№1:

ЗБЧ: при $n \to \infty$ среднее арифм. наблюдений сходится к мат. ожиданию

1 встречается $0{,}75n$ раз

2 – $0{,}25n$ раз

trA – сумма диагональных элементов $\Rightarrow \frac{trA}{n}$ – ср. арифм. диагональных элементов

$trA = 1 \cdot 0{,}75n + 2 \cdot 0{,}25n$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{trA}{n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1{,}25n}{n} = \underline{\underline{1{,}25}}$$

№2:

Детерминант верхнетреугольной матрицы $detA$ равен произведению диагональных элементов.

№2:

Детерминант верхнетреугольной матрицы $\det A$ равен произведению диагональных элементов.

$$\det A = 1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot\ldots\cdot2\cdot2\cdot2\cdot\ldots = 1^{0,75n}\cdot2^{0,25n} = 2^{0,25n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(\det A)}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\ln 2^{0,25n}}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{0,25n\ln 2}{n} = \underline{0,25\ln 2} \approx$$

$\approx 0,173287$

или

$\det A = 1,25^n$ (возвели ср. арифм. в степень n)

Тогда:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(\det A)}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\ln 1,25}{n} = \underline{\ln 1,25} \approx 0,223144$$

№3: Неравенство Чебышева:

$$p(|X - EX| \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$$

Рейтинг: $EX_i = \theta$

$$p(|\bar{X}_n - \theta| \leq 0{,}01) \geq 0{,}95$$

$$\Rightarrow \varepsilon = 0{,}01 \Rightarrow 1 - \frac{D(X)}{0{,}01^2} = 0{,}95$$

В распределении Бернулли $p(X=1) = \theta$, $p(X=0) = 1-\theta$

Так как $0 \leq \theta \leq 1$, имеем $\theta(1-\theta) \leq 0{,}25$.

$$D(X_i) = \frac{\theta(1-\theta)}{n}$$

$$1 - \frac{D(X_i)}{0{,}01^2} = 1 - \frac{\theta(1-\theta)}{n \cdot 0{,}01^2} = 0{,}95$$

$$\frac{\theta(1-\theta)}{n \cdot 0{,}01^2} = 0{,}05$$

$$\frac{0{,}25}{n \cdot 0{,}01^2} = 0{,}05$$

$$n \cdot 0{,}01^2 = 5$$

$$n = 5 \cdot 10^4 = \underline{50\,000}$$

По неравенству Чебышёва, минимальное количество студентов, необходимое для опроса, равно 50 000.