ll}^{(2)}(s_i, s_j)) \psi_{lj} + \frac{1}{2m} \tilde{H}_{l,3-l}(s_i, s_j) \psi_{3-l,j} \right) + \omega_{li} = f_{li}, l = 1, 2, \\ \sum_{j=0}^{2m-1} \left(\frac{1}{2m} \tilde{H}_{l,3-l} \varphi_{3-l,j} + (\tilde{H}_{ll}^{(1)}(s_i, s_j) R_{|i-j|} + \frac{1}{2m} \tilde{H}_{ll}^{(2)}(s_i, s_j)) \varphi_{lj} + \frac{1}{2m} \hat{H}_{l,3-l} \psi_{3-l,j} \right. \\ \left. + (\hat{H}_{ll}^{(1)}(s_i, s_j) R_{|i-j|} + \frac{1}{2m} \hat{H}_{ll}^{(2)}(s_i, s_j)) \psi_{lj} \right) + \frac{\partial \omega_{li}}{\partial n_l} = f_{li}, l = 1, 2, \\ h \sum_{k=1}^2 \sum_{j=0}^{2m-1} \varphi_{kj} = A_0, \\ h \sum_{k=1}^2 \sum_{j=0}^{2m-1} (x_{1k}(s_j) \varphi_{kj} + n_1(x_k(s_j)) \psi_{kj}) = A_1, \\ h \sum_{k=1}^2 \sum_{j=0}^{2m-1} (x_{2k}(s_j) \varphi_{kj} + n_2(x_k(s_j)) \psi_{kj}) = A_2 \end{array} \right. \quad (2.8)$$

для $i = 0, \dots, 2m-1$. Тут $f_{li} = f_l(x_l(s_i))$, $g_{li} = g_l(x_l(s_i))$, $\omega_{li} = \omega_l(x_l(s_i))$, $\frac{\partial \omega_{li}}{\partial n_l} = \frac{\partial \omega(x_2(s_i))}{\partial n_l}$, $R_j = R(s_j)$ Розв'язавши систему (??), отримаємо шукані коефіцієнти $(a_0, a_1, a_2) \in R^3$ і значення густин потенціалів на вибраному розбитті $\varphi_{kj} \approx \varphi_k(s_j)$, $\psi_{kj} \approx \psi_k(s_j)$, $k = 1, 2$, $j = 0, \dots, 2m-1$.

Для знаходження наближеного розв'язку необхідно застосувати квадратури до подання розв'язку. Оскільки ми шукаємо розв'язок в фіксованій точці області $\Omega \notin \partial\Omega$, а інтегруємо по $\partial\Omega$, то в ядрах не буде логарифмічної особливості. Тоді розв'язок матиме вигляд

$$u(x) \approx \sum_{k=1}^2 \sum_{j=0}^{2m-1} \left(H_k(x, s_j) \varphi_{kj} + \tilde{H}_k(x, s_j) \psi_{kj} \right) + a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2, \quad (2.9)$$

$$x \in \Omega, \quad \varphi_{kj} \approx \varphi_k(s_j), \quad \psi_{kj} \approx \psi_k(s_j), \quad j = 0, \dots, 2m-1.$$

Підставляючи в (??) елементи, що були знайдені в (??), маємо наближений розв'язок в фіксованій точці $x \in \Omega$.

2.3 Чисельні експерименти

Приклад 1

Розглянемо такі крайові умови

$$\begin{aligned} f(x_k) &= x_{1k} - 2x_{2k}, \quad x \in \partial\Omega_k, \\ g(x_k) &= \frac{\partial f}{\partial n}, \quad x \in \partial\Omega_k, \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Розв'язком задачі (??) з умовами (??) є функція $u = x_1 - 2x_2$, $x \in \Omega$. У цьому прикладі розглянемо відносно просту область.

$$\begin{aligned}\partial\Omega_1 &= \{x(s) = (2 \cos(s), 2 \sin(s)), s \in [0, 2\pi]\}, \\ \partial\Omega_2 &= \{x(s) = (0.5 \cos(s), 0.1 \sin(s)), s \in [0, 2\pi]\},\end{aligned}\tag{2.11}$$

$$x = (1.5, 0),$$

m	$E(x)$ ($A_0 = A_1 = A_2 = 1$)
2	0.01003
4	0.0011323
8	5.2492e-05
16	7.0444e-08
32	5.4863e-11
64	6.5824e-15

Приклад 2

В позначеннях (??) розглянемо такі крайові умови

$$\begin{aligned}f(x_k) &= x_{1k} + x_{2k}, x \in \partial\Omega_k, \\ g(x_k) &= \frac{\partial f}{\partial n}, x \in \partial\Omega_k, k = 1, 2.\end{aligned}\tag{2.12}$$

Розв'язком даної задачі є функція $u^*(x) = x_1 + x_2$, $x \in \Omega$. Продемонструємо результати чисельних експериментів для різних областей Ω , параметрів A_0, A_1, A_2 і точок області. Позначимо через $E(x)$ - абсолютну похибку в заданій точці області.

Приклад 2.1

$$\begin{aligned}\partial\Omega_1 &= \{x(s) = (3 \cos(s), 3 \sin(s)), s \in [0, 2\pi]\}, \\ \partial\Omega_2 &= \{x(s) = (\cos(s) + 0.4 \cos(4s), \sin(s)), s \in [0, 2\pi]\}, \\ x &= (0, -2),\end{aligned}\tag{2.13}$$

m	$E(x)$ ($A_0 = A_1 = A_2 = 1$)	Похибка ($A_0 = 0.1, A_1 = 1, A_2 = 0$)
2	0.042796	0.010598
4	0.0010295	0.0003469
8	6.8947e-05	4.8885e-06
16	6.6392e-07	5.5934e-07
32	3.2403e-07	3.5371e-07
64	1.6404e-06	8.3151e-07

Приклад 2.2

$$\begin{aligned}\partial\Omega_1 &= \{x(s) = (4 \cos(s) + 0.2 \cos(12s), 4 \sin(s)), s \in [0, 2\pi]\}, \\ \partial\Omega_2 &= \{x(s) = (\cos(s) + 0.1 \cos(8s), \sin(s)), s \in [0, 2\pi]\}, \\ x &= (3, 0),\end{aligned}\tag{2.14}$$

m	$E(x)$ ($A_0 = A_1 = A_2 = 1$)	Похибка ($A_0 = 0.1, A_1 = 1, A_2 = 0$)
2	0.04051	0.010598
4	0.0030993	0.0003469
8	0.0089033	4.8885e-06
16	0.00041034	5.5934e-07
32	0.00010669	3.5371e-07
64	1.6404e-06	8.3151e-07

Приклад 2.3

$$\begin{aligned}
\partial\Omega_1 &= \{x(s) = (3 \cos(s) + 2 \cos(2s) - 0.75, 3 \sin(s)), s \in [0, 2\pi]\}, \\
\partial\Omega_2 &= \{x(s) = (0.6 \cos(s) + 0.3 \cos(4s), \sin(s)), s \in [0, 2\pi]\}, \\
x &= (1, -2),
\end{aligned} \tag{2.15}$$

m	$E(x)$ ($A_0 = A_1 = A_2 = 1$)	Похибка ($A_0 = 0.1, A_1 = 1, A_2 = 0$)
2	0.09048	0.0051861
4	0.11986	0.00034231
8	0.038803	6.572e-05
16	0.00011939	3.8037e-06
32	0.00016575	1.1088e-05
64	1.9979e-06	1.0813e-06

Як можна бачити, вибір констант A_0, A_1, A_2 впливає на результат.

Висновки

У цій роботі було розглянуто чисельне розв'язування крайової задачі Діріхле для бігармонічного рівняння на двозв'язній області непрямим методом інтегральних рівнянь. Наближений розв'язок подали як комбінацію потенціалів простого та подвійного шару і додаткової лінійної функції, оскільки, як було вияснено в інших роботах, це необхідна умова для існування єдиного розв'язку поставленої задачі. Це, в свою чергу, призвело до додаткових трьох рівнянь.

Отримана система інтегральних рівнянь була параметризована з виділенням особливостей на межах області. До інтегральних рівнянь з виділеною особливістю був застосований метод Нистрьома, який базується на використанні тригонометричних формул з відокремлення вагових функцій. В результаті ми отримали дискретну систему лінійних рівнянь, з якої були знайдені невідомі коефіцієнти додаткової функції в рівнянні для знаходження наближеного розв'язку. Після того ми провели такий самий процес параметризації і дискретизації для формули пошуку розв'язку, отримали повністю дискретний метод для розв'язування задачі.

Були проведені чисельні експерименти, з яких ми побачили, що метод збігається добре і також результат залежить від констант, які потрібні для побудови системи лінійних рівнянь, що забезпечує єдиність розв'язку.

Література

- [1] Chen G., Boundary Element Methods with Applications to Nonlinear Problems / Goong Chen, Jianxin Zhou. - Atlantis Press, 2010. - 715 p.
- [2] Chapko R. Integral Equations for Biharmonic Data Completion / Roman Chapko, B. Tomas Johansson. - Inverse Problems and Imaging (accepted) - 2019. - 16 p.
- [3] Kress R. Linear Integral Equations / Rainer Kress. - New York : Springer, 1989. - 412 p.