Метод інтегральних рівнянь для оберненої крайової задачі для бігармонійного рівняння

Багрій Анна

Львівський національний університет імені Івана Франка

2020

Зміст

Постановка задачі

$$\Delta^2 u = 0 \text{ в } \Omega, \tag{1}$$

$$u = \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ на } \Gamma_1, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = g, \;\; Mu = q \text{ на } \Gamma_2, \tag{3}$$

$$Mu = \nu\Delta u + (1-\nu)(u_{x_1x_1}n_1^2 + 2u_{x_1x_2}n_1n_2 + u_{x_2x_2}n_2^2), \;\; \nu \in (0,1).$$

Із заданими функціями g, q на Γ_2 і умовою Діріхле

$$u = f \text{ на } \Gamma_2 \tag{4}$$

реконструювати невідому межу Γ_1.

Існування та єдиність розв'язку оберненої задачі

Теорема (про існування та єдиність розв'язку оберненої задачі)

Нехай $\tilde{\Gamma}_1$, Γ_1 - замкнені криві, що містяться всередині Γ_2, $\tilde{u}$, u - розв'язки задачі для $\tilde{\Gamma}_1$ і Γ_1 відповідно. Нехай $g \neq 0, q \neq 0$ і $u = \tilde{u}$ на відкритій підмножині Γ_2. Тоді $\tilde{\Gamma}_1 = \Gamma_1$.

Непрямий метод інтегральних рівнянь

Фундаментальний розв'язок бігармонійного рівняння має вигляд

$$G(x,y) = \frac{1}{8\pi}|x-y|^2 \ln|x-y|, \quad x,\ y \in \mathbb{R}^2. \tag{5}$$

Розглянемо потенціал простого шару для бігармонійного рівняння

$$u(x) = \int_\Gamma (G(x,y)\varphi(y) + \frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y}\psi(y))d\sigma_y, \quad x \in \Omega, \tag{6}$$

де φ, ψ - невідомі густини, що визначені на Γ.

Існування та єдиність розв'язку прямої задачі

Теорема (про існування та єдиність розв'язку прямої задачі)

Розв'язок крайової задачі (1)-(3) можна подати у вигляді

$$u(x) = \sum_{k=1}^{2} \int_{\Gamma_k} \left(G(x,y)\varphi_k(y) + \frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y} \psi_k(y) \right) d\sigma_y + \omega(x), \quad x \in \Omega, \tag{7}$$

$\omega(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$, $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) \in R^3$, $\varphi_k, \psi_k \in C(\Gamma_k)$, $k = 1, 2$. Існує єдиний розв'язок вигляду (7) системи інтегральних рівнянь

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{2} \int_{\Gamma_k} \left(G(x,y)\varphi_k(y) + \frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y} \psi_k(y) \right) d\sigma_y + \omega(x) = 0, \ x \in \Gamma_1, \\ \sum_{k=1}^{2} \int_{\Gamma_k} \left(\frac{\partial G(x,y)}{\partial n_x} \varphi_k(y) + \frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial n_y \partial n_x} \psi_k(y) \right) d\sigma_y + \frac{\partial \omega(x)}{\partial n} = 0, \ x \in \Gamma_1, \\ \sum_{k=1}^{2} \int_{\Gamma_k} \left(\frac{\partial G(x,y)}{\partial n_x} \varphi_k(y) + \frac{\partial^2 G(x,y)}{\partial n_y \partial n_x} \psi_k(y) \right) d\sigma_y + \frac{\partial \omega(x)}{\partial n} = g(x), \ x \in \Gamma_2, \\ \sum_{k=1}^{2} \int_{\Gamma_k} \left(M_x G(x,y)\varphi_k(y) + \frac{\partial M_x G(x,y)}{\partial n_y} \psi_k(y) \right) d\sigma_y = q(x), \ x \in \Gamma_2 \end{cases} \tag{8}$$

разом із рівняннями

Існування та єдиність розв'язку прямої задачі

Теорема (про існування та єдиність розв'язку прямої задачі)

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{2} \int_{\Gamma_k} \varphi_k(y) d\sigma_y = A_0, \\ \sum_{k=1}^{2} \int_{\Gamma_k} (y_1 \varphi_k(y) + n_1(y)\psi_k(y)) d\sigma_y = A_1, \\ \sum_{k=1}^{2} \int_{\Gamma_k} (y_2 \varphi_k(y) + n_2(y)\psi_k(y)) d\sigma_y = A_2 \end{cases} \tag{9}$$

для заданих $(A_0, A_1, A_2) \in R^3$.

З умови (4) маємо наступне інтегральне рівняння

$$\sum_{k=1}^{2}\int_{\Gamma_k}\left(G(x,y)\varphi_k(y)+\frac{\partial G(x,y)}{\partial n_y}\psi_k(y)\right)d\sigma_y+\omega(x)=f(x),\ \ x\in\Gamma_2. \tag{10}$$

Узагальнений алгоритм

- Для заданого початкового наближення Γ_1 розв'язуємо пряму задачу для (9) і знаходимо невідомі густини.
- Лінеаризуємо рівняння (10) і покращуємо Γ_1, розв'язуючи лінеаризоване рівняння (10) для фіксованих густин, які є відомими з (9).
- Умовою зупинки може бути $||q||_2 < \epsilon$, де q - функція, що задає покращення Γ_1, ϵ - задана точність.

Параметризація

$$\Gamma_l = \{x_l(s) = (x_{1l}(s), x_{2l}(s)) \ : \ s \in [0, 2\pi]\}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{2}\int_0^{2\pi}\big(H_{1k}(s,\sigma)\varphi_k(\sigma) + \tilde{H}_{1k}(s,\sigma)\psi_k(\sigma)\big)d\sigma + \omega(x_1(s)) = 0, \\ \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{2}\int_0^{2\pi}\big(\tilde{\tilde{H}}_{1k}(s,\sigma)\varphi_k(\sigma) + \hat{H}_{1k}(s,\sigma)\psi_k(\sigma)\big)d\sigma + \frac{\partial\omega(x_1(s))}{\partial n_1} = 0, \\ \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{2}\int_0^{2\pi}\big(\tilde{\tilde{H}}_{2k}(s,\sigma)\varphi_k(\sigma) + \hat{H}_{2k}(s,\sigma)\psi_k(\sigma)\big)d\sigma + \frac{\partial\omega(x_2(s))}{\partial n_2} = g(x_2(s)), \\ \frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{2}\int_0^{2\pi}\big(\hat{\hat{H}}_{2k}(s,\sigma)\varphi_k(\sigma) + \bar{H}_{2k}(s,\sigma)\psi_k(\sigma)\big)d\sigma = q(x_2(s)), \end{cases} \tag{11}$$

Параметризація

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{2} \int_0^{2\pi} \varphi_k(\sigma) d\sigma = A_0, \\ \sum_{k=1}^{2} \int_0^{2\pi} (x_{1k}\varphi_k(\sigma) + n_1(x_k(\sigma))\psi_k(\sigma)) d\sigma = A_1, \\ \sum_{k=1}^{2} \int_0^{2\pi} (x_{2k}\varphi_k(\sigma) + n_2(x_k(\sigma))\psi_k(\sigma)) d\sigma = A_2. \end{cases} \tag{12}$$

Параметризація

Тут
$\varphi_l(s) := \varphi_k(x_l(s))|x_l'(s)|, \psi_l(s) := \psi_k(x_l(s))|x_l'(s)|$ – невідомі густини
і ядра мають вигляд

$$H_{lk}(s,\sigma) = G(x_l(s), x_k(\sigma)), \quad \tilde{H}_{lk}(s,\sigma) = \frac{\partial G(x_l(s), x_k(\sigma))}{\partial n_y},$$

$$\tilde{\tilde{H}}_{lk}(s,\sigma) = \frac{\partial G(x_l(s), x_k(\sigma))}{\partial n_x}, \quad \hat{H}_{lk}(s,\sigma) = \frac{\partial^2 G(x_l(s), x_k(\sigma))}{\partial n_y \partial n_x},$$

$$\hat{\hat{H}}_{lk}(s,\sigma) = M_{x_l(s)} G(x_l(s), x_k(\sigma)), \quad \bar{H}_{lk}(s,\sigma) = \frac{\partial M_{x_l(s)} G(x_l(s), x_k(\sigma))}{\partial n_y},$$

$$n(x(s)) = \left(\frac{x_2'(s)}{|x'(s)|}, -\frac{x_1'(s)}{|x'(s)|} \right)$$ – зовнішня нормаль.

Виділення логарифмічної особливості

При $l = k$ всі ядра, окрім $\bar{H}_{ll}$, мають логарифмічну особливість. Наприклад, після виділення особливості ядра H_{ll}, воно матиме наступний вигляд

$$H_{ll}(s,\sigma) = H_{ll}^{(1)}(s,\sigma)\ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{s-\sigma}{2}\right) + H_{ll}^{(2)}(s,\sigma),$$

де

$$H_{ll}^{(1)}(s,\sigma) = \frac{1}{8}|x_l(s) - x_l(\sigma)|^2,$$

$$H_{ll}^{(2)}(s,\sigma) = \frac{1}{8}|x_l(s) - x_l(\sigma)|\ln\left(\frac{e|x_l(s) - x_l(\sigma)|^2}{4\sin^2\frac{s-\sigma}{2}}\right), \;\; s \in [0, 2\pi].$$

Аналогічно для інших ядер.

Чисельне розв'язування

Застосуємо квадратурні формули

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\sigma)d\sigma \approx \frac{1}{2m}\sum_{j=0}^{2m-1} f(s_j), \tag{13}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\sigma)\ln\left(\frac{4}{e}\sin^2\frac{s-\sigma}{2}\right)d\sigma \approx \frac{1}{2m}\sum_{j=0}^{2m-1} R_j(s)f(s_j), \tag{14}$$

$$s_k = kh,\ \ k = 0, ..., 2m-1,\ \ h = \frac{\pi}{m},$$

$$R_k(s) = -\frac{1}{m}\left(\frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{m-1}\frac{1}{j}\cos\frac{jk\pi}{m} + \frac{(-1)^k}{2m}\right) - \text{ваги},$$

до параметризованої системи ІР (11)-(12).

Дискретизація системи IP

$$
\begin{cases}
\sum\limits_{j=0}^{2m-1}\Bigg(\big(H_{11}^{(1)}(s_i,s_j)R_{|i-j|}+\dfrac{1}{2m}H_{11}^{(2)}(s_i,s_j)\big)\varphi_{1j}+\dfrac{1}{2m}H_{12}(s_i,s_j)\varphi_{2j}+ \\
\big(\tilde{H}_{11}^{(1)}(s_i,s_j)R_{|i-j|}+\dfrac{1}{2m}\tilde{H}_{11}^{(2)}(s_i,s_j)\big)\psi_{1j}+\dfrac{1}{2m}\tilde{H}_{12}(s_i,s_j)\psi_{2j}\Bigg)+\omega_{1i}=0, \\
\sum\limits_{j=0}^{2m-1}\Bigg(\big(\tilde{\tilde{H}}_{11}^{(1)}(s_i,s_j)R_{|i-j|}+\dfrac{1}{2m}\tilde{\tilde{H}}_{11}^{(2)}(s_i,s_j)\big)\varphi_{1j}+\dfrac{1}{2m}\tilde{\tilde{H}}_{12}\varphi_{2j}+ \\
\big(\hat{H}_{11}^{(1)}(s_i,s_j)R_{|i-j|}+\dfrac{1}{2m}\hat{H}_{11}^{(2)}(s_i,s_j)\big)\psi_{1j}+\dfrac{1}{2m}\hat{H}_{12}\psi_{2j}\Bigg)+\dfrac{\partial\omega_{1i}}{\partial n_1}=0,
\end{cases}
\tag{15}
$$

Дискретизація системи IP

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{2m-1} \Bigg(\frac{1}{2m} \tilde{\tilde{H}}_{21} \varphi_{1j} + (\tilde{\tilde{H}}_{22}^{(1)}(s_i, s_j) R_{|i-j|} + \frac{1}{2m} \tilde{\tilde{H}}_{22}^{(2)}(s_i, s_j)) \varphi_{2j} + \\ \frac{1}{2m} \hat{H}_{21}(s_i, s_j) \psi_{1j} + (\hat{H}_{22}^{(1)}(s_i, s_j) R_{|i-j|} + \frac{1}{2m} \hat{H}_{22}^{(2)}(s_i, s_j)) \psi_{2j} \Bigg) + \\ \frac{\partial \omega_{2i}}{\partial n_2} = g_{2i}, \\ \sum\limits_{j=0}^{2m-1} \Bigg(\frac{1}{2m} \hat{\hat{H}}_{21}(s_i, s_j) \varphi_{1j} + (\hat{\hat{H}}_{22}^{(1)}(s_i, s_j) R_{|i-j|} + \frac{1}{2m} \hat{\hat{H}}_{22}^{(2)}(s_i, s_j)) \varphi_{2j} + \\ \frac{1}{2m} (\bar{H}_{21}(s_i, s_j) \psi_{1j} + \bar{H}_{22}(s_i, s_j) \psi_{2j}) = q_{2i}, \end{cases} \tag{16}$$

Дискретизація системи ІР

$$
\begin{cases}
h\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=0}^{2m-1}\varphi_{kj} = A_0,\\
h\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=0}^{2m-1}\left(x_{1k}(s_j)\varphi_{kj} + n_1(x_k(s_j))\psi_{kj}\right) = A_1,\\
h\sum_{k=1}^{2}\sum_{j=0}^{2m-1}\left(x_{2k}(s_j)\varphi_{kj} + n_2(x_k(s_j))\psi_{kj}\right) = A_2.
\end{cases} \tag{17}
$$

Чисельне розв'язування

Розв'язок прямої задачі (15)-(17) має вигляд

$$u(x) \approx \sum_{k=1}^{2} \sum_{j=0}^{2m-1} \left(H_k(x, s_j)\varphi_{kj} + \tilde{H}_k(x, s_j)\psi_{kj} \right) + a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2,$$

$$x \in \Omega, \ \varphi_{kj} \approx \varphi_k(s_j), \ \psi_{kj} \approx \psi_k(s_j), \ j = 0, ..., 2m-1,$$

$$H_l(x,\sigma) = \frac{1}{8\pi} |x - x_l(\sigma)|^2 \ln |x - x_l(\sigma)|,$$

$$\tilde{H}_l(x,\sigma) = \frac{1}{8\pi} n(x_l(\sigma)) \cdot (x - x_l(\sigma))(1 + 2 \ln |x - x_l(\sigma)|), \ l = 1, 2.$$

Розв'язування некоректного ІР

Нехай Γ_1 належить до класу "зіркових" кривих. Тоді

$$x_1(t) = \{r(t)(\cos(t), \sin(t)) : t \in [0, 2\pi]\},$$

де $r : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ - 2π-періодична радіальна функція. Параметризоване рівняння (10) має вигляд

$$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{2} \int_0^{2\pi} \left(H_{2k}(s,\sigma)\varphi_k(\sigma) + \tilde{H}_{2k}(s,\sigma)\psi_k(\sigma) \right) d\sigma + \omega(x_2(s)) = f(x_2(s)). \tag{18}$$

Параметризація некоректного IP

Введемо наступні оператори

$$(S_k\varphi)(s) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H_{2k}(s,\sigma)\varphi(\sigma)d\sigma,$$
$$(\tilde{S}_k\psi)(s) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{H}_{2k}(s,\sigma)\psi(\sigma)d\sigma,$$

і перепишемо рівняння (18) у вигляді

$$S_1\varphi_1 + \tilde{S}_1\psi_1 + S_2\varphi_2 + \tilde{S}_2\psi_2 + \omega = f \quad \text{на } \Gamma_2. \tag{19}$$

Нехай $r = 21$.

Операторне подання некоректного IP

Лінеаризоване рівняння матиме вигляд

$$\begin{gathered}(S_1'[r,\varphi]q)(s) + (\tilde{S}_1'[r,\psi]q)(s) = \\ f(s) - (S_1\varphi_1)(s) - (\tilde{S}_1\psi_1)(s) - (S_2\varphi_2)(s) - (\tilde{S}_2\psi_2)(s) - \omega(s),\end{gathered} \tag{20}$$

де q - радіальна функція, що задає покращення для Γ_1 і

$$(S_1'[r,\varphi]q)(s) = \frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi} q(\sigma)N_r(s,\sigma)\varphi(\sigma)d\sigma,$$

$$(\tilde{S}_1'[r,\psi]q)(s) = -\frac{1}{8\pi}\int_0^{2\pi} q(\sigma)\tilde{N}_r(s,\sigma)\psi(\sigma)d\sigma$$

похідні Фреше,

$N_r(s,\sigma) = c(\sigma)\cdot\nabla_{x_1(\sigma)}|x_2(s)-x_1(\sigma)|^2\ln|x_2(s)-x_1(\sigma)|,$

$\tilde{N}_r(s,\sigma) = c(\sigma)\cdot\nabla_{x_1(\sigma)}n(x_1(\sigma))\cdot(x_2(s)-x_1(\sigma))(1+2\ln|x_2(s)-x_1(\sigma)|).$

Метод колокації

Лінеаризоване рівняння (20) розв'яжемо методом колокацій з апроксимацією

$$q_n(s) = \sum_{i=0}^{2n} q_{ni} l_i(s), \quad n \in N, \ n < m,$$

де $l_i(s) = \cos is$, коли $i = 0, ..., n$ і $l_i(s) = \sin(n-i)s$ для $i = n+1, ..., 2n$.
Тоді необхідно розв'язати таку систему лінійних рівнянь

$$\sum_{j=0}^{2n} q_{nj} A_{ij} = b_i, \quad i = 0, ..., 2m-1. \tag{21}$$

Метод колокації

$$A_{ij} = \frac{1}{8m} \sum_{k=0}^{2m-1} \Big(l_j(s_k) N_r(s_i, s_k) \varphi_{1m}(s_k) + l_j(s_k) \tilde{N}_r(s_i, s_k) \psi_{1m}(s_k) \Big),$$

$$b_i = f(s_i) - w(s_i) - \sum_{k=0}^{2m-1} \Big(\frac{1}{2m} H_{21}(s_i, s_k) \varphi_{1n}(s_k) +$$
$$\frac{1}{2m} \tilde{H}_{21}(s_i, s_k) \psi_{1n}(s_k) + \big(R_j(s_i) H_{22}^{(1)}(s_i, s_k) + \frac{1}{2m} H_{22}^{(2)}(s_i, s_k) \big) \varphi_{2n}(s_k) +$$
$$\big(R_j(s_i) \tilde{H}_{22}^{(1)}(s_i, s_k) + \frac{1}{2m} \tilde{H}_{22}^{(2)}(s_i, s_k) \big) \psi_{2n}(s_k) \Big).$$

Розв'язування перевизначеної і некоректної СЛАР

До перевизначеної системи застосуємо метод найменших квадратів і регуляризацію Тихонова з параметром регуляризації λ

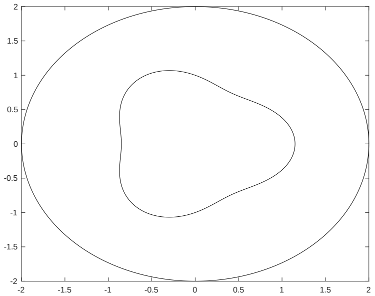
$$\tilde{q} = (A^T A + \lambda I)^{-1} A^T b, \quad \tilde{q} = (q_{n,1}, ..., q_{n,2n})^T. \tag{22}$$

Нове наближення радіальної функції r обчислюється як $r = r + q_n$.

Алгоритм розв'язування оберненої задачі

1. Вибрати початкове наближення для r.
2. Сформувати і розв'язати дискретизовану систему лінійних рівнянь для знаходження невідомих густин $\varphi_k, \psi_k,\ k = 1, 2$, і констант a_0, a_1, a_2.
3. Для фіксованих $r, a_0, a_1, a_2, \varphi_k, \psi_k,\ k = 1, 2$ розв'язати лінеаризоване рівняння (20) відносно функції q, що задає покращення для Γ_1.
4. Обрахувати нове наближення для радіальної функції $r = r + q_n$.
5. Якщо $||q||_2 < \epsilon$, то наближення до Γ_1 знайдено. Інакше перейти до кроку 2.

Приклад 1



Нехай на Γ_2 задано функції

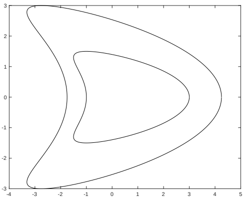
$$g(x_1, x_2) = x_1 - x_2,$$
$$q(x_1, x_2) = x_1 + x_2.$$

Приклад 1

$\tilde{u}(x),\ x = (1, -1.5) \in \Omega$		
m	$A_0 = A_1 = A_2 = 1, \nu = 0.5$	$A_0 = 0.1, A_1 = 1, A_2 = 0, \nu = 0.9$
4	2.1772	1.9093
8	2.2293	1.9261
16	2.2374	1.9296
32	2.2369	1.9295
64	2.2369	1.9295
128	2.2369	1.9295

Табл.: Наближення розв'язку при збільшенні m і зміні основних параметрів

Приклад 2



Нехай точний розв'язок заданий як

$$u(x) = G(x, y^*),\ x = (x_1, x_2) \in \Omega,\ y^* \notin \Omega.$$

Тоді функції, що задані на Γ_2, мають вигляд

$$g(x) = \frac{\partial G(x, y^*)}{\partial n},$$
$$q(x) = M_x G(x, y^*).$$

Приклад 2

	$\lvert\tilde{u} - u_{ex}\rvert,\ x = (0, -2) \in \Omega$
m	$A_0 = A_1 = A_2 = 1, \nu = 0.5$
4	0.00100300
8	0.00001130
16	7.0444e-08
32	5.4863e-11
64	6.5824e-15
128	6.5824e-17

Табл.: Абсолютна похибка при збільшенні m

Висновки

У роботі було розглянуто чисельне розв'язування оберненої крайової задачі для бігармонійного рівняння у випадку двозв'язної області методом нелінійних інтегральних рівнянь, що ґрунтується на теорії потенціалів. Була показана коректність відповідної прямої задачі. Були проведені чисельні експерименти, які демонструють коректність прямої задачі, а також експоненційну збіжність вибраного методу.

Список літератури

- R. Chapko and B. T. Johansson, Integral equations for biharmonic data completion, Inverse Problems and Imaging, Vol. 130 : P.1-12 (2019)
- R. Chapko, V. Vavrychuk and O. I. Yaman, On the non-linear integral equation method for the reconstruction of the inclusion in the elastic body, Journal of Numerical and Applied Mathematics, Vol. 122 : P.1-17 (2019)
- R. Kress, Inverse dirichlet problem and conformal mapping, Mathematics and Computers in Simulation, P.255-265 (2004)
- H. Hedenmalm, On the uniqueness theorem of Holmgren, Mathematische Zeitschrift, Vol. 281, P.2 (2013)
- R. Chapko, On a hybrid method for shape reconstruction of a buried object in an elastostatic half plane, Inverse Problems and Imaging, 3 (2) : P.199-210 (2009)
- R. Kress and S. Meyer, An inverse boundary value problem for the Oseen equation, P.13-15 (1994)
- R. Kress, Linear integral equations, Applied Mathematical Sciences, Third Edition, New York (2014)

Дякую за увагу!