PRODUTOS DE VETORES

Reinaldo Madarazo - 2014

PRODUTO ESCALAR

- Dados dois vetores $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ e $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$
- Chama-se produto escalar ou produto interno ao número real obtido por:

$$\vec{a} \bullet \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

- Por exemplo:

$\vec{a} = (1,-2,3) \quad \vec{b} = (4,5,-6)$

$\vec{a} \bullet \vec{b} = (1,-2,3) \bullet (4,5,-6) = 1.4 + (-2).5 + 3.(-6) = 4 - 10 - 18 = -24$

PROPRIEDADES DO PRODUTO ESCALAR

- O produto escalar tem as seguintes propriedades relevantes:

$$(a)\ \vec{a} \bullet \vec{b} = \vec{b} \bullet \vec{a} \ \ (comutativa)$$

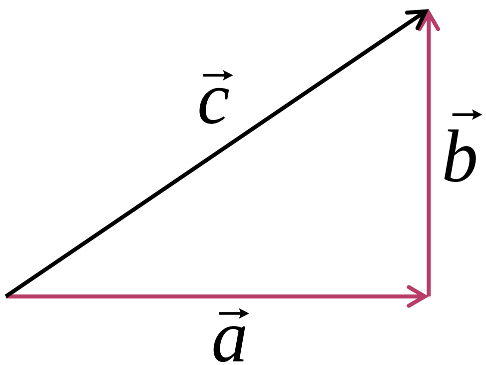
$$(b)\ \vec{a} \bullet (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \bullet \vec{b} + \vec{a} \bullet \vec{c} \ \ (distributiva)$$

$$(c)\ \vec{a} \bullet \vec{a} = \left|\vec{a}\right|^2$$

$$(d)(\alpha\vec{a}) \bullet \vec{b} = \vec{a} \bullet (\alpha\vec{b}) = \alpha(\vec{a} \bullet \vec{b})$$

CONDIÇÃO DE ORTOGONALIDADE

- Vamos supor $\vec{a}$ e $\vec{b}$ não nulos. Se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ forem perpendiculares, então $\vec{a} \bullet \vec{b} = 0$.
- Vamos supor inicialmente que os vetores são perpendiculares:



$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

Multiplicando ambos os lados por $\vec{c}$ *:*

$\vec{c} \bullet (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} \bullet \vec{c}$

$(\vec{a} + \vec{b}) \bullet (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} \bullet \vec{c} \rightarrow distributiva \rightarrow |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \bullet \vec{b} + |\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2$

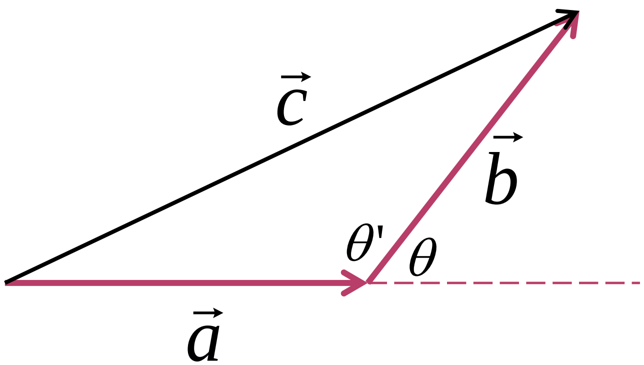
Pelo teorema de Pitágoras : $|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2$

Comparando as duas expressões, chegamos a :

$\vec{a} \bullet \vec{b} = 0$

CONDIÇÃO DE ORTOGONALIDADE

- Agora vamos supor produto escalar nulo:



$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} \rightarrow$ *Multiplicando ambos os lados por* $\vec{c}$:

$\vec{c} \bullet (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} \bullet \vec{c} \rightarrow (\vec{a} + \vec{b}) \bullet (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{c} \bullet \vec{c}$

$|\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \bullet \vec{b} + |\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2$

Mas como $\vec{a} \bullet \vec{b} = 0$ *então* :

$|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2$ *que é o próprio Teorema de Pitágoras.*

Para isso, $|\vec{a}|$ *e* $|\vec{b}|$ *devem ser catetos de um triângulo retângulo. Assim,* $\vec{a}$ *é perpendicular a* $\vec{b}$.

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \bullet \vec{b} = 0$$

CONDIÇÃO DE ORTOGONALIDADE

- Definimos que o vetor nulo é perpendicular a qualquer vetor.
- A condição necessária e suficiente para que dois vetores sejam ortogonais (perpendiculares) é que seu produto escalar seja nulo.
- Exemplo: Determinar x de modo que os vetores $\vec{a}=(x,2,1)$ e $\vec{b}=(-1,3,2)$ sejam ortogonais.

$$\vec{a}\bullet\vec{b}=(x,2,1)\bullet(-1,3,2)=-x+6+2=0\Rightarrow x=8$$

EXERCÍCIO

- Verifique se os vetores da base canônica são ortogonais entre si.

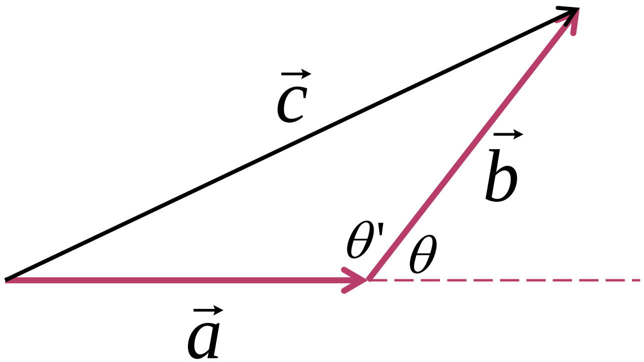
$$\hat{i} \bullet \hat{j} = (1,0,0) \bullet (0,1,0) = 0$$

$$\hat{j} \bullet \hat{k} = (0,1,0) \bullet (0,0,1) = 0$$

$$\hat{i} \bullet \hat{k} = (1,0,0) \bullet (0,0,1) = 0$$

- Portanto, os vetores da base canônicas são ortogonais entre si.

ÂNGULO DE DOIS VETORES



$$|c|^2 = |a|^2 + 2\vec{a} \bullet \vec{b} + |b|^2$$

- Da trigonometria plana:

$$|c|^2 = |a|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta' + |b|^2 \text{ (Lei dos cossenos)}$$

$$\textit{pela figura}, \theta + \theta' = \pi \textit{ e comparando as duas equações :}$$

$$2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = 2\vec{a} \bullet \vec{b} \Rightarrow |\vec{a}||\overleftarrow{b}|\cos\theta = \vec{a} \bullet \vec{b}$$

assim :

$$\boxed{\cos\theta = \frac{\vec{a} \bullet \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}} \qquad 0 < \theta < \pi$$

EXEMPLO:

- Determinar o ângulo entre os vetores:

$$\vec{a} = (1,-2,5) \ \ e \ \ \vec{b} = (6,4,\text{-}1)$$

$$\cos\theta = \frac{a \bullet b}{|a||b|} = \frac{(1,-2,5)\bullet(6,4,-1)}{\sqrt{1+4+25}.\sqrt{36+16+1}} =$$

$$= \frac{6-8-5}{\sqrt{30}\sqrt{53}} = \frac{-7}{39,875} = -0,1755 \Rightarrow \theta = 100^{o}$$

BASES ORTONORMAIS

- Uma base ortonormal é constituída de três vetores unitários (versores) ortogonais entre si. A base canônica é uma base ortonormal.
- Exemplo: mostre que a seguinte base é ortogonal:

$$\vec{a} = (-1,2,1) \qquad \vec{a} \bullet \vec{b} = (-1,2,1) \bullet (1,1,-1) = -1.1 + 2.1 + 1.(-1) = 0$$

$$\vec{b} = (1,1,-1) \qquad \vec{a} \bullet \vec{c} = (-1,2,1) \bullet (-1,0,-1) = -1.(-1) + 2.0 + 1.(-1) = 0$$

$$\vec{c} = (-1,0,-1) \qquad \vec{b} \bullet \vec{c} = (1,1,-1) \bullet (-1,0,-1) = 1.(-1) + 1.0 + (-1).(-1) = 0$$

- Os vetores são ortogonais entre si. Para transformar um vetor em um versor basta dividi-los pelos seus módulos.

BASES ORTONORMAL

- Convertendo para versores:

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{(-1,2,1)}{\sqrt{6}} = \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$$

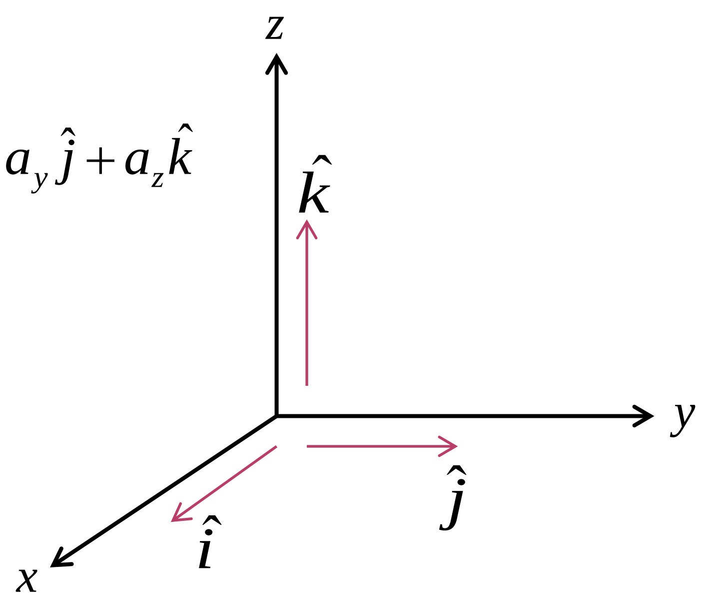
$$\hat{b} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{(1,1,-1)}{\sqrt{3}} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$\hat{c} = \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \frac{(-1,0,-1)}{\sqrt{2}} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

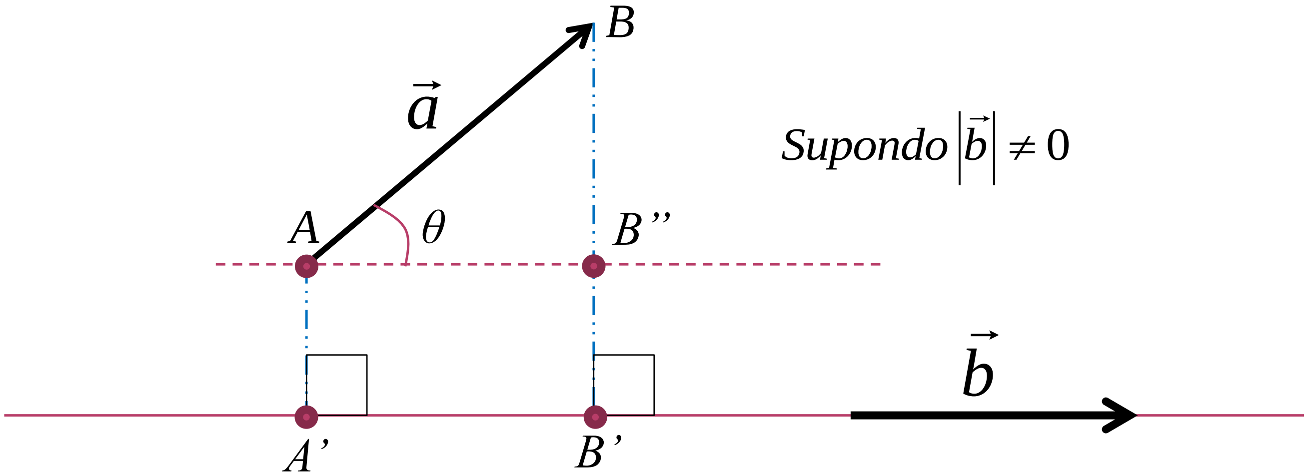
SISTEMA CARTESIANO ORTOGONAL

- Três eixos ortogonais entre si e de origem comum constituem um sistema cartesiano ortogonal. Os versores desses eixos constituem uma base ortonormal.

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$$



PROJEÇÃO ORTOGONAL



$$Supondo \left|\vec{b}\right| \neq 0$$

- O segmento orientado A'B', cujo valor é um número real, é a projeção ortogonal do vetor $\vec{a}$ sobre o vetor $\vec{b}$.

$$proj_{\vec{b}}\vec{a} = A'B' = AB'' = |\vec{a}|\cos\theta$$

$$Multiplicando\ por\ \frac{|\vec{b}|}{|\vec{b}|},\ que\ vale\ 1:$$

$$proj_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}{|\vec{b}|} = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|} = \vec{a}.\hat{b}$$

PROJEÇÃO ORTOGONAL

- Logo, a projeção ortogonal de um vetor $\vec{a}$ sobre um eixo de versor $\hat{b}$ é dada por:

$$proj_{\vec{b}}\vec{a} = \vec{a}.\hat{b}$$

- Assim, para um vetor $\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$ temos:

$$proj_x\vec{a} = \vec{a}.\hat{i} = a_x$$

$$proj_y\vec{a} = \vec{a}.\hat{j} = a_y$$

$$proj_z\vec{a} = \vec{a}.\hat{k} = a_z$$

COSSENOS DIRETORES

- Os ângulos que o vetor $\vec{a}$ faz com os eixos x, y e z do sistema cartesiano, podem ser obtidos a partir de:

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\bullet\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

$$\cos\theta_x = \frac{\vec{a}\bullet\hat{i}}{|\vec{a}||\hat{i}|} = \frac{a_x}{|\vec{a}|}$$

$$\cos\theta_y = \frac{\vec{a}\bullet\hat{j}}{|\vec{a}||\hat{j}|} = \frac{a_y}{|\vec{a}|}$$

$$\cos\theta_z = \frac{\vec{a}\bullet\hat{k}}{|\vec{a}||\hat{k}|} = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$$

EXERCÍCIOS

- 1) Um vetor $\vec{v}$ tem componentes (2, -1,2). Quais os ângulos que ele forma com os eixos cartesianos?

$$|\vec{v}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\cos\theta_x = \frac{\vec{v} \bullet \hat{i}}{|\vec{v}||\hat{i}|} = \frac{v_x}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow \theta_x = 48{,}2^{\circ}$$

$$\cos\theta_y = \frac{\vec{v} \bullet \hat{j}}{|\vec{v}||\hat{j}|} = \frac{v_y}{3} = \frac{-1}{3} \Rightarrow \theta_y = 109{,}5^{\circ}$$

$$\cos\theta_z = \frac{\vec{v} \bullet \hat{k}}{|\vec{v}||\hat{k}|} = \frac{v_z}{3} = \frac{2}{3} \Rightarrow \theta_z = 48{,}2^{\circ}$$

EXERCÍCIOS

- 2) Escrever o vetor $\vec{v} = (1,4,3)$ na base:

$$\vec{a} = (1,1,0) \qquad \vec{b} = (0,1,1) \qquad \vec{c} = (1,0,1)$$

$$Devemos\, obter\ \alpha, \beta\ e\ \delta\ tais\ que:$$

$$(1,4,3) = \alpha(1,1,0) + \beta(0,1,1) + \delta(1,0,1)$$

$$uma\ vez\ que\ os\ vetores\ \vec{a}, \vec{b}\ e\ \vec{c}\ são\ L.I.e\ \ formam\, uma\, base$$

$$Assim:$$

$$\alpha + \delta = 1$$

$$\alpha + \beta = 4 \Rightarrow \alpha = 1, \beta = 3\, e\, \delta = 0$$

$$\beta + \delta = 3$$

$$E: \vec{v} = \vec{a} + 3\vec{b} + 0\vec{c} = \vec{a} + 3\vec{b}$$

EXERCÍCIOS

- 3) Determinar a projeção ortogonal do vetor

$$\vec{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}$$

sobre o vetor $\vec{b} = -8\hat{i} + 6\hat{j}$.

$$proj_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}{|\vec{b}|} = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{b}|} =$$

$$= \frac{(2,-3,5).(-8,6,0)}{\sqrt{(-8)^2 + 6^2}} = \frac{2.(-8) + (-3).6 + 5.0}{10} = -3{,}4$$

PRODUTO VETORIAL

- Dados os vetores $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)\ e\ \vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, chamamos de produto vetorial ao vetor definido pelo determinante:

$$\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \vec{a}_x & \vec{a}_y & \vec{a}_z \\ \vec{b}_x & \vec{b}_y & \vec{b}_z \end{vmatrix} =$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y)\hat{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\hat{k}$$

e as componentes do produto vetorial são:

$$c_x = a_y b_z - a_z b_y$$

$$c_y = a_z b_x - a_x b_z$$

$$c_z = a_x b_y - a_y b_x$$

EXERCÍCIOS

- 1) O produto vetorial de $\vec{a} = (-2,1,4)$ *por* $\vec{b} = (3,-1,5)$ vale:

$$\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \hat{k} = 9\hat{i} + 22\hat{j} - 1\hat{k} = (9,22,-1)$$

- 2) Achar os produtos vetoriais da base canônica:

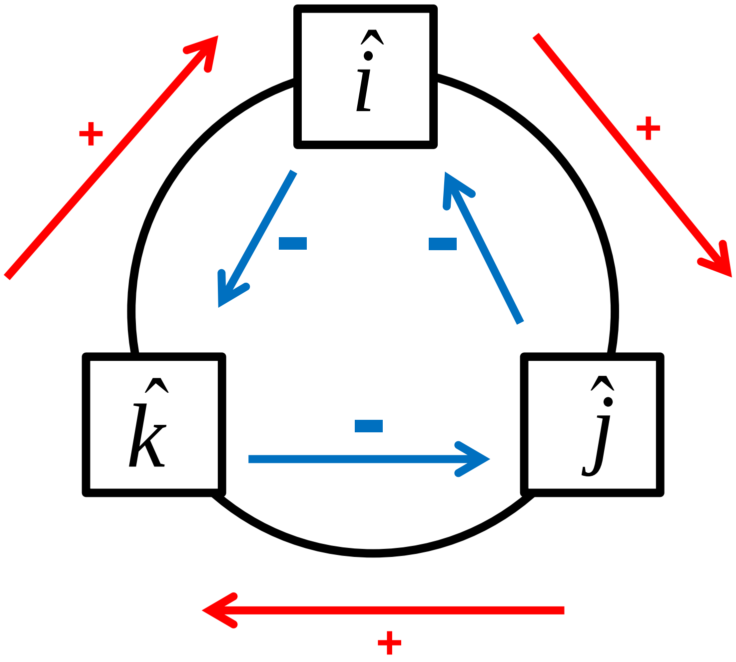
$$\hat{i} \times \hat{i} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{0} \qquad \hat{i} \times \hat{j} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \hat{k} \qquad \hat{i} \times \hat{k} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\hat{j}$$

$$\hat{j} \times \hat{j} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{0} \qquad \hat{j} \times \hat{i} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\hat{k} \qquad \hat{j} \times \hat{k} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i}$$

$$\hat{k} \times \hat{k} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{0} \qquad \hat{k} \times \hat{i} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \hat{j} \qquad \hat{k} \times \hat{j} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\hat{i}$$

PROPRIEDADE CÍCLICA

- Os vetores da base canônica obedecem à seguinte propriedade, vinda diretamente das propriedades dos determinantes:



$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$$
$$\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}$$
$$\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$$
$$\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k}$$
$$\hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j}$$
$$\hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i}$$

PROPRIEDADE:

- Mostre que $\vec{a}\times\vec{b}$ é perpendicular a $\vec{a}$ e a $\vec{b}$.
- Se um dos vetores for nulo, $\vec{0}\times\vec{b}=\vec{0}\; e\; \vec{0}\times\vec{a}=\vec{0}$ e o vetor nulo é perpendicular a qualquer vetor. Assim, se um deles for nulo, $\vec{a}\times\vec{b}$ é perpendicular a $\vec{a}$ e a $\vec{b}$.
- Se nenhum dos vetores for nulo, devemos mostrar que $(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{a}=0 \;\; e \;\; (\vec{a}\times\vec{b}).\vec{b}=0$.

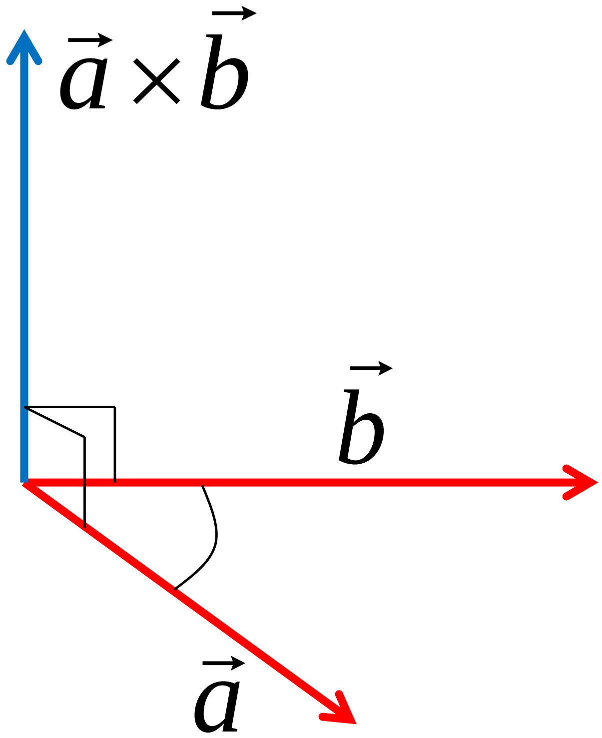
$$(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{a}=[(a_y b_z - a_z b_y)\hat{i}+(a_z b_x - a_x b_z)\hat{j}+(a_x b_y - a_y b_x)\hat{k}].\vec{a}=$$

$$=(a_y b_z - a_z b_y)a_x+(a_z b_x - a_x b_z)a_y+(a_x b_y - a_y b_x)a_z=$$

$$=a_x a_y(b_z - b_z)+a_x a_z(-b_y + b_y)+a_y a_z(b_x - b_x)=0$$

- Analogamente para $(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{b}=0$.
- Portanto, $\vec{a}\times\vec{b}$ é perpendicular a $\vec{a}$ e a $\vec{b}$.

PROPRIEDADE



PROPRIEDADES DO PRODUTO VETORIAL

$$(a)\ \vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a} \quad (anti\text{-}comutativa)$$

$$(b)\ \vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c} \quad (distributiva)$$

$$(c)\ \vec{a}\times\vec{a} = \vec{0}$$

$$(d)\ (\alpha\vec{a})\times\vec{b} = \alpha\vec{a}\times\vec{b}$$

$$(e)\ \vec{a}\times\vec{0} = \vec{0}$$

Essas propriedades podem ser demonstradas a partir da definição de produto vetorial e das propriedades dos determinantes.

CONDIÇÃO DE PARALELISMO

- Vamos verificar que se $\vec{a} \,//\, \vec{b}$ *então* $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.
- Vamos também supor que os vetores sejam não nulos:

$Se\ \vec{a}//\vec{b}\ então\ existe\ um\ escalar\ \lambda \neq 0\ tal\ que\ \vec{b} = \lambda\vec{a}.$

$(lembrando\ que\ dois\ vetores\ paralelos\ são\ proporcionais)$

$$Assim: \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{a}) = \lambda\vec{a} \times \vec{a} = \lambda\vec{0} = \vec{0}$$

$Reciprocamente,\ supondo\ a \times b = 0\ temos\ que,\ a\ partir\ da$

$definição\ de\ produto\ escalar: a_y b_z = a_z b_y,\ a_z b_x = a_x b_z\ e\ a_x b_y = a_y b_x$

$$E: \frac{b_x}{a_x} = \frac{b_y}{a_y} = \frac{b_z}{a_z} = \lambda \neq 0 \Rightarrow b_x = \lambda a_x, b_y = \lambda a_y\ e\ b_z = \lambda a_z \Rightarrow \vec{b} = \lambda\vec{a}$$

$e\ portanto\ \vec{b}//\vec{a}.$

$Obs.: se,\ por\ exemplo,\ a_x = 0,\ então,\ necessariamente\ deve\text{-}se\ ter\ b_x = 0.$

- A condição necessária e suficiente para que dois vetores sejam paralelos é que seu produto vetorial seja nulo.

EXERCÍCIOS

- 1.Determinar os valores de x e y de modo que os vetores $\vec{a} = (x,2,3)$ e $\vec{b} = (1, y,2)$ sejam paralelos.

$$Devemos\ ter\ \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}.$$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & 2 & 3 \\ 1 & y & 2 \end{vmatrix} = (4-3y, 3-2x, xy-2) = (0,0,0)$$

$$Assim: \begin{cases} 4-3y=0 \\ 3-2x=0 \\ xy-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4/3 \\ x = 3/2 \end{cases}$$

A terceira condição é também satisfeita com esses valores.

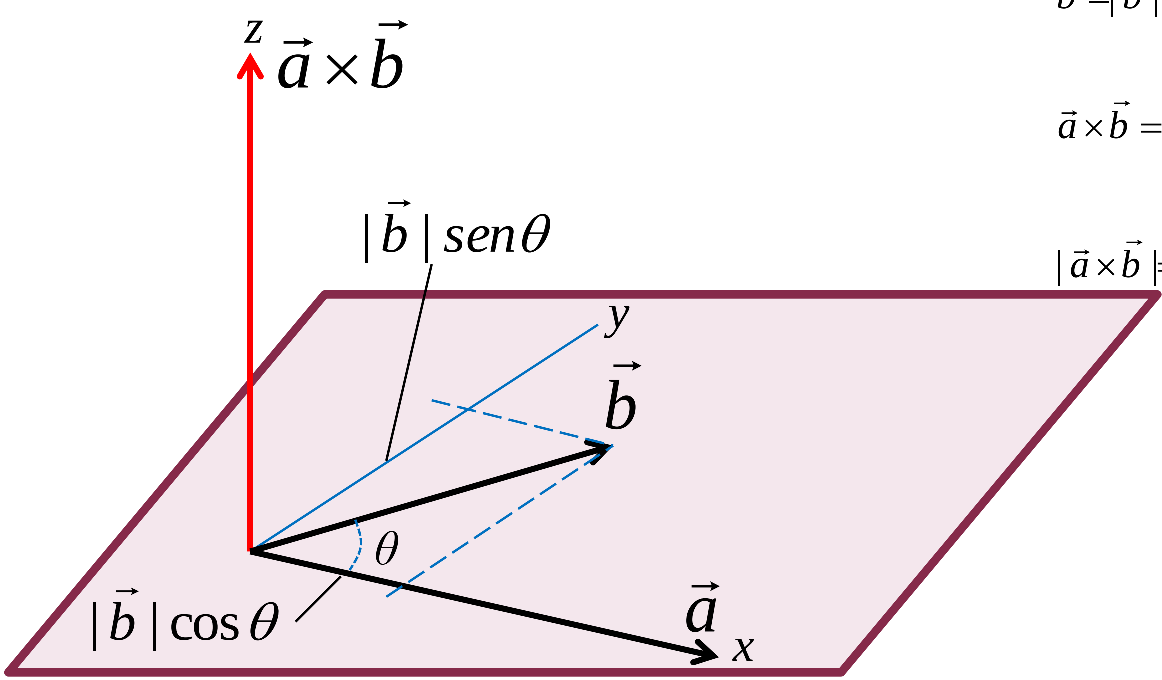
PRODUTO VETORIAL

- O produto vetorial pode também ser definido da seguinte forma:
  - O módulo de $\vec{a} \times \vec{b}$ é igual a $|\vec{a}||\vec{b}|\, sen\theta$ onde θ é o ângulo (0<θ<180°) formado por $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

$$\vec{b} = |\vec{b}|\cos\theta\ \hat{i} + |\vec{b}|\, sen\theta\ \hat{j}$$

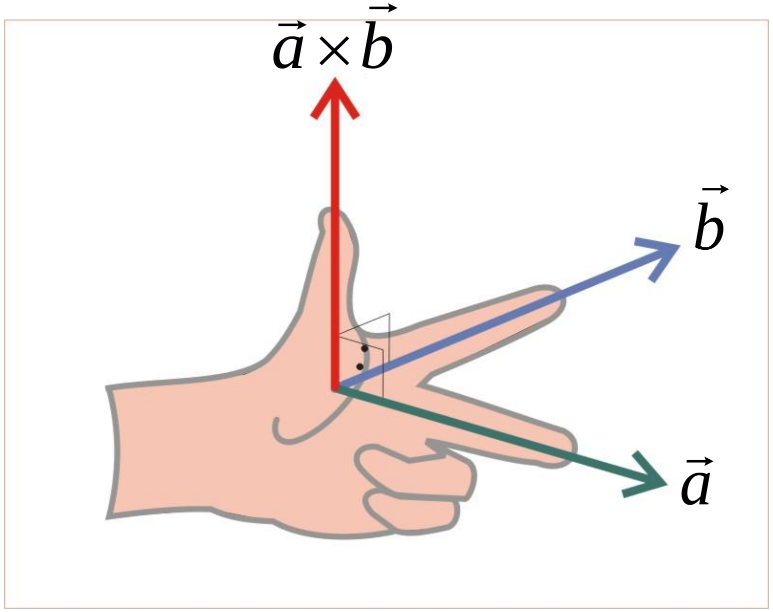
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a & 0 & 0 \\ b\cos\theta & bsen\theta & 0 \end{vmatrix} = absen\theta\, \hat{k}$$

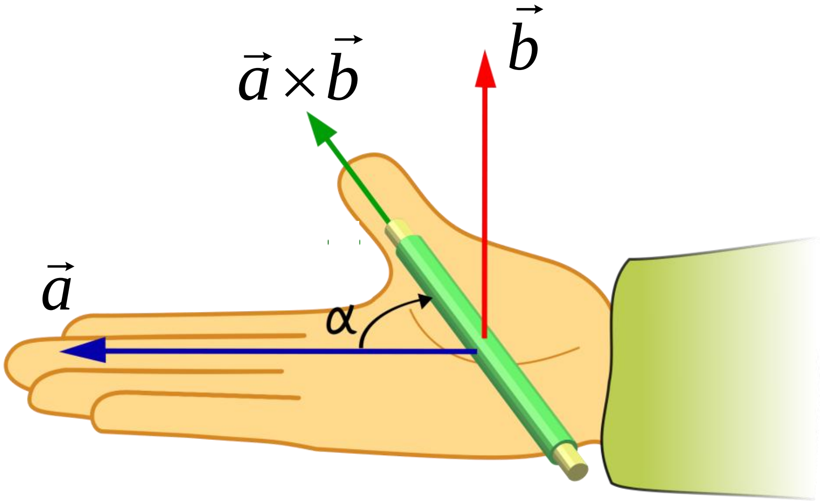
$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\, sen\theta$$



PRODUTO VETORIAL

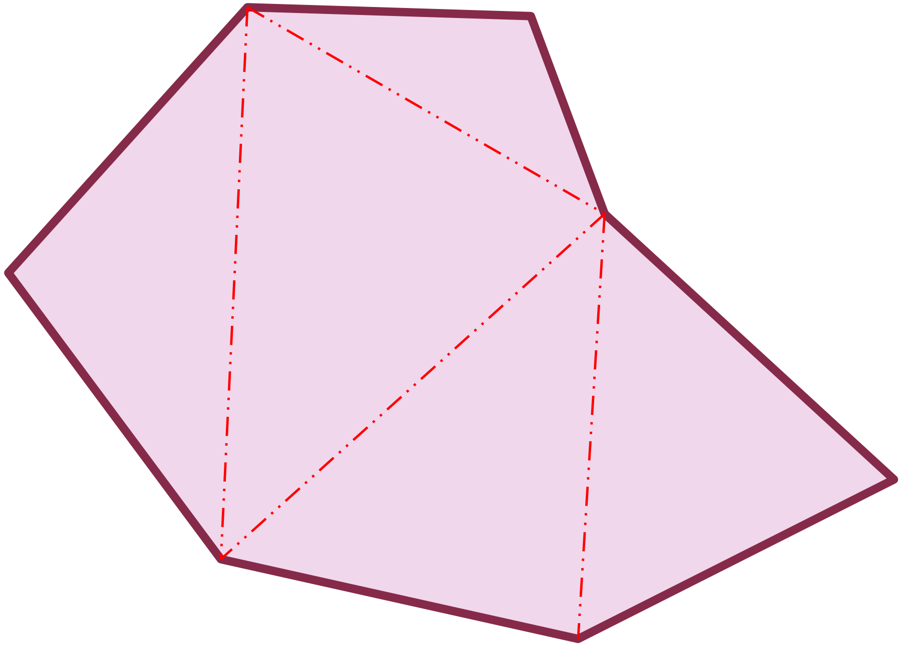
- A direção de $\vec{a} \times \vec{b}$ é perpendicular tanto a $\vec{a}$ como a $\vec{b}$.
- O sentido é fornecido pela regra da mão esquerda ou pela regra do sacar rolha:





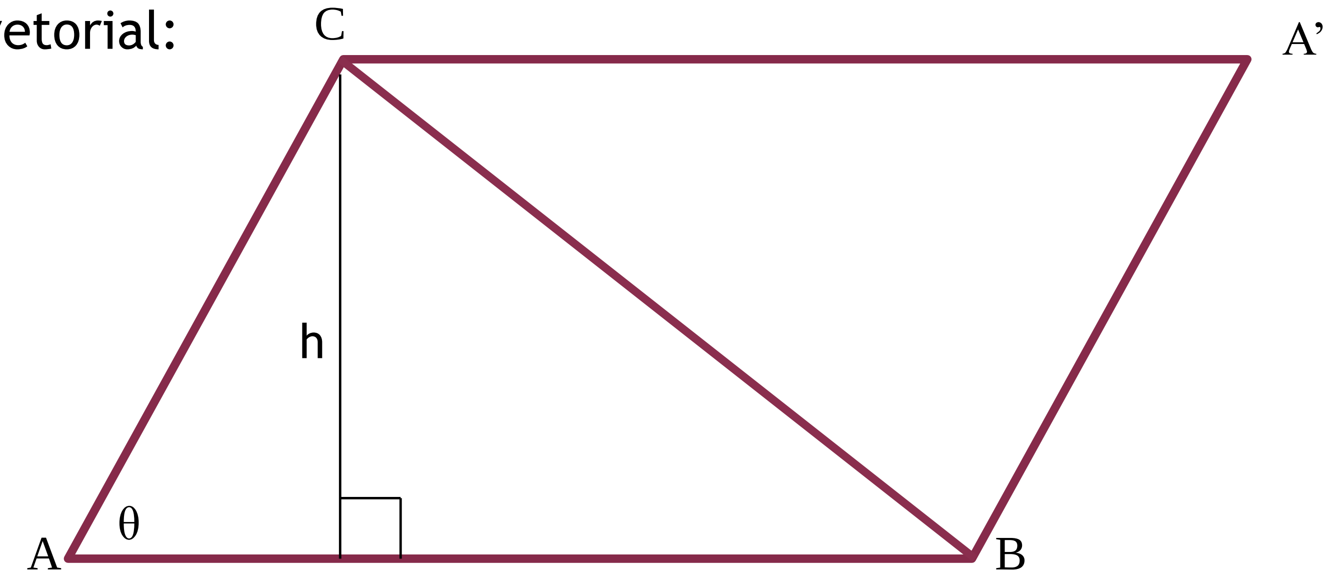
ÁREAS DE SUPERFÍCIES PLANAS

- A área de uma superfície plana que possa ser decomposta em triângulos pode ser calculada somando as áreas dos diversos triângulos:



ÁREAS

- A área de um triângulo pode ser obtida pelo produto vetorial:



- A área do triângulo ABC é: $S = \frac{1}{2}|B - A|h$
- Mas ***h*** = |***C-A***| ***senθ*** e portanto:

$$S = \frac{1}{2}|(B - A)|.|(C - A)| sen\theta \Rightarrow S = \frac{1}{2}|(B - A) \times (C - A)|$$

$$\acute{A}rea\ do\ Paralelogramo : S' = |(B - A) \times (C - A)|$$

EXEMPLO

- Determinar a área do triângulo de vértices (0,0,0), (10,0,0) e (10,4,-5):

$$A = (0,0,0),\ B = (10,0,0)\ e\ C = (10,4,\text{-}5)$$

$$B - A = (10,0,0) - (0,0,0) = (10,0,0)$$

$$C - A = (10,4,\text{-}5) - (0,0,0) = (10,4,\text{-}5)$$

$$S = \frac{1}{2}\left|(10,0,0)\times(10,4,-5)\right|$$

$$(10,0,0)\times(10,4,-5) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 10 & 0 & 0 \\ 10 & 4 & -5 \end{vmatrix} = 40\hat{k} + 50\hat{j} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|(10,0,0)\times(10,4,-5\right| = \sqrt{40^2 + 50^2} = \sqrt{4100}$$

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{4100} = 32u.a.$$

PRODUTO MISTO

- Dados 3 vetores: $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$
- Seu produto misto, nessa ordem, é o escalar:

$$p = \vec{u} \bullet \vec{v} \times \vec{w}$$

- Que pode ser escrito como:

$$p = \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$$

EXEMPLO

- Calcular o produto misto dos vetores:

$$\vec{a} = (-2,1,3) \qquad \vec{b} = (0,-1,4) \qquad \vec{c} = (4,0,-2)$$

$$\vec{a} \bullet \vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 4 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 16 + 12 = 24$$

PROPRIEDADES

- (a) O produto misto é nulo nos seguintes casos:
  - a.1: Um dos vetores é nulo
  - a.2: Dois vetores quaisquer são paralelos
  - a.3: Os três vetores são coplanares

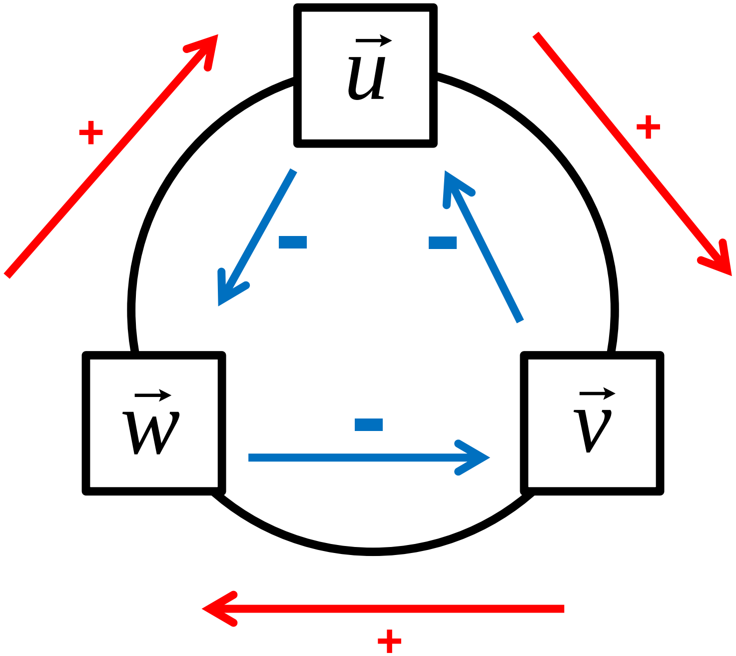
- Assim, a condição necessária e suficiente para que três vetores sejam LI é que seu produto misto seja diferente de zero.

PROPRIEDADES

- (b) Propriedade cíclica:

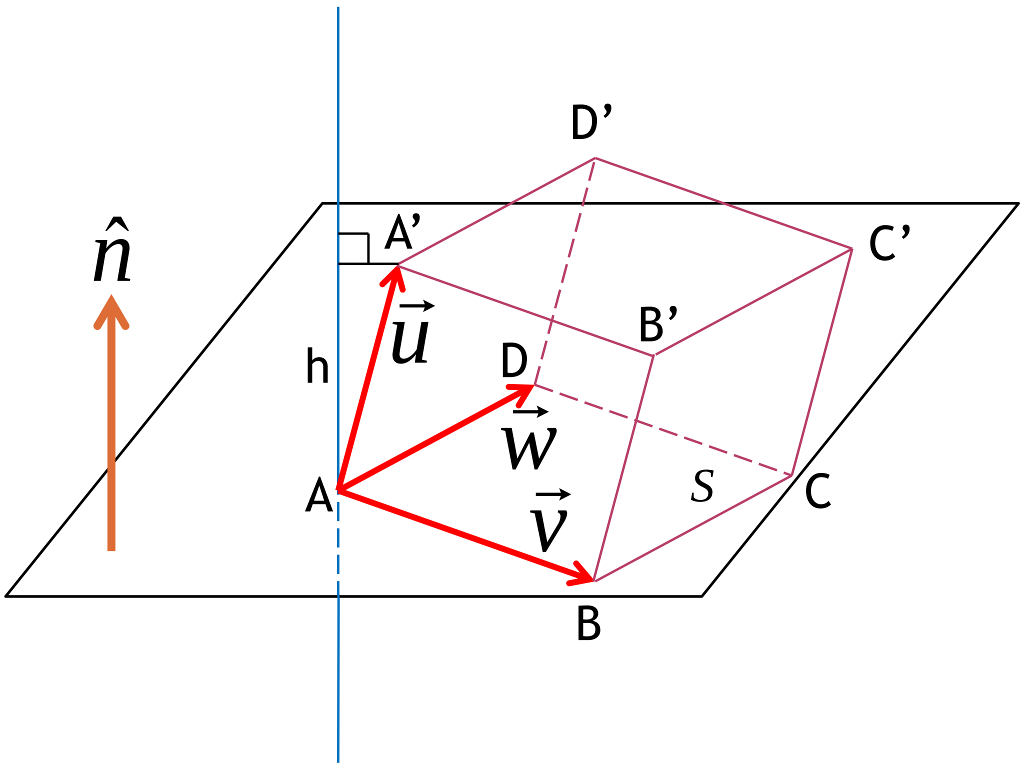
$$\vec{u} \bullet \vec{v} \times \vec{w} = \vec{v} \bullet \vec{w} \times \vec{u} = \vec{w} \bullet \vec{u} \times \vec{v} =$$

$$= -\vec{u} \bullet \vec{w} \times \vec{v} = -\vec{v} \bullet \vec{u} \times \vec{w} = -\vec{w} \bullet \vec{v} \times \vec{u}$$



VOLUME DO PARALELEPÍPEDO

- O produto misto de 3 vetores LI é igual ao volume do paralelepípedo cujas arestas são paralelas aos vetores:



VOLUME DO PARALELEPÍPEDO

$h = proj_{\hat{n}}\vec{u} = \vec{u} \bullet \vec{n}$

$S = \left|\vec{v} \times \vec{w}\right| \Rightarrow$ *área da base do paralelepípedo definida por* $\vec{v}$ *e* $\vec{w}$

Podemos escrever um vetor $\vec{S} = \vec{v} \times \vec{n}$ *ou* $\vec{S} = S\hat{n}$

Calculando produto misto : $\vec{u} \bullet \vec{v} \times \vec{w} = \vec{u} \bullet S\hat{n} = \vec{u} \bullet \hat{n}S = \pm hS$

(os sinais $\pm$ *dependem das orientações dos vetores* $\vec{u}, \vec{v}$ *e* $\vec{w}$*)*

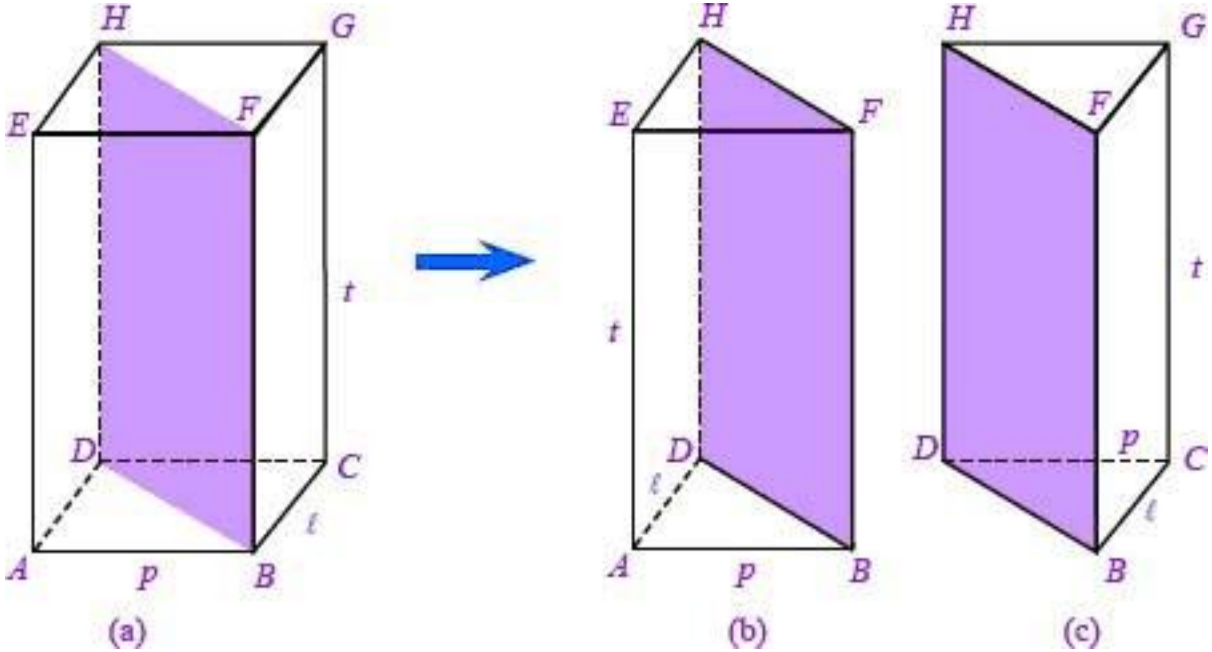
Mas $\left|Sh\right| = V$, *volume do paralelepípedo definido por* $\vec{u}, \vec{v}$ *e* $\vec{w}$.

Assim :

$$\boxed{V_{paraleléppedo} = \left|\vec{u} \bullet \vec{v} \times \vec{w}\right|}$$

VOLUME DO PRISMA

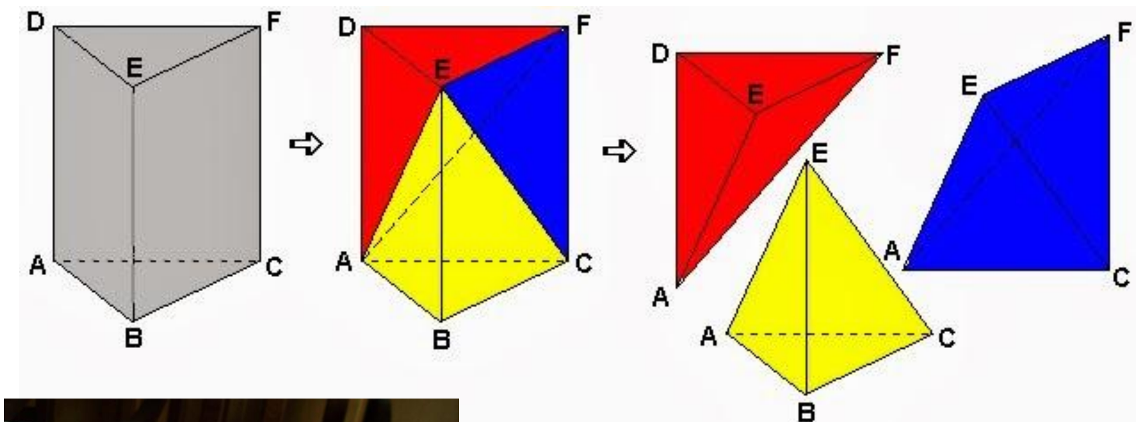
- O volume de um prisma é metade do volume de um paralelepípedo:

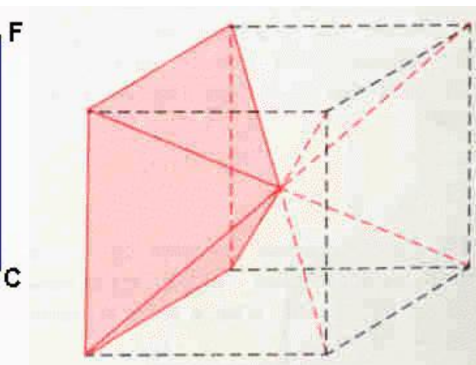


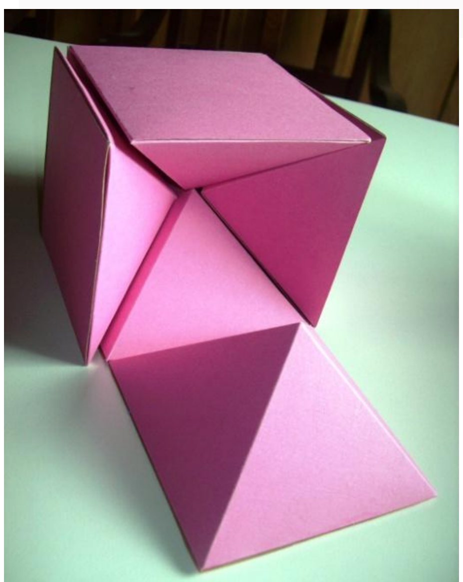
$$V_{prisma} = \frac{1}{2} V_{paraleléppedo} = \frac{1}{2} \left| \vec{u} \bullet \vec{v} \times \vec{w} \right|$$

VOLUME DA PIRÂMIDE

- O volume da pirâmide é 1/3 do volume do prisma:



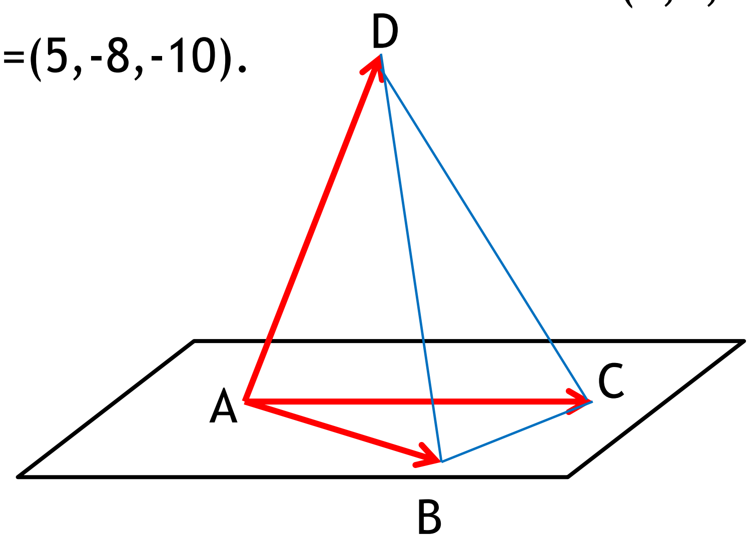




$$V_{pirâmide} = \frac{1}{3} V_{prisma} = \frac{1}{6} V_{paraleléppedo} = \frac{1}{6} \left| \vec{u} \bullet \vec{v} \times \vec{w} \right|$$

EXERCÍCIO

- Ache o volume do tetraedro de vértices A=(0,0,0), B=(4,2,8), C=(-8,4,0) e D=(5,-8,-10).



$$Escolheremos:$$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (4,2,8)$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (-8,4,0)$$

$$\overrightarrow{AD} = D - A = (5,-8,-10)$$

$$V_{tetraedro} = \frac{1}{6} V_{paralelepípedo} = \frac{1}{6} \left| \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} \right| = \frac{1}{6} \left\| \begin{matrix} 4 & 2 & 8 \\ -8 & 4 & 0 \\ 5 & -8 & -10 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{6} 672 = 112 u.v.$$

EXERCÍCIO

- Ache o volume do tetraedro de vértices A=(0,0,0), B=(2,4,0), C=(0,4,0) e D=(4,2,8).

$$Tomaremos:$$

$$AB = B - A = (2,4,0)$$

$$AC = C - A = (0,4,0)$$

$$AD = D - A = (4,2,8)$$

$$V_{tetraedro} = \frac{1}{6} V_{paralelep\acute{p}edo} = \frac{1}{6} \left| AB \bullet AC \times AD \right| = \frac{1}{6} \left\| \begin{matrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 8 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{6} 64 = 10{,}67 u.v.$$

EXERCÍCIO

- Dados $\overrightarrow{OA}=(-1,1,-1), \overrightarrow{OB}=(0,1,-2), \overrightarrow{OC}=(-2,1,-1)$ pede-se:

  (a) A área do triângulo OAC

  (b) O volume do tetraedro OABC

  (c) A altura do tetraedro OABC referente à base OAC.

$$V_{pirâmide}=\frac{1}{3}S_{base}.h$$

$$(a)\ S_{triângulo}=\left|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OC}\right|=\left\|\begin{matrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ -1 & 1 & -1\\ -2 & 1 & -1\end{matrix}\right\|=\left|(0,1,1)\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(b)\ V_{tetraedro}=\frac{1}{6}V_{paralelepípedo}=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}\right|=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}-1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & -2\\ -2 & 1 & -1\end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}u.a.$$

$$(c)\ V_{tetraedro}=\frac{1}{3}S_{triânguloOAC}.h=\frac{\sqrt{2}}{6}h=\frac{1}{6}\Rightarrow h=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Bibliografia

- Giacaglia, G.E.O. Vetores e Geometria Analítica – Elementos de Álgebra Linear. Ed. Nobel.