

ЛЬВІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ІВАНА
ФРАНКА

Факультет прикладної математики та інформатики
Кафедра обчислювальної математики

Курсова робота
на тему:

Метод інтегральних рівнянь для оберненої крайової задачі для бігармонійного рівняння

Студентки IV курсу групи ПМП-41
Напряму підготовки “Прикладна математика”
Багрій А. Г.

Керівник:
проф. Хапко Р. С.
Національна шкала: _____
Кількість балів: _____
Оцінка ECTS: _____

Львів-2020

Зміст

Вступ	2
1 Загальні положення	4
1.1 Зведення до IP	4
1.2 Алгоритм знаходення розв’язку оберненої крайової задачі	5
2 Чисельне розв’язування коректної системи IP	6
2.1 Параметризація	6
2.2 Метод Нистрьома	8
3 Чисельне розв’язування некоректного IP	10
4 Чисельні експерименти	12
Приклад 1	12
Приклад 2	13
Приклад 3	14
Висновки	16
Література	17

Вступ

Обернені задачі, які полягають у реконструкції межі області, є популярним напрямом для дослідження, оскільки такі задачі мають велику кількість застосувань. Реконструкція межі області є нелінійною задачею, що призводить до труднощів як в теоретичних дослідженнях, так і в чисельному розв'язуванні. Найбільш ефективні чисельні методи для даної задачі базуються на інтегральних рівняннях.

У даній роботі розглянуто реконструкцію внутрішньої межі двозв'язної пластини із заданими крайовими умовами, що задають певний фізичний сенс. Оскільки обернені задачі вимагають розв'язності відповідної прямої задачі, то також показано її коректність і наведено чисельні експерименти, що підтверджують теоретичні обґрунтування.

Постановка задачі

Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ деяка двозв'язна область з межею $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, де Γ_1 є внутрішньою межею і Γ_2 - зовнішньою. Розглянемо

$$\begin{cases} \Delta^2 u(x) = 0, & x \in \Omega, \\ u(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial n} = 0, & x \in \Gamma_1, \\ \frac{\partial u(x)}{\partial n} = g(x), & x \in \Gamma_2, \\ Mu(x) = q(x), & x \in \Gamma_2, \end{cases} \quad (1)$$

$$u(x) = f(x), \quad x \in \Gamma_2, \quad (2)$$

де

$$\Delta^2 u(x) = \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} u(x) + 2 \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} u(x) + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} u(x) - \text{бігармонійний оператор,}$$

$u(x) = u(x_1, x_2) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ - функція, що задовольняє рівняння і крайові умови,

$n = (n_1, n_2)$ - зовнішня нормаль до Γ ,

$Mu = \nu \Delta u + (1 - \nu)(u_{x_1 x_1} n_1^2 + 2u_{x_1 x_2} n_1 n_2 + u_{x_2 x_2} n_2^2)$ - згинальний момент пластини Ω ,

$\nu \in (0, 1)$ - коефіцієнт Пуассона і $g(x)$, $q(x)$, $f(x)$ - деякі задані функції, тотожно відмінні від нуля.

Обернена задача (1)-(2) полягає у знаходженні невідомої межі Γ_1 для заданих функцій $g(x)$, $q(x)$, $f(x)$. Дана задача є нелінійною, оскільки її розв'язок нелінійно залежить від невідомої межі Γ_1 , і також некоректною в сенсі відсутності стійкості за вхідними даними.

Перш за все, необхідно розглянути питання існування та єдиності розв'язку оберненої задачі (1)-(2).

Теорема 1 (Існування і єдиність розв'язку оберненої задачі). *Нехай $\tilde{\Gamma}_1, \Gamma_1$ - замкнені криві, що містяться всередині Γ_2 , \tilde{u}, u - розв'язки задачі (1) для $\tilde{\Gamma}_1$ і Γ_1 відповідно. Нехай $g \neq 0, q \neq 0$ і $u = \tilde{u}$ на відкритій підмножині Γ_2 . Тоді $\tilde{\Gamma}_1 = \Gamma_1$.*

Доведення. Доведемо від протилежного. Нехай $\tilde{\Gamma}_1 \neq \Gamma_1$. Нехай Ω_2 - область, обмежена Γ_2 , $\Omega_1, \tilde{\Omega}_1$ - області обмежені $\Gamma_1, \tilde{\Gamma}_1$ відповідно.

$$W := \Omega_2 \setminus (\Omega_1 \cup \tilde{\Omega}_1), \quad \Gamma_2 \subset \partial W.$$

За теоремою Гольмгрена [4] маємо $u = \tilde{u}$ в W . Без втрати загальності припустимо, що $W^* := (\Omega_2 \setminus \overline{W}) \setminus \Omega_1$ непорожня множина. Тоді u є визначена в W^* як розв'язок задачі (1) для Γ_1 . Вона є неперервною в \overline{W}^* і задовольняє граничні умови на ∂W^* . Ця гранична умова випливає з того, що кожна точка з W^* належить або Γ_1 , або $\partial W \cap \tilde{\Gamma}_1$. Для $x \in \Gamma_1$ маємо $u(x) = 0$ як наслідок граничних умов для u , для $x \in \tilde{\Gamma}_1$ маємо $u(x) = \tilde{u}(x)$ і тому $u(x) = 0$ як наслідок граничних умов для \tilde{u} . Тоді за принципом максимуму $u = 0$ в W^* і тому $u = 0$ в D . Це суперечить тому, що $g \neq 0, q \neq 0$.

□

Розділ 1

Загальні положення

1.1 Зведення до ІР

Фундаментальний розв'язок бігармонійного рівняння в \mathbb{R}^2 має вигляд

$$G(x, y) = \frac{1}{8\pi} |x - y|^2 \ln |x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}^2. \quad (1.1)$$

Розглянемо потенціал простого шару для бігармонійного рівняння [1] з густинами φ , ψ , що визначені на Γ :

$$u(x) = \int_{\Gamma} \left(G(x, y) \varphi(y) + \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y} \psi(y) \right) d\sigma_y, \quad x \in \Omega.$$

Теорема 2 (Існування і єдиність розв'язку прямої задачі). *Існує єдиний розв'язок прямої крайової задачі (1), який можна подати у вигляді*

$$u(x) = \sum_{k=1}^2 \int_{\Gamma_k} \left(G(x, y) \varphi_k(y) + \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y} \psi_k(y) \right) d\sigma_y + \omega(x), \quad x \in \Omega, \quad (1.2)$$

де $\omega(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ ($(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) \in R^3$), $\varphi_k, \psi_k \in C(\Gamma_k)$, $k = 1, 2$, і невідомі густини визначаються з системи інтегральних рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^2 \int_{\Gamma_k} \left(G(x, y) \varphi_k(y) + \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y} \psi_k(y) \right) d\sigma_y + \omega(x) = 0, \quad x \in \Gamma_1, \\ \sum_{k=1}^2 \int_{\Gamma_k} \left(\frac{\partial G(x, y)}{\partial n_x} \varphi_k(y) + \frac{\partial^2 G(x, y)}{\partial n_y \partial n_x} \psi_k(y) \right) d\sigma_y + \frac{\partial \omega(x)}{\partial n} = 0, \quad x \in \Gamma_1, \\ \sum_{k=1}^2 \int_{\Gamma_k} \left(\frac{\partial G(x, y)}{\partial n_x} \varphi_k(y) + \frac{\partial^2 G(x, y)}{\partial n_y \partial n_x} \psi_k(y) \right) d\sigma_y + \frac{\partial \omega(x)}{\partial n} = g(x), \quad x \in \Gamma_2, \\ \sum_{k=1}^2 \int_{\Gamma_k} \left(M_x G(x, y) \varphi_k(y) + \frac{\partial M_x G(x, y)}{\partial n_y} \psi_k(y) \right) d\sigma_y + M_x \omega(x) = q(x), \quad x \in \Gamma_2, \\ \sum_{k=1}^2 \int_{\Gamma_k} \varphi_k(y) d\sigma_y = A_0, \\ \sum_{k=1}^2 \int_{\Gamma_k} (y_1 \varphi_k(y) + n_1(y) \psi_k(y)) d\sigma_y = A_1, \\ \sum_{k=1}^2 \int_{\Gamma_k} (y_2 \varphi_k(y) + n_2(y) \psi_k(y)) d\sigma_y = A_2, \end{array} \right. \quad (1.3)$$

для заданих $(A_0, A_1, A_2) \in R^3$.

Константи A_0, A_1, A_2 вибираються довільним чином, однак є некоректним брати за значення нулі.

З умови (2) маємо наступне інтегральне рівняння

$$\sum_{k=1}^2 \int_{\Gamma_k} \left(G(x, y) \varphi_k(y) + \frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y} \psi_k(y) \right) d\sigma_y + \omega(x) = f(x), \quad x \in \Gamma_2. \quad (1.4)$$

В системі (1.3) ядра мають вигляд

$$\frac{\partial G(x, y)}{\partial n_y} = -\frac{1}{8\pi} n(y) \cdot (x - y)(1 + 2 \ln |x - y|),$$

$$\frac{\partial G(x, y)}{\partial n_x} = \frac{1}{8\pi} n(x) \cdot (x - y)(1 + 2 \ln |x - y|),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G(x, y)}{\partial n_x \partial n_y} = \frac{\partial^2 G(x, y)}{\partial n_y \partial n_x} = & -\frac{1}{8\pi} \left(2 \frac{n(x) \cdot (x - y) n(y) \cdot (x - y)}{|x - y|^2} \right. \\ & \left. + n(x) \cdot n(y)(1 + 2 \ln |x - y|) \right), \end{aligned}$$

$$M_x G(x, y) = \frac{1 + 3\nu}{8\pi} + \frac{(1 - \nu)(n(x) \cdot (x - y))^2}{4\pi |x - y|^2} + \frac{(1 + \nu) \ln |x - y|^2}{8\pi},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial M_x G(x, y)}{\partial n_y} = \frac{1 - \nu}{2\pi} & \left(\frac{(n(x) \cdot (x - y))^2 n(y) \cdot (x - y)}{|x - y|^4} - \frac{n(x) \cdot n(y) n(x) \cdot (x - y)}{|x - y|^2} \right) \\ & - \frac{(1 + \nu) n(y) \cdot (x - y)}{4\pi |x - y|^2}. \end{aligned}$$

Теорема 3. *Обернена крайова задача (1)-(2) еквівалентна системі інтегральних рівнянь (1.3)-(1.4).*

1.2 Алгоритм знаходження розв'язку оберненої крайової задачі

Знаходження розв'язку задачі (1.3)-(1.4) складається з наступного ітераційного процесу:

- Для заданого початкового наближення Γ_1 розв'язуємо пряму задачу для (1.3) і знаходимо невідомі густини.
- Лінеаризуємо рівняння (1.4) і покращуємо Γ_1 , розв'язуючи лінеаризоване рівняння (1.4) для фіксованих густин, які є відомими з (1.3).
- Умовою зупинки може бути $\|q\|_2 < \epsilon$, де q - функція, що задає покращення Γ_1 , ϵ - задана точність.

Розділ 2

Чисельне розв'язування коректної системи ІР

2.1 Параметризація

Припустимо, що криві Γ_1 і Γ_2 достатньо гладкі і їх можна подати у параметричному заданні

$$\Gamma_l = \{x_l(s) = (x_{1l}(s), x_{2l}(s)) : s \in [0, 2\pi]\}, \quad (2.1)$$

де x_l ($l = 1, 2$) - аналітична, 2π -періодична функція, $|x'(s)| > 0$. Тоді систему (1.3) можна подати у вигляді

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^2 \int_0^{2\pi} \left(H_{1k}(s, \sigma) \varphi_k(\sigma) + \tilde{H}_{1k}(s, \sigma) \psi_k(\sigma) \right) d\sigma + \omega(x_1(s)) = 0, \\ \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^2 \int_0^{2\pi} \left(\tilde{\tilde{H}}_{1k}(s, \sigma) \varphi_k(\sigma) + \hat{H}_{1k}(s, \sigma) \psi_k(\sigma) \right) d\sigma + \frac{\partial \omega(x_1(s))}{\partial n_1} = 0, \\ \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^2 \int_0^{2\pi} \left(\tilde{\tilde{H}}_{2k}(s, \sigma) \varphi_k(\sigma) + \hat{H}_{2k}(s, \sigma) \psi_k(\sigma) \right) d\sigma + \frac{\partial \omega(x_2(s))}{\partial n_2} = g(x_2(s)), \\ \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^2 \int_0^{2\pi} \left(\hat{\hat{H}}_{2k}(s, \sigma) \varphi_k(\sigma) + \bar{H}_{2k}(s, \sigma) \psi_k(\sigma) \right) d\sigma + M_x \omega(x_2(s)) = q(x_2(s)), \\ \sum_{k=1}^2 \int_0^{2\pi} \varphi_k(\sigma) d\sigma = A_0, \\ \sum_{k=1}^2 \int_0^{2\pi} (x_{1k} \varphi_k(\sigma) + n_1(x_k(\sigma)) \psi_k(\sigma)) d\sigma = A_1, \\ \sum_{k=1}^2 \int_0^{2\pi} (x_{2k} \varphi_k(\sigma) + n_2(x_k(\sigma)) \psi_k(\sigma)) d\sigma = A_2, \end{array} \right. \quad (2.2)$$

Тут $\varphi_l(s) := \varphi_k(x_l(s))|x'_l(s)|$, $\psi_l(s) := \psi_k(x_l(s))|x'_l(s)|$ - невідомі густини і ядра мають вигляд

$$\begin{aligned}
H_{lk}(s, \sigma) &= G(x_l(s), x_k(\sigma)), \quad \tilde{H}_{lk}(s, \sigma) = \frac{\partial G(x_l(s), x_k(\sigma))}{\partial n_y}, \\
\tilde{\tilde{H}}_{lk}(s, \sigma) &= \frac{\partial G(x_l(s), x_k(\sigma))}{\partial n_x}, \quad \hat{H}_{lk}(s, \sigma) = \frac{\partial^2 G(x_l(s), x_k(\sigma))}{\partial n_y \partial n_x}, \\
\hat{\hat{H}}_{lk}(s, \sigma) &= M_x G(x_l(s), x_k(\sigma)), \quad \bar{H}_{lk}(s, \sigma) = \frac{\partial M_x G(x_l(s), x_k(\sigma))}{\partial n_y}, \\
n(x(s)) &= \left(\frac{x'_2(s)}{|x'(s)|}, -\frac{x'_1(s)}{|x'(s)|} \right).
\end{aligned}$$

Дані ядра є неперервними в області $\bar{\Omega}$. Але коли точка інтегрування співпадає з точкою спостереження на Γ_l ($l = 1, 2$) під час диференціювання маємо логарифмічну особливість. Для чисельного розв'язування доцільно виділити цю особливість, виконавши певні перетворення. Отримуємо наступне подання ядер

$$H_{ll}(s, \sigma) = H_{ll}^{(1)}(s, \sigma) \ln \left(\frac{4}{e} \sin^2 \frac{s - \sigma}{2} \right) + H_{ll}^{(2)}(s, \sigma), \quad (2.3)$$

$$\tilde{H}_{ll}(s, \sigma) = \tilde{H}_{ll}^{(1)}(s, \sigma) \ln \left(\frac{4}{e} \sin^2 \frac{s - \sigma}{2} \right) + \tilde{H}_{ll}^{(2)}(s, \sigma), \quad (2.4)$$

$$\tilde{\tilde{H}}_{ll}(s, \sigma) = \tilde{\tilde{H}}_{ll}^{(1)}(s, \sigma) \ln \left(\frac{4}{e} \sin^2 \frac{s - \sigma}{2} \right) + \tilde{\tilde{H}}_{ll}^{(2)}(s, \sigma), \quad (2.5)$$

$$\hat{H}_{ll}(s, \sigma) = \hat{H}_{ll}^{(1)}(s, \sigma) \ln \left(\frac{4}{e} \sin^2 \frac{s - \sigma}{2} \right) + \hat{H}_{ll}^{(2)}(s, \sigma), \quad (2.6)$$

$$\hat{\hat{H}}_{ll}(s, \sigma) = \hat{\hat{H}}_{ll}^{(1)}(s, \sigma) \ln \left(\frac{4}{e} \sin^2 \frac{s - \sigma}{2} \right) + \hat{\hat{H}}_{ll}^{(2)}(s, \sigma). \quad (2.7)$$

де

$$\begin{aligned}
H_{ll}^{(1)}(s, \sigma) &= \frac{1}{8} |x_l(s) - x_l(\sigma)|^2, \quad H_{ll}^{(2)}(s, \sigma) = \frac{1}{8} |x_l(s) - x_l(\sigma)|^2 \ln \left(\frac{e |x_l(s) - x_l(\sigma)|^2}{4 \sin^2 \frac{s - \sigma}{2}} \right), \\
\tilde{H}_{ll}^{(1)}(s, \sigma) &= -\frac{1}{4} n(x_l(\sigma)) \cdot (x_l(s) - x_l(\sigma)), \\
\tilde{H}_{ll}^{(2)}(s, \sigma) &= \frac{1}{4} n(x_l(\sigma)) \cdot (x_l(s) - x_l(\sigma)) \left(\ln \left(\frac{4 \sin^2 \frac{s - \sigma}{2}}{e |x_l(s) - x_l(\sigma)|^2} \right) - 1 \right), \\
\tilde{\tilde{H}}_{ll}^{(1)}(s, \sigma) &= \frac{1}{4} n(x_l(s)) \cdot (x_l(s) - x_l(\sigma)), \\
\tilde{\tilde{H}}_{ll}^{(2)}(s, \sigma) &= \frac{1}{4} n(x_l(s)) \cdot (x_l(s) - x_l(\sigma)) \left(\ln \left(\frac{e |x_l(s) - x_l(\sigma)|^2}{4 \sin^2 \frac{s - \sigma}{2}} \right) + 1 \right), \\
\hat{H}_{ll}^{(1)}(s, \sigma) &= -\frac{1}{4} n(x_l(s)) \cdot n(x_l(\sigma)), \\
\hat{H}_{ll}^{(2)}(s, \sigma) &= \frac{1}{4} n(x_l(s)) \cdot n(x_l(\sigma)) \cdot \left(\ln \left(\frac{4 \sin^2 \frac{s - \sigma}{2}}{e |x_l(s) - x_l(\sigma)|^2} \right) - 2 \frac{(x_l(s) - x_l(\sigma))^2}{|x_l(s) - x_l(\sigma)|^2} - 1 \right), \\
\hat{\hat{H}}_{ll}^{(1)}(s, \sigma) &= \frac{1 + \nu}{4}, \\
\hat{\hat{H}}_{ll}^{(2)}(s, \sigma) &= \frac{1 + 3\nu}{8\pi} + \frac{(1 - \nu)(n(x_l(s)) \cdot (x_l(s) - x_l(\sigma)))^2}{4\pi |x_l(s) - x_l(\sigma)|^2} + \frac{(1 + \nu) \ln |x_l(s) - x_l(\sigma)|^2}{8\pi} \\
&\quad - \frac{1 + \nu}{4} \ln \left(\frac{4}{e} \sin^2 \frac{s - \sigma}{2} \right).
\end{aligned}$$

При $s = \sigma$ всі ядра дорівнюють нулю, окрім

$$\begin{aligned}\hat{H}_l^{(2)}(s, s) &= \frac{1 + 3\nu}{4} + \frac{1 + \nu}{4} \ln(e|x'_l(s)|^2), \\ \bar{H}_l(s, s) &= \frac{1 - 3\nu}{4} \frac{n(x_l(s)) \cdot x''_l(s)}{|x'_l(s)|^2}.\end{aligned}$$

Параметризований розв'язок прямої задачі (2.2) має вигляд

$$\tilde{u}(x) = \sum_{k=1}^2 \int_{\Gamma_k} \left(H_k(x, \sigma) \varphi_k(\sigma) + \tilde{H}_k(x, \sigma) \psi_k(\sigma) \right) d\sigma_y + \omega(x), \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega, \quad (2.8)$$

де

$$\begin{aligned}H_l(x, \sigma) &= \frac{1}{8\pi} |x - x_l(\sigma)|^2 \ln |x - x_l(\sigma)|, \\ \tilde{H}_l(x, \sigma) &= \frac{1}{8\pi} n(x_l(\sigma)) \cdot (x - x_l(\sigma)) (1 + 2 \ln |x - x_l(\sigma)|), \quad l = 1, 2.\end{aligned}$$

2.2 Метод Нистрьома

Для чисельного розв'язування отриманої системи інтегральних рівнянь (2.2) використовуємо метод Нистрьома, який полягає у заміні інтегралу відповідною квадратурною формулою з певними ваговими функціями [7]. Виберемо тригонометричні квадратури та рівновіддалений поділ,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\sigma) d\sigma \approx \frac{1}{2m} \sum_{j=0}^{2m-1} f(s_j), \quad (2.9)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\sigma) \ln \left(\frac{4}{e} \sin^2 \frac{s - \sigma}{2} \right) d\sigma \approx \frac{1}{2m} \sum_{j=0}^{2m-1} R_j(s) f(s_j) \quad (2.10)$$

з вузлами

$$s_k = kh, \quad k = 0, \dots, 2m - 1, \quad h = \frac{\pi}{m}, \quad (2.11)$$

і ваговими функціями

$$R_k(s) = -\frac{1}{m} \left(\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{j} \cos \frac{jk\pi}{m} + \frac{(-1)^k}{2m} \right). \quad (2.12)$$

Вибір даних квадратур дає експоненційну збіжність, якщо підінтегральна функція f є аналітичною [7].

Застосувавши даний метод до параметризованої системи інтегральних рівнянь (2.2) із врахованими логарифмічними особливостями ядер, отримаємо повністю дискретизовану систему лінійних рівнянь

$$\left\{ \begin{aligned}
& \sum_{j=0}^{2m-1} \left((H_{11}^{(1)}(s_i, s_j) R_{|i-j|} + \frac{1}{2m} H_{11}^{(2)}(s_i, s_j)) \varphi_{1j} + \frac{1}{2m} H_{12}(s_i, s_j) \varphi_{2j} + (\tilde{H}_{11}^{(1)}(s_i, s_j) R_{|i-j|} \right. \\
& \left. + \frac{1}{2m} \tilde{H}_{11}^{(2)}(s_i, s_j)) \psi_{1j} + \frac{1}{2m} \tilde{H}_{12}(s_i, s_j) \psi_{2j} \right) + \omega_{1i} = 0, \\
& \sum_{j=0}^{2m-1} \left((\tilde{H}_{11}^{(1)}(s_i, s_j) R_{|i-j|} + \frac{1}{2m} \tilde{H}_{11}^{(2)}(s_i, s_j)) \varphi_{1j} + \frac{1}{2m} \tilde{H}_{12} \varphi_{2j} + (\hat{H}_{11}^{(1)}(s_i, s_j) R_{|i-j|} \right. \\
& \left. + \frac{1}{2m} \hat{H}_{11}^{(2)}(s_i, s_j)) \psi_{1j} + \frac{1}{2m} \hat{H}_{12} \psi_{2j} \right) + \frac{\partial \omega_{1i}}{\partial n_1} = 0, \\
& \sum_{j=0}^{2m-1} \left(\frac{1}{2m} \tilde{H}_{21} \varphi_{1j} + (\tilde{H}_{22}^{(1)}(s_i, s_j) R_{|i-j|} + \frac{1}{2m} \tilde{H}_{22}^{(2)}(s_i, s_j)) \varphi_{2j} + \frac{1}{2m} \hat{H}_{21}(s_i, s_j) \psi_{1j} \right. \\
& \left. + (\hat{H}_{22}^{(1)}(s_i, s_j) R_{|i-j|} + \frac{1}{2m} \hat{H}_{22}^{(2)}(s_i, s_j)) \psi_{2j} \right) + \frac{\partial \omega_{2i}}{\partial n_2} = g_{2i}, \\
& \sum_{j=0}^{2m-1} \left(\frac{1}{2m} \hat{H}_{21}(s_i, s_j) \varphi_{1j} + (\hat{H}_{22}^{(1)}(s_i, s_j) R_{|i-j|} + \frac{1}{2m} \hat{H}_{22}^{(2)}(s_i, s_j)) \varphi_{2j} + \frac{1}{2m} (\bar{H}_{21}(s_i, s_j) \psi_{1j} \right. \\
& \left. + \bar{H}_{22}(s_i, s_j) \psi_{2j}) + M \omega_{2i} = q_{2i}, \\
& h \sum_{k=1}^2 \sum_{j=0}^{2m-1} \varphi_{kj} = A_0, \\
& h \sum_{k=1}^2 \sum_{j=0}^{2m-1} (x_{1k}(s_j) \varphi_{kj} + n_1(x_k(s_j)) \psi_{kj}) = A_1, \\
& h \sum_{k=1}^2 \sum_{j=0}^{2m-1} (x_{2k}(s_j) \varphi_{kj} + n_2(x_k(s_j)) \psi_{kj}) = A_2
\end{aligned} \right. \quad (2.13)$$

для $i = 0, \dots, 2m - 1$. Тут $g_{2i} = g(x_2(s_i))$, $q_{2i} = q(x_2(s_i))$, $\omega_{1i} = \omega(x_1(s_i))$, $\frac{\partial \omega_{li}}{\partial n_l} = \frac{\partial \omega(x_l(s_i))}{\partial n_l}$ ($l = 1, 2$), $M \omega_{2i} = \omega(x_2(s_i))$, $R_j = R(s_j)$. Розв'язавши систему (2.13), отримаємо шукані коефіцієнти $(a_0, a_1, a_2) \in R^3$ і значення густин потенціалів на вибраному розбитті $\varphi_{kj} \approx \varphi_k(s_j)$, $\psi_{kj} \approx \psi_k(s_j)$, $k = 1, 2$, $j = 0, \dots, 2m - 1$.

Розділ 3

Чисельне розв'язування некоректного ІР

Ми припускаємо, що крива Γ_1 належить класу так званих "зіркових" кривих. Таким чином, параметризація задається як

$$x_1(t) = \{r(t)c(t) : t \in [0, 2\pi]\},$$

де $c(t) = (\cos(t), \sin(t))$ і $r : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$ є 2π -періодичною функцією, яка задає радіус від початку координат.

Тоді рівняння (1.4) можна записати як

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^2 \int_0^{2\pi} \left(H_{2k}(s, \sigma) \varphi_k(\sigma) + \tilde{H}_{2k}(s, \sigma) \psi_k(\sigma) \right) d\sigma + \omega(x_2(s)) = f(x_2(s)), \quad (3.1)$$

Подано рівняння (3.1) через оператори.

$$\begin{aligned} (S_k \varphi)(s) &:= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_{2k}(s, \sigma) \varphi(\sigma) d\sigma, \\ (\tilde{S}_k \psi)(s) &:= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{H}_{2k}(s, \sigma) \psi(\sigma) d\sigma. \end{aligned}$$

Нехай $r = 21$. Тоді (3.1) можна записати так

$$S_1 \varphi_1 + \tilde{S}_1 \psi_1 + S_2 \varphi_2 + \tilde{S}_2 \psi_2 + \omega = f \quad \text{на } \Gamma_2. \quad (3.2)$$

Для лінеаризації необхідно обрахувати похідні Фреше. Після застосування метода Ньютона лінеаризоване рівняння матиме вигляд

$$\begin{aligned} (S'_1[r, \varphi]q)(s) + (\tilde{S}'_1[r, \psi]q)(s) = \\ f(s) - (S_1 \varphi_1)(s) - (\tilde{S}_1 \psi_1)(s) - (S_2 \varphi_2)(s) - (\tilde{S}_2 \psi_2)(s) - \omega(s), \end{aligned} \quad (3.3)$$

де q - радіальна функція, що задає покращення для Γ_1 , $(S'_1[r, \varphi]q)(s)$, $(\tilde{S}'_1[r, \psi]q)(s)$ - похідні Фреше операторів S_1 і \tilde{S}_1 відповідно, і мають наступний вигляд

$$(S'_1[r, \varphi]q)(s) = \frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} q(\sigma) N_r(s, \sigma) \varphi(\sigma) d\sigma, \quad (3.4)$$

де $N_r(s, \sigma) = c(\sigma) \cdot \nabla_{x_1(\sigma)} |x_2(s) - x_1(\sigma)|^2 \ln |x_2(s) - x_1(\sigma)| = c(\sigma) \cdot (x_2(s) - x_1(\sigma)) (2 \ln |x_2(s) - x_1(\sigma)| + 1)$,

$$(\tilde{S}'_1[r, \psi]q)(s) = -\frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} q(\sigma) \tilde{N}_r(s, \sigma) \psi(\sigma) d\sigma, \quad (3.5)$$

$$\tilde{N}_r(s, \sigma) = c(\sigma) \cdot \nabla_{x_1(\sigma)} n(x_1(\sigma)) \cdot (x_2(s) - x_1(\sigma))(1 + 2 \ln |x_2(s) - x_1(\sigma)|) = c(\sigma) \cdot n(x_1(\sigma))(-1 - \ln |x_2(s) - x_1(\sigma)| + (x_2(s) - x_1(\sigma))(1 - \frac{2(x_2(s) - x_1(\sigma))}{|x_2(s) - x_1(\sigma)|^2} - \frac{x'_1(\sigma)x''_1(\sigma)(1 + 2 \ln |x_2(s) - x_1(\sigma)|)}{|x'_1(\sigma)|^2})).$$

Рівняння (3.3) розв'яжемо методом колокацій, апроксимуючи q у вигляді

$$q_n(s) = \sum_{i=0}^{2n} q_{ni} l_i(s), \quad n \in N, \quad n > m,$$

де $l_i(s) = \cos is$, коли $i = 0, \dots, n$ і $l_i(s) = \sin(n - i)s$ для $i = n + 1, \dots, 2n$.

Тоді необхідно розв'язати таку систему лінійних рівнянь

$$\sum_{j=0}^{2n} q_{nj} A_{ij} = b_i, \quad i = 0, \dots, 2m - 1, \quad (3.6)$$

де

$$A_{ij} = \frac{1}{8m} \sum_{k=0}^{2m-1} \left(l_j(s_k) N_r(s_i, s_k) \varphi_{1m}(s_k) + l_j(s_k) \tilde{N}_r(s_i, s_k) \psi_{1m}(s_k) \right)$$

і

$$b_i = f(s_i) - w(s_i) - \sum_{k=0}^{2m-1} \left(\frac{1}{2m} H_{21}(s_i, s_k) \varphi_{1n}(s_k) + \frac{1}{2m} \tilde{H}_{21}(s_i, s_k) \psi_{1n}(s_k) + \right. \\ \left. (R_j(s_i) H_{22}^{(1)}(s_i, s_k) + \frac{1}{2m} H_{22}^{(2)}(s_i, s_k)) \varphi_{2n}(s_k) + (R_j(s_i) \tilde{H}_{22}^{(1)}(s_i, s_k) + \frac{1}{2m} \tilde{H}_{22}^{(2)}(s_i, s_k)) \psi_{2n}(s_k) \right).$$

Оскільки система (3.6) є погано обумовленою і перевизначеною, то для знаходження її розв'язку застосуємо метод найменших квадратів і регуляризацію Тихонова з параметром регуляризації λ . Тоді розв'язок матиме такий вигляд

$$\tilde{q} = (A^T A + \lambda I)^{-1} A^T b, \quad \tilde{q} = (q_{n,1}, \dots, q_{n,2n})^T. \quad (3.7)$$

Нове наближення радіальної функції r обчислюється як $r = r + q_n$.

Отже, можна сформулювати наступний ітераційний процес.

1. Вибрати початкове наближення для r .
2. Сформулювати і розв'язати дискретизовану систему лінійних рівнянь для знаходження невідомих густин φ_k, ψ_k , $k = 1, 2$, і констант a_0, a_1, a_2 .
3. Для фіксованих $r, a_0, a_1, a_2, \varphi_k, \psi_k$, $k = 1, 2$ розв'язати лінеаризоване рівняння (3.3) відносно функції q , що задає покращення для Γ_1 .
4. Обрахувати нове наближення для радіальної функції $r = r + q_n$.
5. Якщо $\|q\|_2 < \epsilon$, то наближення до Γ_1 знайдено. Інакше перейти до кроку 2.

Розділ 4

Чисельні експерименти

Розглянемо приклади чисельного наближення розв'язку прямої крайової задачі (1) для різних областей, параметрів A_0, A_1, A_2, ν та заданих функцій f, q .

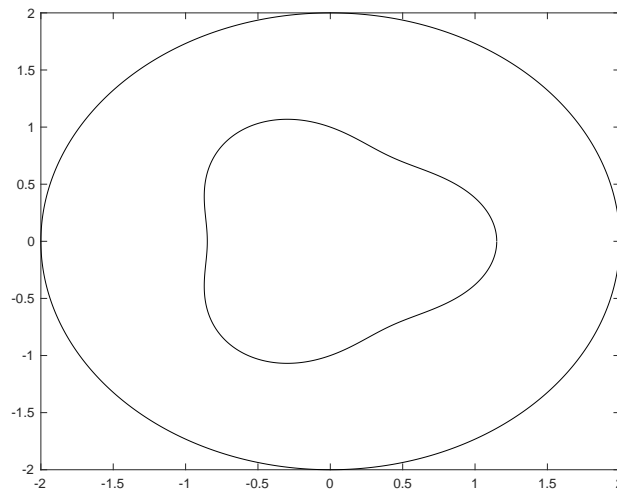
Приклад 1

Розглянемо випадок, коли розв'язок задачі є невідомим.

Нехай на Γ_2 задано функції

$$g(x_1, x_2) = x_1 - x_2,$$

$$q(x_1, x_2) = x_1 + x_2.$$



Параметричне задання області має вигляд

$$\Gamma_1 = \{x(s) = (r(s) \cos(s), r(s) \sin(s)), \quad s \in [0, 2\pi]\},$$

$$\Gamma_2 = \{x(s) = (2 \cos(s), 2 \sin(s)), \quad s \in [0, 2\pi]\},$$

де $r(s) = 1 + 0.15 \cos(3s)$.

Розв'язок шукатимемо в точці $x = (1, -1.5) \in \Omega$.

$\tilde{u}(x)$		
m	$A_0 = A_1 = A_2 = 1, \nu = 0.5$	$A_0 = 0.1, A_1 = 1, A_2 = 0, \nu = 0.9$
4	2.1772	1.9093
8	2.2293	1.9261
16	2.2374	1.9296
32	2.2369	1.9295
64	2.2369	1.9295
128	2.2369	1.9295

Табл. 4.1: Наближення розв'язку при збільшенні m і зміні основних параметрів

Приклад 2

Розглянемо крайову задачу з точним розв'язком

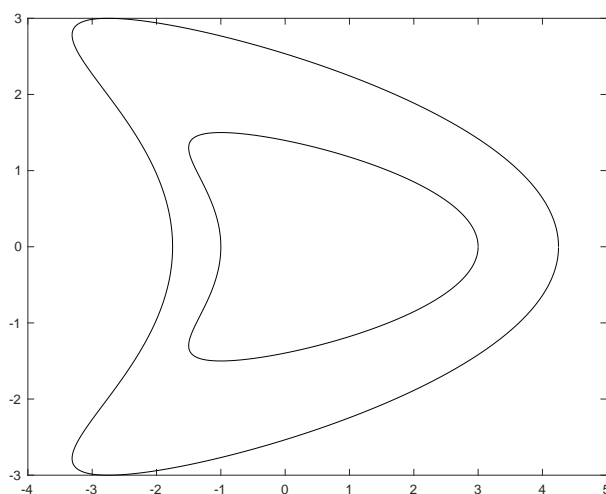
$$u(x) = G(x, y^*), \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega,$$

де $G(x, y^*)$ - звуження фундаментального розв'язку бігармонійного рівняння, $y^* \notin \Omega$.

Функції, що задані на Γ_2 , мають вигляд

$$g(x) = \frac{\partial G(x, y^*)}{\partial n},$$

$$q(x) = M_x G(x, y^*).$$



Параметричне задання області має вигляд

$$\Gamma_1 = \{x(s) = (3 \cos(s) + 2 \cos(2s) - 0.75, 3 \sin(s)), \quad s \in [0, 2\pi]\},$$

$$\Gamma_2 = \{x(s) = (2 \cos(s) + \cos(2s), 1.5 \sin(s)), \quad s \in [0, 2\pi]\}.$$

Розв'язок шукатимемо в точці $x = (0, -2) \in \Omega$.

	$ \tilde{u} - u_{ex} $
m	$A_0 = A_1 = A_2 = 1, \nu = 0.5$
4	0.00100300
8	0.00001130
16	7.0444e-08
32	5.4863e-11
64	6.5824e-15
128	6.5824e-17

Табл. 4.2: Абсолютна похибка при збільшенні m

Приклад 3

Нехай точний розв'язок має вигляд

$$u(x) = x_1^2 - x_2^2, \quad (x_1, x_2) \in \Omega.$$

Тоді крайові функції на Γ_2 можна обчислити як

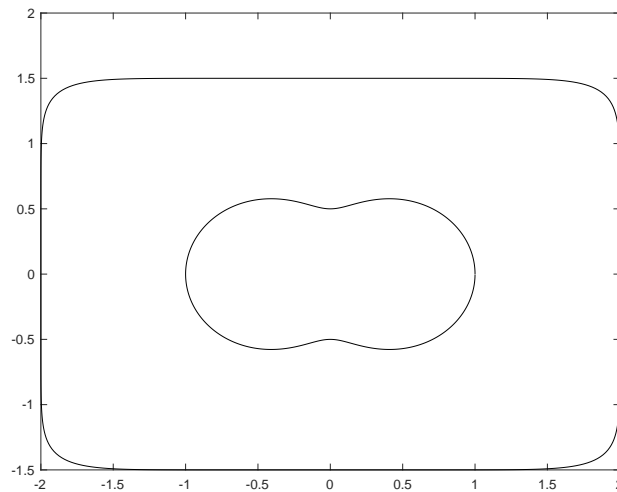
$$g(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial n},$$

$$q(x) = M_x u(x).$$

Розглянемо наступну область

$$\Gamma_1 = \{x(s) = (3 \cos(s) + 2 \cos(2s) - 0.75, 3 \sin(s)), \quad s \in [0, 2\pi]\},$$

$$\Gamma_2 = \{x(s) = (2 \cos(s) + \cos(2s), 1.5 \sin(s)), \quad s \in [0, 2\pi]\}.$$



Розв'язок шукатимемо в точці $x = (1, 1) \in \Omega$.

	$ \tilde{u} - u_{ex} $
m	$A_0 = A_1 = A_2 = 1, \nu = 0.5$
4	0.0009048
8	0.0000119
16	3.0234e-06
32	1.4993e-07
64	2.5824e-09
128	1.3324e-14

Табл. 4.3: Абсолютна похибка при збільшенні m

Отже, очевидно, що вибір допоміжних констант A_0, A_1, A_2 впливає на наближення розв'язку. Також вибраний метод для чисельного розв'язування прямої задачі показує необхідну збіжність.

Висновки

В роботі було розглянуто чисельне розв'язування оберненої крайової задачі для бігармонічного рівняння у випадку двозв'язної області методом нелінійних інтегральних рівнянь, що ґрунтується на потенціалах. Було розроблено ітераційний процес для наближеного розв'язування отриманих інтегральних рівнянь. Знайдено похідні Фреше відповідних операторів для лінеаризації рівняння. Для повної дискретизації був застосований метод тригонометричних квадратур. Отриману некоректну систему лінійних рівнянь було розв'язано методом найменших квадратів із застосуванням регуляризації Тихонова.

Була показана розв'язність прямої крайової задачі методом інтегральних рівнянь. Отримана система інтегральних рівнянь була параметризована з виділенням особливостей на межах області. До інтегральних рівнянь з виділеною особливістю був застосований метод Нистрьома, який базується на використанні тригонометричних формул з відокремлення вагових функцій. В результаті ми отримали дискретну систему лінійних рівнянь, з якої були знайдені невідомі коефіцієнти додаткової функції в рівнянні для знаходження наближеного розв'язку. Після того ми провели такий самий процес параметризації і дискретизації для формули пошуку розв'язку, отримали повністю дискретний метод для розв'язування задачі.

Були проведені чисельні експерименти, які демонструють коректність прямої задачі, а також експоненційну збіжність вибраного методу.

Література

- [1] R. Chapko and B. T. Johansson, Integral equations for biharmonic data completion, *Inverse Problems and Imaging*, Vol. 130 : P.1-12 (2019)
- [2] R. Chapko, V. Vavrychuk and O. I. Yaman, On the non-linear integral equation method for the reconstruction of the inclusion in the elastic body, *Journal of Numerical and Applied Mathematics*, Vol. 122 : P.1-17 (2019)
- [3] R. Kress, Inverse dirichlet problem and conformal mapping, *Mathematics and Computers in Simulation*, P.255-265 (2004)
- [4] H. Hedenmalm, On the uniqueness theorem of Holmgren, *Mathematische Zeitschrift*, Vol. 281, P.2 (2013)
- [5] R. Chapko, On a hybrid method for shape reconstruction of a buried object in an elastostatic half plane, *Inverse Problems and Imaging*, 3 (2) : P.199-210 (2009)
- [6] R. Kress and S. Meyer, An inverse boundary value problem for the Oseen equation, P.13-15 (1994)
- [7] R. Kress, Linear integral equations, *Applied Mathematical Sciences*, Third Edition, New York (2014)